**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 33 (1959)

Artikel: Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien.

Autor: Kervaire, Michel A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-26013

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 28.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

# Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien

Par MICHEL A. KERVAIRE, Genève

Soit  $f: S_d \to E_{d+n}$  une immersion régulière de la sphère de dimension d dans l'espace euclidien à d+n dimensions. Par définition, la matrice fonctionnelle des coordonnées de f(x) relativement à des coordonnées locales sur  $S_d$  est de rang maximum d en tout point  $x \in S_d$ . Si l'on associe à tout  $x \in S_d$  le n-plan normal à  $f(S_d)$  en f(x), on obtient une application continue  $\tau$  (pourvu que f soit différentiable de classe  $C^1$  au moins, ce que nous supposerons) de  $S_d$  dans la Grassmannienne  $G_{d+n,n}$  des n-plans orientés dans  $E_{d+n}$ . L'application  $\tau: S_d \to G_{d+n,n}$  induit un fibré sur  $S_d$  de groupe structural SO(n), usuellement appelé fibré normal induit par l'immersion f. Nous le dénoterons par  $\mathfrak{N}_f$ .

Notre but est de caractériser parmi tous les fibrés en sphères sur  $S_d$  de groupe structural SO(n), ceux qui sont fibrés normaux induits par une immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$ . La solution de ce problème, abordé en [3], dépend essentiellement de résultats récents de S.SMALE [8] et [9]. Cf. également R. Thom [11].

## 1. Enoncé du résultat

Considérons la fibration  $SO(d+n)/SO(n) = V_{d+n,d}$  où  $V_{d+n,d}$  désigne la variété de STIEFEL des suites de d vecteurs orthonormés dans  $E_{d+n}$ . Soit  $\partial$  l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de cette fibrations:

$$\cdots \rightarrow \pi_d(SO(d+n)) \xrightarrow{\Psi^*} \pi_d(V_{d+n,d}) \xrightarrow{\partial} \pi_{d-1}(SO(n)) \rightarrow \pi_{d-1}(SO(d+n)) \rightarrow \cdots$$
(1.1)

D'autre part, nous avons la fibration  $V_{d+n,n}/SO(n) = G_{d+n,n}$  où la projection  $p:V_{d+n,n} \to G_{d+n,n}$  associe à tout système de n vecteurs orthonormés de  $E_{d+n}$  leur enveloppe linéaire orientée. Nous désignerons par  $\alpha_f$  l'image de la classe d'homotopie de  $\tau$  par l'opérateur bord  $\partial'$  de la suite exacte d'homotopie de cette fibration:

$$\cdots \to \pi_d(V_{d+n,n}) \stackrel{p_*}{\to} \pi_d(G_{d+n,n}) \stackrel{\partial'}{\to} \pi_{d-1}(SO(n)) \to \pi_{d-1}(V_{d+n,n}) \to \cdots$$

$$\alpha_f = \partial' \tau . \tag{1.2}$$

On sait (cf. [10], 18.5 et 18.6) que  $\alpha_f$  (appelé application caractéristique de  $\mathfrak{N}_f$ ) caractérise univoquement la classe d'équivalence du fibré  $\mathfrak{N}_f$ . On a le

Théorème (1.3). L'ensemble des  $\alpha \in \pi_{d-1}(SO(n))$  qui correspondent aux fibrés sur  $S_d$  de groupe structural SO(n) induits par une immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$  est le sous-groupe de  $\pi_{d-1}(SO(n))$  image de  $\pi_d(V_{d+n,d})$  par l'opérateur  $\partial$  de la suite exacte (1.1).

Dans la mesure où l'on connaît (cf. [7]) les groupes  $\pi_d(V_{d+n,d})$  ainsi que l'homomorphisme  $\partial: \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_{d-1}(SO(n))$ , on peut expliciter le sous-groupe {Image  $\partial$ } que nous désignerons par  $J_{d,n}$ . Pour les petites valeurs de d, on obtient le tableau ci-dessous où  $Z_q$  désigne le groupe cyclique d'ordre q, Z le groupe cyclique infini et + la somme directe.

$\boldsymbol{n}$	= 3	4	5	6	7	8	9
d = 3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	Z	0	0	0	0	0
5	$\boldsymbol{Z_2}$	$Z_2 + Z_2$	$\boldsymbol{Z_2}$	0	0	0	0
6	$\boldsymbol{Z_2}$	$Z_2 + Z_2$	$\boldsymbol{Z_2}$	Z	0	0	0
7	$Z_{12}$	$Z_{12} + Z_{12}$	0	0	0	0	0
8	$\boldsymbol{Z_2}$	$Z_2 + Z_2$	0	0	0	Z	0
9	$Z_2$	$Z_2 + Z_2$	0	$Z_{12}$	$Z_2$	$Z_2 + Z_2$	$Z_2$

Dans la diagonale, d=n (cf. [3]), les groupes  $J_{d,d}$  sont donnés par  $J_{d,d}=Z$  pour d pair,  $J_{d,d}=Z_2$  pour d impair et  $S_d$  non parallélisable (c'està dire  $d\neq 1,3,7$  d'après [4]) et  $J_{d,d}=0$  pour  $S_d$  parallélisable, c'est-à-dire d=1,3,7. Pour d< n,  $J_{d,n}=0$ .

