

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1959)

**Artikel:** Einige Ähnlichkeits- und Symmetriesätze für differenzierbare Flächen im Raum.  
**Autor:** Aeppli, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26016>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Einige Ähnlichkeits- und Symmetriesätze für differenzierbare Flächen im Raum

VON ALFRED AEPPLI, Ithaca, N.Y. (USA)

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit lehnt sich an die Dissertation [1] von K. Voss an: mit wenigen Ausnahmen werden die Bezeichnungen aus [1] übernommen, und die grundlegenden differentialgeometrischen Formeln, die hier wie zum Beispiel (1.2) benutzt werden, findet man in [1].

Unter einer Fläche verstehen wir eine orientierte  $n$ -dimensionale zweimal (oder dreimal) stetig differenzierbare Fläche im  $(n + 1)$ -dimensionalen Euklidischen Raum  $R^{n+1}$ . Nachdem in [1] Parallelabbildungen einer geschlossenen Fläche  $F$  auf eine andere  $\bar{F}$  in Zusammenhang mit Krümmungseigenschaften von  $F$  und  $\bar{F}$  betrachtet wurden, und die Translationen durch  $H_1 = \bar{H}_1$  oder bei Eiflächen durch  $H_\nu = \bar{H}_\nu$  ( $1 \leq \nu \leq n$ ,  $\nu$  fest gewählt) charakterisiert wurden (Sätze V und VI in [1]), liegt es nahe, ähnliche Betrachtungen über Zentralprojektionen anzustellen. Dabei gelangen wir zu den Ähnlichkeitssätzen, Sätze 1 und 10: Ist bei der Zentralprojektion  $T$  zwischen den geschlossenen Flächen  $F$  und  $\bar{F}$  die reduzierte mittlere Krümmung invariant, oder die  $\nu$ -te reduzierte mittlere Krümmung bei Eiflächen mit einer verbindenden linearen Schar konvexer Flächen ( $rH_1 = \bar{r}\bar{H}_1$  bzw.  $r^\nu H_\nu = \bar{r}^\nu \bar{H}_\nu$ ;  $r = r(p)$  ist der Abstand des Punktes  $p \in F$  vom Projektionszentrum), so ist  $T$  eine Streckung. Analoge Sätze wurden von K.-P. GROTEMEYER und von W. SÜSS in [2] und [3] aufgestellt im Falle einer Abbildung zwischen zwei Eiflächen durch Zuordnung paralleler Normalen. – Wir könnten uns auf Flächen im  $R^3$  beschränken (und auf Kurven in der Ebene), ohne daß viel Substanz verlorengehe. Doch ist der Formalismus so elegant, daß ebenso gut der allgemeine Fall  $F^n \subset R^{n+1}$  betrachtet werden kann, was wir auch tun. – Als Anwendung der Ähnlichkeitssätze ergeben sich die Symmetriesätze, Sätze 2 und 11.

Die Beweise beruhen auf Integralformeln, die mit Hilfe des Stokesschen Satzes abgeleitet werden. Daraus bekommen wir auch Sätze über berandete Flächen (zum Beispiel Satz 1'). Daneben werden die Sätze 7, 8, 9 und 9' über berandete Flächen mit einer andern Methode bewiesen. Sie besteht darin, die eine Fläche  $F$  so lange mittels Streckungen zu deformieren, bis die deformierte Fläche  $F'$  die andere  $\bar{F}$  einseitig berührt. Diese Methode der Deformation bis zur einseitigen Berührung wurde schon von A. D. ALEXANDROV und E. P.

SENKIN in [5] angewandt, nur sind es dort Translationen, die an Stelle der Streckungen treten.

Schließlich werden aus den Integralformeln Extremalprinzipien abgelesen (zum Beispiel Sätze 3 und 5): Die Streckungen maximalisieren gewisse Integrale  $I_1(\bar{F}; F, O)$ , und allgemeiner  $I_\nu(\bar{F}; F, O)$  im Falle zweier Eiflächen mit einer verbindenden linearen Schar konvexer Flächen. Es werden speziell die Sphären in Satz 4 und bei (6.6) durch Integralbeziehungen charakterisiert. – Herrn Dr. K. Voss danke ich für die Durchsicht des Manuskriptes und Herrn Prof. H. HOPF für anregende Diskussion über die Arbeit.

### § 1. Eine Integralformel

$F$  sei eine orientierte  $n$ -dimensionale zweimal stetig differenzierbare Fläche im  $(n+1)$ -dimensionalen Euklidischen Raum  $R^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ .  $F$  wird gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^1, u^2, \dots, u^n).$$

$\bar{F}$  sei eine zweite Fläche im  $R^{n+1}$  derselben Art wie  $F$ .  $\bar{F}$  wird dargestellt durch

$$\bar{\mathfrak{x}} = \bar{\mathfrak{x}}(u^1, u^2, \dots, u^n).$$

Es bestehe eine Zentralprojektion  $T$  von  $F$  auf  $\bar{F}$ : Eine topologische Abbildung  $Tp = \bar{p}$ , bei welcher die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte  $p, \bar{p}$  durch einen festen Punkt  $O$  gehen, und zwar sei  $T$  durch  $\bar{\mathfrak{x}} = f\mathfrak{x}$  gegeben, wo  $f = f(p) = f(u^1, u^2, \dots, u^n)$  eine nicht negative reelle Funktion ist<sup>1)</sup>.

$f$  sei zweimal stetig differenzierbar, und  $T$  sei regulär, das heißt die Funktionaldeterminante von  $T$  sei überall verschieden von null<sup>2)</sup>.  $T$  erhalte die Orientierung. Es muß  $f > 0$  gelten wegen der Regularität von  $T$ . Falls  $O \in F$ , ist auch  $O \in \bar{F}$ , und  $F, \bar{F}$  berühren sich in  $O$ . Wir betrachten also die Abbildung

$$\bar{\mathfrak{x}}(\bar{p}) = f(p)\mathfrak{x}(p), \quad f(p) = \frac{\bar{r}(\bar{p})}{r(p)} > 0, \quad (1.1)$$

wenn  $r = |\mathfrak{x}|$  und  $\bar{r} = |\bar{\mathfrak{x}}|$  gesetzt wird.

$\mathfrak{n}$  sei die Normale von  $F$ . Nach [1], (9.1) gilt<sup>3)</sup>

$$\underbrace{d\mathfrak{n} \times \dots \times d\mathfrak{n}}_\nu \times \underbrace{d\mathfrak{x} \times \dots \times d\mathfrak{x}}_{n-\nu} = (-1)^\nu n! H_\nu \mathfrak{n} dA, \quad 0 \leq \nu \leq n, \quad (1.2)$$

<sup>1)</sup>  $f \geq 0$  ist keine einschneidende Voraussetzung.

<sup>2)</sup>  $f$  ist in den Punkten  $p \in F$ , die nicht zur Schattengrenze von  $F$  bei  $T$  gehören, von selbst zweimal stetig differenzierbar und  $T$  regulär, da dies für  $F$  und  $\bar{F}$  vorausgesetzt wurde. Ist die Richtung einer Mantellinie des Berührungskegels von  $F$  bei  $T$  verschieden von allen Asymptotenrichtungen im zugehörigen Berührungspunkt  $p \in F$ , so wird  $f$  in  $p$  stetig differenzierbar und  $T$  regulär; vgl. Lemma 1 in [1], p. 188.

<sup>3)</sup> Sind  $\alpha_1 = \alpha_{1i} du^i$ ,  $\alpha_2 = \alpha_{2i} du^i, \dots, \alpha_n = \alpha_{ni} du^i$  vektorielle Differentialformen auf  $F$  (die

wo  $H_\nu$  die  $\nu$ -te mittlere Krümmung bezeichnet ((1.8) in [1]):

$$\binom{n}{\nu} H_\nu = k_1 k_2 \dots k_\nu + \dots, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad H_0 = 1.$$

Wegen (1.1) ist

$$d\bar{x} = f dx + x df, \quad (1.3)$$

woraus mit Hilfe von (1.2), angewandt auf  $F$  und  $\bar{F}$  für  $\nu = 0$ , die Beziehung

$$(x \bar{n}) d\bar{A} = f^n (x n) dA \quad (1.4)$$

folgt. An Stelle von  $x$  kann in (1.4) irgendein zu  $x$  paralleler Vektor eingesetzt werden.

Es gilt<sup>4)</sup>

$$\left. \begin{aligned} d(n - \bar{n}, x, dx, \dots, dx) &= (n - \bar{n}, dx, dx, \dots, dx) \\ &\quad - (x, dn - d\bar{n}, dx, \dots, dx). \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Wir formen die Glieder auf der rechten Seite in (1.5) um. Zunächst ist wegen (1.2) für  $\nu = 0$

$$(n - \bar{n}, dx, dx, \dots, dx) = n! ((n - \bar{n}) n) dA,$$

das heißt

$$(n - \bar{n}, dx, dx, \dots, dx) = \frac{1}{2} n! (n - \bar{n})^2 dA. \quad (1.6)$$

Wegen (1.3), wegen (1.2) für  $\bar{F}$  und  $\nu = 1$ , und wegen (1.4) kommt

$$\begin{aligned} (x, d\bar{n}, dx, \dots, dx) &= \frac{1}{f^{n-1}} (x, d\bar{n}, d\bar{x}, \dots, d\bar{x}) \\ &= -n! f \bar{H}_1 (x \bar{n}) \frac{d\bar{A}}{f^n} = -n! f \bar{H}_1 (x n) dA, \end{aligned}$$

so daß bei nochmaliger Anwendung von (1.2) für  $\nu = 1$  folgt:

$$- (x, dn - d\bar{n}, dx, \dots, dx) = n! (H_1 - f \bar{H}_1) (x n) dA. \quad (1.7)$$

$\alpha_{ij}$  sind Tangentialvektoren an  $F$ ; Summation über sich wiederholende Indizes), so ist  $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n$  das «vektorielle Produkt» der Formen  $\alpha_i$ :

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n = (\alpha_{1i_1} \times \alpha_{2i_2} \times \dots \times \alpha_{ni_n}) du^{i_1} \wedge du^{i_2} \wedge \dots \wedge du^{i_n},$$

wo in der Klammer im Ausdruck rechts das gewöhnliche Vektorprodukt von räumlichen Vektoren  $\alpha_{ij}$  im  $R^{n+1}$  steht, und die Differentialformen schief multipliziert werden. In [1] steht im vektoriellen Produkt für Differentialformen an Stelle von  $\times$  das Zeichen  $\hat{\times}$ .  $-n! n dA = dx \times dx \times \dots \times dx$  ((1.2) für  $\nu = 0$ ) bestimmt die Normale  $n$ ,  $n! \bar{n} d\bar{A} = d\bar{x} \times d\bar{x} \times \dots \times d\bar{x}$  die Normale  $\bar{n}$ : die Orientierung von  $F$  zusammen mit  $n$  bzw. von  $\bar{F}$  mit  $\bar{n}$  bestimmt die (gleiche) Orientierung des  $R^{n+1}$ .

