

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Groupes de LIE compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes.
Autor: Poncet, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26012>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Groupes de LIE compacts de transformations de l'espace euclidien et les sphères comme espaces homogènes

par JEAN PONCET, Zurich

1. Introduction

C'est un problème ouvert de savoir ce qui caractérise topologiquement les groupes de transformations linéaires parmi les groupes de LIE compacts de transformations de l'espace euclidien E_n . Les résultats les plus complets dans ce sens, pour les petites dimensions, ont été énoncés par MONTGOMERY et ZIPPIN et prennent une signification particulière pour les fondements de la géométrie en termes de groupes de congruences (voir [7], chap. VI): un groupe compact opérant sur E_n , $n \leq 3$, — on démontre d'abord qu'il est de LIE — est équivalent topologiquement à un groupe orthogonal si l'on suppose seulement qu'il est connexe. Si G n'est pas connexe, il n'opère pas nécessairement linéairement sur E_3 , comme le montre un exemple de BING [1] d'une transformation involutive de E_3 qui possède des points fixes et qui n'est différentiable, à plus forte raison linéaire, pour aucune structure différentiable de E_3 . Si $n > 3$, la connexion de G ne suffit plus pour qu'il soit équivalent à un groupe compact de LIE de transformations différentiables de E_n : [8] donne un exemple de groupe isomorphe à $SO(2)$, le groupe des rotations de E_2 , qui opère sur E_4 et qui n'est différentiable pour aucune structure différentiable de E_4 . Il s'ensuit que pour $n > 3$ d'autres conditions topologiques que la connexion et la compacité de G seront nécessaires pour qu'il soit linéaire sur E_n . Dans ce qui suit, nous montrons que G est linéaire sur E_n si G est compact et connexe et s'il existe au moins une orbite de dimension $n - 1$, ou, sous les mêmes hypothèses pour G , si les orbites de E_n sont des sphères S_{n-2} et des points fixes. Nous utiliserons pour cela les résultats de [7] et de [9]. De plus G opère aussi linéairement s'il est isomorphe à $SO(n - 1)$ et s'il existe des orbites de dimension $n - 2$.

Dans [7], MONTGOMERY et ZIPPIN étudient les groupes compacts et connexes de transformations de E_n sous l'hypothèse qu'il existe une orbite de dimension $n - 1$. Ils montrent que toutes les orbites sauf un point fixe sont de dimension $n - 1$, qu'elles possèdent le même groupe d'isotropie et sont donc homéomorphes entre elles. En outre, les orbites de dimension $n - 1$ ont même homologie entière qu'une sphère S_{n-1} . Comme une orbite $(n - 1)$ -dimensionnelle d'un espace n -dimensionnel localement euclidien est locale-

ment connexe ([7], chap. VI, corollaire de la p. 248) et qu'un groupe compact et effectif de transformations d'un tel espace est de LIE si ses orbites sont localement connexes ([7], chap. VI, Th. 1, p. 244), G est de LIE. La structure de E_n comme espace de transformations de G est assez simple puisque le complémentaire du point fixe est un espace fibré trivialement en orbites, d'où l'existence d'un rayon qui est une section pour toutes les orbites. Tout ceci fait conjecturer que G opère linéairement sur E_n , ce que nous démontrerons en utilisant un théorème de A. BOREL ([2] et non publié; voir aussi [3]), d'après lequel les orbites de dimension $n - 1$, ayant même homologie entière que des sphères S_{n-1} et étant simplement connexes pour $n - 1 > 1$ (pour $n - 1 = 1$ il n'y a rien à démontrer), sont nécessairement des sphères S_{n-1} . Ceci pourrait être établi sans considérations d'homologie si l'on supposait que G opère différentiablement. En effet, d'après le théorème de BOCHNER ([7], chap. V), G agit alors linéairement dans un voisinage invariant du point fixe; les orbites de ce voisinage sont sur des sphères S_{n-1} et doivent se confondre avec ces sphères si elles sont de dimension $n - 1$. Cela est vrai globalement puisque les orbites différentes du point fixe sont des espaces homogènes isomorphes.

Dans [9] MONTGOMERY, SAMELSON, YANG montrent que G compact, connexe, de LIE, est équivalent, comme groupe de transformations de E_n , à un groupe linéaire s'il existe des orbites de dimension $n - 2$ et si les transformations de G sont différentiables une fois sur E_n . Une partie de leur raisonnement n'utilise pas l'hypothèse de différentiabilité et montre que les orbites de dimension $n - 2$ ont même groupe d'isotropie, leur réunion R est un ouvert dense dans E_n , l'espace quotient E_n/G est homéomorphe à une cellule à deux dimensions diminuée d'un point frontière, l'intérieur homéomorphe à E_2 et la frontière homéomorphe à E_1 étant respectivement R/G et S/G , S désignant le complémentaire de R dans E_n . Ceci nous permet de démontrer sans hypothèses de différentiabilité que G opère linéairement si ses orbites sont des sphères S_{n-2} et des points fixes, et aussi, sans hypothèses sur les orbites de dimension $n - 2$, si G est isomorphe à $SO(n - 1)$.

