

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	33 (1959)
<b>Artikel:</b>	Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels.
<b>Autor:</b>	Whitney, H. / Bruhat, F.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-26014">https://doi.org/10.5169/seals-26014</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels

par H. WHITNEY et F. BRUHAT

Ce n'est que depuis peu de temps que les ensembles analytiques dans le domaine réel ont fait l'objet d'études approfondies. La théorie des variétés de STEIN vient d'être transportée au cas des ensembles analytiques-réels « cohérents » par H. CARTAN [6], qui a montré que, dans  $R^n$ , un ensemble lieu des zéros d'un faisceau cohérent d'idéaux est «  $C$ -analytique », c'est-à-dire est la partie réelle d'un ensemble analytique-complexe, et est globalement définissable par l'annulation d'un nombre fini de fonctions analytiques-réelles. Par ailleurs, F. BRUHAT et H. CARTAN ont étudié dans [2] et [3] le cas général des ensembles analytiques-réels qui ne sont pas  $C$ -analytiques et ont montré que, si ces ensembles ont toujours de bonnes propriétés « locales » (i. e. sur un compact), ils peuvent avoir un comportement global très pathologique : en particulier, il n'existe pas toujours de « bonne » décomposition en composantes irréductibles.

Le but de ce travail est d'étudier la structure d'un ensemble  $C$ -analytique  $E$  (remarquons que localement, tout ensemble analytique-réel est  $C$ -analytique). Le premier théorème fondamental (prop. 6) donne une propriété minimale de  $E$  dans un voisinage fixe d'un point arbitraire de  $E$ . La démonstration repose sur une étude des propriétés de connexion locale de  $E$  (prop. 2). Comme conséquence, nous montrons d'une part que l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles  $C$ -analytiques est  $C$ -analytique, d'autre part qu'un ensemble  $C$ -analytique  $E$  dans  $R^n$  est la partie réelle d'un plus petit ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans un voisinage suffisamment petit de  $R^n$  dans  $C^n$ , ce qui nous permet de définir la « complexification »  $\hat{E}$  de  $E$ . Enfin, ceci entraîne l'existence et l'unicité d'une décomposition de  $E$  en composantes  $C$ -irréductibles, correspondant à la décomposition de  $E^*$ .

Ces résultats seront obtenus comme conséquences de l'étude, un peu plus générale, des germes d'ensembles analytiques-complexes au voisinage d'un sous-ensemble analytique-réel arbitraire.

Dans ces considérations,  $R^n$  peut être remplacée par n'importe quelle variété analytique-réelle paracompacte  $\Omega$  : pour cela, nous montrons au n° 1 comment construire une complexification  $\Omega^*$  de  $\Omega$ . Par ailleurs, H. GRAUERT vient de montrer que toute variété analytique-réelle peut être plongée analytiquement dans un espace euclidien [7]. Ceci montre en particulier que le résultat d'H. CARTAN rappelé ci-dessus est valable dans  $\Omega$ .

L'un des auteurs a récemment montré [9] comment une variété algébrique réelle peut être décomposée en réunion de sous-variétés plongées, par des considérations de dimension et de rang. Ceci se généralise au cas  $C$ -analytique, grâce aux notions de  $C$ -dimension et de  $C$ -rang. Quelques exemples illustrant les différences entre le cas complexe, le cas réel et le cas algébrique sont donnés à la fin.

Pour toutes les définitions et résultats relatifs aux sous-ensembles analytiques-complexes et analytiques-réels généraux, nous renverrons à [5], [6] et [8].

### 1. Complexification d'une variété analytique-réelle

Soit  $\Omega$  une variété analytique-réelle de dimension  $n$ : une *complexification* de  $\Omega$  est le couple formé d'une variété analytique-complexe de dimension  $n$ ,  $\Omega^*$  et d'un isomorphisme  $\varphi$  (analytique-réel) de  $\Omega$  sur une sous-variété analytique-réelle de  $\Omega^*$  tels que, pour tout point  $x$  de  $\Omega^*$ , il existe un isomorphisme (analytique-complexe) d'un voisinage ouvert  $U^*$  de  $x$  sur un ouvert  $U'$  de  $C^n$ , transformant  $\varphi(\Omega) \cap U^*$  en  $R^n \cap U'$ .

La proposition suivante assure l'existence et en quelque sorte l'unicité d'une telle complexification :

**Proposition 1.** *Si  $\Omega$  est paracompacte, elle possède des complexifications. Si  $(\Omega_1^*, \varphi_1)$  et  $(\Omega_2^*, \varphi_2)$  sont deux complexifications de  $\Omega$ , il existe un isomorphisme analytique-complexe d'un voisinage ouvert de  $\varphi_1(\Omega)$  dans  $\Omega_1^*$  sur un voisinage ouvert de  $\varphi_2(\Omega)$  dans  $\Omega_2^*$  prolongeant l'isomorphisme  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  de  $\varphi_1(\Omega)$  sur  $\varphi_2(\Omega)$ .*

*Démonstration*: l'unicité est facile: l'isomorphisme  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$  se prolonge en une application analytique  $\psi_1$  d'un voisinage ouvert  $A_1$  de  $\varphi_1(\Omega)$  dans  $\Omega_2^*$ , et on peut supposer que  $\psi_1$  est de rang  $n$  en tout point de  $A_1$ , donc que  $B_2 = \psi_1(A_1)$  est un voisinage ouvert de  $\varphi_2(\Omega)$ . On construit de même  $A_2$ ,  $\psi_2$ , et  $B_1$ . Posons  $C_1 = \psi_1^{-1}(A_2 \cap B_2)$ ;  $C_1$  est un ouvert sur lequel  $\psi_2 \circ \psi_1$  est définie. Comme  $\psi_2 \circ \psi_1$  est l'identité sur  $\varphi_1(\Omega)$ , il existe un voisinage ouvert  $D_1$  de  $\varphi_1(\Omega)$  sur lequel  $\psi_2 \circ \psi_1 = 1$ . On construit de même  $D_2$ : il est alors immédiat que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont deux isomorphismes réciproques entre  $D_1 \cap \psi_2(D_2)$  et  $D_2 \cap \psi_1(D_1)$ .

Démontrons maintenant l'existence d'une complexification: d'après les propriétés des variétés paracompactes, on peut trouver trois recouvrements ouverts de type fini de  $\Omega$ ,  $(V'_i)$ ,  $(U'_i)$  et  $(T'_i)$ , dépendant du même ensemble d'indices  $I$ , tels que  $V'_i$  (resp.  $U'_i$ ) soit relativement compact dans  $U'_i$  (resp.  $T'_i$ ) et qu'il existe un isomorphisme (pour les structures de variétés analytiques-réelles)  $\varphi_i$  de  $T'_i$  sur un ouvert  $T_i$  de  $R^n$ . Nous poserons:

$$U_i = \varphi_i(U'_i) \quad V_i = \varphi_i(V'_i) \quad (1)$$

$$U_{i,j} = \varphi_i(U'_i \cap U'_j) \quad V_{i,j} = \varphi_i(V'_i \cap V'_j) \quad T_{i,j} = \varphi_i(T'_i \cap T'_j). \quad (2)$$

L'isomorphisme  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  de  $T_{i,j}$  sur  $T_{j,i}$  se prolonge en un isomorphisme analytique-complexe  $\psi_{i,j}$  d'un voisinage ouvert  $T_{i,j}^*$  de  $T_{i,j}$  dans  $C^n$  sur un voisinage ouvert  $T_{j,i}^*$  de  $T_{j,i}$ . On peut supposer que  $T_{i,j}^*$  est vide si  $T_{i,j}$  l'est, que  $T_{i,j}^* \cap R^n = T_{i,j}$  et que :

$$\psi_{j,i} = \psi_{i,j}^{-1}. \quad (3)$$

Pour tout couple  $(i, j)$ , choisissons un ouvert  $U_{i,j}^*$  de  $C^n$ , relativement compact dans  $T_{i,j}^*$ , tel que  $\psi_{i,j}(U_{i,j}^*) = U_{j,i}^*$  et que :

$$U_{i,j}^* \cap R^n = U_{i,j} \quad \bar{U}_{i,j}^* \cap R^n = \bar{U}_{i,j}. \quad (4)$$

Comme  $\bar{V}_i \cap \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i})$  est un compact contenu dans  $U_{i,j}$ , on peut choisir un ouvert  $W_{i,j}^*$  de  $C^n$  relativement compact dans  $U_{i,j}^*$ , tel que  $\psi_{i,j}(W_{i,j}^*) = W_{j,i}^*$  et que :

$$\bar{V}_i \cap \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i}) \subset W_{i,j}^*. \quad (5)$$

De plus, les complémentaires de  $W_{i,j}^*$  dans  $\bar{V}_i$  et dans  $\psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i})$  sont des compacts disjoints de  $C^n$ , donc sont contenus dans des ouverts disjoints  $A_{i,j}^*$  et  $B_{i,j}^*$ . On a :

$$\bar{V}_i \subset (A_{i,j}^* \cup W_{i,j}^*) \quad \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i}) \subset (W_{i,j}^* \cup B_{i,j}^*). \quad (6)$$

Soit  $A_i^*$  un ouvert de  $C^n$  tel que :

$$A_i^* \cap R^n = V_i \quad \bar{A}_i^* \cap R^n = \bar{V}_i \quad (7)$$

$$A_i^* \subset (A_{i,j}^* \cup W_{i,j}^*) \quad (8)$$

pour tous les indices  $j$  (en nombre fini) tels que  $T_{i,j} \neq \emptyset$ .

On a :

$$\overline{\psi_{i,j}(A_i^* \cap U_{i,j}^*)} \cap R^n \subset \psi_{i,j}(\bar{V}_i \cap \bar{U}_{i,j}) \quad (9)$$

car  $\bar{A}_i^* \cap \bar{U}_{i,j}^*$  est un compact contenu dans  $T_{i,j}^*$ : par suite,  $\overline{\psi_{i,j}(A_i^* \cap U_{i,j}^*)}$  est contenu dans  $\psi_{i,j}(\bar{A}_i^* \cap \bar{U}_{i,j}^*)$ . Or on a

$$\psi_{i,j}(\bar{A}_i^* \cap \bar{U}_{i,j}^*) \cap R^n = \psi_{i,j}(\bar{A}_i^* \cap \bar{U}_{i,j}^* \cap R^n) = \psi_{i,j}(\bar{V}_i \cap \bar{U}_{i,j})$$

d'après (4) et (7).

Pour tout point  $x$  de  $U_i$ , choisissons un ouvert  $U_{i,x}^*$ , contenant  $x$ , et satisfaisant aux quatres conditions suivantes :

(10) pour tous les indices  $j$  (en nombre fini) tels que  $x$  appartienne à  $U_{i,j}$ , on a  $U_{i,x}^* \subset U_{i,j}^*$ ;

(11) pour tous les indices  $j$  (en nombre fini) tels que  $x \in \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i})$ , on a (cf. (6))  $U_{i,x}^* \subset (W_{i,j}^* \cup B_{i,j}^*)$ ;

(12) pour tout indice  $j$  tel que  $\varphi_i^{-1}(x) \notin \bar{V}'_j$ , on a  $U_{i,x}^* \cap \psi_{j,i}(A_j^* \cap U_{j,i}^*) = \emptyset$  (cette condition est trivialement satisfaite si  $U_{j,i}^* = \emptyset$ ; pour les indices  $j$  (en nombre fini) tels que  $U_{j,i}^* \neq \emptyset$ , elle est réalisable parce que, d'après (9),  $\varphi_i^{-1}(x) \notin \bar{V}'_j$  entraîne  $x \notin \overline{\psi_{j,i}(A_j^* \cap U_{j,i}^*)}$ );

(13) pour tous les couples  $(j, k)$  (en nombre fini) tels que  $x \in U_{i,j} \cap U_{i,k}$  (c'est-à-dire tels que  $\varphi_i^{-1}(x) \in U'_i \cap U'_j \cap U'_k$ ), on a

$$U_{i,x}^* \subset \psi_{j,i}(U_{j,i}^* \cap U_{j,k}^*) \cap \psi_{k,i}(U_{k,i}^* \cap U_{k,j}^*)$$

et de plus, on a  $\psi_{i,j} = \psi_{k,j} \circ \psi_{i,k}$  sur  $U_{i,x}^*$  (cette dernière condition étant réalisable, car on a  $\psi_{i,j} = \psi_{k,j} \circ \psi_{i,k}$  sur  $U_{i,j} \cap U_{i,k}$ ).

Soit alors  $U_i^*$  la réunion des  $U_{i,x}^*$  pour  $x$  décrivant  $U_i$  et soit  $V_i^*$  un voisinage ouvert de  $V_i$  dans  $C^n$ , contenu dans  $A_i^*$  et relativement compact dans  $U_i^*$ . D'après (7), on a  $V_i^* \cap R^n = V_i$  et  $\bar{V}_i^* \cap R^n = \bar{V}_i$ . Posons:

$$V_{i,j}^* = V_i^* \cap \psi_{j,i}(V_j^* \cap U_{j,i}^*) \text{ et } V_{i,j,k}^* = V_{i,j}^* \cap V_{i,k}^*. \quad (14)$$

On a  $V_{i,j}^* \subset U_{i,j}^*$  et  $\psi_{i,j}$  est un isomorphisme de  $V_{i,j}^*$  sur  $V_{j,i}^*$ . D'autre part, un point  $y$  de  $V_{i,j,k}^*$  est contenu dans un ouvert  $U_{i,x}^*$  pour un  $x \in U_i$  et cet ouvert  $U_{i,x}^*$  rencontre  $\psi_{j,i}(V_j^* \cap U_{j,i}^*)$  et  $\psi_{k,i}(V_k^* \cap U_{k,i}^*)$  donc a fortiori  $\psi_{j,i}(A_j^* \cap U_{j,i}^*)$  et  $\psi_{k,i}(A_k^* \cap U_{k,i}^*)$ . Ceci entraîne (d'après (12) et (2)) que  $x \in U_{i,j}^* \cap U_{i,k}^*$ , donc que  $\psi_{i,k}(y) \in U_{k,j}^* \cap V_k^*$  et que  $\psi_{k,j} \circ \psi_{i,k}(y) = \psi_{i,j}(y)$ . Par suite le point  $z = \psi_{i,j}(y)$  appartient à  $V_j^*$ , à  $\psi_{i,j}(V_i^* \cap U_{i,j}^*)$  et aussi à  $\psi_{k,j}(V_k^* \cap U_{k,j}^*)$ , c'est-à-dire finalement appartient à  $V_{j,i,k}^*$ .

