

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1959)

**Artikel:** Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espace de RIEMANN.  
**Autor:** Vranceanu, G.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26015>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Tenseurs harmoniques et groupes de mouvement d'un espace de RIEMANN

par G. VRANCEANU, Bucarest

On sait d'après des résultats dus à G. DE RHAM et W. HODGE<sup>1)</sup>, qu'étant donné un espace de RIEMANN compact orientable, le nombre des tenseurs harmoniques indépendants d'un certain ordre  $p$  qu'on peut construire dans l'espace, est égal au nombre de BETTI  $B_p$ . D'autre part on sait, d'après un théorème de K. YANO<sup>2)</sup> que chaque tenseur harmonique est un invariant par rapport à un mouvement de l'espace. Il y a donc une relation étroite entre le nombre  $r$  des paramètres du groupe de mouvement d'un espace  $V_n$  compact et les nombres de BETTI de cet espace. D'autre part, comme chaque tenseur harmonique est en même temps un tenseur à dérivée extérieure nulle, ou comme on dit encore un tenseur fermé, il y a une relation étroite entre le nombre des tenseurs fermés invariants et le groupe  $G_r$  de l'espace.

Dans la première partie nous allons donner certaines formules qui lient les tenseurs symétriques gauches avec le groupe de mouvement  $G_r$  de l'espace.

Dans la seconde partie nous allons supposer que l'espace est rapporté à un système de congruences orthogonales et nous allons montrer que dans le cas où l'espace possède un groupe de mouvement *simplement transitif* et l'on utilise les congruences orthogonales à coefficients de rotation constants<sup>3)</sup>, la recherche des tenseurs harmoniques de l'espace devient un problème algébrique, ce qui généralise un résultat de HODGE relatif aux espaces des groupes semi-simples.

## I

Etant donné un espace de RIEMANN  $V_n$ , défini comme une variété différentiable, dont la métrique dans un certain voisinage est donnée par la formule

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j, \quad (1)$$

on sait que si l'espace  $V_n$  est compact, il peut être couvert par un nombre fini de voisinages. Une certaine propriété est valable pour l'espace  $V_n$  compact, si elle est valable dans chacun de ces voisinages. Considérons alors un tenseur symétrique gauche quelconque  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  covariant d'ordre  $p$ . On sait qu'on peut

---

<sup>1)</sup> W. HODGE, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge Univ. Press, 1952.

<sup>2)</sup> K. YANO, *Curvature and BETTI numbers*, Annals of Math. Studies, Princeton 1953, p. 48-49.

<sup>3)</sup> G. VRANCEANU, *Sur les espaces de RIEMANN ayant leurs coefficients de rotation constants*, C. R. Paris, t. 184, 1929, p. 386-388.

former avec ce tenseur un tenseur symétrique gauche d'ordre  $p + 1$

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_{k \dots i_p}}{\partial x^{i_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{i_1 \dots k}}{\partial x^{i_p}} \quad (2)$$

qu'on appelle, la dérivée extérieure du tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$ . Si cette dérivée extérieure est nulle on dit que le tenseur est fermé.

Considérons maintenant un vecteur contrevariant  $\eta^i$ . On sait qu'un tel vecteur définit un groupe  $G_1$  continu à un paramètre, la transformation infinitésimale de ce groupe étant donné par la formule

$$x'^i = x^i + \eta^i \quad (3)$$

où  $\eta^i$  sont considérés comme des quantités du premier ordre. On peut former à l'aide du tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  et du vecteur  $\eta^i$  la dérivée de LIE

$$L \xi_{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} \eta^k + \xi_{s i_2 \dots i_p} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_1}} + \dots + \xi_{i_1 \dots s} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^{i_p}} \quad (4)$$

et cette dérivée est nulle si le tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  admet le groupe de mouvement  $G_1$ , ou comme on dit encore, s'il est invariant par le groupe  $G_1$ , ou bien par le mouvement (3).

D'autre part, on peut associer aux deux tenseurs  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  et  $\eta^i$  le tenseur symétrique gauche d'ordre  $p - 1$

$$b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} \eta^l. \quad (5)$$

Cela fait, nous avons les formules

$$\begin{aligned} L b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} \\ \Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} &= \eta^l \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} + L \xi_{i_1 \dots i_{p-1} k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour la démonstration, on remarque que la formule (4), si l'on utilise la formule (2) pour éliminer la dérivée de  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  par rapport à  $x^k$  devient la seconde formule (6) si l'on remarque que  $\Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}}$ , c'est-à-dire la dérivée extérieure du tenseur (5), peut encore s'écrire

$$\Delta_k b_{i_1 \dots i_{p-1}} = \frac{\partial}{\partial x^k} (\xi_{i_1 \dots i_{p-1} s} \eta^s) + \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} (\xi_{s \dots k} \eta^s) + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{i_{p-1}}} (\xi_{i_1 \dots s k} \eta^s) \quad (7)$$

et que nous avons

$$\eta^k \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-1} l} = - \eta^k \Delta_l \xi_{i_1 \dots i_{p-1} k}. \quad (8)$$

De même il en résulte facilement les premières formules (6).

Nous avons donc le théorème suivant:

*Etant donné un tenseur symétrique gauche d'ordre  $p$  fermé  $\xi_{i_1 \dots i_p}$ , invariant*

par rapport au mouvement  $\eta^i$ , le tenseur associé (5) est aussi fermé et invariant par rapport à  $\eta^i$ .