Il n'est pas impossible que seule l'existence d'orbites S_{n-2} soit suffisante pour que G soit linéaire; nous comptons reprendre la question ailleurs. Toutefois nous montrons par des considérations d'homologie que le complémentaire S de la réunion des orbites S_{n-2} se réduit à des points fixes s'il ne possède qu'un nombre fini de « singularités ».

Le théorème cité de MONTGOMERY et ZIPPIN sur les groupes compacts et connexes qui opèrent sur E_n , $n \leq 3$, est une conséquence immédiate des deux premiers résultats de ce travail.

Je remercie ici Monsieur A. BOREL pour les conseils qu'il m'a donnés.

2. Les sphères comme espaces homogènes

Nous allons vérifier qu'un groupe compact, connexe et transitif sur S_n opère sur S_n comme un sous-groupe de rotations, autrement dit qu'un tel groupe, rendu effectif, est un sous-groupe de $SO(n+1)$ opérant naturellement sur S_n . Ceci est évident pour les groupes classiques, mais l'est moins pour les groupes non classiques transitifs sur une sphère.

Si G est compact, transitif et effectif sur S_n , il est de LIE ([7], chap. VI, Th. 1, p. 244). On a alors le théorème suivant (voir [10]):

Si n est pair, G est simple. Si n est impair, G est de la forme $(H \times K)/N$, où N est un sous-groupe invariant fini de $H \times K$, H un groupe simple qui est transitif sur S_n comme sous-groupe de $H \times K$; K est soit réduit à l'unité, soit $SO(2)$, soit le groupe $Sp(1)$.

Supposons d'abord n pair. D'après A. BOREL [3], G doit être localement isomorphe à $SO(n+1)$, à une exception près: pour $n=6$, G peut être encore G_2 , groupe exceptionnel de la classification de KILLING-CARTAN qu'on peut représenter par les automorphismes de l'algèbre de CAYLEY et qui est transitif sur la sphère $S_6 = G_2/A_2$ des nombres imaginaires de CAYLEY de norme un. G opère comme un sous-groupe de rotations de S_6 puisqu'il conserve la norme. Cela est aussi évident si G est localement isomorphe à $SO(n+1)$, car les transformations assez rapprochées de l'unité laissent invariante la métrique naturelle de RIEMANN sur S_n , et celle-là seulement, elles sont donc des rotations de S_n . Il en est de même de toute transformation de G , qui est engendré par tout voisinage de l'unité.

Pour n impair supposons d'abord G simple. D'après A. BOREL encore [4], G est ou bien un groupe classique transitif sur S_n comme un sous-groupe de rotations, ou bien est isomorphe à l'un des groupes $Spin(7)$ et $Spin(9)$ transitifs respectivement sur $Spin(7)/G_2 = S_7$ et $Spin(9)/Spin(7) = S_{15}$. Pour vérifier que $Spin(7)$ et $Spin(9)$ opèrent comme des sous-groupes de rotations sur S_7 respectivement S_{15} , nous établirons d'abord que le premier ne contient qu'une classe de sous-groupes conjugués G_2 et le second qu'une classe de sous-groupes conjugués $Spin(7)$ tels que les quotients correspondants soient des sphères S_7 et S_{15} .

Commençons par $Spin(9)$.

Comme le centre de $SO(9)$ se réduit à l'unité, celui de $Spin(9)$ ne peut être que d'ordre deux. De même le centre de $Spin(7)$ est d'ordre deux. Un sous-groupe isomorphe à $Spin(7)$ de $Spin(9)$ ne peut pas contenir le centre de $Spin(9)$ si l'espace homogène correspondant est S_{15} . Sinon on aurait $SO(9)/SO(7) = S_{15}$, ce qui est impossible puisque $SO(9)$ n'est transitif que

sur S_8 . L'image d'un tel sous-groupe $Spin(7)$ dans le quotient $SO(9)$ de $Spin(9)$ par son centre est donc isomorphe à $Spin(7)$.

Les représentations linéaires irréductibles de $Spin(7)$, c'est-à-dire les représentations bivalentes de $SO(7)$, sont de degré 8 ou supérieur à 9 comme le montre la formule de WEYL ([12], p. 349). On déduit de cela qu'une représentation fidèle du groupe $Spin(7)$ dans $SO(9)$ doit être réductible et laisser fixe un sous-espace à une dimension complexe de l'espace complexe à 9 dimensions. La valeur propre correspondante doit être 1 et le vecteur propre correspondant peut être choisi réel. Mais ceci signifie simplement que tout sous-groupe $Spin(7)$ de $SO(9)$ est conjugué par un automorphisme intérieur de $SO(9)$ à un sous-groupe de la représentation somme $1 + SO(8)$.