Par suite, on a  $\psi_{i,j}(V_{i,j,k}^*) \subset V_{j,i,k}^*$  et de même,  $\psi_{j,i}(V_{j,i,k}^*) \subset V_{i,j,k}^*$ , ce qui entraîne (cf. (3)) que  $\psi_{i,j}$  est un isomorphisme de  $V_{i,j,k}^*$  sur  $V_{j,i,k}^*$ , d'inverse  $\psi_{j,i}$ . D'autre part, on a  $\psi_{i,j} = \psi_{k,j} \circ \psi_{i,k}$  sur  $V_{i,j,k}^*$ .

Considérons alors l'espace *somme* des  $V_i^*$  (remarquons que  $V_{i,i}^* = V_i^*$ ) et disons que deux points  $x \in V_i^*$  et  $y \in V_j^*$  sont *équivalents* si  $x \in V_{i,j}^*, y \in V_{j,i}^*$  et  $y = \psi_{i,j}(x)$ : il est immédiat d'après ce qui précède que la relation ainsi définie est bien une relation d'équivalence sur l'espace somme des  $V_i^*$ . L'espace topologique quotient, c'est-à-dire l'espace topologique  $\Omega^*$  obtenu par recollement des  $V_i^*$  le long des  $V_{i,j}^*$ , au moyen des isomorphismes  $\psi_{i,j}$ , est alors une «variété» analytique-complexe, a priori non nécessairement séparée. De plus, les isomorphismes  $\varphi_i$  définissent un isomorphisme (analytique-réel)  $\varphi$  de  $\Omega$  sur une sous-variété  $\varphi(\Omega)$  de  $\Omega^*$  et on vérifie facilement que  $\varphi(\Omega)$  est fermée et satisfait aux conditions imposées. La démonstration de la proposition 1 sera donc terminée quand nous aurons montré que  $\Omega^*$  est *séparée*.

Montrons tout d'abord que  $\bar{V}_{i,j}^* \subset U_{i,j}^*$ , et pour cela, que  $V_{i,j}^* \subset W_{i,j}^*$ . Il suffit naturellement de faire la démonstration quand  $T_{i,j} \neq \emptyset$ . Soit  $y \in V_{i,j}^*$ : comme  $V_{i,j}^* \subset V_i^* \subset U_i^*$ , il existe un  $x \in U_i$  tel que  $y \in U_{i,x}^*$ . Si  $x \notin \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i})$ , alors  $\varphi_i^{-1}(x) \notin \bar{V}'_j$  et par suite (condition (12))  $y \notin \psi_{j,i}(A_j^* \cap U_{j,i}^*)$  et a fortiori,  $y \notin \psi_{j,i}(V_j^* \cap U_{j,i}^*)$ , ce qui est contradictoire avec  $y \in V_{i,j}^*$  et la définition (14) de  $V_{i,j}^*$ . On a donc  $x \in \psi_{j,i}(\bar{V}_j \cap \bar{U}_{j,i})$ , ce qui entraîne d'après (11),  $y \in (W_{i,j}^* \cup B_{i,j}^*)$ . Comme, d'après (8),  $y \in V_i^* \subset A_i^* \subset (A_{i,j}^* \cup W_{i,j}^*)$  et que  $A_{i,j}^*$  et  $B_{i,j}^*$  sont disjoints, on a bien  $y \in W_{i,j}^*$ .

Soient alors  $x'$  et  $y'$  deux points distincts de  $\Omega^*$  et soient  $x \in V_i^*$  et  $y \in V_j^*$  tels que  $x'$  (resp.  $y'$ ) soit l'image canonique de  $x$  (resp.  $y$ ). Il est clair qu'il suffit de trouver un voisinage  $A$  de  $x$  dans  $V_i^*$  et un voisinage  $B$  de  $y$  dans  $V_j^*$  tels qu'aucun point de  $A$  ne soit équivalent à un point de  $B$ . Or si cela n'était pas possible, on pourrait trouver deux suites  $(x_k)$  et  $(y_k)$  de points de  $C^n$ , convergeant respectivement vers  $x$  et  $y$ , avec  $x_k \in V_{i,j}^*$ ,  $y_k \in V_{j,i}^*$  et  $x_k = \psi_{j,i}(y_k)$ . Comme  $\bar{V}_{i,j}^* \subset U_{i,j}^*$ , on a  $x \in U_{i,j}^*$ ,  $y \in U_{j,i}^*$  et  $x = \psi_{j,i}(y)$ , l'application  $\psi_{j,i}$  étant continue dans  $U_{j,i}^*$ . Par suite,  $y \in V_j^* \cap U_{j,i}^*$  et  $x \in V_i^* \cap \psi_{j,i}(V_j^* \cap U_{j,i}^*) = V_{i,j}^*$ , donc  $y \in V_{j,i}^*$  et comme  $y = \psi_{i,j}(x)$ , les points  $x$  et  $y$  sont équivalents et on a  $x' = y'$  contrairement à l'hypothèse. La démonstration est achevée.

*Remarque:* On peut choisir  $\Omega^*$  de telle sorte qu'il existe une involution anti-holomorphe  $z \rightarrow \bar{z}$  de  $\Omega^*$  sur elle-même,  $\varphi(\Omega)$  étant le lieu des points fixes de cette involution. On peut en effet supposer que  $\psi_{i,j}(\bar{x}) = \overline{\psi_{i,j}(x)}$  dans  $T_{i,j}^*$  ( $\bar{x}$  désignant le point de  $C^n$  de coordonnées complexes conjuguées de celles de  $x$ ), et il suffit alors (ce qui est possible) de choisir tous les ensembles envisagés dans  $C^n$  invariants par passage aux complexes conjugués.

## 2. Systèmes de coordonnées et standardisations propres

Soient  $\Omega^*$  une variété analytique-complexe de dimension  $n$ ,  $a$  un point de  $\Omega^*$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  un système de coordonnées valables dans un voisinage  $U^*$  de  $a$  et nulles en  $a$ . Une *standardisation* au voisinage de  $a$ , subordonnée à ce système de coordonnées, est la donnée de  $n$  applications  $F_j$  (pour  $0 \leq j \leq n-1$ ) de  $(R_+)^j$  dans  $R_+$ , où  $R_+$  désigne l'ensemble des nombres réels  $> 0$ : l'application  $F_0$  est donc une constante  $> 0$ . Un voisinage  $V^*$  de  $a$  sera dit *standardisé* s'il est contenu dans  $U^*$  et y est défini par les inégalités  $|x_i| < \varepsilon_i$  (pour  $1 \leq i \leq n$ ), où les nombres réels strictement positifs  $\varepsilon_i$  satisfont aux inégalités :

$$\varepsilon_i < F_{n-i}(\varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n). \quad (15)$$

Soit maintenant  $\Omega$  une variété analytique-réelle de dimension  $n$ , plongée dans une de ses complexifications  $\Omega^*$ ,  $\Omega$  étant le lieu des points fixes d'une involution antiholomorphe  $z \rightarrow \bar{z}$  de  $\Omega^*$ . Soit  $E^*$  un sous-ensemble analytique-complexe au voisinage d'un point  $a$  de  $\Omega$ . Un système de coordonnées  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  dans un voisinage  $U^*$  de  $a$ , nulles en  $a$ , sera dit *p-propre pour  $E^*$  au point  $a$*  si les  $p$  premières coordonnées d'un point quelconque de  $E^* \cap U^*$  distinct de  $a$  ne sont pas toutes nulles.

On sait (voir p. ex. [8]) que, si  $E^*$  est de dimension  $\leq p$ , on peut trouver des systèmes de coordonnées *p-propres* pour  $E^*$  au point  $a$ <sup>1)</sup>. On peut même se restreindre aux systèmes de coordonnées (que nous appellerons *réels*) pour lesquels toutes les coordonnées  $x_i$  sont réelles si et seulement si le point correspondant de  $U^*$  est dans  $\Omega$ .

Dans ce qui suit, nous identifierons  $C^q$  (pour  $0 \leq q \leq n$ ) avec le sous-espace de  $C^n$  formé des points dont les  $n - q$  dernières coordonnées sont nulles et nous désignerons par  $\pi_q$  la projection  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_q)$  de  $C^n$  sur  $C^q$ .

Soit  $U^*$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $\Omega^*$  dont l'image dans  $C^n$  par l'application qui à un point fait correspondre ses coordonnées soit un polydisque  $|x_i| < \eta_i$ . On sait [8] que, si  $\varphi$  est *p-propre* pour  $E^*$  au point  $a$  et si les  $\eta_i$  sont suffisamment petits, l'on a les résultats suivants :

a) pour chaque indice  $j = 1, \dots, n - p$ , il existe un polynôme distingué  $Q_j(X; x_1, \dots, x_p)$  à coefficients analytiques en  $(x_1, \dots, x_p)$  dans  $\pi_p(U^*)$ , sans facteurs multiples, tel que

$$Q_j(x_{p+j}; x_1, \dots, x_p) = 0 \quad \text{sur } E^* \cap U^*. \quad (16)$$

On désignera par  $\tilde{E}^*$  le sous-ensemble analytique-complexe de  $U^*$  défini par les équations (16)<sup>2)</sup>.

b) si  $\varphi$  est réel et si  $E^*$  est invariant par l'involution  $z \rightarrow \bar{z}$ , on peut choisir les  $Q_j$  eux aussi invariants, c'est-à-dire à coefficients réels quand les  $x_1, \dots, x_p$  sont réels.

c) il existe une standardisation subordonnée au système de coordonnées

<sup>1)</sup> Cette propriété est prise comme *définition* de la dimension dans [8]. Ici, nous conservons la définition usuelle de la dimension d'un ensemble analytique-complexe (cf. p. ex. [5]):  $E^*$  est de dimension  $\leq p$  si l'ensemble de ses points réguliers est une variété dont toutes les composantes connexes sont de dimension  $\leq p$ .

<sup>2)</sup> Les polynômes  $Q_j$  ne sont pas uniques, même en se restreignant aux polynômes de plus petit degré possible, sauf cependant si  $E^*$  est purement  $p$ -dimensionnel au voisinage de  $a$ , cas auquel les  $Q_j$  de degré minimum sont uniques ([8], Zusatz II, p. 273). Par suite, la définition de  $\tilde{E}^*$  dépend non seulement de  $E^*$  et de  $\varphi$ , mais aussi du choix des  $Q_j$ . Il en est de même de la notion de standardisation *p-propre* pour  $E^*$  en  $a$  et des ensembles  $D^*(E^*)$  et  $S^*(E^*)$  introduits plus bas. Par abus de langage, nous utiliserons souvent ces notions sans rappeler qu'elles dépendent du choix des polynômes  $Q_j$ .

donné, telle que  $F_i(\varepsilon_{i+1}, \dots, \varepsilon_n) < \eta_i$  si  $\varepsilon_j < \eta_j$  pour  $j > i$  et que, pour tout voisinage standardisé  $V^*$  de  $a$ , les racines du polynôme  $Q_j(X; x_1, \dots, x_p)$  pour  $(x_1, \dots, x_p) \in \pi_p(V^*)$  soient toutes inférieures en module à  $\varepsilon_{p+j}$ . Une telle standardisation sera dite *p-propre* pour  $E^*$  au point  $a$ .

d) supposons  $E^*$  de dimension  $p$  en  $a$  et soit  $E'^*$  (resp.  $E''^*$ ) la réunion des composantes irréductibles de dimension  $p$  (resp. de dimension  $< p$ ) de  $E^* \cap U^*$ . Soit  $D_1^*$  le sous-ensemble analytique lieu des zéros dans  $\pi_p(U^*)$  du produit des discriminants des polynômes  $Q_j$ . Posons :

$$D^*(E^*) = D_1^* \cup \pi_p(E''^*) \quad \text{et} \quad S^*(E^*) = E^* \cap \pi_p^{-1}(D^*(E^*)) \cap U^*. \quad (17)$$

$D^*(E^*)$  et  $S^*(E^*)$  sont des sous-ensembles analytiques-complexes de dimension  $\leq p - 1$  dans  $U^*$  et  $(E^* \cap U^*) - S^*(E^*)$  est ouvert et fermé dans  $\tilde{E}^* - (\tilde{E}^* \cap \pi_p^{-1}(D^*(E^*)))$ .

De plus, si l'on a un système de coordonnées  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$  qui soit *p-propre* en  $a$  relativement à un nombre fini de sous-ensembles analytiques-complexes  $E_i^*$  de dimension  $\leq p - 1$ , on peut, par un changement de variables portant uniquement sur les  $p$  premières coordonnées, remplacer  $\varphi$  par un système  $\varphi'$  qui soit  $(p - 1)$ -propre pour chaque  $E_i^*$ . En effet, la projection  $\pi_p$  est, d'après b), une application propre<sup>3</sup>) de  $F^* = (\bigcup E_i^*) \cap U^*$  sur  $\pi_p(F^*)$ ; par suite (cf. [8 bis])  $\pi_p(F^*)$  est un sous-ensemble analytique de dimension  $\leq p - 1$  dans  $\pi_p(U^*)$  et l'on peut trouver dans  $C^p$  un système de coordonnées  $(x'_1, \dots, x'_p)$  qui soit  $(p - 1)$ -propre pour  $\pi_p(F^*)$ : il est clair que le système  $\varphi' = (x'_1, \dots, x'_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$  est  $(p - 1)$ -propre pour chacun des  $E_i^*$ . Si  $\varphi$  est réel, on peut choisir  $\varphi'$  réel.

Soit maintenant  $E$  un sous-ensemble analytique-réel dans un voisinage de  $a$  dans  $\Omega$ . On sait (voir [1], [6]) qu'il existe un plus petit germe d'ensemble analytique-complexe (dans  $\Omega^*$ ) en  $a$ , dont l'intersection avec  $\Omega$  coïncide avec le germe de  $E$  en  $a$ . Par définition, la dimension de  $E$  en  $a$  est la dimension complexe de ce germe. Pour tout voisinage  $U^*$  suffisamment petit de  $a$  dans  $\Omega^*$ , il existe un plus petit ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans  $U^*$ , tel que  $E^* \cap \Omega = E \cap U^*$ ; la dimension de  $E^*$  est égale à la dimension de  $E$  en  $a$  et son germe en  $a$  est le complexifié du germe de  $E$  en  $a$ . Nous appellerons  $E^*$  le *complexifié* de  $E$  dans  $U^*$ : il est clair que  $\bar{E}^* = E^*$  (si  $\bar{U}^* = U^*$ ). Nous dirons qu'un système de coordonnées valable dans  $U^*$  est *p-propre pour E au point a* s'il l'est pour  $E^*$ . Si  $E$  est de dimension  $p$  (donc aussi  $E^*$ ), nous poserons :

$$S(E) = S^*(E^*) \cap \Omega.$$

$S(E)$  est un ensemble analytique-réel au voisinage de  $a$  dans  $\Omega$ . Enfin, si le

<sup>3</sup> Rappelons qu'une application est dite *propre* si l'image réciproque d'un compact est compacte.

système de coordonnées est convenablement choisi et le voisinage  $U^*$  suffisamment petit, nous définirons par récurrence les ensembles analytiques-réels  $S_k(E)$  (avec  $S_0(E) = E$  et  $S_1(E) = S(E)$ ) par :

$$S_k(E) = S(S_{k-1}(E)) .$$

Nous aurons besoin par la suite d'utiliser des systèmes de coordonnées qui soient adaptés à l'étude non seulement d'un sous-ensemble analytique (ou même d'une famille finie de sous-ensembles analytiques), mais aussi à l'étude d'un couple  $(E, F)$  de deux sous-ensembles analytiques,  $F$  étant contenu dans  $E$ , et à l'étude des points singuliers de  $E$ .