En prenant la dérivée covariante de la formule (5) par rapport à  $x^j$  nous avons

$$b_{i_1 \dots i_{p-1}, j} = \xi_{i_1 \dots i_{p-1} i} \eta^i_{, j} + \xi_{i_1 \dots i_{p-1} i, j} \eta^i. \quad (9)$$

Nous pouvons donc écrire la formule

$$a^{sj} b_{i_1 \dots i_{p-2} s, j} = a^{sj} \xi_{i_1 \dots i_{p-2} s i} \eta^i_{, j} + a^{sj} \xi_{i_1 \dots i_{p-2} s i, j} \eta^i. \quad (10)$$

Comme le tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  est harmonique si nous avons

$$a^{sj} \xi_{i_1 \dots i_{p-2} s i, j} = 0 \quad (11)$$

il en résulte que le premier membre de la formule (10) est aussi nul, donc le tenseur associé (5) est aussi harmonique, si le tenseur

$$I_{i_1 \dots i_{p-2}} = \xi_{i_1 \dots i_{p-2} s i} \eta^i_{, j} a^{sj} = \xi_{i_1 \dots i_{p-2} s i} a^{sl} a^{ik} \eta_{k, l} \quad (12)$$

est nul.

Considérons maintenant dans l'espace  $V_n$  un groupe  $G_r$  et soient  $\eta^i_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) les  $r$  vecteurs qui définissent les transformations infinitésimales du groupe. On sait alors que nous avons les formules

$$\eta^j_\alpha \frac{\partial \eta^i_\beta}{\partial x^j} - \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^i_\alpha}{\partial x^j} = c^e_{\alpha\beta} \eta^i_e \quad (13)$$

où  $c^e_{\alpha\beta}$  sont les constantes de structure du groupe.

Nous voulons montrer que les formules (6) peuvent se généraliser à un tenseur symétrique gauche quelconque  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  d'ordre  $p$  et deux vecteurs  $\eta^i_\alpha$ ,  $\eta^i_\beta$  et même à un nombre quelconque de vecteurs. En effet, on peut toujours considérer les tenseurs associés d'ordre  $p - 2$ ,

$$\xi_{i_1 \dots i_{p-2} \alpha \beta} = \xi_{i_1 \dots i_{p-2} i j} \eta^i_\alpha \eta^j_\beta. \quad (14)$$

Nous allons démontrer en premier lieu la formule

$$L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-1} \beta} = \eta^j_\beta L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-2} j} + \xi_{i_1 \dots i_{p-1} e} c^e_{\alpha\beta} \quad (15)$$

où nous avons posé  $\xi_{i_1 \dots i_{p-1} \beta} = \xi_{i_1 \dots i_{p-1} j} \eta^j_\beta$ . En effet nous avons, en accord avec les premières formules (6)

$$\begin{aligned} L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-1} \beta} &= \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_{p-2} j}}{\partial x^s} \eta^j_\beta \eta^s_\alpha + \xi_{i_1 \dots i_{p-1} j} \frac{\partial \eta^j_\beta}{\partial x^s} \eta^s_\alpha \\ &+ \xi_{s \dots i_{p-2} j} \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_1}} + \dots + \xi_{i_1 \dots s j} \eta^j_\beta \frac{\partial \eta^s_\alpha}{\partial x^{i_{p-1}}}. \end{aligned}$$

On voit que dans le second membre, les termes qui ont en facteur  $\eta_\beta^j$  constituent  $L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-1} j}$  sauf le dernier terme de  $L_\alpha$  qui manque. Donc, dans le second membre, en dehors du terme  $\eta_\beta^j L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-1} j}$  restent les termes

$$\xi_{i_1 \dots i_{p-1} j} \frac{\partial \eta_\beta^j}{\partial x^s} \eta_\alpha^s - \xi_{i_1 \dots i_{p-1} s} \frac{\partial \eta_\alpha^s}{\partial x^s} \eta_\beta^j.$$

En changeant  $s$  avec  $j$  dans le second de ces termes et en tenant compte des formules (13), il en résulte les formules (15), ce qui constitue une généralisation des premières formules (6).

Considérons maintenant  $q + 1$  vecteurs  $\eta_\alpha^i, \eta_{\alpha_1}^i, \dots, \eta_{\alpha_q}^i$  du groupe  $G_r$  et considérons le tenseur d'ordre  $p - q$

$$\xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} = \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} \quad (16)$$

Nous avons alors la formule

$$\begin{aligned} L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} &= \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} \\ &+ \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \rho \alpha_2 \dots \alpha_q} c_{\alpha \alpha_1}^\rho + \dots + \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \rho} c_{\alpha \alpha_q}^\rho. \end{aligned} \quad (17)$$

Pour la démonstration on remarque dans ce cas aussi que nous avons

$$\begin{aligned} L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} &= \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \frac{\partial \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q}}{\partial x^s} \eta_\alpha^s \\ &+ \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^s} [\eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q}] \\ &+ \left[ \xi_{s \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} \frac{\partial \eta_\alpha^s}{\partial x^{i_1}} + \dots + \xi_{i_1 \dots s j_1 \dots j_q} \frac{\partial \eta_\alpha^s}{\partial x^{i_{p-q}}} \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \right] \end{aligned} \quad (17')$$

On voit que les termes du second membre qui contiennent en facteur  $\eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q}$  représentent les  $n + 1 - q$  premiers termes de la dérivée de LIE  $L_\alpha \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q}$ . En faisant apparaître dans le second membre de (17') cette dérivée les autres termes du second membre de (17') s'écrivent

$$\begin{aligned} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^s} (\eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q}) \eta_\alpha^s - \xi_{i_1 \dots i_{p-q} s j_2 \dots j_q} \frac{\partial \eta_\alpha^s}{\partial x^{j_1}} \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \\ - \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots s} \frac{\partial \eta_\alpha^s}{\partial x^{j_q}} \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \end{aligned}$$

de façon qu'en tenant compte des formules (13) il en résulte les formules (17).

