

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien.
Autor: Kervaire, Michel A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26013>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien

Par MICHEL A. KERVAIRE, Genève

Soit $f: S_d \rightarrow E_{d+n}$ une *immersion régulière* de la sphère de dimension d dans l'espace euclidien à $d+n$ dimensions. Par définition, la matrice fonctionnelle des coordonnées de $f(x)$ relativement à des coordonnées locales sur S_d est de rang maximum d en tout point $x \in S_d$. Si l'on associe à tout $x \in S_d$ le n -plan normal à $f(S_d)$ en $f(x)$, on obtient une application continue τ (pourvu que f soit différentiable de classe C^1 au moins, ce que nous supposons) de S_d dans la GRASSMANNIENNE $G_{d+n,n}$ des n -plans orientés dans E_{d+n} . L'application $\tau: S_d \rightarrow G_{d+n,n}$ induit un fibré sur S_d de groupe structural $SO(n)$, usuellement appelé *fibré normal* induit par l'immersion f . Nous le noterons par \mathfrak{N}_f .

Notre but est de caractériser parmi tous les fibrés en sphères sur S_d de groupe structural $SO(n)$, ceux qui sont fibrés normaux induits par une immersion $f: S_d \rightarrow E_{d+n}$. La solution de ce problème, abordé en [3], dépend essentiellement de résultats récents de S. SMALE [8] et [9]. Cf. également R. THOM [11].

1. Enoncé du résultat

Considérons la fibration $SO(d+n)/SO(n) = V_{d+n,d}$ où $V_{d+n,d}$ désigne la variété de STIEFEL des suites de d vecteurs orthonormés dans E_{d+n} . Soit ∂ l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de cette fibration:

$$\cdots \rightarrow \pi_d(SO(d+n)) \xrightarrow{\psi^*} \pi_d(V_{d+n,d}) \xrightarrow{\partial} \pi_{d-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{d-1}(SO(d+n)) \rightarrow \cdots \quad (1.1)$$

D'autre part, nous avons la fibration $V_{d+n,n}/SO(n) = G_{d+n,n}$ où la projection $p: V_{d+n,n} \rightarrow G_{d+n,n}$ associe à tout système de n vecteurs orthonormés de E_{d+n} leur enveloppe linéaire orientée. Nous désignerons par α_f l'image de la classe d'homotopie de τ par l'opérateur bord ∂' de la suite exacte d'homotopie de cette fibration:

$$\cdots \rightarrow \pi_d(V_{d+n,n}) \xrightarrow{p^*} \pi_d(G_{d+n,n}) \xrightarrow{\partial'} \pi_{d-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{d-1}(V_{d+n,n}) \rightarrow \cdots$$

$$\alpha_f = \partial' \tau. \quad (1.2)$$

On sait (cf. [10], 18.5 et 18.6) que α_f (appelé *application caractéristique* de \mathfrak{N}_f) caractérise univoquement la classe d'équivalence du fibré \mathfrak{N}_f . On a le

Théorème (1.3). *L'ensemble des $\alpha \in \pi_{d-1}(SO(n))$ qui correspondent aux fibrés sur S_d de groupe structural $SO(n)$ induits par une immersion $f: S_d \rightarrow E_{d+n}$ est le sous-groupe de $\pi_{d-1}(SO(n))$ image de $\pi_d(V_{d+n,d})$ par l'opérateur ∂ de la suite exacte (1.1).*

Dans la mesure où l'on connaît (cf. [7]) les groupes $\pi_d(V_{d+n,d})$ ainsi que l'homomorphisme $\partial: \pi_d(V_{d+n,d}) \rightarrow \pi_{d-1}(SO(n))$, on peut expliciter le sous-groupe $\{\text{Image } \partial\}$ que nous désignerons par $J_{d,n}$. Pour les petites valeurs de d , on obtient le tableau ci-dessous où Z_q désigne le groupe cyclique d'ordre q , Z le groupe cyclique infini et $+$ la somme directe.

$n =$	3	4	5	6	7	8	9
$d = 3$	0	0	0	0	0	0	0
4	0	Z	0	0	0	0	0
5	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2	0	0	0	0
6	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2	Z	0	0	0
7	Z_{12}	$Z_{12} + Z_{12}$	0	0	0	0	0
8	Z_2	$Z_2 + Z_2$	0	0	0	Z	0
9	Z_2	$Z_2 + Z_2$	0	Z_{12}	Z_2	$Z_2 + Z_2$	Z_2

Dans la diagonale, $d = n$ (cf. [3]), les groupes $J_{d,d}$ sont donnés par $J_{d,d} = Z$ pour d pair, $J_{d,d} = Z_2$ pour d impair et S_d non parallélisable (c'est-à-dire $d \neq 1, 3, 7$ d'après [4]) et $J_{d,d} = 0$ pour S_d parallélisable, c'est-à-dire $d = 1, 3, 7$. Pour $d < n$, $J_{d,n} = 0$.