Soit donc  $(E, F)$  un couple d'ensembles analytiques-réels dans un voisinage de  $a$  dans  $\Omega$ ,  $F$  étant contenu dans  $E$ . Nous dirons que ce couple est *réduit* si l'on a  $\dim F < \dim E$ . Dans le cas général, nous appellerons *couple réduit associé* le couple obtenu ainsi : soit  $U^*$  un voisinage de  $a$  dans  $\Omega^*$ , suffisamment petit pour que  $E$  et  $F$  aient des complexifiés  $E^*$  et  $F^*$  dans  $U^*$ . Soit  $E'^*$  la réunion des composantes irréductibles de  $E^*$  dans  $U^*$  qui ne sont pas contenues dans  $F^*$ . On remplace le couple  $(E, F)$  par le couple  $(E', F')$  avec  $E' = E'^* \cap \Omega$  et  $F' = E' \cap F$  et on vérifie immédiatement que le couple  $(E', F')$  est réduit dans le voisinage  $U = U^* \cap \Omega$  de  $a$ .

Supposons donc le couple  $(E, F)$  réduit et posons  $p = \dim E$ . Nous allons définir par récurrence sur  $p$  les notions de *système de coordonnées propre* et de *standardisation propre* pour ce couple. Pour  $p = 0$ , n'importe quel système de coordonnées nulles en  $a$  est propre ; supposons donc la notion de système propre définie pour les couples de dimension  $< p$ . Un système  $\varphi$  sera propre s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(SP 1)  $\varphi$  est  $p$ -propre pour  $E$ , au point  $a$ .

Soit alors  $U^*$  un voisinage polycylindrique de  $a$  dans  $\Omega^*$ , suffisamment petit pour que  $E$  et  $F$  aient des complexifiés  $E^*$  et  $F^*$  dans  $U^*$  et que les conditions a) à d) soient satisfaites (pour  $E^*$ ). Posons :

$$D(E, F) = (D^*(E^*) \cup \pi_p(F^*)) \cap \Omega \quad (18)$$

$$T(E, F) = E \cap U^* \cap \pi_p^{-1}(D(E, F)) . \quad (19)$$

$D(E, F)$  et  $T(E, F)$  sont des sous-ensembles analytiques-réels de dimension  $\leq p - 1$  dans  $U = U^* \cap \Omega$  (remarquons que leur définition dépend du choix des polynômes  $Q_j$  de  $a$ ), du moins quand il n'y a pas de choix canonique de ceux-ci, c'est-à-dire quand  $E^*$  n'est pas purement  $p$ -dimensionnel). Nous pouvons alors poser la deuxième condition :

(SP 2)  $\varphi$  est propre pour les couples réduits associés aux couples  $(T(E, F), F)$  et  $(D(E, F), \emptyset)$ .

*Remarque.* Pour  $p = n$ , la condition (SP 1) est automatiquement satisfaite et (SP 2) signifie que  $\varphi$  est propre pour le couple  $(F, \emptyset)$ . D'autre part, si  $\varphi$  est propre pour le couple  $(E, \emptyset)$ , alors les ensembles  $S_k(E)$  (ou plus exactement leurs germes en  $a$ ) sont bien définis au voisinage de  $a$  (moyennant toujours des choix successifs pour les polynomes  $Q$ ) et le système  $\varphi$  est propre pour les couples  $(S_k(E), \emptyset)$ .

Reste à démontrer l'existence de systèmes propres. Plus précisément, nous allons démontrer par récurrence sur  $p$  le Lemme suivant, qui est évident pour  $p = 0$ :

**Lemme 1.** *Soit  $((E_i, F_i))_{i \in I}$  une famille finie de couples réduits au voisinage de  $a$ ; posons  $p = \sup \dim E_i$ . Soit  $\varphi$  un système de coordonnées  $p$ -propre pour chacun des  $E_i$ . On peut en déduire, par un changement de variables portant uniquement sur les  $p$  premières coordonnées et en restreignant au besoin le voisinage considéré du point  $a$ , un système de coordonnées propre pour chacun des couples  $(E_i, F_i)$  pour  $i \in I$ .*

Soit en effet  $J$  (resp.  $K$ ) l'ensemble des indices  $i \in I$  pour lesquels  $\dim E_i = p$  (resp.  $\dim E_i < p$ ): d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut, par un changement de variables portant uniquement sur les  $p$  premières coordonnées, déduire de  $\varphi$  un système de coordonnées qui soit  $p$ -propre pour les  $E_j$  ( $j \in J$ ) et  $(p - 1)$ -propre pour les  $E_k$  ( $k \in K$ ) ainsi que pour les  $D(E_j, F_j)$  (donc les  $T(E_j, F_j)$ ) pour  $j \in J$ , quitte naturellement à restreindre le voisinage considéré de  $a$ . Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

On voit que, pour vérifier qu'un système de coordonnées est propre, on est amené à introduire une famille finie de sous-ensembles analytiques-réels  $G_s$  de dimension  $k_s$  ( $0 \leq k_s \leq p$ ), le système  $\varphi$  étant propre si et seulement si il est  $k_s$ -propre pour chacun des  $G_s$ . Mais la définition même des  $G_s$  dépend de  $\varphi$  et de ses propriétés (ainsi que de choix pour les polynomes  $Q$ ) et se fait par récurrence descendante sur la dimension. Par exemple, les  $G_s$  de dimension  $p - 1$  seront définis en supposant  $\varphi$   $p$ -propre pour tous les  $E_i$  et seront d'une part les  $E_k$  de dimension  $p - 1$ , d'autre part les  $D(E_j, F_j)$  de dimension  $p - 1$  et enfin les ensembles de dimension  $p - 1$  obtenus en réduisant les couples  $(T(E_j, F_j), F_j)$ .

Si  $\varphi$  est propre, une standardisation subordonnée à  $\varphi$  sera dite *propre* pour la famille donnée si elle est  $k_s$ -propre pour chaque  $G_s$ . L'existence de telles standardisations est claire: il suffit de choisir pour chaque indice  $s$  une standardisation subordonnée à  $\varphi$  et  $k_s$ -propre pour  $G_s$  et de prendre la borne inférieure de ces standardisations.

### 3. Un résultat de connexion locale

Soit  $\Omega$  une variété analytique-réelle et soient  $a$  et  $b$  deux points de  $\Omega$ . Dans la suite de cet article, nous appellerons «arc analytique joignant  $a$  à  $b$ » une application continue  $\Gamma$  de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $\Omega$  telle que  $\Gamma(0) = a$ ,  $\Gamma(1) = b$  et telle que  $\Gamma$  soit analytique dans l'intervalle semi-ouvert  $[0, 1[$ . Un tel arc sera dit «contenu» dans un sous-ensemble  $X$  de  $\Omega$  si  $\Gamma(t) \in X$  pour  $0 \leq t < 1$ .

Le but de ce numéro est de démontrer le résultat suivant:

**Proposition 2<sup>4)</sup>.** *Considérons une famille finie de couples  $(E_i, F_i)$  de sous-ensembles analytiques-réels de  $\Omega$ ,  $F_i$  étant contenu dans  $E_i$ . Soit  $a$  un point de  $\Omega$ . Il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $\Omega$  tel que, pour tout indice  $i$ , tout point de  $(E_i - F_i) \cap V$  puisse être joint à  $a$  par un arc analytique contenu dans  $(E_i - F_i) \cap V$ .*

Cette proposition étant purement locale, on peut supposer que  $\Omega$  est un ouvert de  $R^n$  et qu'il existe un ouvert  $\Omega^*$  de  $C^n$ , avec  $\Omega = \Omega^* \cap R^n$ , tel que tous les  $E_i$  et les  $F_i$  admettent des complexifiés  $E_i^*$  et  $F_i^*$  dans  $\Omega^*$ . De plus on peut supposer la famille  $(E_i, F_i)$  réduite. Posons  $p = \sup \dim E_i$ . Nous allons, par récurrence sur le couple  $(n, p)$ , démontrer le résultat plus précis suivant: pour toute standardisation propre pour la famille  $(E_i, F_i)$ , on peut prendre pour  $V$  l'intersection avec  $\Omega$  de n'importe quel voisinage standardisé assez petit. Ceci est évident pour  $p = 0$ , quel que soit  $n$ . Supposons donc ce résultat démontré pour les couples  $(m, q)$  avec  $m < n$  ou avec  $m = n$  et  $q < p$ , et démontrons-le pour le couple  $(n, p)$ : on peut se borner au cas d'un seul couple  $(E, F)$ , avec  $\dim E = p$  et  $\dim F < p$ .

1er cas:  $p < n$ .

Par hypothèse, le système de coordonnées donné est  $p$ -propre pour  $E$  au point  $a$ ; soit alors  $U^*$  un voisinage polycylindrique de  $a$  dans  $\Omega^*$  assez petit pour que les conditions a) à d) du n° 2 soient satisfaites. Soit  $V^*$  un voisinage standardisé de  $a$  contenu dans  $U^*$ , posons  $V = V^* \cap \Omega$  et soit  $x \in (E - F) \cap V$ . Considérons les ensembles  $D(E, F)$  et  $T(E, F)$  définis par les formules (18) et (19). Si  $x \in T(E, F)$ , il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque par définition, la standardisation est propre pour le couple  $(T(E, F), F)$  et que  $\dim T(E, F) \leq p - 1$ .

Supposons donc  $x \notin T(E, F)$  et par suite  $\pi_p(x) \notin D(E, F)$ . Comme la standardisation donnée est propre pour le couple  $(D(E, F), \emptyset)$ , sa restric-

<sup>4)</sup> Cette proposition est à rapprocher du Théorème 1 de [2] et le principe de la démonstration en est analogue.

tion à  $C^p$  est propre pour le couple  $(\pi_p(U), D(E, F))$  (n° 2, Remarque). Puisque  $p < n$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et trouver un arc analytique  $\gamma$  joignant  $\pi_p(x)$  à  $a$ , contenu dans  $\pi_p(V)$  et ne coupant pas  $D(E, F)$ . Comme  $D(E, F)$  contient  $D^*(E^*) \cap \Omega$ , les discriminants des polynômes  $Q_j$  ne s'annulent pas le long de  $\gamma$ , donc leurs racines réelles sont simples, en nombre constant, donc analytiques le long de  $\gamma$ . On en déduit immédiatement l'existence d'un arc analytique unique  $\Gamma$  joignant  $x$  à  $a$ , contenu dans  $\tilde{E}^* \cap V$  et tel que  $\pi_p(\Gamma) = \gamma$ . Mais comme  $x \in E^*$  et que  $(E^* \cap U^*) - S^*(E^*)$  est ouvert et fermé dans  $\tilde{E}^* - (\tilde{E}^* \cap \pi_p^{-1}(D^*(E^*)))$ , cet arc  $\Gamma$  est contenu dans  $E^* \cap V = E \cap V$  et comme  $\gamma \cap \pi_p(F) = \emptyset$ , on a  $\Gamma \cap F = \emptyset$  et  $\Gamma$  répond à la question.

*2ième cas:*  $p = n$  (autrement dit,  $E$  est une composante connexe de  $\Omega$ ).

Montrons d'abord le résultat auxiliaire suivant: soit  $G$  un sous-ensemble analytique-réel au voisinage de  $a$ , de dimension  $q < n$ . Supposons la standardisation donnée propre pour le couple  $(G, \emptyset)$  et soit  $U^*$  un voisinage standardisé suffisamment petit pour que  $G$  ait un complexifié  $G^*$  dans  $U^*$ , satisfaisant aux conditions a) à d) du n° 2 (en remplaçant  $E^*$  par  $G^*$  et  $p$  par  $q$ ). Soit  $x$  un point de  $U = U^* \cap \Omega$  tel que  $x \notin G$ , que  $\pi_k(x) \in \pi_k(G^*)$  pour un entier  $k$  avec  $q \leq k < n$  et que  $\pi_q(x) \notin D(G) = D^*(G^*) \cap U$ . Dans ces conditions, il existe un arc analytique  $\Gamma$  joignant  $x$  à  $a$  dans  $U$  et tel que  $\pi_k(\Gamma) \subset \pi_k(G^*)$ , que  $\pi_q(\Gamma) \cap D(G) = \emptyset$  et que  $\Gamma \cap G = \emptyset$ . En effet, puisque  $\pi_q(x) \notin D(G)$  et que la standardisation donnée est propre par hypothèse pour le couple  $(D(G), \emptyset)$  donc pour le couple  $(\pi_q(U), D(G))$ , il existe par hypothèse de récurrence un arc analytique joignant  $\pi_q(x)$  à  $a$  dans  $\pi_q(U) - D(G)$ . Le long d'un tel arc  $\gamma$ , les racines réelles des polynômes  $Q_j$  sont simples, en nombre constant, analytiques et tendent vers zéro quand  $t \rightarrow 1$ . Par suite  $\pi_k(\tilde{G}^*) \cap \pi_q^{-1}(\gamma) \cap \Omega$  se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques disjoints joignant les différents points de  $\pi_k(\tilde{G}^*) \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(x)) \cap \Omega$  à  $a$ . Soit  $\gamma'$  celui de ces arcs qui est d'origine  $\pi_k(x)$ . On voit de même que  $\tilde{G}^* \cap \pi_k^{-1}(\gamma') \cap \Omega$  se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques disjoints  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  avec  $\pi_k(\Gamma_i(t)) = \gamma'(t)$ . Si  $r = 0$ , n'importe quel arc analytique  $\Gamma$  joignant  $x$  à  $a$  tel que  $\pi_k(\Gamma) = \gamma'$  répond à la question. Supposons  $r > 0$ : pour tout entier  $m = k + 1, \dots, n$ , les  $m$ -ièmes coordonnées de  $\Gamma_i(t)$  et de  $\Gamma_j(t)$  sont, pour  $i \neq j$ , ou bien toujours distinctes ou bien toujours égales. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  ces  $m$ -ièmes coordonnées rangées dans l'ordre croissant; posons  $\lambda_0(t) = -\varepsilon_m$  et  $\lambda_{s+1}(t) = \varepsilon_m$ . Il y a un indice  $j$  et un seul ( $0 \leq j \leq s$ ) tel que  $\lambda_j(0) \leq x_m < \lambda_{j+1}(0)$ : nous poserons:

$$x_m(t) = \lambda_j(t) + (1-t)c(\lambda_{j+1}(t) - \lambda_j(t)) \quad \text{pour } j > 0$$

et :

$$x_m(t) = \lambda_1(t) - (1-t)c(\lambda_1(t) - \lambda_0(t)) \quad \text{pour } j=0$$

la constante  $c$  étant déterminée par la condition  $x_m(0) = x_m$  (on a  $0 \leq c < 1$ ). Il est alors immédiat que l'arc  $t \rightarrow y(t)$  défini par  $\pi_k(y(t)) = \gamma'(t)$  et  $y_m(t) = x_m(t)$  pour  $k < m \leq n$  répond à la question. Notons que nous avons utilisé la condition c) du n° 2.