Supposons maintenant que les vecteurs  $\eta_{\alpha_1}^i, \dots, \eta_{\alpha_q}^i$  déterminent un groupe  $G_q$  à  $q$  paramètres, invariant dans  $G_r$ . En ce cas l'indice  $\rho$  dans les seconds membres des (17) peut prendre seulement les valeurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ . En tenant compte d'autre part de la gauche symétrie des  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  il en résulte que l'on

peut avoir des termes non nuls seulement si dans  $c_{\alpha\alpha_1}^{\rho}$  nous posons  $\rho = \alpha_1$ . Il en résulte donc que les formules (17) deviennent en ce cas

$$L_{\alpha}\xi_{i_1\dots i_{p-q}\alpha_1\dots\alpha_q} = \eta_{\alpha_1}^{j_1}\dots\eta_{\alpha_q}^{j_q}L_{\alpha}\xi_{i_1\dots i_{p-q}j_1\dots j_q} - h_{\alpha}\xi_{i_1\dots i_{p-q}\alpha_1\dots\alpha_q}, \quad (17'')$$

où nous avons posé

$$h_{\alpha} = c_{\alpha_1\alpha}^{\alpha_1} + \dots + c_{\alpha_q\alpha}^{\alpha_q}.$$

Nous avons donc le théorème:

*Etant donné un tenseur gauche symétrique  $\xi_{i_1\dots i_p}$  d'ordre  $p$  invariant par une transformation  $\eta_{\alpha}^i$  et un groupe  $G_q$  d'ordre  $q \leq p$ , invariant dans  $G_r$  le tenseur associé (16) au groupe  $G_q$  est aussi invariant par rapport à  $\eta_{\alpha}^i$ , si la quantité  $h_{\alpha}$  est nulle.*

On peut remarquer que les quantités  $h_{\alpha}$  sont nulles, si  $G_q$  est le groupe dérivé de  $G_r$  et si le vecteur de structure de  $G_r$  est nul.

Ecrivons maintenant les formules (14) sous la forme

$$\xi_{i_1\dots i_{p-2}\alpha\beta} = \eta_{\alpha}^i \xi_{i_1\dots i_{p-2}i\beta}, \quad (\xi_{i_1\dots i_{p-2}i\beta} = \xi_{i_1\dots i_{p-2}ij}\eta_{\beta}^j)$$

et prenons les dérivées extérieures. Nous avons en appliquant la seconde formule (6)

$$\Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-2}\alpha\beta} = \eta_{\alpha}^i \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-2}i\beta} + L_{\alpha} \xi_{i_1\dots i_{p-2}k\beta}.$$

En tenant compte des formules (6) nous obtenons la formule

$$\begin{aligned} \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-2}\alpha\beta} &= \eta_{\alpha}^i \eta_{\beta}^j \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-2}ij} + \eta_{\alpha}^i L_{\beta} \xi_{i_1\dots i_{p-2}ik} + \eta_{\beta}^j L_{\alpha} \xi_{i_1\dots i_{p-2}kj} \\ &+ \xi_{i_1\dots i_{p-2}k\ell} c_{\alpha\beta}^{\ell}. \end{aligned}$$

Considérons encore la dérivée extérieure d'un tenseur associé à trois vecteurs. Nous avons la formule

$$\Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-3}\alpha\beta\gamma} = \eta \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-3}i\beta\gamma} + L_{\alpha} \xi_{i_1\dots i_{p-3}k\beta\gamma}.$$

En tenant compte de la formule (17) et (18) nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-3}\alpha\beta\gamma} &= \eta_{\alpha}^i \eta_{\beta}^j \eta_{\gamma}^l \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-3}ijl} + \eta_{\beta}^j \eta_{\gamma}^l L_{\alpha} \xi_{i_1\dots i_{p-3}kjl} \\ &+ \eta_{\alpha}^i \eta_{\gamma}^l L_{\beta} \xi_{i_1\dots i_{p-3}ikl} + \eta_{\alpha}^i \eta_{\beta}^j L_{\gamma} \xi_{i_1\dots i_{p-3}ijk} + S \xi_{i_1\dots i_{p-3}k\ell\alpha} c_{\beta\gamma}^{\ell} \end{aligned}$$

où  $S$  signifie qu'on fait la somme des termes qui s'obtiennent par les permutations circulaires des indices  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Considérons maintenant la dérivée extérieure du tenseur (16). On peut écrire évidemment

$$\Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-q}\alpha_1\dots\alpha_q} = \eta_{\alpha_1}^i \Delta_k \xi_{i_1\dots i_{p-q}i\alpha_2\dots\alpha_q} + L_{\alpha_1} \xi_{i_1\dots i_{p-q}k\alpha_2\dots\alpha_q}. \quad (18')$$