2. Addition des immersions

Soient α et β les applications caractéristiques des fibrés normaux \mathfrak{N}_f et \mathfrak{N}_g sur S_d induits par des immersions f et g de S_d dans E_{d+n} . Le théorème (1.3) affirme tout d'abord que la classe $\alpha + \beta$ est également caractéristique d'un fibré normal sur S_d induit par une immersion $h: S_d \rightarrow E_{d+n}$.

Une telle immersion h peut être obtenue comme suit:

Soit $S_d \subset E_{d+1}$ avec les coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_d) caractérisée par $\sum_i x_i^2 = 1$ et soient a, a' les points $(1, 0, \dots, 0)$ et $(-1, 0, \dots, 0)$ respectivement. En $f(a)$ et $g(a')$ choisissons des $(d+n)$ -repères u_1, \dots, u_{d+n} et v_1, \dots, v_{d+n} induisant l'orientation positive de E_{d+n} et tels que u_1, \dots, u_d (respectivement v_1, \dots, v_d) soient tangents à $f(S_d)$ (respectivement $g(S_d)$) en $f(a)$ (respectivement $g(a')$) et fournissent l'orientation positive de $f(S_d)$ (respectivement l'orientation négative de $g(S_d)$). On peut supposer,

après déplacement éventuel de l'image $g(S_d)$ dans E_{d+n} , que $u_1 = v_1, \dots, u_d = v_d$ (en tant que vecteurs libres de E_{d+n}), et que $g(a') = f(a) + u_{d+n}$. Cf. la construction décrite dans [6], § II. Il est commode de déformer, si nécessaire, les applications f et g dans des voisinages

$$U = \{1 - \varepsilon \leq x_0 \leq 1\} \text{ et } U' = \{-1 \leq x_0 \leq -1 + \varepsilon\}$$

de a et a' respectivement pour leur donner la forme

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_d) &= f(a) + \sum_i x_i u_i \text{ pour } 1 - \varepsilon \leq x_0 \leq 1, \\ g(x_0, x_1, \dots, x_d) &= g(a') + \sum_i x_i v_i \text{ pour } -1 \leq x_0 \leq -1 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.1}$$

où la somme sur i s'étend de 1 à d . (C'est ce que S. SMALE appelle la « normalisation » de l'application f dans le voisinage de $f(a)$). Ces expressions sont en accord avec les orientations des systèmes $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_d$ pourvu que l'on oriente S_d comme bord de la boule $\sum_i (x_i)^2 \leq 1$, celle-ci ayant l'orientation induite par E_{d+1} .

L'immersion h est obtenue en « joignant $f(S_d)$ et $g(S_d)$ par un tube de $f(a)$ à $g(a')$ d'axe $f(a) + t u_{d+n}$ ».

En formules :

$$h(x_0, x_1, \dots, x_d) = f(3x_0 + 2, \lambda x_1, \dots, \lambda x_d) \text{ pour } -1 \leq x_0 \leq -(1 + \varepsilon)/3$$

avec $\lambda^2(x_0 - 1) = 3(3x_0 + 1)$. De façon analogue,

$$h(x_0, x_1, \dots, x_d) = g(3x_0 - 2, \lambda' x_1, \dots, \lambda' x_d) \text{ pour } (1 + \varepsilon)/3 \leq x_0 \leq 1,$$

avec $\lambda'^2(x_0 + 1) = 3(3x_0 - 1)$. Dans la région intermédiaire, on pose

$$h(x_0, x_1, \dots, x_d) = f(a) + t u_{d+n} + r(t) \sum_{i=1}^d x_i u_i,$$

pour $-(1 + \varepsilon)/3 \leq x_0 \leq (1 + \varepsilon)/3$

avec $t = \sin^2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{1 + \varepsilon} x_0 + 1 \right)$, $r(t) = c(1 - t(1 - t))$ et $c = 3\sqrt{\varepsilon/(4 + \varepsilon)}$.

L'application h est une immersion régulière. ($0 < \varepsilon < 1/9$.)

Lemme 2.2. *On a $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$, où $s: S_d \rightarrow E_{d+n}$ désigne le plongement standard et $\tau_s: S_d \rightarrow G_{d+n,n}$ l'application induite¹⁾.*

¹⁾ On comparera ce lemme avec le lemme (2), § II de [6] dont il est la généralisation. Par plongement standard $S_d \rightarrow E_{d+n}$ nous entendons le plongement donné par

$$(x_1, \dots, x_d) \rightarrow (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0),$$

ou tout autre plongement qui dérive de celui-là par déformation régulière.