Soit alors  $V^*$  un voisinage standardisé de  $a$ ; tous les ensembles  $S_k = S_k(F)$  pour  $k \geq 0$  ont des complexifiés  $S_k^*$  dans  $V^*$  puisque la standardisation donnée est propre pour tous les  $S_k$  (n° 2, Remarque). Comme  $S_k = S^*(S_{k-1}^*) \cap \Omega$ , on a  $S_k^* \subset S^*(S_{k-1}^*)$ . Nous poserons  $q = \dim F$ , et  $q_k = \dim S_k$  pour  $k \geq 1$ . On a, d'après (17), pour tout entier  $r$  avec  $q \leq r \leq n$ :

$$F \cap \pi_r^{-1}(\pi_r(S^*(F^*))) = S(F). \quad (20)$$

Montrons, par récurrence sur  $k$ , que :

$$F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_k^*)) = S_k. \quad (21)$$

C'est évident pour  $k=0$ ; supposons (21) vraie pour la valeur  $k-1$ : on a  $F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_k^*)) \subset F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S^*(S_{k-1}^*))) \subset F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_{k-1}^*)) = S_{k-1}$ , et par suite  $F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_k^*)) = S_{k-1} \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_k^*)) \subset S_{k-1} \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S^*(S_{k-1}^*)))$ . Or en remplaçant  $F$  par  $S_{k-1}$  dans (20), on voit que  $S_{k-1} \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S^*(S_{k-1}^*))) = S_k$ , d'où immédiatement (21).

Soit enfin  $x$  un point de  $V = V^* \cap \Omega$ , n'appartenant pas à  $F$ , et soit  $k$  le plus grand entier tel que  $\pi_q(x) \in \pi_q(S_k^*)$  (remarquons que l'on a  $\pi_q(S_0^*) = \pi_q(F^*) \supset \pi_q(V^*)$ ). Comme  $\pi_q(x) \notin \pi_q(S_{k+1}^*)$ , on a

$$\pi_{q_k}(x) \notin \pi_{q_k}(S_{k+1}^*) \cap \Omega = D^*(S_k^*) \cap \Omega = D(S_k)$$

et le résultat auxiliaire démontré plus haut s'applique. Soit donc  $\Gamma$  un arc joignant  $x$  à  $a$  dans  $V$ , avec  $\pi_q(\Gamma) \subset \pi_q(S_k^*)$  et  $\Gamma \cap S_k = \emptyset$ . On a bien  $\Gamma \cap F = \emptyset$ , car si  $y \in \Gamma \cap F$ , on a  $\pi_q(y) \in \pi_q(\Gamma)$  donc  $y \in F \cap \pi_q^{-1}(\pi_q(S_k^*)) = S_k$  d'après (21) et  $y \in \Gamma \cap S_k$ , ce qui est impossible.

La démonstration est achevée.

#### 4. Ensembles analytiques-complexes au voisinage d'un ensemble analytique-réel

Soient  $\Omega^*$  une variété analytique-complexe et  $A$  un sous-ensemble analytique-réel de  $\Omega^*$ : le cas le plus important est celui où  $A$  est une variété analytique-réelle dont  $\Omega^*$  est une complexification. Soit  $E^*$  un sous-ensemble analytique-complexe de  $\Omega^*$ ; posons  $E = A \cap E^*$  et soit  $a$  un point de  $A$ .

**Proposition 3.** *Il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  dans  $A$  tel que, quel que soit le voisinage ouvert  $V^*$  de  $V$  dans  $\Omega^*$ , toute composante irréductible de  $E^* \cap V^*$  dans  $V^*$  qui rencontre  $V$ , passe par le point  $a$ .*

Soit  $E_p^*$  la réunion des composantes irréductibles de dimension  $p$  de  $E^*$  et soit  $\varphi$  un système de coordonnées au voisinage de  $a$  qui, pour tout  $p$ , soit  $p$ -propre pour  $E_p^*$ . Soit enfin  $U^*$  un voisinage de  $a$  dans  $\Omega^*$  tel que les conditions a) à d) du n° 2 soient satisfaites pour chacun des  $E_p^*$ . Nous désignerons par  $Q_j^p$  les polynômes de la condition a) associés à  $E_p^*$ , et poserons  $E_p = E_p^* \cap A$ .

Pour tout système  $S = (r_1, \dots, r_{n-p})$  de  $n - p$  entiers avec  $1 \leq r_j \leq$  degré de  $Q_j^p$ , désignons par  $E_{p,S}$  le sous-ensemble analytique-réel de  $U^*$  formé des points  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $E_p \cap U^*$  tels que  $x_{p+j}$  soit racine multiple d'ordre  $\geq r_j$  de  $Q_j^p(X; x_1, \dots, x_p)$ . Nous prendrons pour  $V$  un voisinage ouvert de  $a$  dans  $A$  tel que, pour tout  $p$  et tout système  $S$ , tout point de  $E_{p,S} \cap V$  puisse être joint à  $a$  par un arc analytique contenu dans  $E_{p,S} \cap V$ , l'existence d'un tel  $V$  résultant de la proposition 2.

Soit donc  $V^*$  un voisinage ouvert de  $V$  dans  $\Omega^*$  et soit  $F^*$  une composante irréductible de  $E^* \cap V^*$ : si  $\dim F^* = p$ ,  $F^*$  est aussi une composante irréductible de  $E_p^* \cap V^*$ . Supposons que  $F^*$  rencontre  $V$  en un point  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Soit  $r_j$  l'ordre de multiplicité de la racine  $b_{p+j}$  de  $Q_j^p(X; b_1, \dots, b_p)$  et soit  $\Gamma$  un arc analytique joignant  $b$  à  $a$  dans  $E_{p,S}$ , avec  $S = (r_1, \dots, r_{n-p})$ : il est clair qu'il suffit de démontrer que  $\Gamma(t) \in F^*$  pour  $t$  suffisamment petit, car on aura par prolongement analytique,  $\Gamma \subset F^*$  et par suite  $a \in F^*$ .

Or, pour tout indice  $j = 1, \dots, n - p$ , il existe un voisinage convexe  $B_j$  de  $(b_1, \dots, b_p)$  dans  $C^p$  et un nombre réel  $\varepsilon_j > 0$  tels que, pour  $(x_1, \dots, x_p) \in B_j$ , le polynôme  $Q_j^p(X; x_1, \dots, x_p)$  ait exactement  $r_j$  racines satisfaisant à  $|X - b_{p+j}| < \varepsilon_j$ . Soit  $B$  l'intersection des  $B_j$  et soit  $\widehat{B}$  l'ouvert de  $C^n$  formé des points  $x = (x_1, \dots, x_n)$  tels que  $\pi_p(x) \in B$  et  $|x_{p+j} - b_{p+j}| < \varepsilon_j$ : on peut supposer (quitte à diminuer les  $\varepsilon_j$  et les  $B_j$ ) que  $\widehat{B} \subset V^* \cap U^*$ . Comme  $F^*$  est de dimension  $p$  et que, pour tout  $y \in B$ ,  $F^* \cap \pi_p^{-1}(y)$  se compose d'un nombre fini de points,  $\pi_p(F^* \cap \widehat{B})$  est un sous-ensemble analytique-complexe de dimension  $p$  de  $B$ , donc coïncide avec  $B$ , qui est connexe.

Soit alors  $\mu$  un nombre réel  $> 0$  tel que  $\Gamma(t) \in \widehat{B}$  pour  $0 \leq t < \mu$ . Pour tout  $t$  avec  $0 \leq t < \mu$ , il existe un point  $z(t) \in F^* \cap \widehat{B}$  tel que  $\pi_p(\Gamma(t)) = \pi_p(z(t))$ . Mais comme la  $(p + j)$ -ième coordonnée de  $\Gamma(t)$  est racine multiple d'ordre  $\geq r_j$  de  $Q_j^p(X; \pi_p(\Gamma(t)))$ , elle est la seule racine de ce polynôme qui appartienne au cercle  $|X - b_{p+j}| < \varepsilon_j$ , et par suite, elle est égale à la  $(p + j)$ -ième coordonnée de  $z(t)$ , ce qui entraîne que  $\Gamma(t) = z(t)$  appartiennent à  $F^*$  et achève la démonstration.

Remarquons que si le germe de  $E^*$  en  $a$  est *irréductible*, il existe une seule composante irréductible de  $E^* \cap V^*$  qui rencontre  $V$ .

**Corollaire.** *Soit  $\Omega$  une variété analytique-réelle et soit  $f$  une fonction analytique-réelle sur  $\Omega$ . Pour tout point  $a$  de  $\Omega$ , il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $a$  tel que, si  $g$  est une fonction analytique sur  $V$  telle que  $g/f$  soit analytique au voisinage de  $a$ , alors  $g/f$  est analytique dans  $V$ .*

En effet, on peut supposer que  $\Omega$  admet une complexification  $\Omega^*$  et que  $f$  se prolonge en une fonction holomorphe, notée encore  $f$ , sur  $\Omega^*$ . Soit  $E^*$  le lieu des zéros de  $f$  dans  $\Omega^*$  et soit  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $\Omega$  possédant les propriétés exigées dans la proposition 3 (avec  $A = \Omega$ ). La fonction  $g$  se prolonge en une fonction holomorphe, notée encore  $g$ , sur un voisinage ouvert  $V^*$  de  $V$  dans  $\Omega^*$ . L'ensemble des points de  $V^*$  au voisinage desquels la fonction méromorphe  $g/f$  n'est pas holomorphe est un ensemble analytique-complexe de dimension  $n - 1$  contenu dans  $E^*$  et ne contient aucune des composantes irréductibles de  $E^* \cap V^*$  qui passent par  $a$ , donc ne rencontre pas  $V$ , et  $g/f$  est holomorphe au voisinage de tout point de  $V$ .

## 5. Germes d'ensembles analytiques-complexes au voisinage de $A$

Soient  $\Omega^*$  une variété analytique-complexe paracompacte et soit  $A$  un sous-ensemble analytique-réel de  $\Omega^*$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{G}(A)$  l'ensemble des «germes d'ensemble analytique-complexe au voisinage de  $A$ », ou plus brièvement des *A-germes*: un tel germe est représenté par un couple formé d'un voisinage ouvert  $V^*$  de  $A$  dans  $\Omega^*$  et d'un sous-ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans  $V^*$ , deux tels couples  $(V_1^*, E_1^*)$  et  $(V_2^*, E_2^*)$  définissant le même *A-germe* si et seulement si il existe un voisinage  $V_3^*$  de  $A$  dans  $\Omega^*$ , tel que  $E_1^* \cap V_3^* = E_2^* \cap V_3^*$ . Nous dirons que le *A-germe*  $Y$  est de dimension  $\leq p$  s'il existe un couple  $(V^*, E^*)$  définissant  $Y$ , avec  $E^*$  de dimension (complexe)  $\leq p$ , et que  $Y$  est de dimension  $p$  s'il est de dimension  $\leq p$  et n'est pas de dimension  $\leq p - 1$ . On désignera par  $\mathfrak{G}_p(A)$  l'ensemble des *A-germes* de dimension  $p$ .

Soit  $Y \in \mathfrak{G}(A)$  et soit  $V^*$  un voisinage de  $A$  suffisamment petit pour que la famille  $\mathfrak{F}$  des ensembles analytiques-complexes  $F^*$  tels que le couple  $(V^*, F^*)$  définisse  $Y$  ne soit pas vide. Soit  $Y^*$  l'intersection des  $F^*$  pour  $F^* \in \mathfrak{F}$ . Les germes des  $F^*$  en un point  $x \in A$  sont tous égaux, donc sont égaux au germe en  $x$  de l'ensemble analytique-complexe  $Y^*$ , ce qui montre que le couple  $(V^*, Y^*)$  définit aussi  $Y$ . Autrement dit, pour tout voisinage  $V^*$  suffisamment petit de  $A$ , il existe un *plus petit* ensemble analytique-complexe  $Y^*$  dans  $V^*$  tel que le couple  $(V^*, Y^*)$  définisse  $Y$ . On a  $\dim Y = \dim Y^*$ .

Posons en effet  $p = \dim Y^*$ . Il est clair que  $\dim Y \leq p$ ; supposons  $\dim Y < p$  et soit  $(W^*, E^*)$  un couple définissant  $Y$  avec  $\dim E^* < p$ . En tout point  $x \in A$ , le germe de  $Y^*$  en  $x$  est égal au germe de  $E^*$  en  $x$ , donc est de dimension  $< p$ . Par suite, le couple  $(V^*, F^*)$ , où  $F^*$  est la réunion des composantes irréductibles de dimension  $< p$  de  $Y^*$  dans  $V^*$ , définit lui aussi  $Y$ , ce qui contredit la minimalité de  $Y^*$ .