<sup>4)</sup>  $d$  ist der äußere Differenzationsoperator. Die Klammern in (1.5) deuten Determinanten an. Es gilt für einen Vektor  $v$  und die vektoriellen Differentialformen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (vgl. [1], § 8)

$$(v, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = v(\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_n).$$



(1.5), (1.6), (1.7) ergeben mit  $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}}{r}$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{n!} d(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})^2 dA + (H_1 - f\bar{H}_1)(\mathbf{x}\mathbf{n})dA \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})^2 dA + (rH_1 - \bar{r}\bar{H}_1)(\mathbf{r}\mathbf{n})dA. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Integration von (1.8) über  $F$  liefert

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{n!} \int_{\partial F} (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}}, \mathbf{x}, d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int_F (\mathbf{n} - \bar{\mathbf{n}})^2 dA + \int_F (rH_1 - \bar{r}\bar{H}_1)(\mathbf{r}\mathbf{n})dA, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

wenn  $\partial F$  den Rand von  $F$  bedeutet<sup>5)</sup>.

Es wurde  $n \geq 2$  vorausgesetzt. Für  $n = 1$ , das heißt für Kurven  $C$ ,  $\bar{C}$  in der Ebene, tritt an Stelle von (1.8) die Formel

$$d((\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^2 ds + (rk - \bar{r}\bar{k})(\mathbf{r}\mathbf{n})ds, \quad (1.10)$$

und daraus folgt

$$(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})\mathbf{x} \Big|_{\partial C} = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})^2 ds + \int_C (rk - \bar{r}\bar{k})(\mathbf{r}\mathbf{n})ds. \quad (1.11)$$

**Bemerkung.** Für  $\mathbf{w} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  kommt analog zu (1.8)

$$\left. \begin{aligned} & d(\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}, \mathbf{w}, d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}, d\mathbf{w}, d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) \\ & \quad + n! (f\bar{H}_1 - H_1)(\mathbf{w}\mathbf{n})dA. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Lassen wir das Projektionszentrum  $O$  in der Richtung  $\mathbf{e}$  ( $|\mathbf{e}| = 1$ ) unendlich fern werden, so wird  $f = 1$ ,  $\mathbf{w} = w\mathbf{e}$ , und

$$(\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}, d\mathbf{w}, d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) = (n-1)! \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n})^2 (d\bar{A} + dA),$$

und damit folgen aus (1.12) durch Grenzübergang die Formeln (9.5), (9.6) in [1] für die Parallelabbildung  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + w\mathbf{e}$ .

## § 2. Ein Ähnlichkeitssatz und ein Symmetriesatz

Wir nennen  $rH_1$  die (bezüglich  $O$ ) reduzierte mittlere Krümmung von  $F$ . Betrachten wir solche Zentralprojektionen  $T: F \rightarrow \bar{F}$ , bei denen die Schat-

<sup>5)</sup> Wenn von berandeten Flächen  $F$  gesprochen wird, soll die abgeschlossene Hülle von  $F$  kompakt sein und der Rand  $\partial F$  genügend differenzierbar, so daß der Satz von Stokes angewandt werden kann.

tengrenze von  $F$  bei  $T$  keine inneren Punkte enthält<sup>6)</sup>, so gilt der folgende Satz:

**Satz 1.** *Ist bei der Zentralprojektion  $T$  der geschlossenen Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  die reduzierte mittlere Krümmung invariant, so ist  $T$  eine Streckung.*

**Beweis:** Wegen  $rH_1 = \bar{r}\bar{H}_1$  folgt aus (1.9) für eine geschlossene Fläche  $F$ ,  $n \geq 2$ ,

$$\int_F (n - \bar{n})^2 dA = 0,$$

so daß  $n = \bar{n}$  sein muß. Für  $n = 1$  wird wegen (1.11)  $t = \bar{t}$ , also auch  $n = \bar{n}$ . Für  $i = 1, 2, \dots, n$  bekommen wir daher<sup>7)</sup>

$$0 = (f\mathfrak{x})_i \bar{n} = (f\mathfrak{x})_i n = f_i(\mathfrak{x}n) + f(\mathfrak{x}_i n) = f_i(\mathfrak{x}n),$$

und da die Punkte auf  $F$  mit  $\mathfrak{x}n = 0$  nirgends dicht liegen, wird  $f_i = 0$ , das heißt  $f = \text{const.}$ , q.e.d.

An Stelle der Voraussetzung  $rH_1 = \bar{r}\bar{H}_1$  kann in Satz 1 gefordert werden, daß die Ungleichungen  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü.<sup>8)</sup> und  $rH_1 \leq \bar{r}\bar{H}_1$  erfüllt sind: gelten bei der Zentralprojektion  $T$  der geschlossenen Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  die Ungleichungen  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü. und  $rH_1 \leq \bar{r}\bar{H}_1$ , so ist  $T$  eine Streckung. Damit  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü. auf einer geschlossenen Fläche  $F$  ohne Selbstdurchdringungen bestehen kann, muß  $F$  vom topologischen Typus der  $n$ -Sphäre  $S^n$  sein, für  $n$  muß die innere Normale genommen werden, und  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü. bedeutet, daß man  $F$  von  $O$  aus von innen sieht.

Die Integralformel (1.9) bzw. (1.11) liefert für berandete Flächen:

**Satz 1'.** *Ist bei der Zentralprojektion  $T$  der berandeten Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  die reduzierte mittlere Krümmung invariant sowie auf dem Rande die Normale, so ist  $T$  eine Streckung.*

Weiter bekommen wir: gelten bei der Zentralprojektion  $T$  der berandeten Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  die Ungleichungen  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü. und  $rH_1 \leq \bar{r}\bar{H}_1$ , und ist auf dem Rande  $n = \bar{n}$ , so ist  $T$  eine Streckung.

Nun sei  $T$  die Antipodenabbildung von  $F$  bezüglich  $O$ :  $\mathfrak{x}(p^*) = -f(p)\mathfrak{x}(p)$ ,

<sup>6)</sup> Diese Eigenschaft der Schattengrenze von  $F$  wird in allen Sätzen der vorliegenden Arbeit entweder vorausgesetzt oder sie trifft zu als Folge anderer Bedingungen (zum Beispiel bei Eiflächen).  $F$  soll also keine Kegelstücke mit der Spitze  $O$  enthalten. Diese Bedingung kann abgeschwächt werden (vgl. [1], p. 203): es genügt zu fordern, daß  $F - S_0$  zusammenhängend ist, wenn  $S_0$  die Menge der inneren Punkte der Schattengrenze von  $F$  bei  $T$  ist. Gilt dann  $rH_1 = \bar{r}\bar{H}_1$ , so gibt es eine Streckung, welche  $F$  in  $\bar{F}$  überführt.

<sup>7)</sup> Der Index  $i$  bedeutet hier die Ableitung nach  $u^i$ .

<sup>8)</sup> «f.ü.» heißt «fast überall». Ist eine Beziehung auf  $F$  fast überall erfüllt, so soll sie bis auf endlich viele niedriger dimensionale Ausnahmeflächen überall auf  $F$  gelten.

$p^* \in F$  ist der Antipode von  $p \in F$ ,  $f > 0$ ,  $f(p^*) = \frac{1}{f(p)}$ ,  $f$  sei zweimal stetig differenzierbar,  $T$  regulär, und die Schattengrenze von  $F$  bei Zentralbeleuchtung von  $O$  aus enthalte keine inneren Punkte. Dann gilt der folgende Symmetriesatz:

**Satz 2.** *Ist bei der Antipodenabbildung der geschlossenen Fläche  $F$  bezüglich  $O$  die reduzierte mittlere Krümmung invariant, so ist  $O$  Symmetriezentrum von  $F$ .*

**Beweis:** Durch Spiegelung an  $O$  entsteht aus  $F$  eine Fläche  $\tilde{F}$ . Es wird eine Zentralprojektion  $\tilde{T}: F \rightarrow \tilde{F}$  induziert, gegeben durch  $\tilde{x} = f\mathbf{x}$ . Wegen  $r(p)H_1(p) = r(p^*)H_1(p^*)$  gilt  $rH_1 = \tilde{r}\tilde{H}_1$  bei geeigneter Orientierung von  $\tilde{F}$ . Daher muß nach Satz 1  $f = \text{const.}$ , und da  $f > 0$  und  $f(p^*) = \frac{1}{f(p)}$ , wird  $f = 1$ , das heißt  $F = \tilde{F}$ , q.e.d.