Dans $SO(8)$, deux représentations de $Spin(7)$ étant irréductibles doivent être conjuguées par une transformation de $O(8)$; dans $1 + SO(8)$ deux telles représentations sont donc conjuguées par une transformation de $1 + O(8)$, c'est-à-dire de $O(9)$. Ceci est un cas particulier d'un fait général connu de la théorie des représentations linéaires : si deux représentations irréductibles d'un groupe compact ont des images dans $SO(n)$ qui sont équivalentes par une transformation de $GL(n, C)$, elles le sont aussi par une transformation de $O(n)$. Mais comme tout automorphisme intérieur de $O(9)$ induit un automorphisme intérieur de $SO(9)$, on voit que deux sous-groupes $Spin(7)$ de $1 + SO(8)$ sont conjugués par un automorphisme intérieur de $SO(9)$.

En définitive deux sous-groupes $Spin(7)$ de $SO(9)$ sont conjugués par un automorphisme intérieur. En remontant à $Spin(9)$, on a finalement que deux sous-groupes $Spin(7)$ de $Spin(9)$ qui ne contiennent pas le centre sont conjugués par un automorphisme intérieur et ceci démontre qu'il n'y a qu'une classe de sous-groupes $Spin(7)$ conjugués dans $Spin(9)$ par les automorphismes intérieurs et tels que $Spin(9)/Spin(7) = S_{15}$.

Par un raisonnement analogue au précédent, on montre que les sous-groupes G_2 de $SO(7)$ sont conjugués par les automorphismes intérieurs de $SO(7)$ en s'appuyant sur le fait qu'une représentation irréductible non triviale de G_2 de degré au plus égal à 7 est nécessairement de degré 7 et déterminée à une équivalence près, et de là, en remontant à $Spin(7)$, que les sous-groupes G_2 de $Spin(7)$ tels que $Spin(7)/G_2 = S_7$ sont conjugués par les automorphismes intérieurs de $Spin(7)$.

On peut maintenant vérifier que $Spin(7)$ et $Spin(9)$ opèrent sur S_7 respectivement S_{15} comme des groupes de rotations de ces sphères.

$Spin(7)$ a une représentation fidèle, unitaire unimodulaire qui opère sur l'espace des spineurs de E_7 ; c'est un espace vectoriel complexe à 8 dimensions. $Spin(7)$ possède ainsi une représentation orthogonale fidèle de degré 16. Mais il existe dans l'espace des spineurs de E_7 une involution ([5], pp. 30

et 31) qui commute avec les opérations de $Spin(7)$. Les spineurs qui sont fixes par cette involution, appelés *réels* par E. CARTAN, forment un sous-espace réel de dimension 8 de l'espace des spineurs. Il s'ensuit que la représentation de $Spin(7)$ dans $SO(16)$ est réductible et équivalente à la somme de deux représentations de degré 8. On voit alors que l'une de ces représentations est fidèle et précisément transitive sur les spineurs *réels* de norme hermitienne égale à 1, qui forment une sphère S_7 .

De même on verra que $Spin(9)$ opère sur S_{15} comme un groupe de rotations de cette sphère. Les spineurs de l'espace E_9 forment un espace vectoriel complexe à 16 dimensions, ou un espace réel à 32 dimensions. Il existe aussi une involution comme précédemment, et les spineurs fixes par cette involution qui sont de norme hermitienne égale à 1 forment une sphère S_{15} , sur laquelle est transitive, comme groupe de rotations, une représentation orthogonale fidèle, de degré 16, de $Spin(9)$.

Reste à examiner, pour n impair, le cas où G n'est pas simple et de la forme $(H \times K)/N$, H étant simple et transitif sur S_n . Il suffira de montrer que $G^* = H \times K$, qui est localement isomorphe à G , opère sur S_n comme un groupe de rotations.

G^* opère comme un groupe de rotations de S_n s'il laisse invariante la métrique riemannienne naturelle de S_n . Nous savons déjà que H laisse invariante la métrique naturelle de S_n ; mais il n'est pas évident qu'il doit en être ainsi pour $G^* = H \times K$. Si généralement $H_1/h_1 = H_2/h_2$, $H_1 \subset H_2$, $h_1 \subset h_2$, les métriques de RIEMANN de H_1/h_1 invariantes par H_1 (il peut y en avoir plusieurs) ne le sont pas nécessairement par H_2 . Ainsi $Sp(1) \subset SO(4)$ laisse invariante toute métrique de RIEMANN sur son homéomorphe S_3 obtenue par transport dans $Sp(1)$ d'une forme quadratique définie positive sur l'espace tangent en l'élément neutre, alors que la seule métrique de RIEMANN de S_3 qui soit invariante par $SO(4)$ est la métrique naturelle.