Soient  $Y_i$  ( $i = 1, 2$ ) des éléments de  $\mathfrak{G}(A)$  et soient  $(V_i^*, E_i^*)$  des couples représentant  $Y_i$ . La réunion  $Y_1 \cup Y_2$  (resp. l'intersection  $Y_1 \cap Y_2$ ) est le  $A$ -germe défini par le couple  $(V_1^* \cup V_2^*, (E_1^* \cup E_2^*) \cap V_1^* \cap V_2^*)$  (respectivement  $(V_1^* \cap V_2^*, E_1^* \cap E_2^*)$ ): il est clair que cette définition ne dépend pas des représentants choisis. On dira que  $Y_1 \subset Y_2$  si  $Y_2 = Y_1 \cup Y_2$ , ou encore si  $E_1^* \subset E_2^*$  au voisinage de  $A$ . Enfin  $Y$  est irréductible si on ne peut pas l'écrire comme réunion de deux  $A$ -germes  $Y_1$  et  $Y_2$ , tous les deux distincts de  $Y$ .

Par ailleurs, nous désignerons par  $G_p(\Omega^*)$  l'espace des germes analytiques-complexes irréductibles de dimension  $p$  aux différents points de  $\Omega^*$ , muni de sa topologie habituelle (voir [5], [8]): rappelons qu'un système fondamental d'ensembles ouverts  $\Gamma_p(U^*; E^*)$  est obtenu comme suit: pour tout couple  $(U^*, E^*)$  formé d'un ouvert  $U^*$  de  $\Omega^*$  et d'un sous-ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans  $U^*$ ,  $\Gamma_p(U^*, E^*)$  est l'ensemble des composantes irréductibles de dimension  $p$  des germes de  $E^*$  aux différents points de  $U^*$ . Soit  $G(\Omega^*)$  la somme topologique des  $G_p(\Omega^*)$ : on sait [5] que  $G(\Omega^*)$  est un espace topologique séparé, localement compact et localement connexe.

Soit  $\pi$  l'application canonique de  $G(\Omega^*)$  sur  $\Omega^*$ , qui à un germe au point  $a$ , fait correspondre le point  $a$  lui-même. Nous désignerons par  $G(A)$  le sous-espace  $\pi^{-1}(A)$  de  $G(\Omega^*)$ : comme  $\pi$  est continue, c'est un sous-espace fermé donc localement compact de  $G(\Omega^*)$ . On posera  $G_p(A) = G(A) \cap G_p(\Omega^*)$ :  $G(A)$  est la somme topologique des  $G_p(A)$ .

Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{G}(A)$ , provenant d'un couple  $(V^*, E^*)$ : il est immédiat que le sous-ensemble  $\Gamma_p(Y) = \Gamma_p(V^*; E^*) \cap \pi^{-1}(A)$  est un sous-ensemble ouvert et fermé de  $G_p(A)$ , qui ne dépend que de  $Y$  et non du couple  $(V^*, E^*)$  choisi. Nous poserons  $\Gamma(Y) = \cup \Gamma_p(Y)$ . Si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux éléments de  $\mathfrak{G}(A)$ ,  $Y_1 = Y_2$  est équivalent à  $\Gamma(Y_1) = \Gamma(Y_2)$ . D'autre part, si  $\xi$  et  $\eta$  sont deux points distincts de  $\Gamma(Y)$  tels que  $\pi(\xi) = \pi(\eta)$ , on ne peut pas avoir  $\xi \subset \eta$ , car deux composantes irréductibles du germe de  $E^*$  au point  $\pi(\xi)$  ne peuvent pas être contenues l'une dans l'autre, par définition même des composantes irréductibles.

*Remarque:* En un certain sens,  $\mathfrak{G}(A)$  et  $G(A)$ , avec toutes leurs structures, ne dépendent que de  $A$  et non de  $\Omega^*$ : plus précisément, si l'on a une autre variété analytique-complexe  $\Omega_1^*$  et un sous-ensemble analytique-réel  $A_1$  de  $\Omega_1^*$ , tels qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  d'un voisinage de  $A$  sur un voisinage

de  $A_1$ , avec  $\varphi(A) = A_1$ , il est clair que  $\varphi$  définit un isomorphisme naturel de  $\mathfrak{G}(A)$  sur  $\mathfrak{G}(A_1)$  et un isomorphisme naturel de  $G(A)$  sur  $G(A_1)$ , compatibles avec les applications  $\Gamma$  et  $\pi$  et avec toutes les opérations définies ci-dessus et ci-dessous. En particulier, si  $A$  est une variété analytique-réelle paracompacte  $\Omega$ , on peut parler des espaces  $\mathfrak{G}(\Omega)$  et  $G(\Omega)$  sans spécifier quelle complexification on a considérée pour les construire.

**Proposition 4.** *Pour qu'un sous-ensemble  $X$  de  $G_p(A)$  soit de la forme  $\Gamma(Y)$  pour un  $Y \in \mathfrak{G}_p(A)$ , il faut et il suffit que  $X$  soit ouvert et fermé et que la restriction de  $\pi$  à  $X$  soit propre<sup>3)</sup>.*

La nécessité de la condition est évidente, compte tenu de ce qui précède et du fait que la restriction de  $\pi$  à  $\Gamma_p(V^*, E^*)$  est propre. Réciproquement, soit  $X$  un ouvert et fermé de  $G_p(A)$  sur lequel  $\pi$  est propre. Soit  $x$  un point de  $A$  et soient  $e_1, \dots, e_r$  les éléments (en nombre fini) de  $X \cap \pi^{-1}(x)$ . Puisque  $X$  est ouvert, il existe un voisinage ouvert  $T_x^*$  de  $x$  et des ensembles analytiques-complexes  $E_i^*$  de dimension  $p$  dans  $T_x^*$  tels que  $E_i^*$  induise le germe  $e_i$  au point  $x$  et que  $\Gamma_p(T_x^*, E_i^*) \cap \pi^{-1}(A) \subset X$ . On peut même trouver un voisinage ouvert  $U_x^*$  de  $x$  dans  $\Omega^*$  tel que :

$$X \cap \pi^{-1}(U_x^*) = (\bigcup_i \Gamma_p(T_x^*, E_i^*)) \cap \pi^{-1}(U_x^* \cap A). \quad (22)$$

Sinon, il existerait une suite de points  $\xi_q \in X$  telle que  $\xi_q$  n'appartienne pas à la réunion des  $\Gamma_p(T_x^*, E_i^*)$  et que la suite des  $\pi(\xi_q)$  converge vers  $x$ . Comme  $\pi$  est propre sur  $X$ , on peut supposer que la suite  $\xi_q$  converge vers un point  $\xi \in X$ : on a  $\pi(\xi) = x$ , donc  $\xi$  est l'un des  $e_i$ , ce qui entraîne que  $\xi_q \in \Gamma_p(T_x^*, E_i^*)$  pour  $q$  assez grand, contrairement à l'hypothèse.

Comme  $\Omega^*$  est paracompacte, on peut trouver deux recouvrements  $(U_i^*)$  et  $(V_i^*)$  de type fini, plus fins que le recouvrement de  $\Omega^*$  formé des  $U_x^*$  et de l'ouvert  $\Omega^* - A$  et tels que  $V_i^*$  soit relativement compact dans  $U_i^*$ . Nous ne considérerons dans la suite que les ouverts  $V_i^*$  et  $U_i^*$  tels que  $V_i = V_i^* \cap A$  ne soit pas vide: ces ensembles  $V_i$  forment un recouvrement ouvert de  $A$  et dans chaque  $U_i^*$  (rencontrant  $A$ , donc contenu dans un ouvert  $U_x^*$ ), il existe d'après (22) un sous-ensemble analytique-complexe  $F_i^*$  de dimension  $p$  tel que :

$$X \cap \pi^{-1}(U_i^*) = \Gamma(F_i^*) \cap \pi^{-1}(A). \quad (23)$$

En tout point  $x \in A \cap U_i^* \cap U_j^*$ , les germes induits par  $F_i^*$  et  $F_j^*$  sont les mêmes, l'ensemble de leurs composantes irréductibles étant  $X \cap \pi^{-1}(x)$ . Il existe donc un voisinage  $U_{i,j}^* \subset U_i^* \cap U_j^*$  de  $A \cap U_i^* \cap U_j^*$  tel que  $F_i^* \cap U_{i,j}^* = F_j^* \cap U_{i,j}^*$  (on prend  $U_{i,j}^* = U_{j,i}^*$ ). Soit alors  $V_i'^*$  un ouvert

de  $\Omega^*$ , contenu dans  $V_i^*$ , et tel que  $V_i'^* \cap A = V_i$  et  $\bar{V}_i'^* \cap A = \bar{V}_i$  (l'existence d'un tel ouvert est une conséquence immédiate de la régularité de l'espace topologique  $\Omega^*$ ). Pour tout point  $x \in V_i$ , il existe un voisinage ouvert  $W_x^*$  de  $x$  dans  $\Omega^*$  possédant les propriétés suivantes :

$$W_x^* \subset V_i'^* \quad (24)$$

$$\text{si } x \notin \bar{V}_j, \text{ alors } W_x^* \cap V_j'^* = \emptyset \quad (25)$$

(en effet, si  $U_i^* \cap U_j^* = \emptyset$ , c'est une conséquence de (24) et pour les indices  $j$  (en nombre fini) tels que  $U_i^* \cap U_j^* \neq \emptyset$ , l'existence d'un tel voisinage résulte de ce que  $x \notin \bar{V}_j'^*$ );

$$\text{si } x \in V_j \text{ (avec } j \neq i), \text{ alors } W_x^* \subset U_{i,j}^* \quad (26)$$

(car  $U_{i,j}^*$  est un voisinage de  $V_i \cap V_j$ ).

Soit  $W_i^*$  la réunion des  $W_x^*$  pour  $x$  décrivant  $V_i$ : on a  $W_i^* \subset V_i'^* \subset U_i^*$  et  $W_i^* \cap W_j^* \subset U_{i,j}^*$ , ce qui entraîne l'existence d'un sous-ensemble analytique-complexe de dimension  $p$ ,  $F^*$ , dans  $W^* = \cup W_i^*$  (qui est un voisinage de  $A$ ) tel que  $F^* \cap W_i^* = F_i^* \cap W_i^*$ , donc tel que  $X \cap \pi^{-1}(V_i) = \Gamma(F^*) \cap \pi^{-1}(V_i)$ , d'où  $X = \Gamma(Y)$ ,  $Y$  étant le  $A$ -germe défini par  $F^*$ .

**Corollaire 1.** *Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{G}(A)$ , et soit  $X$  un sous-espace de  $\Gamma(Y)$ . Pour qu'il existe un  $A$ -germe  $Z \in \mathfrak{G}(A)$  tel que  $X = \Gamma(Z)$ , il faut et il suffit que  $X$  soit ouvert et fermé dans  $\Gamma(Y)$ .*

La nécessité de la condition est évidente. Réciproquement si  $X$  est ouvert et fermé dans  $\Gamma(Y)$ , il existe pour tout entier  $p$  un germe  $Z_p$  tel que  $\Gamma(Z_p) = X \cap G_p(A)$ . Soit  $Z$  la réunion des  $Z_p$ : on a  $\Gamma(Z) \subset \cup \Gamma(Z_p)$  et même  $\Gamma(Z) = \cup \Gamma(Z_p)$  (donc  $\Gamma(Z) = X$ ) car, pour tout point  $x \in A$ ,  $\Gamma(Z) \cap \pi^{-1}(x)$  est la réunion des  $\Gamma(Z_p) \cap \pi^{-1}(x)$  puisque deux germes distincts au point  $x$  appartenant tous les deux à  $\Gamma(Y)$ , ne peuvent pas être contenus l'un dans l'autre.

**Corollaire 2.** *Pour qu'un  $A$ -germe  $Y \in \mathfrak{G}(A)$  soit irréductible, il faut et il suffit que  $\Gamma(Y)$  soit connexe.*

En effet, si  $Y = Y_1 \cup Y_2$  avec  $Y_1$  et  $Y_2$  distincts de  $Y$ , alors  $\Gamma(Y)$  est réunion des deux ouverts et fermés distincts de lui-même  $\Gamma(Y) \cap \Gamma(Y_1)$  et  $\Gamma(Y) \cap \Gamma(Y_2)$ . Inversement, si  $\Gamma(Y) = X_1 \cup X_2$ ,  $X_1$  et  $X_2$  étant des ouverts et fermés, distincts de  $\Gamma(Y)$ , il existe des germes  $Z_1$  et  $Z_2$  distincts de  $Y$  tels que  $\Gamma(Z_1) = X_1$  et  $\Gamma(Z_2) = X_2$  et l'on a  $Y = Z_1 \cap Z_2$ .

**Proposition 5.** *Soit  $Y$  un  $A$ -germe, irréductible de dimension  $p$ . Si un  $A$ -germe  $Z$  est contenu dans  $Y$ , ou bien  $Z = Y$  ou bien  $Z$  est de dimension  $< p$ .*

En effet,  $\Gamma_p(Z)$  est un ouvert et fermé contenu dans  $\Gamma(Y)$ , qui est connexe : donc ou bien cet ouvert est vide, et  $Z$  est de dimension  $< p$ , ou bien  $\Gamma_p(Z) = \Gamma(Y)$  et par suite  $Z = Y$  (remarquons que l'on a  $\Gamma(Y) = \Gamma_p(Y)$ ).

Soit  $U$  un ouvert de  $A$  et soient  $\mathfrak{G}(U)$  et  $G(U)$  les espaces de germes construits à partir de  $U$  considéré comme sous-ensemble analytique-réel d'un voisinage ouvert  $U^*$  de  $U$  dans  $\Omega^*$  tel que  $U^* \cap A = U$ : ces espaces ne dépendent pas du choix de  $U^*$ . L'espace  $G(U)$  s'identifie à un sous-espace ouvert de  $G(A)$  et on a une application canonique de  $\mathfrak{G}(A)$  dans  $\mathfrak{G}(U)$ , qui, à un  $A$ -germe défini par un couple  $(V^*, E^*)$  fait correspondre le  $U$ -germe défini par le couple  $(V^* \cap U^*, E^* \cap U^*)$ .

**Proposition 6.** *Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{G}(A)$  et soit  $x$  un point de  $\pi(\Gamma(Y))$ . Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $A$  tel que, si le germe au point  $x$  d'un élément  $Z$  de  $\mathfrak{G}(U)$  contient le germe de  $Y$  au point  $x$ , alors  $Z$  contient l'image canonique de  $Y$  dans  $\mathfrak{G}(U)$ .*

En effet, soit  $(V^*, E^*)$  un couple définissant le  $A$ -germe  $Y$ . D'après la proposition 3, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $A$  tel que, pour tout voisinage ouvert  $U^*$  de  $U$  dans  $\Omega^*$ , toutes les composantes irréductibles de  $E^* \cap U^*$  qui rencontrent  $U$ , passent par  $x$ . Soit alors  $(U^*, F^*)$  un couple définissant  $Z$ : toutes les composantes irréductibles de  $E^* \cap U^*$  qui rencontrent  $U$  sont contenues dans  $F^*$ , ce qui entraîne que le germe de  $E^*$  en un point quelconque de  $U$  est contenu dans le germe de  $F^*$  en ce point, d'où la proposition.