Für berandete Flächen erhalten wir:

**Satz 2'.** *Bei der Antipodenabbildung der berandeten Fläche  $F$  bezüglich  $O$  sei die reduzierte mittlere Krümmung invariant, und auf dem Rande gelte  $n(p^*) = -n(p)$ . Dann ist  $O$  Symmetriezentrum von  $F$ .*

### § 3. Ein Extremalprinzip

Wir betrachten wieder Flächen  $F, \bar{F}$  im  $R^{n+1}$ , welche die Bedingungen von Satz 1 erfüllen (bis auf  $rH_1 = \bar{r}\bar{H}_1$ ):  $F, \bar{F}$  sind zweimal stetig differenzierbar,  $n$ -dimensional, orientiert, geschlossen; es besteht die zweimal stetig differenzierbare reguläre orientierungserhaltende Zentralprojektion  $\bar{p} = Tp$  zwischen  $F$  und  $\bar{F}$  mit dem Zentrum  $O$ , gegeben durch  $\bar{x} = f\mathbf{x}$ ,  $f > 0$ ; die Schattengrenze von  $F$  bei  $T$  enthält keine inneren Punkte. Wir nehmen bei festem  $F$  und festem  $O$  sämtliche Flächen  $\bar{F}$ , derart daß die genannten Bedingungen erfüllt sind. Diese Flächen  $\bar{F}$  bilden eine Klasse  $\mathfrak{R}(F, O)$ , die von  $F$  und von  $O$  abhängt. Zu jedem  $\bar{F} \in \mathfrak{R}(F, O)$  gehören zwei Funktionen  $f$  und  $\bar{H}_1$ . Nun gilt die Formel (1.9) (bzw. (1.11)), die für geschlossene Flächen

$$\frac{1}{2} \int_F (n - \bar{n})^2 dA + \int_F (rH_1 - \bar{r}\bar{H}_1) (rn) dA = 0 \quad (3.1)$$

lautet, so daß für alle  $\bar{F} \in \mathfrak{R}(F, O)$  die Ungleichung

$$\int_F (rH_1 - \bar{r}\bar{H}_1) (rn) dA \leq 0 \quad (3.2)$$

gilt. Wir sehen sofort: Geht  $\bar{F}$  durch eine Streckung mit dem Zentrum  $O$  und einem Faktor  $c > 0$  aus  $F$  hervor, ist also  $f = c$ ,  $H_1 = c\bar{H}_1 = f\bar{H}_1$ , so

steht in (3.2) das Gleichheitszeichen. Wird umgekehrt in (3.2) das Gleichheitszeichen angenommen, so folgt aus (3.1)  $n = \bar{n}$ , und daraus nach dem Beweis zu Satz 1  $f = \text{const.}$ , so daß wir das folgende Extremalprinzip bekommen:

**Satz 3.**  *$F$  sei eine geschlossene orientierte  $n$ -dimensionale zweimal stetig differenzierbare Fläche im  $R^{n+1}$ .  $F$  werde von  $O$  aus beleuchtet. Dabei enthalte die Schattengrenze von  $F$  keine inneren Punkte. Dann gilt für alle  $\bar{F} \in \mathfrak{R}(F, O)$*

$$\int_F (r H_1 - \bar{r} \bar{H}_1) (r n) dA \leq 0, \quad (3.2)$$

und das Gleichheitszeichen wird dann und nur dann angenommen, wenn  $\bar{F}$  aus  $F$  durch eine Streckung mit dem Zentrum  $O$  und einem positiven Faktor hervorgeht.

Setzen wir

$$I_1(\bar{F}; F, O) = - \int_F \bar{r} \bar{H}_1 (r n) dA = \int_F \bar{r} \bar{H}_1 (r n^*) dA,$$

wo  $n^* = -n$  ist, so besagt die Ungleichung (3.2)

$$I_1(\bar{F}; F, O) \leq I_1(F; F, O). \quad (3.2')$$

Wegen (1.2) gilt

$$\begin{aligned} & d(\mathfrak{x}, n, \underbrace{dn, \dots, dn}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) \\ &= (\mathfrak{x}, \underbrace{dn, \dots, dn}_{\nu}, d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) - (n, \underbrace{dn, \dots, dn}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) \\ &= (-1)^\nu n! H_\nu(\mathfrak{x} n) dA - (-1)^{\nu-1} n! H_{\nu-1} dA, \end{aligned}$$

das heißt

$$d(\mathfrak{x}, n, \underbrace{dn, \dots, dn}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) = (-1)^\nu n! (H_\nu(\mathfrak{x} n) + H_{\nu-1}) dA.$$

Daraus folgt für eine geschlossene Fläche  $F$  die Minkowskische Formel<sup>9)</sup>

$$\int_F H_\nu(\mathfrak{x} n) dA + \int_F H_{\nu-1} dA = 0. \quad (3.3)$$

Für  $\nu = 1$  kommt

$$I_1(F; F, O) = - \int_F H_1(\mathfrak{x} n) dA = \int_F dA = A(F), \quad (3.4)$$

wenn  $A(F)$  den Flächeninhalt von  $F$  bezeichnet. (3.2') lautet dann

$$I_1(\bar{F}; F, O) = \int_F \bar{r} \bar{H}_1 (r n^*) dA \leq A(F). \quad (3.5)$$

<sup>9)</sup> Zur Minkowskischen Formel (3.3) vgl. [6], wo sie für Riemannsche Räume hergeleitet wird. – (3.3) bis (3.6) gelten auch für Kurven in der Ebene ( $n = \nu = 1$ ).

(3.5) gilt für alle  $\bar{F} \in \mathfrak{R}(F, O)$ , und das Gleichheitszeichen wird in (3.5) genau dann angenommen, wenn  $F$  und  $\bar{F}$  perspektiv ähnlich sind mit positivem Proportionalitätsfaktor und dem Zentrum  $O$ . Das Integral  $I_1(\bar{F}; F, O)$  wird also bei festem  $F$  und festem  $O$  durch die Streckungen mit dem Zentrum  $O$  und mit positivem Faktor maximalisiert, und der Maximalwert ist gleich  $A(F)$  unabhängig von  $O$ .

Nehmen wir für  $F$  die  $n$ -Sphäre  $S = S^n$  vom Radius 1 und für  $O$  das Zentrum von  $S$ .  $\mathfrak{n}$  sei die innere Normale von  $S$  und  $\mathfrak{n}^*$  die äußere. Dann wird  $(\mathfrak{n}\mathfrak{n}^*) = -(\mathfrak{x}\mathfrak{n}) = 1$ , und damit folgt aus (3.5)

$$\int_S r H_1 d\Omega \leq \kappa_n, \quad (3.6)$$

wenn  $d\Omega$  das Flächenelement und  $\kappa_n$  den Flächeninhalt von  $S$  bezeichnet, und wenn  $F, r, H_1$  an Stelle von  $\bar{F}, \bar{r}, \bar{H}_1$  gesetzt wird. Mit Hilfe von (3.6) werden die Sphären mit dem Zentrum  $O$  unter den Flächen  $F \in \mathfrak{R}(S, O)^{10})$  in folgender Weise charakterisiert:

**Satz 4.** *Für jede Fläche  $F \in \mathfrak{R}(S, O)$  gilt*

$$\int_S r H_1 d\Omega \leq \kappa_n. \quad (3.6)$$

Die  $n$ -Sphären  $S_R$  von beliebigem Radius  $R$  mit dem Zentrum  $O$  sind unter den Flächen  $F \in \mathfrak{R}(S, O)$  dadurch ausgezeichnet, daß das Funktional  $I_1(F; S, O) = \int_S r H_1 d\Omega$  genau für  $F = S_R$  sein Maximum  $\kappa_n$  annimmt.

Satz 4 ist ein Spezialfall von Satz 3, und Satz 1 ist in Satz 3 enthalten. Als unmittelbare Folge von Satz 4 (oder von Satz 1) erhalten wir: gilt für eine Fläche  $F \in \mathfrak{R}(S, O)$  die Gleichung  $r H_1 = 1$ , so ist  $F$  eine Sphäre mit dem Zentrum  $O^{11})$ .

Fordern wir in Satz 3 zusätzlich, daß der Flächeninhalt von  $\bar{F}$  (oder das Volumen  $V(\bar{F})$  des von  $\bar{F}$  berandeten endlichen Gebietes<sup>12)</sup>) mit dem von  $F$  (bzw. mit  $V(F)$ ) übereinstimmt, und steht in (3.2) oder in (3.5) das Gleichheitszeichen, so fallen die beiden Flächen  $F, \bar{F}$  zusammen.

Für berandete Flächen  $F, \bar{F}$  gilt entsprechend Satz 1' die Ungleichung (3.2), wenn noch auf dem Rande  $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{n}}$  vorausgesetzt wird, und die Streck-

<sup>10)</sup> Wir können die Flächen  $F \in \mathfrak{R}(S, O)$  sternförmig (bezüglich  $O$ ) nennen.

<sup>11)</sup> Diese Bemerkung ist für  $n = 2$  enthalten in [4], Satz 1. Es genügt,  $r H_1 = c = \text{const.}$  vorauszusetzen: durch Betrachtung der Stellen, wo  $r$  maximal bzw. minimal wird, und der zugehörigen berührenden Sphären mit den Mittelpunkten in  $O$ , zeigt man sofort, daß bei geeigneter Orientierung  $c = 1$  sein muß (vgl. [7], p. 162, 8).

<sup>12)</sup>  $F$  und  $\bar{F}$  sollen in diesem Fall ohne Selbstdurchdringungen im  $R^{n+1}$  liegen. Dann ist das Volumen  $V(F)$  bzw.  $V(\bar{F})$  (in üblicher Weise) definiert.

kungen werden wiederum durch das Annehmen des Gleichheitszeichens in (3.2) charakterisiert. Weiter besteht auch für berandete Flächen: ist zusätzlich  $A(F) = A(\bar{F})$ , so wird  $F = \bar{F}$ .