#### 2. Addition des immersions

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  les applications caractéristiques des fibrés normaux  $\mathfrak{N}_f$  et  $\mathfrak{N}_g$  sur  $S_d$  induits par des immersions f et g de  $S_d$  dans  $E_{d+n}$ . Le théorème (1.3) affirme tout d'abord que la classe  $\alpha + \beta$  est également caractéristique d'un fibré normal sur  $S_d$  induit par une immersion  $h: S_d \to E_{d+n}$ .

Une telle immersion h peut être obtenue comme suit:

Soit  $S_d \subset E_{d+1}$  avec les coordonnées  $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$  caractérisée par  $\Sigma_i(x_i)^2 = 1$  et soient a, a' les points  $(1, 0, \ldots, 0)$  et  $(-1, 0, \ldots, 0)$  respectivement. En f(a) et g(a') choisissons des (d+n)-repères  $u_1, \ldots, u_{d+n}$  et  $v_1, \ldots, v_{d+n}$  induisant l'orientation positive de  $E_{d+n}$  et tels que  $u_1, \ldots, u_d$  (respectivement  $v_1, \ldots, v_d$ ) soient tangents à  $f(S_d)$  (respectivement  $g(S_d)$ ) en f(a) (respectivement g(a')) et fournissent l'orientation positive de  $f(S_d)$  (respectivement l'orientation  $f(S_d)$ ). On peut supposer,

après déplacement éventuel de l'image  $g(S_d)$  dans  $E_{d+n}$ , que  $u_1 = v_1, \ldots, u_d = v_d$  (en tant que vecteurs libres de  $E_{d+n}$ ), et que  $g(a') = f(a) + u_{d+n}$ . Cf. la construction décrite dans [6], § II. Il est commode de déformer, si nécessaire, les applications f et g dans des voisinages

$$U = \{1 - \varepsilon \le x_0 \le 1\}$$
 et  $U' = \{-1 \le x_0 \le -1 + \varepsilon\}$ 

de a et a' respectivement pour leur donner la forme

$$f(x_0, x_1, ..., x_d) = f(a) + \sum_i x_i u_i \quad \text{pour } 1 - \varepsilon \le x_0 \le 1,$$

$$g(x_0, x_1, ..., x_d) = g(a') + \sum_i x_i v_i \quad \text{pour } -1 \le x_0 \le -1 + \varepsilon.$$
(2.1)

où la somme sur i s'étend de 1 à d. (C'est ce que S. SMALE appelle la «normalisation» de l'application f dans le voisinage de f(a)). Ces expressions sont en accord avec les orientations des systèmes  $u_1, \ldots, u_d, v_1, \ldots, v_d$  pourvu que l'on oriente  $S_d$  comme bord de la boule  $\Sigma_i(x_i)^2 \leq 1$ , celle-ci ayant l'orientation induite par  $E_{d+1}$ .

L'immersion h est obtenue en «joignant  $f(S_d)$  et  $g(S_d)$  par un tube de f(a) à g(a') d'axe  $f(a) + tu_{d+n}$ ».

En formules:

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(3x_0 + 2, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_d) \text{ pour } -1 \leq x_0 \leq -(1+\varepsilon)/3$$
  
avec  $\lambda^2(x_0 - 1) = 3(3x_0 + 1)$ . De façon analogue,

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = g(3x_0 - 2, \lambda' x_1, \ldots, \lambda' x_d) \text{ pour } (1 + \epsilon)/3 \le x_0 \le 1,$$

avec  $\lambda^{\prime 2}(x_0+1)=3(3x_0-1)$ . Dans la région intermédiaire, on pose

$$h(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(a) + t u_{d+n} + r(t) \sum_{i=1}^d x_i u_i,$$

pour 
$$-(1+\varepsilon)/3 \le x_0 \le (1+\varepsilon)/3$$

$$\operatorname{avec} t = \sin^2 \frac{\pi}{4} \left( \frac{3}{1+\varepsilon} x_0 + 1 \right), \, r(t) = c \left( 1 - t(1-t) \right) \, \text{ et } \, c = 3 \sqrt[4]{\varepsilon/(4+\varepsilon)}.$$

L'application h est une immersion régulière.  $(0 < \varepsilon < 1/9.)$ 

Lemme 2.2. On a  $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$ , où  $s: S_d \to E_{d+n}$  désigne le plongement standard et  $\tau_s: S_d \to G_{d+n,n}$  l'application induite<sup>1</sup>).

$$(x_1, \ldots x_d) \to (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0),$$

ou tout autre plongement qui dérive de celui-là par déformation régulière.