**Corollaire.** *Soit  $\alpha$  un élément de  $G(A)$ . Il existe un voisinage de  $\alpha$  qui est contenu dans tout ensemble ouvert et fermé de  $G(A)$  contenant  $\alpha$ .*

En effet, soit  $V$  un voisinage ouvert de  $x = \pi(\alpha)$  dans  $A$  tel qu'il existe un élément  $Y \in \mathfrak{G}(V)$  avec  $\Gamma(Y) \cap \pi^{-1}(x) = \{\alpha\}$ . Soit  $U$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $V$  satisfaisant aux conditions exigées dans la proposition 6 (en remplaçant  $A$  par  $V$ ). Pour tout ensemble  $X$  ouvert et fermé dans  $G(A)$ , contenant  $\alpha$ ,  $X \cap \Gamma(Y)$  est de la forme  $\Gamma(Z)$  avec  $Z \in \mathfrak{G}(V)$  (Corollaire 1 à la proposition 4) et le germe de  $Z$  en  $x$  contient le germe de  $Y$  en  $x$ . Par suite,  $X$  contient le voisinage fixe  $\Gamma(Y) \cap \pi^{-1}(U)$  de  $\alpha$  dans  $G(A)$ .

## 6. Intersections, réunions et composantes irréductibles des $A$ -germes

**Proposition 7.** *Soit  $(Y_i)$  une famille filtrante décroissante d'éléments de  $\mathfrak{G}(A)$ . La famille  $(Y_i)$  est localement stationnaire, autrement dit, pour tout point  $x \in A$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  dans  $A$  et un indice  $i_x$  tels que les images canoniques de  $Y_i$  et de  $Y_j$  dans  $\mathfrak{G}(U_x)$  coïncident pour  $i, j \geq i_x$ . De plus, il existe un*

*A-germe  $Y$  et un seul, appelé intersection des  $A$ -germes  $Y_i$ , tel que le germe de  $Y$  au point  $x \in A$  soit l'intersection des germes des  $Y_i$  en  $x$ .*

En effet, la famille filtrante décroissante des germes induits par les  $Y_i$  au point  $x \in A$  est stationnaire: soit  $i_x$  un indice tel que les germes au point  $x$  de  $Y_i$  et  $Y_j$  coïncident pour  $i, j \geq i_x$ . D'après la proposition 6, il existe un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  dans  $A$  tel que, pour  $i \geq i_x$ , l'image canonique de  $Y_i$  dans  $\mathfrak{G}(U_x)$  contienne donc soit égale à l'image de  $Y_{i_x}$ . Soit  $\alpha_x$  le germe de  $Y_i$  en  $x$ , pour  $i \geq i_x$ , et soit  $X$  l'ensemble des  $\alpha_x$  non vides. On a pour tout  $x \in A$ ,  $X \cap \pi^{-1}(U_x) = \Gamma(Y_{i_x}) \cap \pi^{-1}(U_x)$ , ce qui entraîne immédiatement que  $X$  est ouvert et fermé et que  $\pi$  est propre sur  $X$ . Par suite, pour tout entier  $p$ ,  $X \cap G_p(A)$  est de la forme  $\Gamma(Y_p)$  avec  $Y_p \in \mathfrak{G}_p(A)$ . Soit  $Y$  la réunion des  $Y_p$ . Comme  $\Gamma(Y_p) \cap \pi^{-1}(U_x) = \Gamma(Y_i) \cap \pi^{-1}(U_x) \cap G_p(A)$  pour  $i \geq i_x$ , et que deux germes au point  $x$  distincts appartenant à  $\Gamma(Y_i)$  ne sont pas contenus l'un dans l'autre, on a  $\Gamma(Y) = \cup \Gamma(Y_p)$  et le germe de  $Y$  au point  $x$  est égal au germe de  $Y_i$  en  $x$  pour  $i \geq i_x$ , c'est-à-dire à l'intersection des germes des  $Y_i$  au point  $x$ .

**Corollaire 1.** *Pour toute famille  $(Y_i)$  d'éléments de  $\mathfrak{G}(A)$ , il existe un  $A$ -germe  $Y$  et un seul, appelé intersection des  $Y_i$ , tel que le germe de  $Y$  en un point  $x$  de  $A$  soit l'intersection des germes des  $Y_i$  en  $x$ .*

Il suffit d'appliquer la proposition à la famille filtrante décroissante des intersections finies d'éléments  $Y_i$ .

**Corollaire 2.** *Soit  $B$  un sous-ensemble de  $A$ . Il existe un plus petit  $A$ -germe  $Y \in \mathfrak{G}(A)$  tel que  $\pi(Y) \supset B$ .*

Il suffit d'appliquer le Corollaire 1 à la famille des  $A$ -germes  $Y_i$  tels que  $\pi(Y_i) \supset B$ .

Nous dirons qu'une famille  $(Y_i)$  de  $A$ -germes est *localement finie* si, pour tout point  $x \in A$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $A$  tel que  $\Gamma(Y_i) \cap \pi^{-1}(U) = \emptyset$  sauf pour un nombre fini d'indices.

**Proposition 8.** *Soit  $(Y_i)$  une famille localement finie d'éléments de  $\mathfrak{G}(A)$ . Il existe un  $A$ -germe  $Y$  et un seul, appelé réunion des  $Y_i$ , tel que le germe de  $Y$  en un point  $x$  de  $A$  soit la réunion des germes des  $Y_i$  en  $x$ .*

Considérons la famille filtrante croissante  $(Z_j)$  formée des réunions finies de germes  $Y_i$ : cette famille est localement stationnaire. Soit  $X$  l'ensemble des points  $\alpha \in G(A)$  tels que  $\alpha$  appartienne à  $\Gamma(Z_j)$  pour  $j$  assez grand. Pour tout point  $x \in A$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  dans  $A$  et un indice  $j_x$  tels que  $X \cap \pi^{-1}(U_x) = \Gamma(Z_j) \cap \pi^{-1}(U_x)$  pour  $j \geq j_x$ . Par suite,  $X$  est ouvert

et fermé et  $\pi$  est propre sur  $X$ . Il existe donc des  $A$ -germes  $Y_p$  tels que  $\Gamma(Y_p) = X \cap G_p(A)$  et on voit comme plus haut que, si  $Y$  désigne la réunion des  $Y_p$ , on a  $\Gamma(Y) = \cup \Gamma(Y_p) = X$ , ce qui entraîne que le germe de  $Y$  en un point  $x$  est égal au germe de  $Z$ , pour  $j \geq j_x$ , c'est-à-dire est la réunion des germes des  $Y_i$  au point  $x$ .

**Corollaire 1.** *Si un  $A$ -germe irréductible  $Y$  est réunion d'une famille localement finie de  $A$ -germes  $Y_i$ , alors  $Y = Y_i$  pour au moins un indice  $i$ .*

Soit en effet  $x$  un point de  $\pi(\Gamma(Y))$  et soient  $Z_1, \dots, Z_r$  ceux des  $Y_i$  (en nombre fini) tels que  $x \in \pi(\Gamma(Y_i))$ . Soit  $Z$  la réunion des  $Z_k$  et soit  $T$  la réunion de la famille (localement finie) formée par les autres  $Y_i$ . On a  $Y = Z \cup T$  et  $T \neq Y$  d'où  $Y = Z$  et même (par récurrence sur  $r$ )  $Y = Z_k$  pour au moins un indice  $k$ .

**Corollaire 2.** *Soit  $Y \in \mathfrak{G}(A)$ . Si  $Y$  est irréductible, il existe un couple  $(V^*, E^*)$  définissant  $Y$  tel que  $E^*$  soit irréductible dans  $V^*$ .*

Soit en effet  $(V^*, F^*)$  un couple définissant  $Y$ . Décomposons  $F^*$  en composantes irréductibles  $E_i^*$  dans  $V^*$  et soit  $Y_i$  le  $A$ -germe défini par  $E_i^*$ . La famille  $(E_i^*)$ , donc la famille  $(Y_i)$  sont localement finies et  $Y$  est réunion des  $Y_i$ . On a donc  $Y = Y_i$  pour au moins un indice  $i$ , ce qui montre que  $Y$  peut être défini par l'un des  $E_i^*$ .

*Remarque.* Les opérations de réunion et d'intersection finies ou non dans  $\mathfrak{G}(A)$  se traduisent par les mêmes opérations sur les germes en chaque point : elles possèdent donc les mêmes propriétés de distributivité et d'associativité que les opérations ensemblistes.

Nous pouvons maintenant démontrer l'existence, pour tout  $A$ -germe, d'une «bonne» décomposition en composantes irréductibles :

**Proposition 9.** *Soit  $Y$  un élément de  $\mathfrak{G}(A)$ . Il existe une famille localement finie et une seule de  $A$ -germes irréductibles  $Y_i \in \mathfrak{G}(A)$  telle que  $Y = \cup Y_i$  et  $Y_i \not\subset Y_j$  pour  $i \neq j$ . Les  $\Gamma(Y_i)$  sont les composantes connexes de  $\Gamma(Y)$  et par suite  $\Gamma(Y) = \cup \Gamma(Y_i)$ .*

Naturellement, les  $Y_i$  seront appelés les composantes irréductibles de  $Y$ .

L'unicité se démontre par un raisonnement purement latticiel classique, compte tenu du Corollaire 1 à la proposition 8. Pour l'existence, nous aurons besoin du Lemme suivant :

**Lemme 2. (H. CARTAN)** *Soit  $T$  un espace topologique. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) les composantes connexes de  $T$  sont ouvertes (et fermées);

- b) pour tout point  $t \in T$ , il existe un voisinage de  $t$  contenu dans tout ensemble ouvert et fermé contenant  $t$ ;
- c) pour tout point  $t \in T$ , l'intersection des ensembles ouverts et fermés contenant  $t$  est ouverte (et fermée).

*Démonstration du Lemme:* a)  $\Rightarrow$  b): il suffit de prendre pour voisinage de  $t$  la composante connexe de  $t$ .

b)  $\Rightarrow$  c): si  $s$  appartient à l'intersection des ouverts et fermés contenant  $t$ , ces derniers sont exactement les ouverts et fermés contenant  $s$  et leur intersection est un voisinage de  $s$ .

c)  $\Rightarrow$  a): l'intersection des ouverts et fermés contenant  $t$  est un ensemble ouvert et fermé *connexe* donc est la composante connexe de  $t$ .

Ceci étant, comme l'espace  $\Gamma(Y)$  satisfait à la condition b) du Lemme 2 (corollaire à la proposition 6), les composantes connexes de  $\Gamma(Y)$  sont ouvertes et fermées, donc sont de la forme  $\Gamma(Y_i)$  (corollaire 1 à la proposition 4) et les  $Y_i$  sont irréductibles (corollaire 2 à la proposition 4). Supposons que  $Y_i$  soit contenu dans  $Y_j$ , et soit  $\alpha \in \Gamma(Y_i)$ : il existe un  $\beta \in \Gamma(Y_j)$  tel que  $\alpha \subset \beta$ . Mais comme  $\alpha$  et  $\beta$  appartiennent à  $\Gamma(Y)$ , ceci entraîne  $\alpha = \beta$ , donc  $\Gamma(Y_i) \cap \Gamma(Y_j) \neq \emptyset$  et par suite  $\Gamma(Y_i) = \Gamma(Y_j)$ ,  $Y_i = Y_j$ , donc  $i = j$ . Par suite  $Y_i \not\subseteq Y_j$  pour  $i \neq j$ .

Pour tout compact  $K$ ,  $\Gamma(Y) \cap \pi^{-1}(K)$  est compact, donc ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes (ouvertes) de  $\Gamma(Y)$ , ce qui montre que la famille  $(Y_i)$  est localement finie, donc admet une réunion  $Z$ . Comme pour tout point  $x \in A$ , les composantes irréductibles des germes en  $x$  des différents  $Y_i$  ne sont jamais contenues les unes dans les autres, on a  $\Gamma(Z) = \bigcup \Gamma(Y_i) = \Gamma(Y)$ , et par suite  $Y = Z$ , ce qui achève la démonstration.

## 7. Sous-ensembles $C$ -analytiques

Soit  $\Omega$  une variété analytique-réelle paracompacte et soit  $\Omega^*$  une complexification de  $\Omega$ , que nous supposerons munie d'une involution  $z \rightarrow \bar{z}$  de lieu de points fixes  $\Omega$  (n° 1, Remarque). Nous avons vu que les espaces  $\mathfrak{G}(\Omega)$  et  $G(\Omega)$  associés à  $\Omega$  plongée dans  $\Omega^*$  sont en réalité indépendants du choix de  $\Omega^*$ . Par ailleurs, l'involution  $z \rightarrow \bar{z}$  de  $\Omega^*$  donne une involution  $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$  dans  $G(\Omega)$  et une involution  $Y \rightarrow \bar{Y}$  dans  $\mathfrak{G}(\Omega)$ . On a  $\Gamma(\bar{Y}) = \overline{\Gamma(Y)}$ ,  $\pi(\bar{\alpha}) = \overline{\pi(\alpha)}$  et ces involutions respectent les opérations de réunion et d'intersection.

**Définition.** Un sous-ensemble  $E$  de  $\Omega$  est dit  $C$ -analytique s'il existe un élément  $Y \in \mathfrak{G}(\Omega)$  tel que  $E = \pi(\Gamma(Y))$  (autrement dit  $E$  est l'ensemble des points  $x$  de  $\Omega$  tels que le germe de  $Y$  au point  $x$  ne soit pas vide).

On peut encore dire que  $E$  est  $C$ -analytique si et seulement si il existe un voisinage  $V^*$  de  $\Omega$  dans  $\Omega^*$  et un sous-ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans  $V^*$  tels que  $E = E^* \cap \Omega$ ; on peut supposer (en remplaçant  $E^*$  par  $E^* \cap \bar{E}^*$ ) que l'on a  $\bar{E}^* = E^*$ . Par suite, *un sous-ensemble C-analytique est analytique-réel*, la réciproque étant inexacte<sup>5)</sup>.