Nun sei wie bei Satz 2  $T$  die Antipodenabbildung von  $F$  bezüglich  $O$  (mit den dort angegebenen Voraussetzungen):  $p^* = Tp$ . Dann gilt für eine geschlossene Fläche  $F$  entsprechend (3.2)

$$\int_F (r(p)H_1(p) - r(p^*)H_1(p^*)) (x(p)n(p)) dA(p) \leq 0, \quad (3.7)$$

und an Stelle von (3.5) kommt jetzt

$$\int_F r(p^*)H_1(p^*) (x(p)n^*(p)) dA(p) \leq A(F). \quad (3.8)$$

Wir erhalten:

**Satz 5.** *Für eine geschlossene Fläche  $F$  mit Antipodenabbildung bezüglich  $O$  gilt*

$$\int_F r(p^*)H_1(p^*) (x(p)n^*(p)) dA(p) \leq A(F), \quad (3.8)$$

*und das Gleichheitszeichen wird genau dann angenommen, wenn  $O$  Symmetriezentrum von  $F$  ist.*

Die geschlossenen zentralsymmetrischen Flächen<sup>13)</sup> werden also dadurch charakterisiert, daß in (3.8) für einen geeigneten Punkt  $O$  das Gleichheitszeichen gilt.

Für eine berandete Fläche mit Antipodenabbildung trifft (3.7) immer noch zu, wenn auf dem Rande  $n(p^*) = -n(p)$  erfüllt wird, und bei Gleichheit in (3.7) ist  $O$  Symmetriezentrum.

#### § 4. Weitere Ähnlichkeitssätze für berandete Flächen

Im Anschluß an Satz 1' hatten wir auf die Anwendung der Integralformel (1.9) bzw. (1.11) auf den Fall aufmerksam gemacht, in welchem  $F$  und  $\bar{F}$  berandete Flächen sind, in welchem ferner die Ungleichungen  $xn < 0$  f.ü.,  $rH_1 \leq \bar{r}\bar{H}_1$ , und auf dem Rande die Gleichung  $n = \bar{n}$  erfüllt sind (nebst den weiteren Voraussetzungen des Satzes 1'). Anstatt  $xn < 0$  f.ü.,  $rH_1 \leq \bar{r}\bar{H}_1$  kann  $xn > 0$  f.ü.,  $rH_1 \geq \bar{r}\bar{H}_1$  vorausgesetzt werden. Ganz analog ergibt sich der folgende Satz:

**Satz 6.** *Bei der Zentralprojektion  $T$  der berandeten Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  gelte  $xn > 0$  f.ü.,  $n = \bar{n}$  auf dem Rande,  $H_1 = c\bar{H}_1 \geq 0$  für eine Konstante  $c$ ,  $f \leq c$ . Dann ist  $T$  eine Streckung mit dem Faktor  $c$ .*

Denn wegen  $0 < f \leq c$ ,  $H_1 = c\bar{H}_1 \geq 0$  wird  $H_1 \geq f\bar{H}_1$ , das heißt

<sup>13)</sup> Dabei sollen für die betrachteten Flächen  $F$  und Punkte  $O$  die Voraussetzungen wie bei Satz 2 erfüllt sein.

$rH_1 \geq \bar{r}\bar{H}_1$ , und zusammen mit  $\mathfrak{x}n > 0$  f.ü. folgt wegen (1.9) bzw. (1.11)  $n = \bar{n}$  auf ganz  $F$ . Daraus ergibt sich wie bei Satz 1, daß  $f$  konstant ist, und es ist sofort ersichtlich, daß  $f = c$  sein muß.

In Satz 6 wird neben  $\mathfrak{x}n > 0$  f.ü. vorausgesetzt, daß  $H_1 \geq 0$  ist. Diese Bedingungen sind sicher dann erfüllt, wenn  $F$  von  $O$  aus konvex ist und die Schattengrenze von  $F$  bei  $T$  keine inneren Punkte besitzt. Es gilt ein zu Satz 6 analoger Satz für von  $O$  aus konkave Flächen  $F$ : Ist  $\mathfrak{x}n < 0$  f.ü.,  $H_1 = c\bar{H}_1 \geq 0$ ,  $f \geq c > 0$ , und sind die weiteren Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt, so wird  $f = c$ . Der Beweis bleibt bis auf die Vorzeichenänderung derselbe.

Für  $H_1 \geq \varepsilon > 0$  wird Satz 6 verschärft, falls der Rand durchwegs regulär ist (wenn auch eventuell mit Selbstdurchdringungen), was wir in diesem § im folgenden annehmen:

**Satz 7.** Bei der Zentralprojektion  $T$  der berandeten Fläche  $F$  auf  $\bar{F}$  gelte  $\mathfrak{x}n > 0$  f.ü.,  $n = \bar{n}$  auf dem Rande,  $H_1 = c\bar{H}_1 \geq \varepsilon > 0$  für positive Konstanten  $c, \varepsilon$ . Dann ist  $T$  eine Streckung mit dem Faktor  $c$ .

**Beweis:** Da die Schattengrenze von  $F$  bei  $T$  keine inneren Punkte hat (wegen  $\mathfrak{x}n > 0$  f.ü.), existieren eine positive Konstante  $c'$  und ein Punkt  $q \in F$ , so daß für  $\bar{q} = Tq$  und für  $\mathfrak{x}'(p') = c'\mathfrak{x}(p)$  die Gleichungen

$$\mathfrak{x}'(q') = c'\mathfrak{x}(q) = \bar{\mathfrak{x}}(\bar{q}), \quad q' = \bar{q}, \quad (4.1)$$

bestehen, und außerdem mit  $r' = |\mathfrak{x}'|$  die Ungleichung

$$r'(p') \geq \bar{r}(\bar{p}) \quad \text{für alle } p \in F. \quad (4.2)$$

Der Punkt  $q$  kann im Innern oder auf dem Rande von  $F$  liegen. Durch  $\mathfrak{x}' = c'\mathfrak{x}$  ist eine berandete Fläche  $F'$  gegeben, welche  $\bar{F}$  in  $\bar{q}$  einseitig berührt<sup>14</sup>). Wegen (4.2) ist  $r' = c'r = c'\frac{\bar{r}}{f} \geq \bar{r}$ , das heißt

$$c' \geq f. \quad (4.3)$$

Im Punkte  $q' = \bar{q}$  gilt

$$H'_1(\bar{q}) \geq \bar{H}_1(\bar{q}), \quad (4.4)$$

denn nach Wahl geeigneter Koordinaten in den Umgebungen von  $\bar{q}$  in  $F'$  und in  $\bar{F}$  wird in  $\bar{q}$   $g'_{ij} = \bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$ , und für einen Tangentialvektor  $\mathfrak{v}$  der Länge 1 in  $\bar{q}$  bekommen wir für die Krümmungen der zugehörigen Normalschnitte

$$k'(\mathfrak{v}) = \sum_{i,j} l'_{ij} v^i v^j, \quad \bar{k}(\mathfrak{v}) = \sum_{i,j} \bar{l}_{ij} v^i v^j,$$

<sup>14</sup>) Hier wird die Randbedingung benutzt:  $n = \bar{n}$  auf dem Rande. Daraus folgt, daß es sich um eine Berührung von  $F'$  mit  $\bar{F}$  in  $\bar{q}$  handelt, auch wenn  $\bar{q}$  auf dem Rande liegt.



ferner ist nach Konstruktion  $k'(\mathfrak{p}) \geq \bar{k}(\mathfrak{p})$  für alle Tangentialvektoren  $\mathfrak{p}$  in  $\bar{q}$ ; daraus folgt  $k'_i \geq \bar{k}_i$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n^{15)}$ , und damit (4.4). Wegen  $c'H'_1 = H_1 = c\bar{H}_1 \geq \varepsilon > 0$ ,  $c > 0$ , erhalten wir zusammen mit (4.4) die Ungleichung

$$c \geq c'. \quad (4.5)$$

Aus (4.3) und (4.5) folgt  $f \leq c$ , so daß alle Voraussetzungen des Satzes 6 erfüllt sind, also wird  $f = c$  nach Satz 6, q.e.d.

Man kann Satz 7 auch beweisen, ohne auf Satz 6 zurückzugreifen, das heißt ohne die Integralformel (1.9) bzw. (1.11) zu benutzen. Nachdem man nämlich wie oben gezeigt hat, daß  $f \leq c$  sein muß, zeigt man in ähnlicher Weise, daß auch  $f \geq c$  gilt: Es existieren eine positive Konstante  $c''$  und ein Punkt  $x \in F$ , so daß für  $\bar{x} = Tx$  und für  $\mathfrak{x}''(p'') = c''\mathfrak{x}(p)$  die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}''(x'') &= c''\mathfrak{x}(x) = \bar{\mathfrak{x}}(\bar{x}), & x'' &= \bar{x}, \\ r''(p'') &\leq \bar{r}(\bar{p}) \quad \text{für alle } p \in F; \end{aligned}$$

daraus folgt  $c'' \leq f$ , und wegen  $H''_1(\bar{x}) \leq \bar{H}_1(\bar{x})$  kommt  $c \leq c''$  analog der Beziehung (4.5), womit  $c \leq f$  und wegen  $f \leq c$  schließlich  $f = c$  sein muß.

Satz 7 wird wie Satz 6 auf von  $O$  aus konvexe Flächen angewandt. Daß ein ähnlicher Satz für von  $O$  aus konkave Flächen nicht richtig sein kann, zeigt das Beispiel einer Kugel, welche ganz im Innern einer zweiten Kugel liegt, und wo als Zentrum  $O$  ein vom Ähnlichkeitszentrum verschiedener innerer Punkt der kleineren Kugel genommen wird.