Il s'agit maintenant de montrer que nous avons les formules

$$\begin{aligned} \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} &= \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} \Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots j_q} + \eta_{\alpha_2}^{j_2} \dots \eta_{\alpha_q}^{j_q} L_{\alpha_1} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k j_2 \dots j_q} \\ &+ \dots + \eta_{\alpha_1}^{j_1} \dots \eta_{\alpha_{q-1}}^{j_{q-1}} L_{\alpha_q} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} j_1 \dots k} + S \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \ell \alpha_s \dots \alpha_q} c_{\alpha_1 \alpha_2}^{\ell} \end{aligned} \quad (19)$$

où  $S$  signifie qu'on fait la somme des termes correspondants à toutes les combinaisons qui s'obtiennent de  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$  en associant à chaque paire  $\alpha_i, \alpha_j$  les autres  $n - 2, \alpha_s$  ( $s \neq i, j$ ) de façon que  $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_{s_1}, \dots, \alpha_{s_{q-2}}$  s'obtiennent de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  par une permutation paire.

Pour la démonstration on suppose que la formule (19) est vérifiée pour  $q - 1$  vecteurs. En ce cas, en tenant compte de la formule (18') et des formules (17) il en résulte que la formule (19) est aussi vérifiée pour  $q$  vecteurs. En effet, il est facile à vérifier que dans le second membre de (18') interviennent les termes du second membre de (18) qui contiennent la dérivée extérieure  $\Delta_k$  et les dérivées de LIE. En ce qui concerne les termes en  $c_{\beta\gamma}^{\alpha}$ , dans (18') ils s'écrivent

$$\eta_{\alpha_1}^i \bar{S} \xi_{i_1 b \dots i_{p-q} i k \ell \alpha_4 \dots \alpha_q} c_{\alpha_2 \alpha_3}^{\ell} + \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \ell \alpha_3 \dots \alpha_q} c_{\alpha_1 \alpha_2}^{\ell} + \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_2 \dots \ell} c_{\alpha_1 \alpha_q}^{\ell} \quad (19')$$

où  $\bar{S}$  signifie qu'on fait la somme par rapport à tous les couples formés avec  $\alpha_2, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ . Mais le premier terme peut aussi s'écrire

$$\bar{S} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \ell \alpha_1 \alpha_4 \dots \alpha_q} c_{\alpha_2 \alpha_3}^{\ell}$$

et il est facile à voir que la formule (19') coïncide avec la somme  $S$  de la formule (19).

Les formules (17) et (19) peuvent donc être considérées comme une généralisation des formules (6) et nous avons le théorème suivant:

*Etant donné un groupe  $G_r$  et un tenseur symétrique gauche  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  les différents tenseurs (16) associés au groupe, satisfont aux formules (17) et (19).*

Supposons maintenant que  $\eta_{\alpha_1}^i, \dots, \eta_{\alpha_q}^i$  déterminent un groupe  $G_q$ . En ce cas l'indice  $\rho$  dans les formules (19) peut prendre seulement les valeurs  $\alpha_i$ . D'autre part, en tenant compte de la symétrie gauche du tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  il résulte que la formule (19) s'écrit, dans le cas où ce tenseur est fermé et invariant,

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_{p-q} \alpha_1 \dots \alpha_q} = -c_{\alpha_1} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_2 \dots \alpha_q} + \dots (-1)^q c_{\alpha_q} \xi_{i_1 \dots i_{p-q} k \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}} \quad (20)$$

où nous avons posé  $c_{\alpha_i} = c_{\alpha_i}^{\alpha_i}$ , les  $c_{\alpha_i}$  étant les composantes du vecteur de structure du groupe  $G_q$ .

Nous avons donc le théorème:

Etant donné un tenseur gauche symétrique  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  fermé et invariant par rapport au groupe  $G_q$  le tenseur associé (16) est aussi fermé, si le vecteur de structure du groupe  $G_q$  est nul.

On sait que tous les groupes simples ou semi-simples de même que les groupes qui coïncident avec leur groupe dérivé ont le vecteur de structure nul. Il en résulte donc que si l'espace  $V_n$  possède un groupe à  $q$  paramètres à vecteur de structure nul et si nous avons un tenseur fermé invariant  $\xi_{i_1 \dots i_q}$ , les quantités

$$\xi_{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \eta_{\alpha_1}^{i_1} \dots \eta_{\alpha_q}^{i_q} \xi_{i_1 \dots i_q} \tag{20'}$$

sont des constantes, ce qui constitue une généralisation dans le cas d'un espace  $V_n$  compact du théorème de BOCHNER, qui correspond au cas  $q = 1$ .

## II

Supposons maintenant que l'on considère dans l'espace de Riemann  $V_n$  un système de  $n$  congruences orthogonales. Cela signifie que la métrique (1) a été écrite sous la forme canonique

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \dots + (ds^n)^2 \tag{21}$$

et que nous avons des formules de la forme

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, dx^i = \mu_a^i ds^a, \lambda_i^a \mu_b^i = \delta_b^a, a_{ij} = \lambda_i^a \lambda_j^a, a^{ij} = \mu_a^i \mu_a^j \tag{21'}$$

et l'on dit d'après RICCI et LEVI-CIVITA que  $\mu_a^i (a = 1, \dots, n)$  sont les paramètres des  $n$  congruences orthogonales et  $\lambda_i^a (a = 1, \dots, n)$  sont les moments. On dit aussi que  $ds^a$  sont les différentielles des arcs des congruences, car si toutes les  $ds^a$  sont nulles, sauf une, disons  $ds^1$ , alors nous avons un déplacement sur la première congruence.