¹) On comparera ce lemme avec le lemme (2), § II de [6] dont il est la généralisation. Par plongement standard  $S_d \to E_{d+n}$  nous entendons le plongement donné par

Comme  $\partial' \tau_s = 0$ , on obtient le

Corollaire 2.3.  $\alpha_h = \alpha_f + \alpha_g$ .

Pour démontrer le lemme 2.2, considérons le plongement  $s: S_d \to E_{d+n}$  donné par  $s(x_0, x_1, \ldots, x_d) = f(a) + \frac{1}{2}(x_0 + 1)u_{d+n} + \frac{c}{2} \Sigma_i x_i u_i$ . On remarquera que les restrictions à l'équateur  $\{x_0 = 0\}$  des applications h et s d'une part,  $\tau_h$  et  $\tau_s$  d'autre part coïncident. Les applications  $\tau_h + \tau_s$  et  $\tau_f + \tau_g$  peuvent se factoriser par  $\beta: X \to G_{d+n,n}$  où  $X \subset E_{d+2}$  est la réunion de

$$S_d = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_{d+1}) \in E_{d+2} \mid x_{d+1} = 0, x^2 = 1\}$$

et  $S_d' = \{x \in E_{d+2} \mid x_0 = 0, x^2 = 1\}$ , l'application  $\beta$  étant définie par

$$\beta \mid S_d = \tau_h \text{ et } \beta(0, x_1, \ldots, x_{d+1}) = \tau_s(x_1, \ldots, x_{d+1}).$$

Pour  $x = (0, x_1, \ldots, x_d, 0) \in S_d \cap S'_d$ , on a  $\tau_h(x) = \tau_s(x)$ .

Les applications  $\sigma_1, \ \sigma_2: S_d \to X$ , telles que  $\tau_h + \tau_s = \beta \circ \sigma_1$  et  $\tau_f + \tau_g = \beta \circ \sigma_2$  peuvent être décrites comme suit:  $\sigma_1, \ \sigma_2$  sont injectives sur  $\{x_0 \neq 0\}$  et envoient  $\{x_0 = 0\}$  sur un point P de  $S_d \cap S_d'$ ;  $\sigma_1$  envoie  $\{x_0 > 0\}$  sur  $S_d - P$  et  $\{x_0 < 0\}$  sur  $S_d' - P$ ; pour définir  $\sigma_2$  désignons par  $H_+$ ,  $H_-$  les hémisphères  $\{x_0 \geq 0\}$  et  $\{x_0 \leq 0\}$  de  $S_d$  et  $H'_+, H'_-$  les hémisphères  $\{x_{d+1} \geq 0\}$  et  $\{x_{d+1} \leq 0\}$  de  $S'_d$ .  $\sigma_2$  envoie  $\{x_0 > 0\}$  sur  $\{H_+ \cup H'_-\} - P$  et  $\{x_0 < 0\}$  sur  $\{H_- \cup H'_+\} - P$ .

Comme X est connexe, simplement connexe et acyclique en dimensions  $\langle d, \text{ on a } \pi_d(X) \cong H_d(X)$ . Les cycles  $\sigma_1(S_d)$ ,  $\sigma_2(S_d)$  étant homologues, les applications  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont homotopes. Par suite,  $\tau_h + \tau_s \simeq \tau_f + \tau_g$ .

#### 3. L'invariant de SMALE

Soit  $f: S_d \to E_{d+n}$  une immersion régulière. S. SMALE [8, 9] associe à la classe d'homotopie régulière de f un élément  $c_f$  de  $\pi_d(V_{d+n,d})$  de la manière suivante: Soit  $F_d$  un champ de d-repères tangents sur  $S_d$  défini (continu) à l'extérieur du voisinage U' de a'. Déformons, si nécessaire, l'immersion f pour qu'elle coı̈ncide sur U' avec l'immersion standard s. Soit  $r: H_+ \to S_d - U'$  un difféomorphisme de degré +1 de l'hémisphère  $\{x_0 \ge 0\}$  de  $S_d$  sur  $S_d - U'$  (par exemple  $r(x_0, x_1, \ldots, x_d) = ((2 - \varepsilon)x_0 - 1 + \varepsilon, \mu x_1, \ldots, \mu x_d), \mu$  étant choisi pour que  $[(2 - \varepsilon)x_0 - 1 + \varepsilon]^2 + \mu^2 \Sigma(x_i)^2 = 1$ . On définira d'abord l'application  $c_f$ :  $S_d \to V_{d+n,d}$  par les formules

$$c_f(x) = \begin{cases} df(F_d(rx)) & \text{pour } x \in H_+ \\ ds(F_d(rx^*)) & \text{pour } x \in H_- \end{cases}$$
 (3.1)

où  $H_-$  est l'hémisphère  $\{x_0 \leq 0\}$  de  $S_d$  et  $x \to x^*$  est l'application  $(x_0, x_1, \ldots, x_d) \to (-x_0, x_1, \ldots, x_d)$ . Soit alors également  $c_f$  la classe d'homotopie de l'application continue  $c_f$  ainsi définie. S. SMALE démontre que cette classe ne dépend pas des divers choix faits dans la définition et reste invariante par une déformation régulière de l'immersion f.