Généralement, une métrique riemannienne invariante sur H/h , où H est compact et de LIE, se définit par transport dans H/h d'une forme quadratique définie positive, invariante par h sur l'espace tangent en un point de H/h stable par h [6].

Plus précisément, soient p la projection $x \rightarrow xh$, p' sa différentielle en l'élément neutre e . Appelons h' la représentation linéaire de h qui opère sur l'espace tangent au point eh de H/h . Deux vecteurs tangents en eh transformés l'un dans l'autre par l'image $a' \subset h'$ de $a \subset h$ sont images par p' de deux vecteurs tangents en e transformés l'un dans l'autre par ada , c'est-à-dire $p' \circ ada = a' \circ p'$. Ainsi une forme définie positive sur l'espace tangent en eh , invariante par h' , peut être considérée comme une forme sur l'algèbre de LIE $L(H)$ qui est invariante par adh , constante sur chaque classe $\alpha + L(h)$

et définie positive sur un supplémentaire de $L(\mathfrak{h})$ dans $L(H)$ qui est invariant par adh ; et réciproquement. Une métrique de RIEMANN invariante sur H/\mathfrak{h} ne dépend donc que de la donnée d'une telle forme sur $L(H)$.

Faisons ici une remarque que nous utiliserons dans la suite. Supposons que le sous-groupe H de G soit transitif sur les classes xg , autrement dit $G/g = H/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} = H \cap g$. Tout vecteur tangent en eg est projection d'un vecteur qui appartient à un supplémentaire, invariant par adh , de $L(\mathfrak{h})$ dans $L(H)$. Supposons donnée sur ce supplémentaire une forme quadratique définie positive et invariante par adh , à laquelle correspond donc une métrique riemannienne invariante par H sur H/\mathfrak{h} . Alors si ce supplémentaire et cette forme sont aussi invariants par adg , cette métrique sur $H/\mathfrak{h} = G/g$ est invariante par G .

Revenons au groupe simple H qui opère sur $S_n = H/\mathfrak{h}$ comme un sous-groupe de rotations. H est localement isomorphe à un sous-groupe de $SO(n+1)$, \mathfrak{h} est localement isomorphe à un sous-groupe de $SO(n)$, et on a $L(H) \subset L(SO(n+1))$, $L(\mathfrak{h}) \subset L(SO(n))$, $adH \subset adSO(n+1)$, $adh \subset adSO(n)$.

$D(X)$ désignant une forme définie positive sur $L(SO(n+1))$, soit L le sous-espace orthogonal à $L(SO(n))$ relativement à $D(X)$. L est un supplémentaire de $L(SO(n))$. Soit $E(X)$ la restriction de $D(X)$ à L . Si $D(X)$ est invariante par $adSO(n+1)$, L et $E(X)$ sont invariants par $adSO(n)$, et il correspond à $E(X)$ un ds^2 invariant par $SO(n+1)$ sur $S_n = SO(n+1)/SO(n)$ qui ne peut être que le ds^2 naturel. Cela étant, soient $L' = L \cap L(H)$ et $E'(X)$ la restriction de $E(X)$ à L' . L' est un supplémentaire de $L(\mathfrak{h})$ dans $L(H)$ qui est invariant par adh et $E'(X)$ définit aussi le ds^2 naturel de $S_n = H/\mathfrak{h}$. Notons que L' et $E'(X)$ sont invariants par adN_0 , N_0 désignant le normalisateur de \mathfrak{h} dans H .

Soit maintenant g^* le sous-groupe de $G^* = H \times K$ tel que $G^*/g^* = S_n$. On a $\mathfrak{h} \times e' = H \times e' \cap g^*$ (e' est l'élément neutre de K). On peut identifier L' à un sous-espace de $L(H \times e')$ supplémentaire de $L(\mathfrak{h} \times e')$. Il est alors évident que adg^* laisse invariants L' et $E'(X)$. Car appelons $s \times t$ ($s \subset H$, $t \subset K$) un élément de g^* . Comme t commute avec $H \times e'$, il suffit de vérifier que L' et $E'(X)$ sont invariants par ads ou encore que s est dans N_0 . Soit $u \subset \mathfrak{h}$; on a $(s \times t)(u \times e')(s \times t)^{-1} = (sus^{-1}) \times e' \subset g^*$, donc $sus^{-1} \subset \mathfrak{h}$ ou $s \subset N_0$. D'après la remarque faite plus haut il suit de ce que L' et $E'(X)$ sont invariants par adg^* que le ds^2 naturel est invariant par G^* .

3. Le cas où il existe des orbites de dimension $n - 1$ dans E_n

Nous désignerons généralement par (G, E) un groupe G de transformations de l'espace E . G est un groupe topologique, qui dans la suite sera toujours

supposé compact, de LIE, E est un espace topologique localement compact. Si g est dans G , x dans E , le transformé $g(x)$, que nous noterons aussi gx , doit être par définition une fonction continue sur le produit $G \times E$, à valeurs dans E .