Aus Satz 7 wird ein zu Satz 2' analoger Symmetriesatz hergeleitet:

**Satz 8.** *Bei der Antipodenabbildung  $p^* = Tp$  der berandeten Fläche  $F$  bezüglich  $O$  gelte  $\mathfrak{x}n > 0$  f.ü.,  $n(p^*) = -n(p)$  auf dem Rande, und die überall positive mittlere Krümmung sei invariant:  $H_1(p) = H_1(p^*) \geq \varepsilon > 0$ . Dann ist  $O$  Symmetriezentrum von  $F$ .*

Eine weitere Anwendung des Satzes 7 ergibt sich in der folgenden Situation:  $F$  und  $\bar{F}$  seien geschlossene reell analytische Flächen, zwischen denen eine reell analytische Zentralprojektion  $T$  besteht<sup>16)</sup>.  $F$  und  $\bar{F}$  besitzen einen gemeinsamen Berührungskegel, der  $F$  längs  $B$  berühre. Umrandet dann eine Komponente von  $B$  ein Flächenstück  $G$  von  $F$  in der Weise, daß für  $G$   $\mathfrak{x}n \geq 0$  und

<sup>15)</sup>  $k'_i$  bzw.  $\bar{k}_i$  sind die Hauptkrümmungen von  $F'$  bzw.  $\bar{F}$  in  $q' = \bar{q}$ , der Größe nach geordnet, und als solche stellen sie die Eigenwerte der Form  $k'(\mathfrak{p})$  bzw.  $\bar{k}(\mathfrak{p})$  dar. Zum Satze, daß aus  $k'(\mathfrak{p}) \geq \bar{k}(\mathfrak{p})$  für alle  $\mathfrak{p}$  die Ungleichungen  $k'_i \geq \bar{k}_i$  folgen, vgl. [8], p. 28. —  $\mathfrak{x}_{ij} = l_{ij}n$ ,  $\bar{\mathfrak{x}}_{ij} = \bar{l}_{ij}\bar{n}$  sollen auf  $F$  bzw.  $\bar{F}$  inklusive Rand  $\partial F$  bzw.  $\partial \bar{F}$  definiert und stetig sein.

<sup>16)</sup>  $T$  wird bei reell analytischen  $F$  und  $\bar{F}$  von selbst f.ü. reell analytisch, meistens sogar überall (vgl. Lemma 1 in [1] für den analytischen Fall).



$H_1 = c\bar{H}_1 \geq \varepsilon > 0$  ( $c$  und  $\varepsilon$  positive Konstanten), so geht  $\bar{F}$  aus  $F$  durch eine Streckung mit dem Faktor  $c$  hervor.

Betrachten wir den Beweis zu Satz 7, der sich nicht auf die Integralformel (1.9) bzw. (1.11) stützt, so bemerken wir, daß sich mit derselben Methode der folgende Satz beweisen läßt:

**Satz 9.** *Zwischen den von  $O$  aus konvexen berandeten Flächen  $F$ ,  $\bar{F}$  bestehe die Zentralprojektion  $T$ . Es gelte  $\kappa n > 0$  f.ü.,  $n = \bar{n}$  auf dem Rande,  $H_\nu = c^\nu \bar{H}_\nu \geq \varepsilon > 0$  für positive Konstanten  $c, \varepsilon$  ( $1 \leq \nu \leq n$ ,  $\nu$  fest gewählt). Dann ist  $T$  eine Streckung mit dem Faktor  $c$ .*

Die Konvexität der Flächen  $F$ ,  $\bar{F}$  brauchen wir, um die Ungleichungen  $k_i'' \geq 0$  und  $\bar{k}_i \geq 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$  sicherzustellen, denn nur dann folgt für  $\nu \geq 2$  aus  $k_i' \geq \bar{k}_i$  bzw.  $k_i'' \leq \bar{k}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , die Ungleichung  $H_\nu' \geq \bar{H}_\nu$  bzw.  $H_\nu'' \leq \bar{H}_\nu$ .

Weiter ist an Hand des Beweises (ohne Integralformel) zu Satz 7 einzusehen, daß Satz 9 folgendermaßen verallgemeinert wird:

**Satz 9'.** *Zwischen den berandeten Flächen  $F$ ,  $\bar{F}$  bestehe die Zentralprojektion  $T$ . Es gelte  $\kappa n > 0$  f.ü. und  $n = \bar{n}$  auf dem Rande. Ferner sei für die vom  $\nu$ -ten Grade ( $\nu \geq 1$ ) homogene Funktion  $W(k_1, \dots, k_n)$  die Beziehung  $W(k_1, \dots, k_n) = c^\nu W(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \geq \varepsilon > 0$  erfüllt,  $c$  und  $\varepsilon$  positive Konstanten,  $\frac{\partial W}{\partial k_i} \geq 0$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dann ist  $T$  eine Streckung mit dem Faktor  $c$ .*

Dabei sei die Funktion  $W$  in einem konvexen Gebiet  $G$  des  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ -Raumes  $K^n$  definiert, dort gelte  $\frac{\partial W}{\partial k_i} \geq 0$  für alle  $i$ , und die Krümmungsbilder von  $F$ ,  $\bar{F}$  sollen in  $G$  liegen (das «Krümmungsbild» von  $F$  wird durch die Abbildung  $p \rightarrow (k_1, k_2, \dots, k_n)$  gewonnen,  $p \in F$ ,  $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in K^n$ , wo  $k_1, k_2, \dots, k_n$  die der Größe nach geordneten Hauptkrümmungen in  $p$  sind).

Analog zu Satz 8 wird aus Satz 9' ein Symmetriesatz hergeleitet. Ferner enthalten die Sätze 7, 9 und 9' als Spezialfälle: sind die Voraussetzungen in Satz 7 bzw. 9 bzw. 9' erfüllt, und ist zusätzlich  $c = 1$ , so daß  $H_1 = \bar{H}_1$  bzw.  $H_\nu = \bar{H}_\nu$  bzw.  $W(k_1, \dots, k_n) = W(\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n)$ , so fallen  $F$  und  $\bar{F}$  zusammen.

### § 5. Integralformeln für die $\nu$ -ten mittleren Krümmungen

$F, \bar{F}$  seien wie in § 1 zwei  $n$ -dimensionale Flächen im  $R^{n+1}$ ,  $n \geq 2$ , zwischen denen eine Zentralprojektion  $T$  besteht. Neben  $F$  und  $\bar{F}$ , die durch  $\bar{\mathbf{x}} = f\mathbf{x}$ ,  $f > 0$ , miteinander in Beziehung stehen, betrachten wir die Schar  $\mathfrak{F}$  der Flächen  $F_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , welche für  $f = 1 + \varrho$  durch

$$\mathbf{x}(t) = f(t)\mathbf{x}, \quad f(t) = 1 + t\varrho, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5.1)$$

gegeben wird.  $\mathbf{x}(0) = f(0)\mathbf{x} = \mathbf{x}$  beschreibt die Fläche  $F$ ,  $\mathbf{x}(1) = f(1)\mathbf{x} = f\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$  beschreibt die Fläche  $\bar{F}$ .  $F$  und  $\bar{F}$  seien dreimal stetig differenzierbar, die Funktion  $f$  ebenfalls. Dann trifft dies auch auf  $f(t)$  zu, es ist  $f(t) > 0$ ; ferner soll in den Punkten der Schattengrenze  $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{n}}$  gelten, so daß dann alle Flächen  $F_t$  reguläre dreimal stetig differenzierbare Flächen sind<sup>17)</sup>. Entsprechend (1.3) und (1.4) kommen die Formeln

$$d\mathbf{x}(t) = f(t)d\mathbf{x} + \mathbf{x}df(t) = f(t)d\mathbf{x} + t\mathbf{x}d\varrho, \quad (5.2)$$

$$(\mathbf{v}\mathbf{n}(t))dA(t) = (f(t))^n(\mathbf{v}\mathbf{n})dA, \quad (5.3)$$

falls  $\mathbf{n}(t)$  bzw.  $dA(t)$  die Normale bzw. das Flächenelement von  $F_t$  bezeichnet und  $\mathbf{v}$  einen zu  $\mathbf{x}$  parallelen Vektor.

Im folgenden bedeutet der Strich die Ableitung nach  $t$ . Wir bekommen

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \varrho\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{w}. \quad (5.4)$$

Wegen  $(\mathbf{n}(t))^2 = 1$  wird  $\mathbf{n}(t)\mathbf{n}'(t) = 0$ , also  $\mathbf{n}'(t) = a^j(t)\mathbf{x}_j(t)$ <sup>18)</sup>. Aus  $\mathbf{n}(t)\mathbf{x}_i(t) = 0$  folgt zusammen mit (5.4)

$$\mathbf{n}'(t)\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)\mathbf{w}_i(t) = 0 \dots,$$

und damit wird  $a^j(t) = -g^{ij}(t)(\mathbf{w}_i\mathbf{n}(t))$  oder<sup>19)</sup>

$$\mathbf{n}'(t) = -g^{ij}(t)(\mathbf{w}_i\mathbf{n}(t))\mathbf{x}_j(t). \quad (5.5)$$

Mit Hilfe von (1.2) und (5.3) bekommen wir für ein festes  $\nu$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ ,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}, \underbrace{d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu}, \underbrace{d\mathbf{x}(t), \dots, d\mathbf{x}(t)}_{n-\nu}) = (\mathbf{w}, d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t), f(t)d\mathbf{x}, \dots, f(t)d\mathbf{x}) \\ & = (f(t))^{n-\nu}(\mathbf{w}, d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t), d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}) = (-1)^\nu n! H_\nu(t)(\mathbf{w}\mathbf{n}(t))dA(t) \\ & = (-1)^\nu n! H_\nu(t)(f(t))^n(\mathbf{w}\mathbf{n})dA, \end{aligned}$$

<sup>17)</sup> Vgl. [1], p. 191, insbesondere (2.13). Zur dreimaligen stetigen Differenzierbarkeit von  $f$  siehe Anmerkung 2.

<sup>18)</sup> In den §§ 5 und 6 wird über sich wiederholende lateinische Indizes summiert.  $\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_i, f_i, \varrho_i$  bezeichnen die entsprechenden Ableitungen nach  $u^i$ .