On a en outre le

**Théorème (3.2).** (S. SMALE): L'invariant c, fournit une correspondance biunivoque entre les classes d'homotopie régulière d'immersions de  $S_d$  dans  $E_{d+n}$ et les éléments du groupe  $\pi_d(V_{d+n,d})$ .

Nous allons voir que si l'on introduit une structure de groupe dans l'ensemble des classes d'immersions en utilisant l'addition du § 2, la correspondance  $f \to c_f$  de S. SMALE induit un isomorphisme de ce groupe sur le groupe  $\pi_d(V_{d+n,d})$ . Soient f et g deux immersions que nous supposons satisfaire (2.1) et soit  $s': S_d \to E_{d+n}$  une immersion standard satisfaisant

$$s' \mid U' = g \mid U' \text{ où } U' = \{-1 \le x_0 \le -1 + \epsilon\}.$$

Pour démontrer  $c_h = c_f + c_g$  introduisons l'espace Y formé de la réunion de la sphère  $S_d \subset E_{d+1}$  et de la boule  $B_d$  donnée dans  $E_{d+1}$  par  $x_0 = 2/3$ ,  $\Sigma_i(x_i)^2 \le 5/9$  ( $1 \le i \le d$ ). On peut factoriser les applications  $c_h, c_f, c_g$  à une homotopie près par  $\gamma: Y \to V_{d+n,d}$  où  $\gamma$  est définie comme suit:

$$\begin{array}{l} \gamma \mid S_d = c_h \, . \\ \gamma \mid B_d \; \text{est donn\'ee par} \; \; \gamma(x_1, \, \ldots, \, x_d) = ds' \left( \mathsf{F}_d(\varrho \, x) \right) \end{array}$$

où  $\varrho: B_d \to S_d - U'$  est un difféomorphisme de degré +1. Pour  $x \in B_d \cap S_d$  i. e.  $x_0 = 2/3$ ,

$$c_h(x) = dh\left(F_d(rx)\right) = dh\left(F_d\left(\frac{1+\varepsilon}{3}, \mu x_1, \dots, \mu x_d\right)\right)$$
  
=  $dg\left(F_d(-1+\varepsilon, \mu' x_1, \dots, \mu' x_d)\right) = ds'\left(F_d(\varrho x)\right)$ .

Désignons par  $i: S_d \to Y$  l'inclusion de  $S_d$  dans Y, par  $i_1: S_d \to Y$  l'injection qui envoie  $\{x_0 > 0\}$  de  $S_d$  sur  $\{x_0 > 2/3\}$  de Y et  $\{x_0 \le 0\}$  de  $S_d$  sur  $B_d$  et par  $i_2: S_d \to Y$  l'injection qui envoie  $\{x_0 \ge 0\}$  de  $S_d$  sur  $B_d$  et  $\{x_0 < 0\}$  de  $S_d$  sur  $\{x_0 < 2/3\}$  de Y. On a  $\gamma \circ i = c_h$ ,  $\gamma \circ i_1 \simeq c_g$  et  $\gamma \circ i_2 \simeq c_f$ . Comme  $\pi_d(Y) \cong H_d(Y)$  et que  $i(S_d)$  est homologue à  $i_1(S_d) + i_2(S_d)$  on conclut que i est homotope à la somme  $i_1 + i_2$ . Par suite,

$$c_h = \gamma \circ i \simeq \gamma \circ (i_1 + i_2) \simeq \gamma \circ i_1 + \gamma \circ i_2 \simeq c_g + c_f$$

En outre, il est immédiat que  $p_*c_f = \tau_f - \tau_s$ , où  $p_*$  est comme dans (1.2). Il résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\pi_{d}(V_{d+n,d}) \xrightarrow{p_{*}} \pi_{d}(G_{d+n,d})$$

$$\stackrel{\partial}{\xrightarrow} \partial'$$

$$\pi_{d-1}(SO(n))$$

que l'on a<sup>2</sup>) le

**Lemme (3.4).**  $\partial c_f = \alpha_f$ , où  $\partial$  est l'opérateur bord de la suite (1.1).

Ceci fournit le théorème (1.3) comme conséquence immédiate du théorème de Smale.

# 4. Le cas des groupes $J_{d,d}$ .

**Lemme (4.1).** (Cf. [3]): Le groupe  $J_{d,d}$  est infini cyclique pour d pair, cyclique d'ordre 2 pour d impair quand  $S_d$  n'est pas parallelisable et 0 pour  $S_d$  parallelisable.