Si (G', E') est un autre groupe de transformations, une application continue $\varphi(x)$ de E dans E' et un homomorphisme $h: S \rightarrow h_S$ de G dans G' seront dits définir une représentation de (G, E) dans (G', E') lorsque $\varphi(Sx) = h_S \varphi(x)$; $\varphi(x)$ transforme ainsi les orbites de (G, E) en orbites de $(h(G), \varphi(E))$, $h(G)$ désignant l'image par h de G dans G' . Si φ est un homéomorphisme de E sur $\varphi(E)$ et h un isomorphisme de G sur $h(G)$, (G, E) et $(h(G), \varphi(E))$ seront dits isomorphes.

Soient $f(x)$ une fonction réelle continue sur E , h_S une représentation orthogonale du groupe G compact connexe, $\gamma(S)$ un vecteur réel tel que $\gamma(ST) = h_S \gamma(T)$ pour S, T dans G ; alors h_S et $\varphi(x) = \int_G f(Sx) \gamma(S^{-1}) dS$, où dS est l'élément d'une mesure invariante sur G , définissent une représentation de (G, E) dans $(SO(n), E_n)$, n étant le nombre de composantes de $\gamma(S)$.

Si (G, E_n) a des orbites de dimension $n - 1$, on sait, d'après ce qui a été rappelé dans l'introduction, que G est de LIE, que toutes les orbites, à part un seul point fixe p , sont des sphères S_{n-1} et forment une même classe. Il existe de plus un rayon de E_n qui est une section globale et que nous désignerons par Σ . Je dis que (G, E_n) est isomorphe à un groupe de transformations linéaires de E_n . Ceci peut être établi facilement si l'on montre d'abord qu'il existe une section Σ telle que le sous-groupe de stabilité de ses points soit constant. Mais on peut aussi procéder de la manière suivante.

D'après ce qui vient d'être démontré sous 2, G opère sur chaque orbite S_{n-1} comme un sous-groupe de rotations. Si G est effectif, on a un isomorphisme h_S de G dans $SO(n)$. Nous noterons simplement par S la matrice orthogonale h_S et par $\gamma(S)$ l'une des colonnes de cette matrice. On a $\gamma(ST) = S\gamma(T)$.

Soit Γ le sous-groupe de stabilité de $\gamma(E)$, E étant la matrice unité de degré n : $\gamma(S)$ est constante sur chaque classe à gauche $X\Gamma$. Il existe un voisinage de l'unité $V = V^{-1}$, invariant par les automorphismes intérieurs de G , assez petit pour que l'une au moins des composantes de $\gamma(S)$ conserve le même signe sur $V\Gamma = \Gamma V$.

Le sous-groupe de stabilité G_a d'un point a différent du point fixe p est conjugué à Γ : il existe une transformation M_a de G telle que $M_a \Gamma M_a^{-1} = G_a$, et l'on peut supposer que M_a varie continûment avec a . Σ étant une section quelconque, soient b sur Σ et x sur $G(b)$. Choisissons une fonction $h(x)$ définie de la manière suivante: elle est positive et continue sur $V(\Sigma)$, nulle sur $E_p - V(\Sigma)$; sa restriction à $V(b)$ est constante, $h(b)$ croît de 0 à ∞ lorsque

b varie sur Σ à partir de p . Supposant toujours x sur l'orbite $G(b)$, on voit maintenant facilement que le vecteur $\varphi(x)$ égal à $\int_G h(M_b S M_b^{-1} x) M_b \gamma(S^{-1}) dS$ pour $x \neq p$, nul pour $x = p$, et la représentation orthogonale de G donnée définissent un isomorphisme de (G, E_n) sur un groupe de transformations linéaires de E_n . Comme $\varphi(Tx) = T\varphi(x)$, il suffit de vérifier que $\varphi(x)$ est un homéomorphisme.

Le support de $h(M_b S M_b^{-1} b)$ comme fonction positive de S est $V\Gamma = \Gamma V$, et une composante au moins de $\gamma(S^{-1})$ y conserve un même signe. Donc $\varphi(b)$ est un vecteur non nul. On a aussi $\varphi(b) = h(b) M_b \int_{V\Gamma} \gamma(S^{-1}) dS$, donc la longueur de $\varphi(b)$ est proportionnelle à $h(b)$. Si $x = Xb$ parcourt la sphère $G(b)$, $\varphi(x) = X\varphi(b)$ parcourt une sphère S_{n-1} centrée à l'origine de E_n . Le sous-groupe G_b des rotations de G qui laissent $b \subset G(b)$ fixe est conjugué au sous-groupe $G_{\varphi(b)}$ des rotations de G qui laissent $\varphi(b) \subset \varphi(G(b))$ fixe, ce qui entraîne par l'inclusion évidente $G_b \subset G_{\varphi(b)}$ que $G_b = G_{\varphi(b)}$, et $\varphi(x)$ est biunivoque sur la sphère $G(b)$. Mais comme le rayon de la sphère $\varphi(G(b))$ est proportionnel à $h(b)$, $\varphi(x)$ est finalement une application biunivoque de E_n sur E_n , c'est donc un homéomorphisme en vertu du théorème de l'invariance du domaine.