Supposons maintenant que nous ayons une transformation (3) de l'espace  $V_n$ , donc que sont vérifiées les formules

$$La_{ii} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^x} \eta^k + a_{sj} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^i} + a_{is} \frac{\partial \eta^s}{\partial x^j} = 0. \tag{21''}$$

En tenant compte des formules (21') on peut écrire ces formules sous la forme

$$La_{ij} = \lambda_j^a L\lambda_i^a + \lambda_i^a L\lambda_j^a = 0 \tag{22}$$

où nous avons posé

$$L\lambda_i^a = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \eta^j + \lambda_j^a \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \tag{22'}$$

En multipliant par  $\mu_b^i, \mu_c^j$  et en sommant nous obtenons les formules

$$\mu_b^i L \lambda_i^c + \mu_c^i L \lambda_i^b = 0 \quad (23)$$

Supposons maintenant que l'espace  $V_n$  possède un groupe de mouvement simplement transitif  $G$  défini par les  $n$  vecteurs  $\eta_\alpha^i$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ). Nous avons alors des formules de la forme (13) où  $c_{\alpha\beta}^\rho$  ( $\alpha, \beta, \rho = 1, \dots, n$ ) sont les constantes de structure du groupe. En ce cas on peut choisir un système de congruences orthogonales dans l'espace  $V_n$  qui soient en même temps in-variantes par rapport au groupe  $G_n$ , donc de façon à avoir

$$L_\alpha \lambda_i^a = \frac{\partial \lambda_i^a}{\partial x^j} \eta_\alpha^j + \lambda_j^a \frac{\partial \eta_\alpha^j}{\partial x^i} = 0. \quad (24)$$

Il est facile à voir que les congruences ( $\lambda$ ) ainsi définies forment elles aussi par les vecteurs  $\mu_a^i$  un groupe simplement transitif  $H_n$  et on peut s'arranger de façon que  $H_n$  possède les mêmes constantes de structure que  $G_n$ , car les deux groupes sont réciproques<sup>1)</sup> et les coefficients de rotation de RICCI des  $n$  congruences ( $\lambda$ ) sont des constantes définies par les formules

$$\gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}(c_{bc}^a + c_{ca}^b + c_{ba}^c). \quad (24'')$$

Considérons maintenant un tenseur gauche symétrique  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  et soient  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  ses composantes sur les congruences ( $\lambda$ ). Nous avons alors les formules

$$\xi_{i_1 \dots i_p} = \xi_{a_1 \dots a_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p}, \quad \xi_{a_1 \dots a_p} = \xi_{i_1 \dots i_p} \mu_{a_1}^{i_1} \dots \mu_{a_p}^{i_p}.$$

Si l'on considère maintenant les dérivées extérieures, il est facile à voir qu'on obtient les formules

$$\Delta_k \xi_{i_1 \dots i_p} = \Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p} \lambda_k^a$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned} \Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} = & \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a_p}}{\partial s^a} - \frac{\partial \xi_{a \dots a_p}}{\partial s^{a_1}} - \dots - \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a}}{\partial s^{a_p}} \\ & + \xi_{j \dots a_p} w_{a_1 a}^j + \dots + \xi_{a_1 \dots j} w_{a p a}^j - \xi_{j a \dots a_p} w_{a_1 a_2}^j - \dots - \xi_{a_1 \dots j a} w_{a_{p-1} a p}^j \end{aligned} \quad (25)$$

les termes négatifs du second membre de (25) provenant du terme général

$$- \xi_{a_1 \dots a_{s-1} j \dots a_{q-1} a \dots a_p} w_{a_s a_q}^j$$

où  $s < q$ . En ce qui concerne les quantités  $w_{bc}^a$  elles sont les coefficients des covariants bilinéaires  $\Delta s^a$  des formes  $ds^a$  et nous avons

$$\Delta s^a = \delta ds^a - d\delta s^a = w_{bc}^a ds^b \delta s^c. \quad (26)$$

<sup>1)</sup> G. VRANCEANU, *Sur les espaces de RIEMANN ayant leurs coefficients de rotation constants*, C. R. 189, 1929, p. 386 et *Leçons de géométrie différentielle*, vol. I, 1947, p. 291.