Il suffit d'observer que l'inclusion  $S_n \to V_{d+n,d}$  (donnant un générateur de  $\pi_n(V_{d+n,d})$ ) induit un épimorphisme  $\pi_d(S_n) \stackrel{i*}{\to} \pi_d(V_{d+n,d})$  dans le cas où d=n (en effet,  $i_*$  est plongé dans la suite exacte

$$\cdots \to \pi_d(S_n) \xrightarrow{i_*} \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_d(V_{d+n,d-1}) \to \cdots$$

de la fibration  $V_{d+n,d}/S_n = V_{d+n,d-1}$ . Le diagramme commutatif

$$\pi_d(V_{d+n,d}) \stackrel{\partial}{\to} \pi_{d-1}(SO(n))$$
 $i_* \uparrow \nearrow \Delta$ 
 $\pi_d(S_n)$ 

montre alors que, pour d=n, l'image par  $\partial$  de  $\pi_d(V_{2d,d})$ , i. e.  $J_{d,d}$ , coïncide avec l'image par  $\Delta$  de  $\pi_d(S_d)$ , d'où le lemme (4.1).

Cependant, on peut démontrer le lemme (4.1) sans faire appel au résultats de S. SMALE, comme suit: Soit  $f: S_d \to E_{2d}$  une immersion complètement régulière et  $I_f$  son coefficient de self-intersection (H. Whitney, [12]).  $I_f$  est un entier pour d pair et un reste modulo 2 pour d impair. Si l'on regarde  $E_{2d}$  comme sous-espace de  $E_{2d+1}$ , on peut munir  $f(S_d)$  d'un champ  $F_{d+1}$  de (d+1)-repères normaux dans  $E_{2d+1}$ . Par une déformation régulière de f on obtient un plongement régulier f' de  $S_d$  dans  $E_{2d+1}$  muni d'un champ  $F'_{d+1}$  de (d+1)-repères normaux. Par un procédé classique [5] dû à L. Pontryagin,

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) On retrouve également  $\tau_h = \tau_f + \tau_g - \tau_s$  par  $\tau_h - \tau_s = p_* c_h = p_* c_f + p_* c_g = \tau_f - \tau_s + \tau_g - \tau_s$ .

B. ECKMANN et R. Thom, on associe à f' et  $F'_{d+1}$  une classe d'homotopie  $\alpha(f', F')$  dans  $\pi_{2d+1}(S_{d+1})$ . Soit alors h(f', F') l'invariant de Hopf de cet élément.

Désignons en outre, comme dans [5], par  $\nu$  le degré de l'application N:  $S_d \to S_d$  définie par  $N(x) = (n \cdot u_1(x), \ldots, n \cdot u_{d+1}(x))$ , où n est la normale à  $E_{2d}$  dans  $E_{2d+1}$  et  $u_1(x), \ldots, u_{d+1}(x)$  sont les vecteurs du champ  $F_{d+1}$  au point f(x).

Lemme (4.2).  $I_f \pm \nu = \pm h(f', F')$  (modulo 2 pour d impair).

Cette formule généralise le lemme (6.1) de [5], où seul le cas d'un plongement  $(I_t = 0)$  était considéré.

Démonstration: Soit  $\Sigma'_d = f'(S_d)$  et  $\Sigma''_d = f''(S_d)$ , où  $f''(x) = f'(x) + \varepsilon u'_1(x)$ ,  $\varepsilon$  étant le rayon d'un voisinage tubulaire de  $f'(S_d)$  dans  $E_{2d+1}$ . On a

$$h(f', F') = L(\Sigma', \Sigma'')$$

par définition (L désignant le coefficient d'enlacement dans  $E_{2d+1}$ ). Posons encore  $\Sigma_d = g(S_d)$ , avec  $g(x) = f'(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d+1} (n \cdot u_i(x)) u_i'(x)$ . Le lemme (4.2) découle de la formule auxiliaire

$$I_f = L(\Sigma_d, \Sigma_d'), \qquad (4.3)$$

au signe près pour d pair, modulo 2 pour d impair.

En effet, soit  $\Psi \colon S_d \times S_d \to E_{2d+1}$  le plongement donné par

$$\Psi(x,y) = f'(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d+1} y_i u_i'(x) .$$

Les images  $\Psi(S_d \times b)$  et  $\Psi(a \times S_d)$  engendrent l'homologie de  $\Psi(S_d \times S_d)$  en dimension d. On a  $\Psi(S_d \times b) = f''$  (pourvu que l'on prenne b = (1, 0, ..., 0)). Posons  $Z_d = \Psi(a \times S_d)$ . On a  $L(Z_d, \Sigma_d') = 1$  (au signe près). •

Comme  $g(S_d) \subset \Psi(S_d \times S_d)$ , on a  $\Sigma_d \sim p \Sigma_d'' + q Z_d$  sur  $\Psi(S_d \times S_d)$ , avec desentiers p, q. La définition de g fournit  $p = 1, q = \nu$ . Donc

$$\Sigma_d \sim \Sigma_d'' + \nu Z_d \text{ sur } \Psi(S_d \times S_d)$$
,

done a fortiori dans  $E_{2d+1} - \Sigma'_d$ . En particulier,

$$I_f = L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma'', \Sigma') + \nu L(Z, \Sigma') = h(f', F') + \nu$$