<sup>19)</sup> Die Beziehung (5.5) lautet gleich im Falle einer Parallelabbildung. Siehe [1], p. 195, (4.3).

und  $\mathcal{H}_\nu(t) = (f(t))^\nu H_\nu(t)$  gesetzt,

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) = (-1)^\nu n! \mathcal{H}_\nu(t) (\mathfrak{w} \mathfrak{n}) dA.$$

Daraus ergibt sich

$$(\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}'(t), d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w} \mathfrak{n}) dA,$$

und weiter

$$\left. \begin{aligned} & (\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}'(t), \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} (f(t))^{n-\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w} \mathfrak{n}) dA. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Unter Berücksichtigung von (5.5) und [1], (1.7), (1.2), (1.5) und (1.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{n}'(t), d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)) \\ & = (-1)^\nu g^{ij}(t) (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) l_{s_1}^{r_1}(t) \dots l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}(t) (\mathfrak{x}_j(t), \mathfrak{w}_k, \mathfrak{x}_{r_1}(t), \dots, \mathfrak{x}_{r_{\nu-1}}(t), \\ & \quad \mathfrak{x}_{r_\nu}(t), \dots, \mathfrak{x}_{r_{n-1}}(t)) du^k \wedge du^{s_1} \wedge \dots \wedge du^{s_{\nu-1}} \wedge du^{r_\nu} \wedge \dots \wedge du^{r_{n-1}} \\ & = (-1)^{\nu-1} g^{ij}(t) \varepsilon_{jr_1 \dots r_{\nu-1} r_\nu \dots r_{n-1}}(t) \varepsilon^{ks_1 \dots s_{\nu-1} r_\nu \dots r_{n-1}}(t) l_{s_1}^{r_1}(t) \dots l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}(t) \\ & \quad \cdot (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) (\mathfrak{w}_k \mathfrak{n}(t)) dA(t) \\ & = (-1)^{\nu-1} (n-1)! c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) (\mathfrak{w}_k \mathfrak{n}(t)) dA(t), \end{aligned}$$

das heißt

$$\left. \begin{aligned} & - (\mathfrak{n}'(t), d\mathfrak{w}, \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu (n-1)! c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) (\mathfrak{w}_k \mathfrak{n}(t)) dA(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

(5.6) und (5.7) liefern mit der Formel

$$\begin{aligned} & d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}'(t), \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)) \\ & = (\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}'(t), d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)) \\ & \quad - (\mathfrak{n}'(t), d\mathfrak{w}, d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t), d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)) \end{aligned}$$

die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} & d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}'(t), \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} (f(t))^{n-\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w} \mathfrak{n}) dA \\ & \quad + (-1)^\nu (n-1)! c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) (\mathfrak{w}_k \mathfrak{n}(t)) dA(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Wir wollen die Gleichung (5.8) durch  $(f(t))^{n-\nu}$  dividieren. Zu diesem Zweck berechnen wir

$$\left. \begin{aligned} & (f(t))^{\nu-n} d(\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)}_{n-\nu}) \\ &= d(\mathfrak{w}, n'(t), dn(t), \dots, dn(t), d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) \\ & \quad + (n-\nu) (f(t))^{-1} df(t) \wedge (\mathfrak{w}, n'(t), dn(t), \dots, dn(t), d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Wenden wir wie oben die Beziehungen (5.5) und [1], (1.7), (1.2), (1.5) und (1.14) an, so bekommen wir

$$\begin{aligned} & (f(t))^{-1} df(t) \wedge (\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}) \\ &= (f(t))^{-(n-\nu+1)} df(t) \wedge (\mathfrak{w}, n'(t), dn(t), \dots, dn(t), d\mathfrak{x}(t), \dots, d\mathfrak{x}(t)) \\ &= (-1)^\nu (f(t))^{-(n-\nu+1)} g^{ij}(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) l_{s_1}^{r_1}(t) \dots l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}(t) f_k(t) \cdot \\ & \quad \cdot (\mathfrak{w}, \mathfrak{x}_j(t), \mathfrak{x}_{r_1}(t), \dots, \mathfrak{x}_{r_{\nu-1}}(t), \mathfrak{x}_{r_\nu}(t), \dots, \mathfrak{x}_{r_{n-1}}(t)) du^k \wedge du^{s_1} \wedge \dots \wedge \\ & \quad \wedge du^{s_{\nu-1}} \wedge du^{r_\nu} \wedge \dots \wedge du^{r_{n-1}} \\ &= (-1)^\nu (f(t))^{-(n-\nu+1)} g^{ij}(t) \varepsilon_{j r_1 \dots r_{\nu-1} r_\nu \dots r_{n-1}}(t) \varepsilon^{k s_1 \dots s_{\nu-1} r_\nu \dots r_{n-1}}(t) \cdot \\ & \quad \cdot l_{s_1}^{r_1}(t) \dots l_{s_{\nu-1}}^{r_{\nu-1}}(t) f_k(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) (\mathfrak{w} n(t)) dA(t) \\ &= (-1)^\nu (n-1)! (f(t))^{-(n-\nu+1)} c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) f_k(t) (\mathfrak{w} n(t)) dA(t). \end{aligned}$$

Wegen (5.1), (5.2) und (5.4) kommt

$$\begin{aligned} f_k(t) &= t \varrho_k, \\ \mathfrak{w}_i n(t) &= (\varrho_i \mathfrak{x} + \varrho \mathfrak{x}_i) n(t) = \varrho_i (\mathfrak{x} n(t)) + \frac{\varrho}{f(t)} (f(t) \mathfrak{x}_i n(t)) \\ &= \varrho_i (\mathfrak{x} n(t)) + \varrho (f(t))^{-1} ((-t \varrho_i \mathfrak{x}) n(t)) \\ &= \varrho_i (\mathfrak{x} n(t)) \left( 1 - \frac{t \varrho}{1 + t \varrho} \right) = \varrho_i (\mathfrak{x} n(t)) (f(t))^{-1}, \\ \mathfrak{w}_i n(t) &= \varrho_i (\mathfrak{x} n(t)) (f(t))^{-1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

so daß

$$\left. \begin{aligned} & (f(t))^{-1} df(t) \wedge (\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}}_{n-\nu}) \\ &= (-1)^\nu (n-1)! t (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathfrak{x} n(t)) (\mathfrak{w} n(t)) dA(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Aus (5.4), (5.8), (5.9), (5.10) und (5.11) folgt

$$\left. \begin{aligned}
 & d(\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, \underbrace{dx, \dots, dx}_{n-\nu}) \\
 &= (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w}n) dA \\
 &\quad + (-1)^\nu (n-1)! (f(t))^{-(n-\nu)} c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) (\mathfrak{w}_k n(t)) dA(t) \\
 &\quad - (-1)^\nu (n-\nu)(n-1)! t (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathfrak{x}n(t)) (\mathfrak{w}n(t)) dA(t) \\
 &= (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w}n) dA \\
 &\quad + (-1)^\nu (n-1)! (1 - (n-\nu)t\varrho) (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathfrak{x}n(t))^2 dA(t),
 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

oder

$$\left. \begin{aligned}
 & d(\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, \underbrace{dx, \dots, dx}_{n-\nu}) \\
 &= (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathfrak{w}n) dA \\
 &\quad + (-1)^\nu (n-1)! (1 - (n-\nu)t\varrho) (f(t))^{-(n-\nu)} \cdot \\
 &\quad \cdot c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) (\mathfrak{w}_k n(t)) dA(t),
 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

und durch Integration erhalten wir

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{(-1)^\nu}{(n-1)!} \int_{\partial F} \int_0^1 (\mathfrak{w}, n'(t), \underbrace{dn(t), \dots, dn(t)}_{\nu-1}, \underbrace{dx, \dots, dx}_{n-\nu}) dt \\
 &= \frac{n}{\nu} \int_F (f^\nu \bar{H}_\nu - H_\nu) (\mathfrak{w}n) dA \\
 &\quad + \int_F \int_0^1 (1 - (n-\nu)t\varrho) (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathfrak{x}n(t))^2 dA(t) dt,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

insbesondere folgt für  $\nu = n$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_{\partial F} \int_0^1 (\mathfrak{w}, n'(t), dn(t), \dots, dn(t)) dt \\
 &= \int_F (f^n \bar{H}_n - H_n) (\mathfrak{w}n) dA + \int_F \int_0^1 c_{(n)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i n(t)) (\mathfrak{w}_k n(t)) dA(t) dt,
 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

und in (5.15) kann noch  $c_{(n)}^{ik} = c^{ik} = g^{-1} l_{ik}^*$  (gemäß [1], (1.11)) berücksichtigt werden.

**Verallgemeinerung von (5.12) und (5.13).** Wie (5.12), (5.13) werden Formeln abgeleitet, in denen an Stelle von  $\mathfrak{w} = \varrho \mathfrak{x}$  der Vektor  $\varrho^m \mathfrak{x}$  ( $m$  reell) steht<sup>20</sup>). Die Übertragung von (5.6), (5.9) und (5.11) ist klar. Anstatt (5.10) kommt

$$(\varrho^m \mathfrak{x})_i n(t) = \varrho^{m-1} \varrho_i (\mathfrak{x}n(t)) \left( m - \frac{t\varrho}{f(t)} \right), \quad (5.10')$$

<sup>20</sup>) Auf diese Möglichkeit machte mich Herr K. Voss aufmerksam.

und damit leitet man wie bei (5.7) die Formel

$$\left. \begin{aligned} & - (\mathbf{n}'(t), \underbrace{d(\varrho^m \mathbf{x}), d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathbf{x}(t), \dots, d\mathbf{x}(t)}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu (n-1)! c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathbf{x} \mathbf{n}(t))^2 \frac{\varrho^{m-1}}{f(t)} \left( m - \frac{t\varrho}{f(t)} \right) dA(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.7')$$

her. Unter Berücksichtigung von (5.7') erhält man eine zu (5.8) analoge Beziehung, und es ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} & d(\varrho^m \mathbf{x}, \mathbf{n}'(t), \underbrace{d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) \varrho^m (\mathbf{x} \mathbf{n}) dA \\ & \quad + (-1)^\nu (n-1)! (m + (m + \nu - n - 1)t\varrho) \varrho^{m-1} (f(t))^{-(n-\nu+2)} \cdot \\ & \quad \cdot c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathbf{x} \mathbf{n}(t))^2 dA(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.12')$$

$$\left. \begin{aligned} & d(\varrho^m \mathbf{x}, \mathbf{n}'(t), \underbrace{d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) \varrho^m (\mathbf{x} \mathbf{n}) dA \\ & \quad + (-1)^\nu (n-1)! (m + (m + \nu - n - 1)t\varrho) \varrho^{m-1} (f(t))^{-(n-\nu)} \cdot \\ & \quad \cdot c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathbf{w}_i \mathbf{n}(t)) (\mathbf{w}_k \mathbf{n}(t)) dA(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.13')$$