Comme $\partial' \tau_s = 0$, on obtient le

Corollaire 2.3. $\alpha_h = \alpha_f + \alpha_g$.

Pour démontrer le lemme 2.2, considérons le plongement $s: S_a \rightarrow E_{a+n}$ donné par $s(x_0, x_1, \dots, x_a) = f(a) + \frac{1}{2}(x_0 + 1)u_{a+n} + \frac{c}{2} \sum_i x_i u_i$. On remarquera que les restrictions à l'équateur $\{x_0 = 0\}$ des applications h et s d'une part, τ_h et τ_s d'autre part coïncident. Les applications $\tau_h + \tau_s$ et $\tau_f + \tau_g$ peuvent se factoriser par $\beta: X \rightarrow G_{a+n, n}$ où $X \subset E_{a+2}$ est la réunion de

$$S_a = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_{a+1}) \in E_{a+2} \mid x_{a+1} = 0, x^2 = 1\}$$

et $S'_a = \{x \in E_{a+2} \mid x_0 = 0, x^2 = 1\}$, l'application β étant définie par

$$\beta \mid S_a = \tau_h \text{ et } \beta(0, x_1, \dots, x_{a+1}) = \tau_s(x_1, \dots, x_{a+1}).$$

Pour $x = (0, x_1, \dots, x_a, 0) \in S_a \cap S'_a$, on a $\tau_h(x) = \tau_s(x)$.

Les applications $\sigma_1, \sigma_2: S_a \rightarrow X$, telles que $\tau_h + \tau_s = \beta \circ \sigma_1$ et $\tau_f + \tau_g = \beta \circ \sigma_2$ peuvent être décrites comme suit: σ_1, σ_2 sont injectives sur $\{x_0 \neq 0\}$ et envoient $\{x_0 = 0\}$ sur un point P de $S_a \cap S'_a$; σ_1 envoie $\{x_0 > 0\}$ sur $S_a - P$ et $\{x_0 < 0\}$ sur $S'_a - P$; pour définir σ_2 désignons par H_+, H_- les hémisphères $\{x_0 \geq 0\}$ et $\{x_0 \leq 0\}$ de S_a et H'_+, H'_- les hémisphères $\{x_{a+1} \geq 0\}$ et $\{x_{a+1} \leq 0\}$ de S'_a . σ_2 envoie $\{x_0 > 0\}$ sur $(H_+ \cup H'_-) - P$ et $\{x_0 < 0\}$ sur $(H_- \cup H'_+) - P$.

Comme X est connexe, simplement connexe et acyclique en dimensions $< d$, on a $\pi_d(X) \cong H_d(X)$. Les cycles $\sigma_1(S_a), \sigma_2(S_a)$ étant homologues, les applications σ_1, σ_2 sont homotopes. Par suite, $\tau_h + \tau_s \simeq \tau_f + \tau_g$.

3. L'invariant de SMALE

Soit $f: S_a \rightarrow E_{a+n}$ une immersion régulière. S. SMALE [8, 9] associe à la classe d'homotopie régulière de f un élément c_f de $\pi_d(V_{a+n, a})$ de la manière suivante: Soit F_a un champ de d -repères tangents sur S_a défini (continu) à l'extérieur du voisinage U' de a' . Déformons, si nécessaire, l'immersion f pour qu'elle coïncide sur U' avec l'immersion standard s . Soit $r: H_+ \rightarrow S_a - U'$ un difféomorphisme de degré $+1$ de l'hémisphère $\{x_0 \geq 0\}$ de S_a sur $S_a - U'$ (par exemple $r(x_0, x_1, \dots, x_a) = ((2 - \varepsilon)x_0 - 1 + \varepsilon, \mu x_1, \dots, \mu x_a)$, μ étant choisi pour que $[(2 - \varepsilon)x_0 - 1 + \varepsilon]^2 + \mu^2 \sum (x_i)^2 = 1$). On définira d'abord l'application $c_f: S_a \rightarrow V_{a+n, a}$ par les formules

$$c_f(x) = \begin{cases} df(F_a(rx)) & \text{pour } x \in H_+ \\ ds(F_a(rx^*)) & \text{pour } x \in H_- \end{cases} \quad (3.1)$$

où H_- est l'hémisphère $\{x_0 \leq 0\}$ de S_a et $x \rightarrow x^*$ est l'application $(x_0, x_1, \dots, x_d) \rightarrow (-x_0, x_1, \dots, x_d)$. Soit alors également c_f la classe d'homotopie de l'application continue c_f ainsi définie. S. SMALE démontre que cette classe ne dépend pas des divers choix faits dans la définition et reste invariante par une déformation régulière de l'immersion f .