Il reste donc à démontrer (4.3). Pour cela on considère tout d'abord une déformée f' de f particulière: Soient  $a_1, b_1, \ldots, a_q, b_q$  les paires de points sur  $S_d$  telles que  $f(a_i) = f(b_i)$  (f est supposée complètement régulière, c'est-à-dire f(x) = f(y) entraine x = y ou  $\{x, y\} = \{a_i, b_i\}$  pour un certain i, de plus les  $a_i$ ,  $b_i$  sont tous distincts). Soient  $U_i$ ,  $i = 1, \ldots, q$  des voisinages sphériques de rayon  $\varrho$  des  $a_i$ , chacun des  $U_i$  ne contenant qu'un seul des

points de l'ensemble  $a_1, b_1, \ldots, a_q, b_q$ . Posons  $\alpha_i(x) = \alpha \cdot \cos^2(\frac{1}{2}\pi \varrho^{-1}r_i(x))$  pour  $x \in U_i$  où  $r_i(x)$  est la distance sphérique de x à  $a_i$  et  $\alpha_i(x) = 0$  pour  $x \in S_d - U_i$ . Le plongement  $f': S_d \to E_{2d+1}$  est alors défini par  $f'(x) = f(x) + \Sigma_1^q \alpha_i(x) n$ . Si l'on prend le rapport  $\alpha/\varrho$  assez petit, on peut pour le calcul de  $L(\Sigma, \Sigma')$  remplacer g par  $g^*: S_d \to E_{2d+1}$  définie par  $g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n$ , où  $\varepsilon$  satisfaisant  $0 < \varepsilon < \alpha$  est le rayon d'un voisinage tubulaire de  $f'(S_d)$  dans  $E_{2d+1}$ . Posons  $\Sigma^* = g^*(S_d)$ . On a  $L(\Sigma, \Sigma') = L(\Sigma^*, \Sigma')$ . Pour calculer  $L(\Sigma^*, \Sigma')$  on considère un plongement F' du cône sur  $S_d$  dans  $E_{2d+1}$  tel que

$$F'(x,t) = f'(x) - t \cdot n$$

pour les petites valeurs de t le cône étant paramétrisé par (x, t) avec  $x \in S_d$ ,  $0 \le t \le 1$  avec (x, 1) = (x', 1) pour tout couple  $x, x' \in S_d$ . Calculons le coefficient d'intersection  $S(\Sigma^*, F'CS_d)$ . Si  $y \in \Sigma^* \cap F'CS_d$ , on a

$$y = g^*(x) = f'(x) + \varepsilon n$$
 et  $y = f'(x') - t \cdot n$ .

Donc  $f(x) + (\Sigma_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon) n = f(x') + (\Sigma_1^q \alpha_i(x') - t) \cdot n$ . Ceci implique  $x = a_i, x' = b_i$  ou  $x = b_i, x' = a_i$  pour un certain  $i \in [1, q]$ . On ne peut avoir  $x = a_i, x' = b_i$  car alors  $\Sigma_q \alpha_i(x') = 0$  et on aurait  $-t = \Sigma_1^q \alpha_i(x) + \varepsilon > 0$ . Les seuls points d'intersection sont donc de la forme

$$g^*(b_i) = F'(a_i, t_i).$$

Les points  $g^*(b_1), \ldots, g^*(b_q)$  sont effectivement points d'intersection de  $\Sigma^*$  avec  $F'CS_d$ .

En effet

$$g^*(b_i) = f'(b_i) + \varepsilon n = f(b_i) + \varepsilon n$$
  
=  $f(a_i) + \varepsilon n$   
=  $f'(a_i) - (\alpha - \varepsilon)n = F'(a_i, \alpha - \varepsilon)$ ,

où  $\alpha - \varepsilon > 0$ .

On vérifie que si le point  $f(a_i) = f(b_i)$  est point de self-intersection de  $f(S_d)$  avec le coefficient  $c_i$  ( $c_i = \pm 1$ ), le coefficient d'intersection de  $g^*(Ub_i)$  avec  $F'CS_d$  est  $(-1)^dc_i$ .

On a donc

$$I_f = \Sigma_i c_i = L(\Sigma_d^*, \Sigma_d') = L(\Sigma_d, \Sigma_d')$$
.

On vérifie aisément que pour deux choix  $f'_0$ ,  $f'_1$  de plongements qui sont équivalents au sens des immersions (pour lesquels il existe une famille d'immersions f'(t) dépendant différentiablement de t avec  $f'(0) = f'_0$ .  $f'(1) = f'_1$  les coefficients d'enlacement  $L(g_0(S_d), f'_0(S_d))$  et  $L(g_1(S_d), f'_1(S_d))$  sont égaux pour d pair et congruent modulo 2 pour d impair. La formule

 $I_f = L(\Sigma_d, \Sigma_d')$  est donc valable quel que soit le choix du plongement f' régulièrement homotope à f. Le lemme (4.2) est ainsi démontré.