Ceci démontre le

Théorème a. *Si G est compact et connexe et si (G, E_n) a une orbite de dimension $n - 1$, G opère linéairement sur E_n .*

4. Le cas des orbites de dimension $n - 2$ dans E_n

Soit (G, E) un groupe de transformations, où G est un groupe compact de LIE, E un espace dont nous pouvons d'abord supposer qu'il est de HAUSDORFF pour les définitions que nous allons donner, mais qui sera ensuite localement compact.

En général, si le point x de E est assez rapproché de a , le sous-groupe de stabilité G_x est conjugué à un sous-groupe de G_a ([7], chap. V). Nous appellerons une orbite $G(a)$ régulière si, pour tout point x assez rapproché de $G(a)$, G_x est conjugué à G_a , ce qui revient à dire que toute orbite assez proche de $G(a)$ est dans la même classe que $G(a)$. Si au contraire tout voisinage de $G(a)$ contient un point x tel que G_x soit conjugué à un sous-groupe propre de G_a , $G(a)$ sera dite singulière. On montre facilement que la réunion des orbites régulières est un ouvert dense dans E . Enfin l'existence de sections locales sur les orbites régulières ([7], chap. V) fait de tout sous-espace connexe réunion d'orbites régulières un espace fibré en orbites.

Dans (9), MONTGOMERY, SAMELSON et YANG ont montré, sans hypothèse de différentiabilité, que si (G, E_n) a des orbites de dimension $n - 2$, celles-ci ont même groupe d'isotropie, leur réunion R est un ouvert dans E_n ; elles sont donc régulières. Le complémentaire S de R est de dimension au plus égale à $n - 2$, donc R est dense dans E_n , toute orbite de S est singulière et de dimension strictement inférieure à $n - 2$. R/G est homéomorphe à E_2 , donc l'espace R fibré en orbites est trivial. Il existe ainsi une section σ des orbites de R . S/G est homéomorphe à E_1 ; c'est la frontière de E_n/G , qui est homéomorphe à une cellule à deux dimensions diminuée d'un point frontière.

Nous allons démontrer le

Théorème b. *Si les orbites de (G, E_n) sont des sphères S_{n-2} et des points fixes, G opère linéairement sur E_n .*

Si G est effectif sur E_n , il l'est aussi sur chaque orbite régulière S_{n-2} . Il possède alors une représentation fidèle, transitive sur S_{n-2} , dans le groupe $SO(n - 1)$. Soient $\gamma(S)$, Γ , V définis de la même manière que précédemment sous 3. Soit Σ la fermeture de la section σ dans E_n . Σ est une section de E_n . Prenons maintenant deux fonctions $q(x)$, $r(x)$, réelles, définies sur E_n , constantes sur les orbites, donc définies sur E_n/G , et telles que la paire $(q(x), r(x))$ soit un homéomorphisme de E_n/G sur un demi-plan fermé par une droite E_1 . Nous supposons que $r(x)$ est strictement positive sur R et nulle sur S , que la restriction de $q(x)$ à S est un homéomorphisme sur la droite E_1 .

Appelons $h(x)$ une fonction continue sur $V(\Sigma)$, nulle sur $E_n - V(\Sigma)$, définie sur $V(\Sigma)$ de la manière suivante: b étant un point de Σ , elle est constante et égale à $r(b)$ sur $V(b)$. Soit $\varphi(x)$ un vecteur à $n - 1$ composantes, nul sur S et égal à $\int_G h(M_b T M_b^{-1} x) M_b \gamma(T^{-1}) dT$ pour x sur l'orbite régulière $G(b)$ par un point b de σ , M_b étant une transformation orthogonale de G qui varie continûment sur σ et telle que $M_b \Gamma M_b^{-1} = G_b$. On a $\varphi(Ux) = U\varphi(x)$ pour tout U de G , et $\varphi(x)$ est une application continue de E_n sur E_{n-1} , bi-univoque sur chaque orbite, qui applique S sur l'origine de E_{n-1} et chaque orbite régulière $G(b)$ sur une sphère S_{n-1} centrée à l'origine, de rayon proportionnel à $r(b)$. On a ainsi représenté (G, E_n) sur un groupe de transformations orthogonales (G, E_{n-1}) . Enfin si l'on définit un vecteur $\psi(x)$ de E_n en prenant $q(x)$ pour l'une de ses composantes et celles de $\varphi(x)$ pour les $n - 1$ autres, il applique biunivoquement E_n sur E_n ; c'est donc un homéomorphisme qui rend (G, E_n) isomorphe à un groupe de transformations orthogonales de E_n laissant un axe fixe.