(5.12), (5.13) sind die Formeln (5.12'), (5.13') für  $m = 1$ , und für  $m = 0$  wird

$$\left. \begin{aligned} & d(\mathbf{x}, \mathbf{n}'(t), \underbrace{d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}}_{n-\nu}) \\ & = (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} \mathcal{H}'_\nu(t) (\mathbf{x} \mathbf{n}) dA \\ & \quad + (-1)^\nu (n-1)! (\nu - n - 1)t (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathbf{x} \mathbf{n}(t))^2 dA(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.12_0)$$

das heißt es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^\nu}{(n-1)!} \int_{\partial F} \int_0^1 (\mathbf{x}, \mathbf{n}'(t), \underbrace{d\mathbf{n}(t), \dots, d\mathbf{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathbf{x}, \dots, d\mathbf{x}}_{n-\nu}) dt \\ & = \frac{n}{\nu} \int_F (f^\nu \bar{H}_\nu - H_\nu) (\mathbf{x} \mathbf{n}) dA \\ & \quad - \int_F \int_0^1 (n - \nu + 1)t (f(t))^{-(n-\nu+2)} c_{(\nu)}^{ik}(t) \varrho_i \varrho_k (\mathbf{x} \mathbf{n}(t))^2 dA(t) dt. \end{aligned}$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} &(\mathfrak{x} \mathfrak{n}(t)) dA(t) = (f(t))^n (\mathfrak{x} \mathfrak{n}) dA \\ \text{bzw.} &(\mathfrak{x} \mathfrak{n}(t)) (g(t))^{\frac{1}{2}} = (f(t))^n (\mathfrak{x} \mathfrak{n}) g^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3')$$

für  $g = \det(g_{ij})$  folgt daraus mit

$$C_{(\nu)}^{ik} = g^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (g(t))^{-\frac{1}{2}} t (f(t))^{n+\nu-2} c_{(\nu)}^{ik}(t) dt \quad (5.16)$$

die Beziehung

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(-1)^\nu}{(n-1)!} \int_{\partial F} \int_0^1 (\mathfrak{x}, \mathfrak{n}'(t), \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}}_{n-\nu}) dt \\ &= \frac{n}{\nu} \int_F (f^\nu \bar{H}_\nu - H_\nu) (\mathfrak{x} \mathfrak{n}) dA \\ &\quad - (n - \nu + 1) \int_F C_{(\nu)}^{ik} \varrho_i \varrho_k (\mathfrak{x} \mathfrak{n})^2 dA. \end{aligned} \right\} \quad (5.14_0)$$

Setzen wir in (5.12<sub>0</sub>)  $\nu = 1$ , berücksichtigen  $c_{(1)}^{ik} = g^{ik}$ , (5.3), (5.10), (5.5), und integrieren über  $t$  von 0 bis 1, so resultiert von neuem die Formel (1.8).

**Bemerkung.** Aus (5.13) bekommen wir durch Grenzübergang die Gleichungen (9.10), (9.11), (9.12) in [1] für die Parallelabbildung  $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + w \mathfrak{e}$ . Es ist dann  $f = 1$ ,  $\varrho = 0$ , und

$$\left. \begin{aligned} &d(\mathfrak{w}, \mathfrak{n}'(t), \underbrace{d\mathfrak{n}(t), \dots, d\mathfrak{n}(t)}_{\nu-1}, \underbrace{d\mathfrak{x}, \dots, d\mathfrak{x}}_{n-\nu}) \\ &= (-1)^\nu \frac{n!}{\nu} H'_\nu(t) (\mathfrak{w} \mathfrak{n}) dA \\ &\quad + (-1)^\nu (n-1)! c_{(\nu)}^{ik}(t) (\mathfrak{w}_i \mathfrak{n}(t)) (\mathfrak{w}_k \mathfrak{n}(t)) dA(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Mit Hilfe von

$$\left. \begin{aligned} &(\mathfrak{e} \mathfrak{n}(t)) dA(t) = (\mathfrak{e} \mathfrak{n}) dA \\ \text{bzw.} &(\mathfrak{e} \mathfrak{n}(t)) (g(t))^{\frac{1}{2}} = (\mathfrak{e} \mathfrak{n}) g^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

folgen aus (5.13) die zitierten Formeln.

## §6. Ähnlichkeits- und Symmetriesätze mit den $\nu$ -ten mittleren Krümmungen

$F, \bar{F}, T$  seien wie in § 5 dreimal stetig differenzierbar,  $n \geq 2$ <sup>21)</sup>. Wir nennen  $r^\nu H_\nu$  die  $\nu$ -te (bezüglich  $O$ ) reduzierte mittlere Krümmung von  $F$ . Mit

<sup>21)</sup> Die Sätze 10, 11 gelten wegen der Sätze 1, 2 ebenso für Kurven  $C, \bar{C}$  in der Ebene  $R^2$  ( $n = \nu = 1$ ). Es könnte auch für diesen Fall die lineare Kurvenschar zwischen  $C$  und  $\bar{C}$  benutzt werden, um zu einem Beweis zu gelangen, welcher dem hier für  $n \geq 2$  gegebenen analog ist.

Hilfe der Integralformel (5.14<sub>0</sub>) wird ein zu Satz 1 analoger Ähnlichkeitssatz abgeleitet, allerdings nur unter den zusätzlichen

**Voraussetzungen.** Bei der Zentralprojektion  $T: F \rightarrow \bar{F}$  soll gelten:

- (a)  $\bar{F}$  ist Eifläche;
- (b)  $F$  ist gleichartig orientierte<sup>22)</sup> konvexe Fläche;
- (c) die lineare Schar  $\mathfrak{F} = \{F_t; 0 \leq t \leq 1\}$  (gegeben durch (5.1)) besteht aus lauter konvexen Flächen<sup>23)</sup>.

**Satz 10.** Sind bei der Zentralprojektion  $T: F \rightarrow \bar{F}$  die Voraussetzungen (a), (b), (c) erfüllt, und ist die  $\nu$ -te reduzierte mittlere Krümmung invariant ( $1 \leq \nu \leq n$ ,  $\nu$  fest gewählt), so ist  $T$  eine Streckung.

**Beweis:** Wegen (a) kann  $\bar{l}_{ij}x^ix^j$  positiv definit angenommen werden. Dann erfüllt wegen (b), (c) die vom Parameter  $t$  stetig abhängende quadratische Form  $l_{ij}(t)x^ix^j$  die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} l_{ij}(t)x^ix^j &\geq 0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ \bar{l}_{ij}x^ix^j &> 0 \quad \text{für } (x^1, x^2, \dots, x^n) \neq (0, 0, \dots, 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Wegen [1], (1.12) und (1.13) folgt aus (6.1)

$$\left. \begin{aligned} c_{(\nu)}^{ij}(t)x_ix_j &\geq 0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ \bar{c}_{(\nu)}^{ij}x_ix_j &> 0 \quad \text{für } (x^1, x^2, \dots, x^n) \neq (0, 0, \dots, 0). \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Auch  $c_{(\nu)}^{ij}(t)$  ist stetig von  $t$  abhängig, und nach (5.16), (6.2) wird  $C_{(\nu)}^{ij}x_ix_j$  positiv definit. Mit  $r^\nu H_\nu = \bar{r}^\nu \bar{H}_\nu$ , (5.14<sub>0</sub>) und  $(\mathfrak{x}n) \neq 0$  f.ü. folgt  $\varrho_i = 0$  für alle  $i = 1, 2, \dots, n$ , das heißt  $\varrho = \text{const.}$  oder  $f = 1 + \varrho = \text{const.}$ , q.e.d.

Wie wir aus Satz 1 den Symmetriesatz, Satz 2, bekommen haben, so erhalten wir aus Satz 10 einen Symmetriesatz, unter der Voraussetzung

- ( $\tilde{c}$ ) die lineare Schar  $\tilde{\mathfrak{F}} = \{F_t; 0 \leq t \leq 1\}$  zwischen der Eifläche  $F$  und der aus  $F$  durch Spiegelung an  $O$  erhaltenen Fläche  $\tilde{F}$  besteht aus lauter konvexen Flächen.

<sup>22)</sup> Zwei geschlossene Flächen  $F, \bar{F}$  ohne Selbstdurchdringungen sind gleichartig orientiert, wenn die Orientierungen von  $F$  und  $\bar{F}$  zusammen mit den äußeren Normalen  $\mathfrak{n}$  und  $\bar{\mathfrak{n}}$  dieselbe Orientierung des  $R^{n+1}$  erzeugen. Es folgt in diesem Fall  $\mathfrak{n} = \bar{\mathfrak{n}}$  in den Punkten der Schatten-grenze (bei der (orientierungserhaltenden) Zentralprojektion  $T: F \rightarrow \bar{F}$ ), so daß die lineare Schar  $\mathfrak{F}$  aus regulären Flächen besteht, und es gelten die Formeln von § 5 (wegen der weiter gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen).

<sup>23)</sup> Es gibt Paare  $F, \bar{F}$  von Eiflächen, deren zugehörige lineare Schar  $\mathfrak{F}$  nicht-konvexe Flächen enthält: für  $n = 1$  nimmt man zum Beispiel zwei Ellipsen in der  $xy$ -Ebene, gegeben durch  $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1$ ,  $b^{-2}x^2 + a^{-2}y^2 = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , mit  $16a^2b^2 < (a+b)^2(a^2+b^2)$ , das heißt mit  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 > 16$ , und das Projektionszentrum  $O$  sei der Ursprung des Koordinatensystems.