Les sous-ensembles  $C$ -analytiques ont été introduits, dans le cas  $\Omega = R^n$ , par H. CARTAN, qui a démontré la proposition suivante ([6], proposition 15), dont nous redonnerons la démonstration dans le cas général :

**Proposition 10.** *Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\Omega$ . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $E$  est  $C$ -analytique ;
- b)  $E$  est le lieu des zéros d'un faisceau cohérent d'idéaux  $\mathfrak{F}$  ;
- c)  $E$  est le lieu des zéros communs à un nombre fini (qu'on peut prendre égal à 1) de fonctions analytiques-réelles sur  $\Omega$ .

a)  $\Rightarrow$  b): soit  $E^*$  un sous-ensemble analytique-complexe dans un voisinage  $V^*$  de  $\Omega$ , tel que  $\bar{E}^* = E^*$  et que  $E = E^* \cap \Omega$  et soit, pour  $x \in V^*$ ,  $I_x^*(E^*)$  l'idéal des germes de fonctions holomorphes et nulles sur  $E^*$  au voisinage de  $x$ . On sait que les  $I_x^*(E^*)$  forment un faisceau cohérent d'idéaux (voir [4] ou [5]). Pour  $x \in \Omega$ , soit  $I_x(E^*)$  l'idéal des germes de fonctions analytiques-réelles en  $x$ , qui se prolongent en des fonctions analytiques-complexes appartenant à  $I_x^*(E^*)$ : il est immédiat que les  $I_x(E^*)$  forment un faisceau cohérent d'idéaux  $\mathfrak{J}(E^*)$  qui admet  $E$  comme lieu de zéros.

b)  $\Rightarrow$  a): On peut en effet ([6], proposition 2 et 5) prolonger le faisceau  $\mathfrak{F}$  en un faisceau cohérent (analytique-complexe)  $\mathfrak{F}^*$  dans un voisinage  $V^*$  de  $\Omega$ . Le lieu des zéros de  $\mathfrak{F}^*$  est un sous-ensemble analytique-complexe  $E^*$  tel que  $E = E^* \cap \Omega$ .

a)  $\Rightarrow$  c): On peut supposer d'après [7] que  $\Omega$  est une sous-variété plongée dans un espace  $R^N$ , et que  $\Omega^*$  est une sous-variété analytique-complexe dans un voisinage  $B$  de  $R^N$  dans  $C^N$ . On peut de plus choisir pour  $B$  un domaine d'holomorphie ([6], proposition 1) et supposer qu'il existe un ensemble analytique-complexe  $E^*$  dans  $B$  avec  $\bar{E}^* = E^*$  et  $E = E^* \cap \Omega$ . Or tout ensemble analytique-complexe dans une variété de STEIN, donc dans un domaine d'holomorphie, est définissable par un nombre fini d'équations globales d'où immédiatement c).

c)  $\Rightarrow$  a): Si  $E$  est défini par un système fini d'équations analytiques  $f_i = 0$ , les  $f_i$  se prolongent simultanément en des fonctions analytiques-complexes sur

<sup>5)</sup> Par exemple, les sous-ensembles analytiques-réels définis aux exemples 1, 2 et 3 de [3] ainsi que les ensembles  $F_k$  définis au no 11, ex. a), ne sont pas  $C$ -analytiques.

un voisinage  $V^*$  de  $\Omega$  et le lieu de leurs zéros communs dans  $V^*$  est un sous-ensemble analytique-complexe  $E^*$  tel que  $E = E^* \cap \Omega$ .

Soit  $E$  un sous-ensemble  $C$ -analytique de  $\Omega$ . D'après le Corollaire 2 à la proposition 7, il existe un *plus petit* germe  $Y \in \mathfrak{G}(\Omega)$  tel que  $E = \pi(\Gamma(Y))$ : ce germe sera appelé *complexifié* de  $E$  et noté  $\hat{E}$ . Comme  $\pi(\Gamma(\bar{\hat{E}})) = \pi(\Gamma(\hat{E}))$ , on a  $\bar{\hat{E}} = \hat{E}$ . Soit  $E^*$  un sous-ensemble analytique-complexe dans un voisinage  $V^*$  de  $\Omega$ , tel que le couple  $(V^*, E^*)$  définit le germe  $\hat{E}$ . Le faisceau  $\mathfrak{J}(E^*)$  sur  $\Omega$  ne dépend que de  $\hat{E}$  et non du choix de  $E^*$ : nous le noterons  $\mathfrak{J}(\hat{E})$ . Soit alors  $\mathfrak{F}$  un faisceau cohérent d'idéaux sur  $\Omega$ , dont le lieu des zéros contienne  $E$ : nous dirons que  $\mathfrak{F}$  est «nul sur  $E$ ». Le faisceau  $\mathfrak{F}$  se prolonge en un faisceau cohérent  $\mathfrak{F}^*$  sur un voisinage de  $\Omega$  et  $\mathfrak{F}^*$  est nul sur  $E^*$  au voisinage de  $\Omega$ . Donc,  $\mathfrak{F}^*$  est contenu dans  $\mathfrak{J}^*(E^*)$  au voisinage de  $\Omega$ , et par suite  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{J}(\hat{E})$ . On voit donc que  $\mathfrak{J}(\hat{E})$  est le *plus grand faisceau cohérent* d'idéaux nul sur  $E$ . Remarquons qu'en général  $\mathfrak{J}(\hat{E})$  n'est pas le faisceau des germes de fonctions analytiques-réelles nulles sur  $E$ : il faut et il suffit pour cela que ce dernier faisceau soit cohérent, c'est-à-dire que  $E$  soit cohérent au sens de [6], et il existe des ensembles  $C$ -analytiques et même algébriques qui ne sont pas cohérents (voir [6], n° 9).

## 8. Propriétés des ensembles $C$ -analytiques

L'*intersection*  $E$  d'une famille quelconque d'ensembles  $C$ -analytiques  $E_i$  est encore  $C$ -analytique. En effet, soit  $Y = \cap \hat{E}_i$ ; pour tout point  $x \in \Omega$ , le germe  $Y_x$  de  $Y$  en  $x$  est l'intersection des germes  $(\hat{E}_i)_x$  des  $\hat{E}_i$  en  $x$  (Corollaire 1 à la proposition 7). Or, dire que  $x \in E$  signifie qu'aucun des  $(\hat{E}_i)_x$  n'est vide, ce qui équivaut à  $Y_x$  non vide ou encore à  $x \in \pi(\Gamma(Y))$ ; on a donc  $E = \pi(\Gamma(Y))$  et  $E$  est  $C$ -analytique. Remarquons que  $\hat{E}$  est contenu dans l'intersection des  $\hat{E}_i$ , mais peut être distinct de cette intersection (voir n° 11, ex. b).

De même, la *réunion*  $E$  d'une famille *localement finie* d'ensembles  $C$ -analytiques  $E_i$  est  $C$ -analytique et l'on a:

$$(\cup E_i)^\wedge = \cup \hat{E}_i. \quad (27)$$

En effet, la famille  $(\hat{E}_i)$  est localement finie donc possède une réunion  $Y$ . Dire que  $x \in \pi(\Gamma(Y))$  signifie que le germe de  $Y$  en  $x$  n'est pas vide, ou encore que le germe en  $x$  de l'un au moins des  $\hat{E}_i$  n'est pas vide (proposition 8), c'est-

à-dire que  $x \in E$ . Donc  $E$  est  $C$ -analytique et  $\widehat{E} \subset Y$ . Mais pour tout indice  $i$ , on a  $E_i \subset E$ , donc  $\widehat{E}_i \subset \widehat{E}$  et par suite  $\widehat{E} \supset Y$ , d'où  $\widehat{E} = Y$ .

Un ensemble  $C$ -analytique sera dit  $C$ -irréductible s'il n'est pas réunion de deux ensembles  $C$ -analytiques distincts de lui-même: ceci *n'entraîne pas* qu'il soit irréductible en tant qu'ensemble analytique-réel (voir n° 11, ex. a)).

**Proposition 11.** *Soit  $E$  un ensemble  $C$ -analytique. Il existe une famille localement finie et une seule d'ensembles  $C$ -analytiques  $C$ -irréductibles  $E_i$  (appelés composantes  $C$ -irréductibles de  $E$ ) telle que  $E$  soit la réunion des  $E_i$  et que  $E_i$  ne soit pas contenu dans  $E_j$  pour  $i \neq j$ . Les  $\widehat{E}_i$  sont les composantes irréductibles de  $\widehat{E}$ , et  $E$  est  $C$ -irréductible si et seulement si  $\widehat{E}$  est irréductible.*

Remarquons tout d'abord que  $\widehat{E}$  irréductible entraîne  $E$   $C$ -irréductible, car  $E = E_1 \cup E_2$  entraîne  $\widehat{E} = \widehat{E}_1 \cup \widehat{E}_2$  d'après (27). D'autre part, soient  $Y_i$  les composantes irréductibles de  $\widehat{E}$ , et posons  $E_i = \pi(\Gamma(Y_i))$ . On a  $E = \bigcup E_i$ . Le complexifié  $\widehat{E}_i$  de  $E_i$  est  $Y_i$ : en effet,  $\widehat{E}_i \subset Y_i$  et par suite le germe  $Z = \widehat{E}_i \cup (\bigcup_{j \neq i} Y_j)$  est contenu dans  $\widehat{E}$ . Or on a  $\pi(\Gamma(Z)) = E$ , d'où  $Z = \widehat{E}$ . Comme les  $\Gamma(Y_j)$  sont disjoints et que  $\Gamma(Z) \supset \Gamma(Y_i)$ , on a  $\Gamma(\widehat{E}_i) \supset \Gamma(Y_i)$  et par suite  $\widehat{E}_i = Y_i$ . Les  $E_i$  sont donc  $C$ -irréductibles et, comme  $Y_i \not\subset Y_j$  pour  $i \neq j$ , on a  $E_i \not\subset E_j$  pour  $i \neq j$ , d'où l'existence de la décomposition en composantes  $C$ -irréductibles. L'unicité est évidente. Enfin, si  $E$  est  $C$ -irréductible, on a nécessairement  $E = E_i$  pour un indice  $i$ , d'où  $\widehat{E} = \widehat{E}_i$  et  $\widehat{E}$  est irréductible.

**Proposition 12.** *Soit  $E$  un ensemble  $C$ -analytique. La dimension de  $E$  (en tant qu'ensemble analytique-réel) est égale à la dimension du germe complexifié  $\widehat{E}$ .*

On peut supposer que  $E$  est  $C$ -irréductible. Posons  $p = \dim \widehat{E}$  et soit  $(V^*, E^*)$  un couple définissant  $\widehat{E}$ ,  $E^*$  étant irréductible de dimension  $p$  (Corollaire 2 à la proposition 8). Comme la dimension de  $E$  est, par définition, la borne supérieure des dimensions complexes des germes complexifiés des germes de  $E$  aux différents points de  $E$ , on a  $\dim E \leq p$ . D'autre part, il y a des points de  $E$  qui sont des points réguliers de  $E^*$ , si non  $E$  serait contenu dans le sous-ensemble analytique-complexe des points singuliers de  $E^*$  et  $\widehat{E}$  ne serait pas le plus petit germe contenant  $E$ . Or au voisinage d'un tel point,  $E$  est une sous-variété de dimension exactement  $p$  ([1], p. 121 ou [6], p. 92).

**Corollaire.** *Soit  $E$  un sous-ensemble  $C$ -analytique  $C$ -irréductible de dimension*

$p$  et soit  $F$  un sous-ensemble  $C$ -analytique contenu dans  $E$ . Ou bien  $F = E$ , ou bien  $\dim F < p$ .

Compte tenu de la proposition 12, c'est une traduction de la proposition 5.

**Proposition 13.** Soit  $E$  un ensemble  $C$ -analytique de dimension  $p$  et soit  $V_p(E)$  l'ensemble des points de  $E$  au voisinage desquels  $E$  est une sous-variété analytique-réelle de dimension  $p$ . Alors,  $E$  est réunion de  $V_p(E)$  et d'un sous-ensemble  $C$ -analytique  $S$  de dimension strictement inférieure à  $p$ .

Soit en effet  $(V^*, E^*)$  un couple définissant  $\hat{E}$ ,  $E^*$  étant de dimension complexe  $p$ . Soit  $V_p^*(E^*)$  l'ensemble des points de  $E^*$  au voisinage desquels  $E^*$  est une sous-variété analytique-complexe de dimension  $p$  et soit  $S^* = E^* - V_p^*(E^*)$ . On sait [5] que  $S^*$  est un sous-ensemble analytique-complexe de dimension  $< p$ . Comme  $V_p^*(E^*) \cap \Omega \subset V_p(E)$ , on a  $E = V_p(E) \cup S$  avec  $S = S^* \cap \Omega$ . Remarquons que l'on n'a pas nécessairement  $V_p(E) \cap S = \emptyset$ , bien que  $V_p^*(E^*) \cap S^* = \emptyset$  (voir n° 11, ex. c)).

*Remarque 1.* Les énoncés analogues au Corollaire à la proposition 12 et à la proposition 13 sont inexacts pour les sous-ensembles analytiques-réels généraux : pour des contre-exemples, voir [3].

*Remarque 2.* Nous donnerons au n° 10 un autre procédé de décomposition de  $E$  en réunion de variétés.

## 9. Notion de rang pour les ensembles analytiques-complexes

Soient  $\Omega^*$  une variété analytique-complexe de dimension  $n$  et  $E^*$  un sous-ensemble analytique-complexe de  $\Omega^*$ . Nous désignerons comme au n° 7 par  $I_x^*(E^*)$  l'idéal des germes de fonctions holomorphes dans un voisinage de  $x \in \Omega^*$  et nulles sur  $E^*$  et par  $\mathfrak{J}^*(E^*)$  le faisceau cohérent des  $I_x^*(E^*)$ . Le *rang*  $rg_x(E^*)$  au point  $x \in E^*$  est par définition le rang de l'idéal  $I_x^*(E^*)$ , c'est-à-dire le nombre maximum  $\varrho$  de fonctions  $f \in I_x^*(E^*)$  dont les différentielles  $df$  soient indépendantes en  $x$  (cf. [9]). En un point  $x$  régulier de dimension  $r$  de  $E^*$ , c'est-à-dire un point au voisinage duquel  $E^*$  est une variété de dimension  $r$ , on a  $rg_x(E^*) = n - r$ . Un point régulier de  $E^*$  de dimension la plus petite (respectivement la plus grande) possible sera appelé un point régulier minimal (respectivement maximal). Si  $E^*$  est de dimension constante, les points réguliers sont à la fois minimaux et maximaux.

**Proposition 14.** Si  $E^*$  est de rang constant  $\varrho$  dans un voisinage d'un point  $x \in E^*$ , alors  $x$  est un point régulier de dimension  $n - \varrho$  de  $E^*$ .