On a en outre le

Théorème (3.2). (S. SMALE): *L'invariant c_f fournit une correspondance bi-univoque entre les classes d'homotopie régulière d'immersions de S_a dans E_{a+n} et les éléments du groupe $\pi_a(V_{a+n, a})$.*

Nous allons voir que si l'on introduit une structure de groupe dans l'ensemble des classes d'immersions en utilisant l'addition du § 2, la correspondance $f \rightarrow c_f$ de S. SMALE induit un isomorphisme de ce groupe sur le groupe $\pi_a(V_{a+n, a})$. Soient f et g deux immersions que nous supposons satisfaire (2.1) et soit $s' : S_a \rightarrow E_{a+n}$ une immersion standard satisfaisant

$$s' | U' = g | U' \text{ où } U' = \{-1 \leq x_0 \leq -1 + \varepsilon\}.$$

Pour démontrer $c_h = c_f + c_g$ introduisons l'espace Y formé de la réunion de la sphère $S_a \subset E_{a+1}$ et de la boule B_a donnée dans E_{a+1} par $x_0 = 2/3$, $\sum_i (x_i)^2 \leq 5/9$ ($1 \leq i \leq d$). On peut factoriser les applications c_h, c_f, c_g à une homotopie près par $\gamma : Y \rightarrow V_{a+n, a}$ où γ est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma | S_a &= c_h. \\ \gamma | B_a &\text{ est donnée par } \gamma(x_1, \dots, x_d) = ds'(F_a(\varrho x)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

où $\varrho : B_a \rightarrow S_a - U'$ est un difféomorphisme de degré +1. •

Pour $x \in B_a \cap S_a$ i. e. $x_0 = 2/3$,

$$\begin{aligned} c_h(x) &= dh(F_a(rx)) = dh\left(F_a\left(\frac{1 + \varepsilon}{3}, \mu x_1, \dots, \mu x_d\right)\right) \\ &= dg(F_a(-1 + \varepsilon, \mu' x_1, \dots, \mu' x_d)) = ds'(F_a(\varrho x)). \end{aligned}$$

Désignons par $i : S_a \rightarrow Y$ l'inclusion de S_a dans Y , par $i_1 : S_a \rightarrow Y$ l'injection qui envoie $\{x_0 > 0\}$ de S_a sur $\{x_0 > 2/3\}$ de Y et $\{x_0 \leq 0\}$ de S_a sur B_a et par $i_2 : S_a \rightarrow Y$ l'injection qui envoie $\{x_0 \geq 0\}$ de S_a sur B_a et $\{x_0 < 0\}$ de S_a sur $\{x_0 < 2/3\}$ de Y . On a $\gamma \circ i = c_h$, $\gamma \circ i_1 \simeq c_g$ et $\gamma \circ i_2 \simeq c_f$. Comme $\pi_a(Y) \cong H_a(Y)$ et que $i(S_a)$ est homologue à $i_1(S_a) + i_2(S_a)$ on conclut que i est homotope à la somme $i_1 + i_2$. Par suite,

$$c_h = \gamma \circ i \simeq \gamma \circ (i_1 + i_2) \simeq \gamma \circ i_1 + \gamma \circ i_2 \simeq c_g + c_f.$$

En outre, il est immédiat que $p_*c_f = \tau_f - \tau_s$, où p_* est comme dans (1.2). Il résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_d(V_{d+n,d}) & \xrightarrow{p_*} & \pi_d(G_{d+n,d}) \\ & \searrow \partial & \swarrow \partial' \\ & \pi_{d-1}(SO(n)) & \end{array}$$

que l'on a²⁾ le

Lemme (3.4). $\partial c_f = \alpha_f$, où ∂ est l'opérateur bord de la suite (1.1).

Ceci fournit le théorème (1.3) comme conséquence immédiate du théorème de SMALE.

4. Le cas des groupes $J_{d,d}$.

Lemme (4.1). (Cf. [3]): *Le groupe $J_{d,d}$ est infini cyclique pour d pair, cyclique d'ordre 2 pour d impair quand S_d n'est pas parallélisable et 0 pour S_d parallélisable.*

Il suffit d'observer que l'inclusion $S_n \rightarrow V_{d+n,d}$ (donnant un générateur de $\pi_n(V_{d+n,d})$) induit un épimorphisme $\pi_d(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_d(V_{d+n,d})$ dans le cas où $d = n$ (en effet, i_* est plongé dans la suite exacte

$$\cdots \rightarrow \pi_d(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_d(V_{d+n,d}) \rightarrow \pi_d(V_{d+n,d-1}) \rightarrow \cdots$$

de la fibration $V_{d+n,d}/S_n = V_{d+n,d-1}$). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \partial & \\ \pi_d(V_{d+n,d}) & \rightarrow & \pi_{d-1}(SO(n)) \\ i_* \uparrow & \nearrow \Delta & \\ \pi_d(S_n) & & \end{array}$$

montre alors que, pour $d = n$, l'image par ∂ de $\pi_d(V_{2d,d})$, i. e. $J_{d,d}$, coïncide avec l'image par Δ de $\pi_d(S_d)$, d'où le lemme (4.1).