Autrement dit  $\Delta s^a$  sont les dérivées extérieures des  $ds^a$ , exprimées à l'aide des formes  $ds^1, \dots, ds^n$ . On voit donc que la condition pour que le tenseur  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  soit fermé est donnée dans le système des congruences  $(\lambda)$  par la condition  $\Delta_a \xi_{a_1 \dots a_p} = 0$ . D'autre part en considérant la dérivée de LIE du tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  nous avons les formules

$$L \xi_{i_1 \dots i_p} = \left[ \frac{\partial \xi_{a_1 \dots a_p}}{\partial x^k} \eta^k + \xi_{f \dots a_p} \mu_{a_1}^i L \lambda_i^f + \dots + \xi_{a_1 \dots f} \mu_{a_p}^i L \lambda_i^f \right] \lambda_{i_1}^{a_1} \dots \lambda_{i_p}^{a_p}. \quad (26')$$

Supposons maintenant que l'espace  $V_n$  possède un groupe simplement transitif  $G_n$  et que les congruences  $(\lambda)$  sont invariantes par ce groupe. En ce cas comme nous avons montré plus haut que  $L_\alpha \lambda_i^f$  sont toutes nulles et  $w_{bc}^a$  sont égales aux constantes  $c_{bc}^a$  de la structure du groupe  $G_n$ , les équations (26') nous disent que le tenseur  $\xi_{i_1 \dots i_p}$  est invariant par le groupe  $G_n$ , si les composantes  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  sont toutes des constantes et la formule (25) nous dit que le tenseur  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  est en même temps fermé si nous avons les conditions

$$\xi_{fa_2 \dots a_p} c_{a_1 a}^f + \dots + \xi_{a_1 \dots f} c_{a_p a}^f - \xi_{fa \dots a_p} c_{a_1 a_2}^f - \dots - \xi_{a_1 \dots f a} c_{a_{p-1} a_p}^f = 0. \quad (27)$$

Nous avons donc le théorème:

*Etant donné un espace  $V_n$  possédant un groupe simplement transitif  $G_n$  la recherche des tenseurs gauches symétriques fermés et invariants, se réduit à la recherche des solutions des équations algébriques (27).*

Considérons maintenant les dérivées covariantes,  $\xi_{a_1 \dots a_p, a}$  du tenseur  $\xi_{a_1 \dots a_p}$ . En tenant compte que les composantes  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  sont des constantes et que les coefficients de la connexion dans le système des congruences  $(\lambda)$  sont  $\gamma_{bc}^a$  nous avons

$$\xi_{a_1 \dots a_p, a} = \xi_{f \dots a_p} \gamma_{a_1 a}^f + \dots + \xi_{a_1 \dots f} \gamma_{a_p a}^f \quad (27')$$

et il est facile à voir que l'on peut exprimer les formules (27) aussi sous la forme

$$\xi_{a_1 \dots a_p, a} - \xi_{a \dots a_p, a_1} - \dots - \xi_{a_1 \dots a, a_p} = 0.$$

En tenant compte que dans un système de congruences orthogonales les composantes du tenseur métrique sont  $\delta_b^a$  il en résulte qu'en posant dans les formules (27')  $a_1 = a$  et en contractant on obtient comme conditions pour que le tenseur soit harmonique

$$\xi_{fa_2 \dots a_p} \gamma_{aa}^f + \xi_{af \dots a_p} \gamma_{a_2 a}^f + \dots + \xi_{aa_2 \dots f} \gamma_{a_p a}^f = 0. \quad (28)$$

Les conditions (27) et (28) représentent donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le tenseur  $\xi_{a_1 \dots a_p}$  soit harmonique.

On voit aussi qu'une condition suffisante est que

$$\xi_{a_1 \dots a_p, a} = \xi_{f \dots a_p} \gamma_{a_1 a}^f + \dots + \xi_{a_1 \dots f} \gamma_{a_p a}^f = 0 \quad (28')$$

En tenant compte des formules (24'') nous obtenons

$$\gamma_{aa}^f = c_{af}^a = c_f$$

où  $c_f$  est ce qu'on appelle le vecteur de structure du groupe  $G_n$  et les équations (28) s'écrivent en tenant compte des formules (24'')

$$\xi_{f \dots a_p} c_f + \xi_{as \dots a_p} c_{as}^{a_2} + \dots + \xi_{aa_2 \dots s} c_{as}^{a_p} = 0 \quad (29)$$

où l'indice  $a$  est plus petit que  $s$ . Nous avons donc le théorème:

*Etant donné un espace  $V_n$  compact orientable possédant un groupe simplement transitif  $G_n$  la recherche des tenseurs harmoniques revient à la recherche des solutions des équations algébriques (27) et (29).*

Supposons maintenant que nous ayons un vecteur harmonique dont les composantes sur les congruences ( $\lambda$ ) sont  $\xi_a$ . Ce vecteur est fermé si nous avons conformément aux équations (27)

$$\xi_f c_{ab}^f = 0 \quad (30)$$

ces équations ne possédant pas des solutions si le groupe  $G_n$  coïncide avec son groupe dérivé. Il n'y a donc plus de vecteur harmonique et nous avons le théorème:

*Etant donné un espace  $V_n$  compact à groupe  $G_n$  qui coïncide avec son groupe dérivé, le nombre de BETTI  $B_1$  est nul.*

Si le groupe dérivé de  $G_n$  est un groupe  $G_{n-m}$  ( $m > 0$ ) les équations (30) possèdent  $m$  solutions. En tenant compte que les équations (29) s'écrivent

$$\xi_f c_f = 0 \quad (30')$$

il en résulte qu'une des solutions des équations (30) nous donne un vecteur harmonique si son produit scalaire avec le vecteur  $c_f$  est nul. Nous avons le théorème suivant:

*Le nombre de BETTI  $B_1$  d'un espace  $V_n$  compact à groupe  $G_n$  possédant un groupe dérivé  $G_{n-m}$  est égal à  $m - 1$  ou à  $m$ .*