5. Remarques sur le cas des orbites de dimension $n - 2$ dans E_n

1. Dans la note [11], nous avons annoncé un résultat équivalent au suivant : (G, E_n) est un groupe de transformations linéaires s'il existe des orbites de dimension $n - 2$ et si G est effectif et isomorphe à $SO(n - 1)$.

Montrons que ceci se ramène au théorème b, autrement dit que les orbites de dimension $n - 2$ sont des sphères et les autres des points fixes.

Comme les orbites de dimension $n - 2$ sont régulières et forment une seule classe d'orbites de réunion dense dans E_n , G doit être effectif sur chaque orbite de dimension $n - 2$. Soit $M = G/H$ l'une de ces orbites. H est aussi effectif et a une représentation orthogonale de degré $n - 2$ qui opère sur l'espace tangent en un point a de M fixe par H . Cette représentation est fidèle; sinon il y aurait un sous-groupe non trivial de H qui laisserait fixe toute géodésique par a d'une métrique de RIEMANN invariante par G , ce qui est impossible si H est effectif. H est donc isomorphe à un sous-groupe de $O(n - 2)$; étant de même dimension que $O(n - 2)$, ce ne peut être que $O(n - 2)$ ou $SO(n - 2)$. Mais il n'existe dans $SO(n - 1)$ qu'une classe de sous-groupes isomorphes au groupe $SO(n - 2)$, conjugués par les transformations de $O(n - 1)$. Le calcul des plus petits degrés des représentations fidèles irréductibles de $SO(n - 2)$ montre en effet ([12], p. 349) qu'une représentation fidèle de degré $n - 1$ de ce groupe est équivalente à $1 + SO(n - 2)$. Il s'ensuit immédiatement qu'un sous-groupe $O(n - 2)$ de $O(n - 1)$ est équivalent à la réunion de $1 + SO(n - 2)$ et de $(-1) + A \cdot SO(n - 2)$, où A est une matrice orthogonale de degré $n - 2$ et de déterminant -1 . L'orbite M est ainsi un espace projectif P_{n-2} ou une sphère S_{n-2} . Mais seul le dernier cas est possible. En effet, comme les orbites singulières sont de dimension $< n - 2$, elles ne peuvent être que des points fixes, car il n'y a pas de sous-groupe de $SO(n - 1)$ de dimension supérieure à celle de $SO(n - 2)$, qui contienne $SO(n - 2)$ et qui soit différent de $SO(n - 1)$; la réunion R des orbites régulières M et la réunion S des points fixes forment ainsi une décomposition de E_n en deux sous-espaces homéomorphes à $E_2 \times M$ et à E_1 , donc R a même homologie mod 2 que tout complémentaire dans E_n d'un homéomorphe à E_1 d'après le théorème de dualité d'ALEXANDER, ce qui entraîne $M = S_{n-2}$ puisque le complémentaire d'une droite de E_n est un produit $E_2 \times S_{n-2}$ qui n'a pas la même homologie que $E_2 \times P_{n-2}$ pour $n > 3$. Ceci ramène à b pour $n > 3$. Pour $n = 3$, il n'y a rien à démontrer.

2. L'hypothèse du théorème b que les orbites singulières de (G, E_n) sont des points fixes est peut-être superflue, mais nous n'avons pas pu le prouver en général. Toutefois, si l'on suppose que les orbites singulières du groupe de

transformations (G, S) induit sur S par (G, E_n) sont en nombre fini, alors S ne contient que des points fixes; autrement dit:

Théorème c. *Si (G, E_n) a des orbites S_{n-2} , le complémentaire $S = E_n - R$ de leur réunion R est ou bien formé de points fixes, ou bien les orbites singulières de (G, S) sont en nombre infini.*

Le théorème c sera une conséquence de cet autre

Théorème d. Soit généralement (G, E_n) un groupe de transformations de E_n (G est un groupe de LIE compact, connexe) possédant des orbites de dimension $n - 2$, et soit \hat{S} l'espace compact qu'on obtient en adjoignant un point à la réunion S des orbites singulières de (G, E_n) . Appelons m la dimension maximum des orbites du groupe de transformations (G, S) induit sur S (m est inférieur à $n - 2$) et Ω la réunion des orbites de dimension m de S . Si une composante connexe Ω_0 de Ω est telle que le groupe de transformations (G, Ω_0) induit sur Ω_0 n'ait qu'un nombre fini d'orbites singulières, le groupe d'homologie de ČECH $H_{m+1}(\hat{S})$, à coefficients dans le groupe des nombres réels modulo 1, est non nul.

Remplaçons le groupe de transformations (G, E_n) par (G, S_n) , qu'on obtient en posant que G a un point fixe sur S_n et opère sur le complémentaire E_n de ce point comme dans (G, E_n) . Les orbites singulières de (G, S_n) ont ainsi \hat{S} pour réunion.