Cependant, on peut démontrer le lemme (4.1) sans faire appel aux résultats de S. SMALE, comme suit: Soit $f: S_d \rightarrow E_{2d}$ une immersion complètement régulière et I_f son coefficient de self-intersection (H. WHITNEY, [12]). I_f est un entier pour d pair et un reste modulo 2 pour d impair. Si l'on regarde E_{2d} comme sous-espace de E_{2d+1} , on peut munir $f(S_d)$ d'un champ F_{d+1} de $(d+1)$ -repères normaux dans E_{2d+1} . Par une déformation régulière de f on obtient un plongement régulier f' de S_d dans E_{2d+1} muni d'un champ F'_{d+1} de $(d+1)$ -repères normaux. Par un procédé classique [5] dû à L. PONTRYAGIN,

²⁾ On retrouve également $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$ par $\tau_h - \tau_s = p_*c_h = p_*c_f + p_*c_g = \tau_f - \tau_s + \tau_g - \tau_s$.

B. ECKMANN et R. THOM, on associe à f' et F'_{a+1} une classe d'homotopie $\alpha(f', F')$ dans $\pi_{2d+1}(S_{a+1})$. Soit alors $h(f', F')$ l'invariant de HOPF de cet élément.

Désignons en outre, comme dans [5], par ν le degré de l'application $N: S_a \rightarrow S_a$ définie par $N(x) = (n \cdot u_1(x), \dots, n \cdot u_{a+1}(x))$, où n est la normale à E_{2a} dans E_{2a+1} et $u_1(x), \dots, u_{a+1}(x)$ sont les vecteurs du champ F_{a+1} au point $f(x)$.

Lemme (4.2). $I_f \pm \nu = \pm h(f', F')$ (modulo 2 pour d impair).

Cette formule généralise le lemme (6.1) de [5], où seul le cas d'un plongement ($I_f = 0$) était considéré.

Démonstration: Soit $\Sigma'_a = f'(S_a)$ et $\Sigma''_a = f''(S_a)$, où $f''(x) = f'(x) + \varepsilon u'_1(x)$, ε étant le rayon d'un voisinage tubulaire de $f'(S_a)$ dans E_{2d+1} . On a

$$h(f', F') = L(\Sigma', \Sigma'')$$

par définition (L désignant le coefficient d'enlacement dans E_{2d+1}). Posons encore $\Sigma_a = g(S_a)$, avec $g(x) = f'(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d+1} (n \cdot u_i(x)) u'_i(x)$. Le lemme (4.2) découle de la formule auxiliaire

$$I_f = L(\Sigma_a, \Sigma'_a), \tag{4.3}$$

au signe près pour d pair, modulo 2 pour d impair.

En effet, soit $\Psi: S_a \times S_a \rightarrow E_{2d+1}$ le plongement donné par

$$\Psi(x, y) = f'(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d+1} y_i u'_i(x).$$

Les images $\Psi(S_a \times b)$ et $\Psi(a \times S_a)$ engendrent l'homologie de $\Psi(S_a \times S_a)$ en dimension d . On a $\Psi|_{S_a \times b} = f''$ (pourvu que l'on prenne $b = (1, 0, \dots, 0)$). Posons $Z_a = \Psi(a \times S_a)$. On a $L(Z_a, \Sigma'_a) = 1$ (au signe près). •

Comme $g(S_a) \subset \Psi(S_a \times S_a)$, on a $\Sigma_a \sim p \Sigma''_a + q Z_a$ sur $\Psi(S_a \times S_a)$, avec des entiers p, q . La définition de g fournit $p = 1, q = \nu$. Donc

$$\Sigma_a \sim \Sigma''_a + \nu Z_a \text{ sur } \Psi(S_a \times S_a),$$

donc a fortiori dans $E_{2d+1} - \Sigma'_a$. En particulier,

$$I_f = L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma'', \Sigma') + \nu L(Z, \Sigma') = h(f', F') + \nu.$$