En effet supposons que nous avons choisi les transformations infinitésimales  $X_\alpha f$  du groupe  $G_n$  de façon que  $X_\alpha f$  ( $\alpha = m + 1, \dots, n$ ) soient les transformations de  $G_{n-m}$ . En ce cas  $c_{ab}^h = 0$  ( $h = 1, \dots, m$ ) et le vecteur  $c_f$  est égal

à  $c_{\alpha f}^{\alpha}$ . Comme chaque vecteur  $(\xi_1, \dots, \xi_m, 0, \dots, 0)$  est fermé, ce vecteur est harmonique si nous avons

$$\xi_h c_h = 0, \quad (c_h = c_{\alpha h}^{\alpha}), \quad (h = 1, \dots, m) \quad (30'')$$

et le nombre de BETTI est égal à  $m - 1$  si  $c_h (h = 1, \dots, m)$  ne sont pas toutes nulles, autrement il est égal à  $m$ . Il en résulte en particulier que le nombre de BETTI  $B_1$  est égal à  $m$ , si le vecteur de structure du groupe  $G_n$  est nul.

Cherchons maintenant les tenseurs fermés du second ordre. Ils doivent satisfaire aux équations (27), qui en ce cas s'écrivent

$$\xi_{fb} c_{ac}^f + \xi_{fa} c_{cb}^f + \xi_{fc} c_{ba}^f = 0. \quad (31)$$

Pour que le tenseur soit harmonique il faut qu'il satisfasse aussi aux formules

$$\xi_{fb} c_f + \xi_{as} c_{as}^b = 0 \quad (a < s). \quad (32)$$

On peut maintenant remarquer que l'on peut toujours satisfaire aux formules (31) en posant

$$\xi_{fb} = a_h c_{fb}^h$$

où  $a_h$  sont des constantes quelconques, donc il en existe une infinité de tenseurs fermés du second ordre.

Pour qu'un tel tenseur soit harmonique il faut qu'il satisfasse aux formules (32) qui s'écrivent

$$a_h (c_{fb}^h c_f + c_{as}^h c_{as}^b) = 0. \quad (32')$$

Il faut donc que ce système possède des solutions dans  $a_h$ .

Supposons que nous avons une solution  $\xi_{ab}$ . On peut toujours par une transformation orthogonale à coefficients constants réduire le tenseur  $\xi_{ab}$  à la forme canonique où toutes les composantes sont nulles sauf  $\xi_{12}, \dots, \xi_{2q-1, 2q}$ , où  $2q \leq n$ . Nous allons supposer que  $2q < n$ . En ce cas si dans les équations (31) les indices  $b, c$  varient de  $2q + 1$  à  $n$ , nous avons les conditions

$$\xi_{2s-1, 2s} c_{\beta\gamma}^{2s} = 0, \quad \xi_{2s-1, 2s} c_{\beta\gamma}^{2s-1} = 0 \quad (\beta, \gamma > 2q)$$

où  $s$  est un indice fixe ayant les valeurs  $1, \dots, q$ . Cela nous dit qu'on doit avoir  $c_{\beta\gamma}^h = 0$  ( $h \leq 2q$ ) donc les opérateurs  $X_{\beta f}$  ( $\beta > 2q$ ) forment un sous-groupe à  $n - 2q$  paramètres du groupe  $G_n$ . Nous avons donc le théorème:

*Une condition nécessaire pour qu'un espace  $V_n$  à groupe simplement transitif  $G_n$  possède un tenseur harmonique d'ordre 2 et de rang  $2q$ , est que le groupe  $G_n$  possède un sous-groupe  $G_{n-2q}$ .*

Supposons cette condition vérifiée et supposons aussi que le groupe  $G_{n-2q}$  est un sous-groupe invariant. En ce cas on peut supposer dans les équations (31) que les indices  $a, b, c$  ont des valeurs plus petites que  $2q + 1$  et les formules (32) s'écrivent

$$\xi_{fb}c_f + \xi_{as}c_{as}^b = 0, \quad \xi_{as}c_{as}^\alpha = 0. \quad (33)$$

On voit que les équations (31) sont identiquement vérifiées si les opérateurs  $X_a f$  ( $a = 1, \dots, 2q$ ) forment un groupe abélien et les (33) sont alors vérifiées si  $c_f = 0$ . Nous avons donc le théorème :

*Une condition suffisante pour que l'espace  $V_n$  possède un tenseur arbitraire harmonique du second ordre et de rang  $2q$  est que le groupe  $G_n$  possède un sous-groupe invariant  $G_{n-2q}$ , un groupe complémentaire  $G_{2q}$  abélien et que le vecteur de structure de  $G_n$  soit nul.*

Supposons maintenant qu'on veut que le tenseur harmonique soit de rang 2, donc  $q = 1$ . En ce cas les équations (31) et (32) s'écrivent

$$\begin{aligned} \xi_{12}(c_{1\alpha}^1 + c_{2\alpha}^2) &= 0, & \xi_{12}c_1 + \xi_{12}c_{12}^2 &= 0 \\ \xi_{21}c_2 + \xi_{12}c_{12}^1 &= 0, & c_{12}^\alpha &= 0, \quad c_{\alpha\beta}^h = 0 \quad (\alpha, \beta = 3, \dots, n) \end{aligned}$$

donc  $X_1 f$  et  $X_2 f$  forment aussi un groupe. En tenant compte des valeurs de  $c_1, c_2$  nous avons les conditions

$$c_{\alpha 1}^\alpha = 0, \quad c_{\alpha 2}^\alpha = 0, \quad c_{1\alpha}^1 = -c_{2\alpha}^2.$$