Pour obtenir (4.1), il suffit maintenant de remarquer que l'on peut réaliser toutes les valeurs de  $I_f$  par des immersions (H. WITHNEY [12]). De plus  $\Delta v = \alpha_f$ . Comme les éléments  $\alpha(f', F') \in \pi_{2d+1}(S_{d+1})$  sont dans l'image de  $J: \pi_d(SO(d+1)) \to \pi_{2d+1}(S_{d+1})$  (voir lemme 8.1 de [5]), il s'ensuit  $\Delta h(f', F') \iota_d = 0$ . On a donc  $\alpha_f = I_f \Delta \iota_d$ . D'où  $J_{d,d} = \Delta \pi_d(S_d)$ . Q.E.D.

# 5. Les plongements

Comme le remarque S. SMALE ([8], § 1), il serait intéressant de savoir quels éléments de  $\pi_d(V_{d+n,d})$  sont invariants de SMALE de classes d'équivalence représentables par un plongement (sans self-intersection)  $S_d \to E_{d+n}$ .

On peut obtenir quelques renseignements à ce sujet en combinant un théorème de [5] (Théorème 8.2) et la connaissance des groupes d'homotopie stables  $\pi_d(SO(N))$  fournie par [2]. D'après [5], si  $f: S_d \to E_{d+n}$  est un plongement et si d < 2n-1, le fibré normal induit est trivial, i. e.  $\alpha_f = 0$ . On voit d'autre part immédiatement (en utilisant la construction du § 2) que les éléments de  $\pi_d(V_{d+n,d})$  qui peuvent être représentés par un plongement forment un sous-groupe  $\pi'_d(V_{d+n,d})$ . Par suite, on a le

Théorème 5.1. Pour d < 2n-1 l'ensemble  $\pi'_d(V_{d+n,d})$  des classes de  $\pi_d(V_{d+n,d})$  représentables par un plongement est un sous-groupe du noyau de  $\partial: \pi_d(V_{d+n,d}) \to \pi_{d-1}(SO(n))$  ( $\partial$  comme dans (1.1)).

Comme  $Ker \partial = Im \Psi_*$ , où  $\Psi_* : \pi_d(SO(d+n)) \to \pi_d(V_{d+n,d})$  et que  $\pi_d(SO(d+n))$  (qui est stable pour  $n \ge 2$ ) est nul pour d congruent 2, 4, 5, 6 modulo 8 (d'après [2]), on obtient le

Corollaire 5.2. Si d est congruent 2, 4, 5, 6, modulo 8, il n'existe pas d'immersion non-triviale de  $S_d$  dans  $E_{d+n}$  avec d < 2n-1 qui soit équivalente à un plongement.

Note: J'ignore s'il existe dans ce cas des plongements qui ne sont pas «équivalents» au sens des plongements au plongement standard.

En général,

 $Im \Psi_* \cong \pi_d(SO(d+n))/i_*\pi_d(SO(n))$ , où  $i_*: \pi_d(SO(n)) \to \pi_d(SO(d+n))$  est induit par l'inclusion  $i: SO(n) \to SO(d+n)$ , et  $\pi'_d(V_{d+n,d})$  est isomorphe à un sous-groupe de  $Im \Psi_*$ .

Pour d = 4s - 1, d < 2n - 1,  $\pi_d(SO(n))$  contient une composante libre et  $Im \Psi^*$  est de la forme Z/mZ. On ne sait rien sur l'entier m sauf que c'est une puissance de 2 (cf. A. BOREL et F. HIRZEBRUCH [1] § 26.2).

Pour d congruent à 0 ou 1 modulo 8,  $\pi_d(SO(d+n)) = Z_2$ . Il existe donc au plus une classe d'immersions non-triviale représentable par un plongement.

On voit aisément que  $i_*: \pi_{8s+1}(SO(8s-4)) \to \pi_{8s+1}(SO)$  est surjectif (car  $\cdots \to \pi_{8s+1}(SO(8s-4)) \to \pi_{8s+1}(SO(8s+4)) \to \pi_{8s+1}(V_{8s+4,8}) = 0$ , d'après [7]). Donc,

Corollaire 5.3. Toute immersion  $f: S_{8s+1} \to E_{n+8s+1}$  où  $n \geq 8s-4$  équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.

De manière analogue,  $i_*: \pi_{8s}(SO(8s-5)) \to \pi_{8s}(SO)$  est surjectif³) pour  $s \ge 2$ . On obtient,

Corollaire 5.4. Toute immersion  $f: S_{8s} \to E_{n+7s}$  où  $n \ge 8s - 5$ ,  $s \ge 2$ , équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.

### 6. Compression d'une immersion

Nous étudions la question de savoir sous quelles conditions une immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$  est équivalente à une immersion f' satisfaisant à  $f'(S_d) \subset E_{d+m} (m \leq n)$ . Si une telle immersion f' existe, on dira que f peut être compressée dans  $E_{d+m}$ .