Soient en effet  $f_1, \dots, f_\varrho$  des éléments de  $I_x^*(E^*)$  dont les différentielles soient indépendantes en  $x$ . Les équations  $f_1 = \dots = f_\varrho = 0$  définissent alors dans un voisinage de  $x$  une sous-variété analytique-complexe de dimen-

sion  $n - \varrho$ , soit  $M^*$ . Le germe de  $M^*$  en  $x$  est irréductible de dimension  $n - \varrho$  et contient le germe de  $E^*$  en  $x$ . Il est clair qu'il suffit de démontrer que ces deux germes sont égaux. Or s'il n'en était pas ainsi, le germe de  $E^*$  en  $x$  serait de dimension  $p$  strictement inférieure à  $n - \varrho$ . Or, il y a des points de  $E^*$  arbitrairement voisins de  $x$  qui sont des points réguliers de dimension  $p$  de  $E^*$ . En un tel point, le rang de  $E^*$  serait  $n - p > \varrho$ , contrairement à l'hypothèse.

**Proposition 15.** *Soit  $M_1^*$  l'ensemble des points de  $E^*$  où le rang de  $E^*$  est égal à son maximum  $\varrho$  et soit  $E_1^* = E^* - M_1^*$ . Alors,  $M_1^*$  est une variété analytique-complexe qui est l'ensemble des points réguliers minimaux de  $E^*$  et  $E_1^*$  est un sous-ensemble analytique-complexe.*

Par définition même du rang,  $M_1^*$  est ouvert dans  $E^*$  et c'est une variété d'après la proposition 14 ; il est alors clair que  $M_1^*$  est l'ensemble des points réguliers minimaux.

Si  $E^*$  est irréductible, ou plus généralement de dimension constante (nécessairement égale à  $n - \varrho$ ), alors  $E_1^*$  est l'ensemble des points singuliers de  $E^*$  donc est analytique. Dans le cas général, soit  $F^*$  (respectivement  $G^*$ ) la réunion des composantes irréductibles de dimension  $n - \varrho$  (respectivement de dimension  $> n - \varrho$ ) de  $E^*$  : on a  $E^* = F^* \cup G^*$ . Soit  $N_1^*$  (respectivement  $F_1^*$ ) l'ensemble des points réguliers (respectivement singuliers) de  $F^*$ . On a  $M_1^* = N_1^* - (N_1^* \cap G^*)$  et par suite  $E_1^* = F_1^* \cup G^*$  est analytique.

**Corollaire.** *Si  $E^*$  est irréductible, ou plus généralement de dimension constante, alors le rang de  $E^*$  est maximum aux points réguliers et strictement plus petit aux points singuliers.*

*Remarque.* Pour tout  $x \in E_1^*$ , choisissons un voisinage  $U_x^*$  de  $x$ , un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $U_x^*$ , et des fonctions  $g_1, \dots, g_k$  analytiques dans  $U_x^*$  et engendrant  $I_y^*(E^*)$  en tout point  $y \in U_x^*$ . Soit  $S_x$  l'ensemble des fonctions  $g_j$  et des fonctions  $\partial(g_{\nu_1}, \dots, g_{\nu_\varrho})/\partial(x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_\varrho})$  pour tous les choix possibles des deux systèmes  $(\nu_1, \dots, \nu_\varrho)$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_\varrho)$  de  $\varrho$  indices. Il est facile de montrer d'une part que  $E_1^* \cap U_x^*$  est exactement le lieu des zéros communs aux fonctions de  $S_x$ , ce qui prouve à nouveau que  $E_1^*$  est analytique, d'autre part que les idéaux engendrés par  $S_x$  et  $S_y$  en un point  $z \in U_x^* \cap U_y^*$  sont les mêmes et forment donc un faisceau cohérent sur  $\Omega^*$ .

Comme dans [9], § 9, nous avons donc deux méthodes pour décomposer  $E^*$ , suivant le rang ou suivant la dimension :

a) Ecrivons  $E^* = M_1^* \cup E_1^*$  comme dans la proposition 15, puis  $E_1^* = M_2^* \cup E_2^*$ , etc. On exprime ainsi  $E^*$  comme union de variétés analytiques  $M_1^*, \dots, M_k^*$  et on a  $k \leq 2^n - 1$  (cf. [9]).

b) Ecrivons  $E^* = M_1'^* \cup E_1'^*$ ,  $M_1'^*$  étant l'ensemble des points réguliers maximaux de  $E^*$ , puis de même  $E_1'^* = M_2'^* \cup E_2'^*$ , etc. Alors, les  $M_j'^*$  sont des variétés analytiques de dimension décroissante.

## 10. Notion de rang pour les sous-ensembles $C$ -analytiques

Reprendons les notations du n° 7. Soit  $E$  un sous-ensemble  $C$ -analytique de  $\Omega$ , de complexifié  $\widehat{E}$ , et considérons le plus grand faisceau cohérent d'idéaux nul sur  $E$ , soit  $\mathfrak{J}(\widehat{E})$ . Par définition le  $C$ -rang  $rg_x^*(E)$  de  $E$  au point  $x \in E$  est le rang de l'idéal  $I_x(\widehat{E})$  du faisceau  $\mathfrak{J}(\widehat{E})$  en  $x$ . Si  $(V^*, E^*)$  est un couple définissant  $\widehat{E}$  et si  $x$  est un point de  $E$ , l'idéal  $I_x^*(E^*)$  est engendré par  $I_x(\widehat{E})$  et par suite, on a  $rg_x(E^*) = rg_x^*(E)$ .

Remarquons qu'en général, le  $C$ -rang de  $E$  au point  $x$  n'est pas déterminé par la partie de  $E$  située dans un voisinage de  $x$  (n° 11, ex. e)). D'autre part, si  $\Omega = R^n$  et si  $E$  est une variété algébrique réelle (qui est évidemment un ensemble  $C$ -analytique), le  $C$ -rang et le rang défini algébriquement peuvent ne pas être égaux (n° 11, ex. d)).

On peut de manière analogue, définir la  $C$ -dimension de  $E$  en un point  $x$  de  $E$  comme étant la dimension du germe de  $\widehat{E}$  en  $x$ , ou encore la dimension (complexe) de  $E^*$  en  $x$ . Cette  $C$ -dimension peut être plus grande que la dimension de  $E$  en  $x$  en tant qu'ensemble analytique-réel (n° 11, ex. e)), mais les bornes supérieures de ces dimensions quand  $x$  décrit  $E$  sont égales, d'après la proposition 12.

**Proposition 16.** *Soit  $M_1$  l'ensemble des points de  $E$  où le  $C$ -rang de  $E$  est égal à son maximum  $\varrho$  et soit  $E_1 = E - M_1$ . Alors  $M_1$  est une variété analytique-réelle de dimension  $n - \varrho$  et  $E_1$  est  $C$ -analytique. De plus, si  $(V^*, E^*)$  est un couple définissant  $\widehat{E}$ ,  $E^*$  étant le plus petit ensemble analytique-complexe dans  $V^*$  qui définit  $\widehat{E}$ , et si  $E^* = M_1^* \cup E_1^*$  est la décomposition de  $E^*$  introduite à la proposition 15, alors on a  $M_1 = M^* \cap \Omega$  et  $E_1 = E^* \cap \Omega$ .*

Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition 15 et de l'égalité  $rg_x(E^*) = rg_x^*(E)$  entre rang de  $E^*$  et  $C$ -rang de  $E$  en un même point  $x \in E$ . En effet,  $E^*$  n'a pas de points de rang  $> \varrho$ , car si non, on aurait  $E \subset E_1^*$ , contrairement à l'hypothèse de minimalité de  $E^*$ . Par suite, on a  $M_1 = M_1^* \cap \Omega$  et  $E_1 = E_1^* \cap \Omega$ , ce qui entraîne d'une part que  $E_1$  est  $C$ -analytique, d'autre part que  $M_1$  est une variété analytique-réelle de dimension  $n - \varrho$  (cf. proposition 12).

Nous obtenons donc, comme dans le cas complexe, deux procédés de décomposition en réunion de variétés, par le  $C$ -rang ou par la  $C$ -dimension. Ces décompositions s'obtiennent exactement comme dans [9], § 11.

## 11. Quelques exemples

a) Le sous-ensemble  $C$ -analytique  $E$  de l'espace  $R^3$  défini par l'équation  $x^2 + 2(1 + \sin z)xy + y^2 = 0$  est  $C$ -irréductible, mais est réductible en tant qu'ensemble analytique-réel: il est en effet réunion des ensembles analytiques-réels irréductibles  $F_k$ , réunion de la droite  $x = y = 0$  et du lieu des points de  $E$  pour lesquels  $2k\pi \leq z \leq (2k+1)\pi$  (avec  $k$  entier). On notera que la famille  $(F_k)$  n'est pas localement finie: le *résidu* de  $E$  au sens de [3] est la droite  $x = y = 0$ .

b) Considérons dans  $R^3$  les deux sous-ensembles  $C$ -analytiques  $E$  défini par l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$  et  $F$  défini par  $x = 0$ . L'intersection  $E \cap F$  est réduite à l'origine et par suite  $(E \cap F)^\wedge$  est distinct de  $\hat{E} \cap \hat{F}$ .

c) (H. CARTAN): Soit  $E$  le sous-ensemble  $C$ -analytique de  $R^3$  défini par l'équation  $yz(x^2 - zy^2) + x^4 = 0$ . On vérifie aisément que  $E - V_2(E)$  se compose de la droite  $x = z = 0$  et de la demi-droite  $x = y = 0, z \geq 0$ , donc n'est pas analytique. D'autre part, on montre facilement que le germe de  $E$  à l'origine  $O$  est irréductible et que  $O$  est adhérent à chacune des composantes connexes de  $V_2(E)$ , ce qui entraîne que  $E$  est  $C$ -irréductible. Enfin, le  $C$ -rang de  $E$  est 0 sur les droites  $x = y = 0$  et  $x = z = 0$  et est 1 aux autres points de  $E$ , ce qui montre qu'il y a des points de  $V_2(E)$  où le  $C$ -rang de  $E$  est 0.

d) Le sous-ensemble  $C$ -analytique  $E$  de  $R^2$  défini par l'équation  $f = x^2 + y^2 - y^3 = 0$  se compose de l'origine  $O$  et d'une courbe  $S$ , ne passant pas par  $O$ . Bien que  $E$  soit algébriquement irréductible, il n'est pas  $C$ -irréductible, car  $S$  est  $C$ -analytique et peut être défini par une équation de la forme  $g = y - \psi(x) = 0$ , où  $\psi$  est analytique. Le rang algébrique de  $E$  à l'origine est 0, tandis que le  $C$ -rang est 2. Le germe  $\hat{E}$  est défini par les deux équations  $xg = yg = 0$  et non pas par l'équation  $f = 0$ .

e) (cf. [3], ex. 2): le sous-ensemble  $C$ -analytique  $E$  de  $R^3$  défini par l'équation  $f = (x^2 + y^2)z - y^3 = 0$  se compose d'une surface  $S$  passant par l'origine  $O$  et de la droite  $Z$  d'équations  $x = y = 0$ . Il est  $C$ -irréductible: comme  $Z - \{O\}$  et  $S - \{O\}$  sont des variétés connexes, il suffit de montrer que le germe de  $E$  à l'origine est irréductible, ou encore que son complexifié l'est, ou encore que  $f$  est irréductible dans l'anneau des fonctions holomorphes à l'origine, ce qui est immédiat,  $f$  étant un polynôme homogène irréductible.

On remarquera que, pour un point  $q \in Z - \{O\}$ , les ensembles  $E$  et  $Z$  sont les mêmes dans un voisinage de  $q$ , mais  $\widehat{E} \neq \widehat{Z}$  dans tout voisinage de  $q$ . L'idéal des fonctions nulles sur  $E$  au voisinage de  $q$  est engendré par  $x$  et  $y$ , tandis que l'idéal  $I_q(\widehat{E})$  est engendré par  $f$ .

La décomposition de  $E$  (par le rang ou par la dimension) est  $E = (S - \{O\}) \cup Z$ . Mais l'origine  $O$  est singulière par rapport à  $S$  et une décomposition plus complète serait  $E = (S - \{O\}) \cup (Z - \{O\}) \cup \{O\}$ .

f) Appliquons la proposition 16 au sous-ensemble  $E$  de  $R^3$  défini par l'équation  $(x^2 + y^2)^2 - z^3 = 0$ ; on voit que  $\widehat{E}_1$  est strictement plus petit que le germe défini par  $E_1^*$ : cf. [9], § 12, (f).

g) Soit  $E$  le sous-ensemble  $C$ -analytique de  $R^2$  défini par l'équation  $y^3 = x^{2k+1}$  avec  $k$  entier  $\geq 2$ . Alors  $E$  est une courbe différentiable, mais non analytique au voisinage de l'origine  $O$ . Il est de rang 0 à l'origine et de rang 1 ailleurs.

Note ajoutée à la correction des épreuves: l'existence de complexifications d'une variété analytique-réelle (prop. 1) vient d'être indépendamment démontrée par H. B. SHUTRICK, *Complex extension*, Quart. J. of Mech. and appl. Math. Series 2, t. 9, (1958), 189–201 et par A. HAEFLIGER, Comment. Math. Helv., 32 (1958), 248–329. Pour le cas compact, voir aussi C. B. MORREY, *The analytic embedding of abstract real-analytic manifolds*, Ann. of Math., 68, (1958), 159–201.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BRUHAT, *Sur les représentations induites des groupes de LIE*, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 97–205; voir § 3, no 1.
- [2] F. BRUHAT et H. CARTAN, *Sur la structure des sous-ensembles analytiques-réels*, C. R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957), 988–990.
- [3] F. BRUHAT et H. CARTAN, *Sur les composantes irréductibles d'un sous-ensemble analytique-réel*, C. R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957), 1123–1126.
- [4] H. CARTAN, *Idéaux et modules de fonctions de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), 29–64.
- [5] H. CARTAN, *Séminaires*, E. N. S. 1951/52 et 1953/54.
- [6] H. CARTAN, *Variétés analytiques-réelles et variétés analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 77–100.
- [7] H. GRAUERT, *On LEVI's problem and the imbedding of real analytic manifolds*, Ann. of Math. 68 (1958), 460–472.
- [8] R. REMMERT et K. STEIN, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*, Math. Ann., 126 (1953), 263–306.
- [8bis] R. REMMERT, *Projektionen analytischer Mengen*, Math. Ann., 130 (1956), 410–441.
- [9] H. WHITNEY, *Elementary structure of real algebraic varieties*, Ann. of Math., 66 (1957), 545 to 556.

(Reçu le 6 août 1958)