Nous avons donc le théorème :

*Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace  $V_n$  à groupe simplement transitif  $G_n$  possède un tenseur harmonique du second ordre de rang 2 est que la structure du groupe  $G_n$  soit de la forme*

$$\begin{aligned} (X_1 X_2) &= aX_1 + bX_2, & (X_\beta X_\gamma) &= c_{\beta\gamma}^\rho X_\rho \quad (\alpha, \beta, \gamma, \rho > 2) \\ (X_1 X_\alpha) &= a_\alpha X_1 + b_\alpha X_2 + m_\alpha^\rho X_\rho, & (X_2 X_\alpha) &= c_\alpha X_1 - a_\alpha X_2 + n_\alpha^\rho X_\rho \end{aligned} \quad (34)$$

où  $m_\alpha^\alpha = n_\alpha^\alpha = 0$ . Il en résulte donc que si un espace  $V_n$  fermé orientable possède le groupe simplement transitif (34) le nombre de BETTI  $B_2$  est au moins égal à l'unité.

Supposons maintenant que le groupe  $G_n$  est un groupe semi-simple. On sait qu'en ce cas le tenseur symétrique

$$c_{hk} = c_{hp}^s c_{ks}^p$$

n'est pas dégénéré et si le groupe  $G_n$  est un groupe fermé, le tenseur  $c_{hk}$  est défini négatif. Si l'on suppose ce tenseur réduit à la forme canonique  $-\delta_k^h$

les constantes de structure  $c_{kl}^h$  sont gauches symétriques dans chaque paire d'indices. En tenant compte des formules (24''), il en résulte  $2\gamma_{kl}^h = c_{kl}^h$ . On dit alors que l'espace  $V_n$  est l'espace représentatif du groupe semi-simple  $G_n$ . Nous avons donc le théorème.

*La détermination des tenseurs harmoniques d'un espace  $V_n$  représentatif d'un groupe semi-simple fermé se réduit à la recherche des solutions des équations (27) et (29) avec  $c_j = 0$  et  $c_{kl}^h$  gauches symétriques dans chaque paire d'indices<sup>1)</sup>.*

En tenant compte du fait qu'un groupe  $G_n$  semi-simple coïncide avec son groupe dérivée, il en résulte, d'après un théorème démontré plus haut, que l'espace a le premier nombre de BETTI  $B_1$  nul, ce qui est bien connu. De même, pour démontrer que le nombre  $B_2$  est aussi nul, on observe qu'en multipliant les équations (31) par  $c_{ac}^h$  et en sommant par rapport à  $c$  et  $a$  nous avons en tenant compte de la gauche symétrie des  $c_{bc}^a$

$$c_{hj}\xi_{bj} + 2\xi_{ja}c_{js}^b c_{ha}^s = 0. \quad (35)$$

D'autre part en tenant compte des identités de LIE, nous avons

$$2\xi_{ja}c_{jc}^b c_{ha}^c = \xi_{ja}c_{aj}^s c_{sh}^b$$

dont le second membre est nul en vertu des formules (32) et du fait que nous avons  $c_j = 0$ . Les formules (35) se réduisent donc aux premiers termes et comme le déterminant  $|c_{hk}|$  est différent de zéro, il en résulte  $\xi_{bj} = 0$ , donc le nombre  $B_2$  est aussi nul.

Supposons maintenant qu'on considère les tenseurs fermés du troisième ordre. Dans ce cas les formules (27) et (29) s'écrivent

$$\begin{aligned} \xi_{jbc}c_{ad}^f + \xi_{ajc}c_{bd}^f + \xi_{abj}c_{cd}^f - \xi_{fac}c_{ab}^f - \xi_{jba}c_{ac}^f - \xi_{ajd}c_{bc}^f &= 0 \\ \xi_{asa_3}c_{a_3s}^{a_2} + \xi_{aa_2s}c_{a_3s}^{a_2} &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Si le groupe  $G_n$  semi-simple est fermé et le tenseur  $c_{hk}$  a été réduit à la forme canonique  $-\delta_k^h$  il est facile à voir que ces équations admettent la solution  $\xi_{jbc} = c_{bc}^j$ , car les premières équations (36) sont vérifiées à cause des identités de LIE du groupe  $G_n$  et les secondes à cause du fait que  $c_{a_2a_3} = 0$ . Il en résulte d'une manière très simple le résultat connu que le nombre  $B_3 \geq 1$ . D'autre part le calcul direct de tous les nombres de BETTI des groupes simples fait par HODGE montre que pour chaque groupe simple  $B_3 = 1$  donc nous avons  $B_3 = l$ , pour l'espace  $V_n$  à groupe  $G_n$  semi-simple et qui est le produit de  $l$  groupes simples.

Reçu le 20 février 1958

<sup>1)</sup> W. HODGE montre dans son livre, *Harmonic integrals*, p. 255, que les conditions suffisantes (28') sont aussi nécessaires dans le cas d'un espace  $V_n$  représentatif d'un groupe  $G_n$  semi-simple