Il reste donc à démontrer (4.3). Pour cela on considère tout d'abord une déformée f' de f particulière: Soient $a_1, b_1, \dots, a_q, b_q$ les paires de points sur S_a telles que $f(a_i) = f(b_i)$ (f est supposée complètement régulière, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$ entraîne $x = y$ ou $\{x, y\} = \{a_i, b_i\}$ pour un certain i , de plus les a_i, b_i sont tous distincts). Soient $U_i, i = 1, \dots, q$ des voisinages sphériques de rayon ρ des a_i , chacun des U_i ne contenant qu'un seul des

points de l'ensemble $a_1, b_1, \dots, a_q, b_q$. Posons $\alpha_i(x) = \alpha \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\pi \rho^{-1} r_i(x))$ pour $x \in U_i$ où $r_i(x)$ est la distance sphérique de x à a_i et $\alpha_i(x) = 0$ pour $x \in S_a - U_i$. Le plongement $f' : S_a \rightarrow E_{2a+1}$ est alors défini par $f'(x) = f(x) + \sum_1^q \alpha_i(x) n$. Si l'on prend le rapport α/ρ assez petit, on peut pour le calcul de $L(\Sigma, \Sigma')$ remplacer g par $g^* : S_a \rightarrow E_{2a+1}$ définie par $g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n$, où ε satisfaisant $0 < \varepsilon < \alpha$ est le rayon d'un voisinage tubulaire de $f'(S_a)$ dans E_{2a+1} . Posons $\Sigma^* = g^*(S_a)$. On a $L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma^*, \Sigma')$. Pour calculer $L(\Sigma^*, \Sigma')$ on considère un plongement F' du cône sur S_a dans E_{2a+1} tel que

$$F'(x, t) = f'(x) - t \cdot n$$

pour les petites valeurs de t le cône étant paramétrisé par (x, t) avec $x \in S_a$, $0 \leq t \leq 1$ avec $(x, 1) = (x', 1)$ pour tout couple $x, x' \in S_a$. Calculons le coefficient d'intersection $S(\Sigma^*, F'CS_a)$. Si $y \in \Sigma^* \cap F'CS_a$, on a

$$y = g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n \text{ et } y = f'(x') - t \cdot n.$$

Donc $f(x) + (\sum_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon) n = f(x') + (\sum_1^q \alpha_i(x') - t) \cdot n$. Ceci implique $x = a_i, x' = b_i$ ou $x = b_i, x' = a_i$ pour un certain $i \in [1, q]$. On ne peut avoir $x = a_i, x' = b_i$ car alors $\sum_q \alpha_i(x') = 0$ et on aurait $-t = \sum_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon > 0$.

Les seuls points d'intersection sont donc de la forme

$$g^*(b_i) = F'(a_i, t_i).$$

Les points $g^*(b_1), \dots, g^*(b_q)$ sont effectivement points d'intersection de Σ^* avec $F'CS_a$.

En effet

$$\begin{aligned} g^*(b_i) &= f'(b_i) + \varepsilon n = f(b_i) + \varepsilon n \\ &= f(a_i) + \varepsilon n \\ &= f'(a_i) - (\alpha - \varepsilon) n = F'(a_i, \alpha - \varepsilon), \end{aligned}$$

où $\alpha - \varepsilon > 0$.

On vérifie que si le point $f(a_i) = f(b_i)$ est point de self-intersection de $f(S_a)$ avec le coefficient c_i ($c_i = \pm 1$), le coefficient d'intersection de $g^*(Ub_i)$ avec $F'CS_a$ est $(-1)^d c_i$.

On a donc

$$I_f = \sum_i c_i = L(\Sigma_a^*, \Sigma_a') = L(\Sigma_a, \Sigma_a').$$

On vérifie aisément que pour deux choix f'_0, f'_1 de plongements qui sont équivalents au sens des immersions (pour lesquels il existe une famille d'immersions $f'(t)$ dépendant différentiablement de t avec $f'(0) = f'_0, f'(1) = f'_1$) les coefficients d'enlacement $L(g_0(S_a), f'_0(S_a))$ et $L(g_1(S_a), f'_1(S_a))$ sont égaux pour d pair et congruent modulo 2 pour d impair. La formule

$I_f = L(\Sigma_a, \Sigma'_a)$ est donc valable quel que soit le choix du plongement f' régulièrement homotope à f . Le lemme (4.2) est ainsi démontré.

Pour obtenir (4.1), il suffit maintenant de remarquer que l'on peut réaliser toutes les valeurs de I_f par des immersions (H. WITNEY [12]). De plus $\Delta v = \alpha_f$. Comme les éléments $\alpha(f', F') \in \pi_{2d+1}(S_{d+1})$ sont dans l'image de $J: \pi_d(\mathbf{SO}(d+1)) \rightarrow \pi_{2d+1}(S_{d+1})$ (voir lemme 8.1 de [5]), il s'ensuit $\Delta h(f', F')\iota_a = 0$. On a donc $\alpha_f = I_f \Delta \iota_a$. D'où $J_{a,a} = \Delta \pi_a(S_a)$. Q.E.D.

5. Les plongements

Comme le remarque S. SMALE ([8], § 1), il serait intéressant de savoir quels éléments de $\pi_a(V_{a+n,a})$ sont invariants de SMALE de classes d'équivalence représentables par un plongement (sans self-intersection) $S_a \rightarrow E_{a+n}$.