**Théorème 6.1.4**) L'immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$  peut être compressée dans  $E_{d+m} (m \ge 1)$  si et seulement si il existe un champ de (n-m)-repères normaux à  $f(S_d)$  dans  $E_{d+n}$ .

Démonstration: Soit  $j_*:\pi_d(V_{d+m,d})\to\pi_d(V_{d+n,d})$  l'injection naturelle  $(m\leq n)$ .

On a le diagramme commutatif

$$\pi_{d}(SO(d+m)) \rightarrow \pi_{d}(SO(d+n))$$
 $\downarrow \Psi m$ 
 $\downarrow \Psi n$ 
 $\pi_{d}(V_{d+m,d}) \rightarrow \pi_{d}(V_{d+n,d})$ 
 $\downarrow \partial_{m} \qquad \downarrow \partial_{n}$ 
 $\pi_{d-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_{d-1}(SO(n))$ 
 $\downarrow i_{m} \qquad \downarrow i_{n}$ 
 $\pi_{d-1}(SO(d+m)) \stackrel{\approx}{\rightarrow} \pi_{d-1}(SO(d+n))$ .

Soit  $c_f \in \pi_d$   $(V_{d+n,d})$  l'invariant de SMALE de l'immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$  donnée. L'existence d'un champ de (n-m)-repères normaux est équivalente au fait que  $\partial_n c_f$  est dans l'image de  $i_{n-m}$ . Si f peut être compressée dans

<sup>3)</sup> Cf. Some non-stable homotopy groups of Lie groups, à paraître.

<sup>4)</sup> M. Hirsch a également obtenu des théorèmes dans cette direction.

 $E_{d+m}$ ,  $c_f$  est dans l'image de  $j_*$  et par suite  $\partial_n c_f$  est dans l'image de  $i_{n-m}$ . Inversement, supposons qu'il existe un  $\alpha \in \pi_{d-1}(SO(m))$  tel que  $i_{n-m}\alpha = \partial_n c_f$ . On aura  $i_m\alpha = 0$  (car  $i_n\partial_n c_f = 0$  et  $\pi_{d-1}(SO(d+m)) \to \pi_{d-1}(SO(d+n))$  est un isomorphisme pour  $m \geq 1$ ). Par suite, il existe un  $c \in \pi_d(V_{d+m,d})$  tel que  $\partial_m c = \alpha$ . On a donc  $\partial_n (j_* c - c_f) = 0$ . Il s'ensuit  $j_* c = c_f + \Psi_n \mu'$ . Comme  $\pi_d(SO(d+m)) \to \pi_d(SO(d+n))$  est surjectif pour  $m \geq 1$ , il existe un  $\mu \in \pi_d(SO(d+m))$  tel que  $c_f = j_*(c - \Psi_m \mu)$ . Soit alors  $f'': S_d \to E_{d+m}$  une immersion fournie par le théorème de SMALE, telle que  $c_{f''} = c - \Psi_m \mu$ . Si l'on compose f'' avec l'injection  $E_{d+m} \to E_{d+n}$ , on obtient une immersion  $f': S_d \to E_{d+n}$  telle que  $f'(S_d) \subset E_{d+m}$  et dont l'invariant de SMALE est  $j_*c_{f''} = c_f$ . Les immersions f et f' sont donc équivalentes. Q.E.D.

Corollaire 6.2. Pour que l'immersion  $f: S_d \to E_{d+n}$  puisse être compressée dans  $E_{d+1}$ , il faut et il suffit que le fibré normal induit par f soit trivial.

Corollaire 6.3. Tout plongement  $f: S_d \to E_{d+n}$  avec d < 2n-1 peut être compressé en une immersion dans  $E_{d+1}$ .

Battelle Memorial Institute.

#### **BIBILIOGRAPHIE**

- [1] A. Borel et F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces, Amer. J. of Math., to appear.
- [2] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 43 (1957), 933-935.
- [3] M. KERVAIRE, Normal bundle to a sphere in euclidean space, Bull. Amer. Math. Soc., 63 (1957), 147.
- [4] M. Kervaire, Non parallelizability of the n-sphere for n > 7, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 44 (1958), 280-283.
- [5] M. KERVAIRE, An Interpretation of G. WHITEHEAD's generalization of HOPF's invariant, Ann. of Math., to appear.
- [6] J. MILNOR, On the immersion of n-manifolds in (n + 1)-space, Comment. Math. Helvetici, 30 (1956), 275-284.
- [7] G. F. PAECHTER, The groups  $\pi_r(V_{n,m})$ , The Quarterly J. Math. 7 (1956), 249-268.
- [8] S. SMALE, The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, Ann. of Math., to appear.
- [9] S. SMALE, The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, Notices Amer. Math. Soc., 5, number 1, issue No. 29 (1958), 66.
- [10] N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton Press, 1950.
- [11] R. Thom, La classification des immersions (d'après S. SMALE), Séminaire Bourbaki, Décembre 1957.
- [12] H. Whitney, The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space, Ann. of Math. 45 (1944), 220-246.

(Reçu le 7 août 1958)