**Satz 11.** *Ist bei der Antipodenabbildung der Eifläche  $F$  bezüglich  $O$  die  $\nu$ -te reduzierte mittlere Krümmung invariant, und ist  $(\tilde{c})$  erfüllt, so ist  $O$  Symmetriezentrum von  $F$ .*

Die Voraussetzungen zu Satz 10 (und zu Satz 11) können abgeschwächt werden. An Stelle von (a), (b), (c) (bzw. von  $(\tilde{c})$ ) genügt es, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Die Schattengrenze der geschlossenen Fläche  $F$  bei  $T$  enthält keine inneren Punkte, es existiert die lineare Schar  $\mathfrak{F}$  (bzw.  $\tilde{\mathfrak{F}}$ ), und es gilt (6.2) für  $\mathfrak{F}$  (bzw.  $\tilde{\mathfrak{F}}$ ). Wegen  $c_{(1)}^{ij} = g^{ij}$  bedeutet die letzte Forderung für  $\nu = 1$  keine einschränkende Voraussetzung, so daß Satz 1 abgesehen von der Existenz von  $\mathfrak{F}$  und den stärkeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen neu bewiesen wird. Hingegen wird wegen  $c_{(n)}^{ij} = c^{ij} = g^{-1}l_{ij}^*$  die Form  $c^{ij}x_i x_j$  nur auf Eiflächen definit<sup>24)</sup>. Weiter sehen wir: Die (positive) Definitheit von  $\bar{c}_{(\nu)}^{ij}x_i x_j$  sowie die Gleichung  $r^\nu H_\nu = \bar{r}^\nu \bar{H}_\nu$  müssen nur fast überall erfüllt sein, und an Stelle von (6.2) genügt die Forderung:  $c_{(\nu)}^{ij}(\tau)x_i x_j$  (f. ü.) positiv definit für ein  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ ,  $c_{(\nu)}^{ij}(t)x_i x_j$  positiv semidefinit für  $0 \leq t \leq 1$ .

Die Integralformel (5.14<sub>0</sub>) führt wie (1.9) zu Ähnlichkeits- und Symmetriesätzen für berandete Flächen:

**Satz 10'.** *Existiert bei der Zentralprojektion  $T$  zwischen der berandeten positiv gekrümmten<sup>25)</sup> Fläche  $\bar{F}$  und der Fläche  $F$  die lineare Schar  $\mathfrak{F}$  (gegeben durch (5.1)), sind alle  $F_t$  semipositiv gekrümmt<sup>25)</sup> ( $0 \leq t \leq 1$ ), und ist die  $\nu$ -te reduzierte mittlere Krümmung invariant sowie auf dem Rande die Normale ( $n = \bar{n}$  auf dem Rande;  $1 \leq \nu \leq n$ ,  $\nu$  fest gewählt), so ist  $T$  eine Streckung.*

**Satz 11'.** *Existiert bei der Antipodenabbildung der berandeten positiv gekrümmten Fläche  $F$  die lineare Schar  $\tilde{\mathfrak{F}}$  (wie in  $(\tilde{c})$ ), sind alle  $F_t$  semipositiv gekrümmt ( $0 \leq t \leq 1$ ), ist die  $\nu$ -te reduzierte mittlere Krümmung invariant ( $1 \leq \nu \leq n$ ,  $\nu$  fest gewählt) und gilt auf dem Rande  $n(p^*) = -n(p)$ , so ist  $O$  Symmetriezentrum von  $F$ .*

Aus der Integralformel (5.14) gewinnt man ähnlich den Sätzen 10', 11' Einzigkeitssätze für berandete Flächen, wenn  $\mathfrak{x} = \bar{\mathfrak{x}}$  bzw.  $\mathfrak{x}(p^*) = -\mathfrak{x}(p)$  auf dem Rande vorausgesetzt wird.

Für eine feste Eifläche  $\bar{F}$  und einen Punkt  $O$  betrachten wir sämtliche Flächen  $F$ , derart daß  $F, \bar{F}$  die Bedingungen von Satz 10 erfüllen (bis auf  $r^\nu H_\nu = \bar{r}^\nu \bar{H}_\nu$ , analog den Flächen  $F, \bar{F}$  in § 3 mit den Bedingungen von

<sup>24)</sup> Nach [1], p. 209 gibt es Flächen vom topologischen Typus  $S^1 \times S^{n-1}$ , die nicht konvex sind, und auf denen  $c_{(\nu)}^{ik}x_i x_k$  überall definit ist,  $2 \leq \nu \leq n-1$ .

<sup>25)</sup>  $F$  heißt positiv (bzw. semipositiv) gekrümmt, wenn  $l_{ik}x^i x^k$  positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist.

Satz 1). Diese Flächen  $F$  bilden eine Klasse  $\mathfrak{L}(\bar{F}, O)$ . Aus (5.14<sub>0</sub>) folgt wegen (6.2), (5.16)

$$\int_F (f^\nu \bar{H}_\nu - H_\nu) (\mathfrak{x} n) dA \geq 0 \quad (6.3)$$

für alle  $F \in \mathfrak{L}(\bar{F}, O)$  (und für alle  $\bar{F} \in \mathfrak{L}(F, O)$  bei festem  $F$ )<sup>26</sup>). (6.3) ist die Verallgemeinerung von (3.2). Das Gleichheitszeichen wird wiederum genau dann angenommen, wenn  $\bar{F}$  aus  $F$  durch eine Streckung mit dem Zentrum  $O$  und positivem Faktor hervorgeht, was wie im Beweis zu Satz 10 eingesehen wird. Führen wir

$$I_\nu(\bar{F}; F, O) = - \int_F f^\nu \bar{H}_\nu (\mathfrak{x} n) dA = \int_F f^\nu \bar{H}_\nu (\mathfrak{x} n^*) dA$$

ein, so lautet (6.3)

$$I_\nu(\bar{F}; F, O) \leq I_\nu(F; F, O). \quad (6.3')$$

Setzen wir  $C_\nu(F) = \int_F H_\nu dA$ , so hat die Gleichung (3.3) die Gestalt

$$I_\nu(F; F, O) = C_{\nu-1}(F) \quad (6.4)$$

((6.4) stimmt für  $\nu = 1$  mit (3.4) überein), und (6.3') ist äquivalent mit der Ungleichung

$$I_\nu(\bar{F}; F, O) \leq C_{\nu-1}(F). \quad (6.5)$$

Entsprechend (3.6) ergibt sich für alle  $F \in \mathfrak{L}(S, O)$  (Bezeichnungen wie bei (3.6))

$$\int_S r^\nu H_\nu d\Omega \leq \kappa_n, \quad (6.6)$$

und das Gleichheitszeichen wird genau für die Sphären mit dem Mittelpunkt  $O$  angenommen. Es folgt: Gilt für ein  $F \in \mathfrak{L}(S, O)$   $r^\nu H_\nu = 1$  (für ein  $\nu$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ ), so ist  $F$  eine Sphäre mit dem Zentrum  $O$ <sup>27</sup>).

An Stelle von (3.7) und (3.8) tritt nun im Falle einer Antipodenabbildung unter den entsprechenden Voraussetzungen

$$\int_F ((f(p))^\nu H_\nu(p^*) - H_\nu(p)) (\mathfrak{x}(p) n(p)) dA(p) \geq 0, \quad (6.7)$$

$$\int_F (f(p))^\nu H_\nu(p^*) (\mathfrak{x}(p) n^*(p)) dA(p) \leq C_{\nu-1}(F), \quad (6.8)$$

<sup>26</sup>) Im Falle der Parallelabbildung und der «Antipodenabbildung» an einer  $n$ -dimensionalen Ebene (siehe [1], (9.6) und (9.12)) bekommt man entsprechend (6.3) und (6.7) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \int_{\bar{F}} (\bar{H}_\nu - H_\nu) (\mathfrak{w} n) dA &\leq 0, \\ \int_{\bar{F}} (H_\nu(p^*) - H_\nu(p)) (\mathfrak{x}(p^*) - \mathfrak{x}(p)) n(p) dA(p) &\leq 0. \end{aligned}$$

<sup>27</sup>) Schon  $r^\nu H_\nu = c = \text{const.}$  charakterisiert die Sphären in  $\mathfrak{L}(S, O)$ : aus  $r^\nu H_\nu = c$  folgt  $c = 1$  (siehe Anmerkung 11).

und das Gleichheitszeichen wird genau dann angenommen, wenn  $O$  Symmetriezentrum von  $F$  ist.

Entsprechend den Sätzen 10', 11' lassen sich die Ungleichungen (6.3), (6.7) sowie die zugehörigen Charakterisierungen der Streckung bzw. der Zentralsymmetrie auch für berandete Flächen herleiten (unter Voraussetzung geeigneter Randbedingungen).

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. VOSS, *Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen*. Math. Ann. 131 (1956), 180–218.
- [2] K.-P. GROTEMEYER, *Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären*. Archiv der Math. 3 (1952), 307–310.
- [3] W. SÜSS, *Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K.-P. Grottemeyer*. Archiv der Math. 3 (1952), 311–313.
- [4] K.-P. GROTEMEYER, *Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel*. Archiv der Math. 4 (1953), 230–233.
- [5] A. D. ALEXANDROV und E. P. SENKIN, *Über die Nichtverbiegbarkeit konvexer Flächen*. Vestnik der Leningrader Universität 10 Nr. 8 (1955), Ser. mat. fiz. chim. Nr. 3, 3–13.
- [6] C.-C. HSIUNG, *Some integral formulas for closed hypersurfaces in Riemannian space*. Pac. J. of Math. 6 (1956), 291–299.
- [7] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*. Zweite Auflage. Springer, Berlin 1924.
- [8] R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*. Erster Band. Springer, Berlin 1931.

*Zusatz bei der Korrektur:* Nach einer brieflichen Mitteilung von Yuen-Fat Wong hat Chin-Shui Hsue ähnliche Überlegungen gemacht wie in den oben stehenden §§ 1 und 2. Es soll darüber eine Veröffentlichung herauskommen in den Proc. Amer. Math. Soc.

Eingegangen den 1. Januar 1958