Il n'y a rien à démontrer si m est nul, supposons donc m non nul.

Comme le sous-groupe d'isotropie d'une orbite de dimension m contient des sous-groupes conjugués aux sous-groupes d'isotropie des orbites assez voisines, celles-ci sont aussi de dimension maximum m . Les orbites de dimension m de \hat{S} forment donc un ouvert Ω . Soit $\bar{\Omega}_0 - \Omega_0$ la frontière de l'une des composantes connexes Ω_0 de Ω . Cette frontière comprend deux orbites O_1, O_2 , éventuellement confondues, de dimension inférieure à m . Je dis que $H_{m+1}(\bar{\Omega}_0)$ est $\neq 0$.

Appelons O'_1, O'_2, \dots, O'_r les orbites singulières, en nombre fini par hypothèse, de Ω_0 : ce sont des orbites de dimension m . Soit F l'ensemble fermé de \hat{S} réunion de O_1, O_2 et des O'_i , et soit $U = \bar{\Omega}_0 - F$. F comprend $r + 2$ variétés disjointes ou $r + 1$ seulement, suivant que $O_1 \neq O_2$ ou $O_1 = O_2$, dont r sont de dimension m , et deux ou une de dimension inférieure à m . U est réunion de $r + 1$ variétés disjointes également, chacune homéomorphe au produit d'un intervalle ouvert par une orbite de dimension m . Donc $H_m(F)$ est la somme directe de r groupes, isomorphes au groupe des nombres réels modulo 1 ou au groupe des entiers modulo 2 suivant que l'orbite correspon-

dante est une variété orientable ou non. De même $H_{m+1}(U) = H_{m+1}(\bar{\Omega}_0 \text{ mod } F)$ est la somme directe de $r + 1$ groupes isomorphes au groupe des nombres réels modulo 1 ou au groupe des entiers modulo 2. Comme la dimension de \hat{S} est au plus $m + 1$, on a la suite exacte $O \rightarrow H_{m+1}(\bar{\Omega}_0) \rightarrow H_{m+1}(U) \rightarrow H_m(F)$, qui montre que $H_{m+1}(\bar{\Omega}_0) = O$ entraînerait $H_{m+1}(U) \subset H_m(F)$, ce qui est impossible. Une autre suite exacte $O = H_{m+2}(\hat{S} - \bar{\Omega}_0) \rightarrow H_{m+1}(\bar{\Omega}_0) \rightarrow H_{m+1}(\hat{S})$ montre que $H_{m+1}(\bar{\Omega}_0) \subset H_{m+1}(\hat{S})$, et ce dernier est non nul. Ainsi d est démontré.

Supposons maintenant que les orbites régulières de (G, S_n) sont des sphères S_{n-2} et que (G, \hat{S}) ne possède qu'un nombre fini d'orbites singulières. \hat{S} est le complémentaire dans S_n d'un produit $E_2 \times S_{n-2}$ et a donc la même homologie que tout complémentaire dans S_n d'un tel produit, d'après le théorème de dualité d'ALEXANDER. Comme il existe une décomposition de S_n en un produit $E_2 \times S_{n-2}$ et un cercle (considérer précisément le groupe linéaire (G, S_n) dont les orbites régulières sont des sphères S_{n-2}), \hat{S} a l'homologie d'un cercle. D'après d on a $m = O$, les orbites de (G, \hat{S}) sont des points fixes, et ceci démontre c .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. H. BING, *A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres*, Ann. of Math., 56 (1952), 354–362.
- [2] A. BOREL, *Les bouts des espaces homogènes de groupes de LIE*, Ann. of Math., 58 (1953), 443–457.
- [3] A. BOREL, *Some remarks about LIE groups transitive on spheres and tori*, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 580–586.
- [4] A. BOREL, *Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 230 (1950), 1378–1381.
- [5] E. CARTAN, *Théorie des spineurs*, Vol. II.
- [6] E. CARTAN, *Théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*, Mémoires des sciences mathématiques, 1930.
- [7] D. MONTGOMERY, L. ZIPPIN, *Topological transformation groups*, New-York, 1955.
- [8] D. MONTGOMERY, L. ZIPPIN, *Examples of transformation groups*, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), 460–465.
- [9] D. MONTGOMERY, H. SAMELSON, C. T. YANG, *Groups on E_n with $(n - 2)$ -dimensional orbits*, Proc. Amer. Math. Soc., 7 (1956), 719–728.
- [10] D. MONTGOMERY, H. SAMELSON, *Transformation groups on spheres*, Ann. of Math., 44 (1943), 454–470.
- [11] J. PONCET, *Groupes de LIE compacts de transformations*, C. R. Acad. Sci., Paris, 245 (1957), 13–15.
- [12] H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen*, II, III, Math. Zeitschrift, 24 (1925), 328–395.

(Reçu le 24 juillet 1958)