On peut obtenir quelques renseignements à ce sujet en combinant un théorème de [5] (Théorème 8.2) et la connaissance des groupes d'homotopie stables $\pi_a(\mathbf{SO}(N))$ fournie par [2]. D'après [5], si $f: S_a \rightarrow E_{a+n}$ est un plongement et si $d < 2n - 1$, le fibré normal induit est trivial, i. e. $\alpha_f = 0$. On voit d'autre part immédiatement (en utilisant la construction du § 2) que les éléments de $\pi_a(V_{a+n,a})$ qui peuvent être représentés par un plongement forment un sous-groupe $\pi'_a(V_{a+n,a})$. Par suite, on a le

Théorème 5.1. *Pour $d < 2n - 1$ l'ensemble $\pi'_a(V_{a+n,a})$ des classes de $\pi_a(V_{a+n,a})$ représentables par un plongement est un sous-groupe du noyau de $\partial: \pi_a(V_{a+n,a}) \rightarrow \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(n))$ (∂ comme dans (1.1)).*

Comme $\text{Ker } \partial = \text{Im } \Psi_*$, où $\Psi_*: \pi_a(\mathbf{SO}(d+n)) \rightarrow \pi_a(V_{a+n,a})$ et que $\pi_a(\mathbf{SO}(d+n))$ (qui est stable pour $n \geq 2$) est nul pour d congruent 2, 4, 5, 6 modulo 8 (d'après [2]), on obtient le

Corollaire 5.2. *Si d est congruent 2, 4, 5, 6, modulo 8, il n'existe pas d'immersion non-triviale de S_a dans E_{a+n} avec $d < 2n - 1$ qui soit équivalente à un plongement.*

Note: J'ignore s'il existe dans ce cas des plongements qui ne sont pas «équivalents» au sens des plongements au plongement standard.

En général,

$\text{Im } \Psi_* \cong \pi_a(\mathbf{SO}(d+n))/i_*\pi_a(\mathbf{SO}(n))$, où $i_*: \pi_a(\mathbf{SO}(n)) \rightarrow \pi_a(\mathbf{SO}(d+n))$ est induit par l'inclusion $i: \mathbf{SO}(n) \rightarrow \mathbf{SO}(d+n)$, et $\pi'_a(V_{a+n,a})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\text{Im } \Psi_*$.

Pour $d = 4s - 1$, $d < 2n - 1$, $\pi_a(\mathbf{SO}(n))$ contient une composante libre et $\text{Im } \Psi^*$ est de la forme Z/mZ . On ne sait rien sur l'entier m sauf que c'est une puissance de 2 (cf. A. BOREL et F. HIRZEBRUCH [1] § 26.2).

Pour d congruent à 0 ou 1 modulo 8, $\pi_d(\mathbf{SO}(d+n)) = \mathbf{Z}_2$. Il existe donc au plus une classe d'immersions non-triviale représentable par un plongement.

On voit aisément que $i_* : \pi_{8s+1}(\mathbf{SO}(8s-4)) \rightarrow \pi_{8s+1}(\mathbf{SO})$ est surjectif (car $\dots \rightarrow \pi_{8s+1}(\mathbf{SO}(8s-4)) \rightarrow \pi_{8s+1}(\mathbf{SO}(8s+4)) \rightarrow \pi_{8s+1}(V_{8s+4,8}) = 0$, d'après [7]). Donc,

Corollaire 5.3. *Toute immersion $f : S_{8s+1} \rightarrow E_{n+8s+1}$ où $n \geq 8s-4$ équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

De manière analogue, $i_* : \pi_{8s}(\mathbf{SO}(8s-5)) \rightarrow \pi_{8s}(\mathbf{SO})$ est surjectif³⁾ pour $s \geq 2$. On obtient,

Corollaire 5.4. *Toute immersion $f : S_{8s} \rightarrow E_{n+7s}$ où $n \geq 8s-5$, $s \geq 2$, équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

6. Compression d'une immersion

Nous étudions la question de savoir sous quelles conditions une immersion $f : S_a \rightarrow E_{a+n}$ est équivalente à une immersion f' satisfaisant à $f'(S_a) \subset E_{a+m}$ ($m \leq n$). Si une telle immersion f' existe, on dira que f peut être compressée dans E_{a+m} .

Théorème 6.1.⁴⁾ *L'immersion $f : S_a \rightarrow E_{a+n}$ peut être compressée dans E_{a+m} ($m \geq 1$) si et seulement si il existe un champ de $(n-m)$ -repères normaux à $f(S_a)$ dans E_{a+n} .*

Démonstration: Soit $j_* : \pi_d(V_{a+m,d}) \rightarrow \pi_d(V_{a+n,d})$ l'injection naturelle ($m \leq n$).

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_d(\mathbf{SO}(d+m)) & \rightarrow & \pi_d(\mathbf{SO}(d+n)) \\
 \downarrow \Psi_m & & \downarrow \Psi_n \\
 \pi_d(V_{a+m,d}) & \xrightarrow{j_*} & \pi_d(V_{a+n,d}) \\
 \downarrow \partial_m & & \downarrow \partial_n \\
 \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(m)) & \xrightarrow{i_{n-m}} & \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(n)) \\
 \downarrow i_m & & \downarrow i_n \\
 \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(d+m)) & \xrightarrow{\approx} & \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(d+n)) .
 \end{array}$$

Soit $c_f \in \pi_d(V_{a+n,d})$ l'invariant de SMALE de l'immersion $f : S_a \rightarrow E_{a+n}$ donnée. L'existence d'un champ de $(n-m)$ -repères normaux est équivalente au fait que $\partial_n c_f$ est dans l'image de i_{n-m} . Si f peut être compressée dans

³⁾ Cf. *Some non-stable homotopy groups of LIE groups*, à paraître.

⁴⁾ M. HIRSCH a également obtenu des théorèmes dans cette direction.

E_{d+m} , c_f est dans l'image de j_* et par suite $\partial_n c_f$ est dans l'image de i_{n-m} . Inversement, supposons qu'il existe un $\alpha \in \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(m))$ tel que $i_{n-m}\alpha = \partial_n c_f$. On aura $i_m\alpha = 0$ (car $i_n \partial_n c_f = 0$ et $\pi_{d-1}(\mathbf{SO}(d+m)) \rightarrow \pi_{d-1}(\mathbf{SO}(d+n))$ est un isomorphisme pour $m \geq 1$). Par suite, il existe un $c \in \pi_d(V_{d+m,d})$ tel que $\partial_m c = \alpha$. On a donc $\partial_n(j_*c - c_f) = 0$. Il s'ensuit $j_*c = c_f + \Psi_n \mu'$. Comme $\pi_d(\mathbf{SO}(d+m)) \rightarrow \pi_d(\mathbf{SO}(d+n))$ est surjectif pour $m \geq 1$, il existe un $\mu \in \pi_d(\mathbf{SO}(d+m))$ tel que $c_f = j_*(c - \Psi_m \mu)$. Soit alors $f'' : S_d \rightarrow E_{d+m}$ une immersion fournie par le théorème de SMALE, telle que $c_{f''} = c - \Psi_m \mu$. Si l'on compose f'' avec l'injection $E_{d+m} \rightarrow E_{d+n}$, on obtient une immersion $f' : S_d \rightarrow E_{d+n}$ telle que $f'(S_d) \subset E_{d+m}$ et dont l'invariant de SMALE est $j_*c_{f''} = c_f$. Les immersions f et f' sont donc équivalentes. Q.E.D.

Corollaire 6.2. *Pour que l'immersion $f : S_d \rightarrow E_{d+n}$ puisse être compressée dans E_{d+1} , il faut et il suffit que le fibré normal induit par f soit trivial.*

Corollaire 6.3. *Tout plongement $f : S_d \rightarrow E_{d+n}$ avec $d < 2n - 1$ peut être compressé en une immersion dans E_{d+1} .*

Battelle Memorial Institute.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL et F. HIRZEBRUCH, *Characteristic classes and homogeneous spaces*, Amer. J. of Math., to appear.
- [2] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 43 (1957), 933-935.
- [3] M. KERVAIRE, *Normal bundle to a sphere in euclidean space*, Bull. Amer. Math. Soc., 63 (1957), 147.
- [4] M. KERVAIRE, *Non parallelizability of the n -sphere for $n > 7$* , Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 44 (1958), 280-283.
- [5] M. KERVAIRE, *An Interpretation of G. WHITEHEAD's generalization of HOPF's invariant*, Ann. of Math., to appear.
- [6] J. MILNOR, *On the immersion of n -manifolds in $(n+1)$ -space*, Comment. Math. Helvetici, 30 (1956), 275-284.
- [7] G. F. PAECHTER, *The groups $\pi_r(V_{n,m})$* , The Quarterly J. Math. 7 (1956), 249-268.
- [8] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in EUCLIDEAN spaces*, Ann. of Math., to appear.
- [9] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in EUCLIDEAN spaces*, Notices Amer. Math. Soc., 5, number 1, issue No. 29 (1958), 66.
- [10] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton Press, 1950.
- [11] R. THOM, *La classification des immersions (d'après S. SMALE)*, Séminaire Bourbaki, Décembre 1957.
- [12] H. WHITNEY, *The self-intersection of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Ann. of Math. 45 (1944), 220-246.

(Reçu le 7 août 1958)