

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Über die Normaltorsion von Flächen im vierdimensionalen euklidischen Raum.
Autor: Fässler, Walter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26011>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Normaltorsion von Flächen im vierdimensionalen euklidischen Raum

VON WALTER FÄSSLER, Zürich

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir gewisse Eigenschaften zweidimensionaler Flächen des vierdimensionalen euklidischen Raumes. Schon öfters¹⁾ wurde darauf hingewiesen, daß bei zweidimensionalen Flächen des n -dimensionalen Raumes $n - 2$ Krümmungen auftreten. Man spricht dann (für $n > 3$) von tordierten oder gewundenen Flächen.

Daß bei zweidimensionalen Flächen des vierdimensionalen Raumes eine zweite Krümmung auftritt, ersehen wir aus den folgenden Betrachtungen. Erweitert man die Kurventheorie vom zweidimensionalen auf den dreidimensionalen Raum, so führt man eine zweite Krümmung, die Torsion, ein. Die Ausdehnung auf einen n -dimensionalen Raum bedingt die Einführung von $n - 1$ Krümmungen. In der Flächentheorie des dreidimensionalen Raumes wird der Begriff der Krümmung von Flächen eingeführt. Man kann nun vermuten, daß bei einer zweidimensionalen Fläche des vierdimensionalen Raumes eine zweite Krümmung auftreten wird.

Diesen Gedanken wollen wir etwas ausführlicher verfolgen. In der gewöhnlichen Differentialgeometrie benutzt man den Begriff der Krümmung, um die Krümmung einer Fläche zu definieren. Um in einem bestimmten Punkt der Fläche die Krümmungsverhältnisse zu untersuchen, legt man durch diesen eine Ebene. Der Schnitt dieser Ebene mit der Tangentialebene ergibt im allgemeinen eine Gerade, die eine Richtung festlegt. Die Ebene schneidet, wenn sie nicht mit der Tangentialebene zusammenfällt, aus der Fläche eine ebene Kurve. Dreht man die Ebene um ihre Schnittgerade mit der Tangentialebene, so erhält man verschiedene Schnittkurven. Diejenige Kurve, welche durch den senkrechten Schnitt erzeugt wird, hat die größte Krümmung. Diese Krümmung kann man als Normalkrümmung der Fläche in der gegebenen Richtung definieren. Der Satz von MEUSNIER zeigt den Zusammenhang mit der Krümmung der Kurven der anderen Schnitte. Wie die Normalkrümmung in einem Punkt von der Richtung abhängt, zeigt der EULERSche Satz der Flächentheorie.

Ähnlich können wir vorgehen, wenn wir zweidimensionale Flächen im vierdimensionalen Raum untersuchen. Der Einfachheit halber nennen wir drei-

¹⁾ Vgl. zum Beispiel KILLING, S. 264, FINSLER, (2) S. 4.

dimensionale Gebilde des vierdimensionalen Raumes *Hyperflächen* und, wenn sie eben sind, *Hyperebenen*. Die zweidimensionalen Gebilde nennen wir *Flächen* bzw. *Ebenen*. Eine gegebene Fläche können wir mit einem ebenen Gebilde schneiden. Der Schnitt mit einer Ebene ergibt im allgemeinen jedoch nur einen Schnittpunkt, so daß wir mit einer Hyperebene schneiden müssen, um eine Schnittkurve zu erhalten. Da diese Schnittkurve in einem dreidimensionalen ebenen Raum liegt, so ist sie in der Regel gekrümmt und tordiert.

Beschränken wir uns vorerst auf die erste Krümmung der Kurve, so gelangen wir zur Krümmungstheorie dieser Flächen. Analog zur gewöhnlichen Flächentheorie existiert eine Verallgemeinerung des MEUSNIERSchen Theorems. Mit Hilfe dieses Satzes, oder durch den Normalschnitt können wir die Normalkrümmung definieren. Zwischen den Normalkrümmungen der verschiedenen Richtungen in einem Punkt gibt es ähnliche Zusammenhänge, wie sie in der gewöhnlichen Flächentheorie durch den Satz von EULER gegeben werden²⁾. Mit diesen Sätzen werden wir uns in dieser Arbeit nicht befassen.

Da die oben hergeleitete Schnittkurve im allgemeinen tordiert ist, liegt es nahe, diese Torsion für die Definition der zweiten Krümmung zu benutzen. Die Torsion, die durch einen Normalschnitt erzeugt wurde, bezeichnen wir als *Normaltorsion* der Fläche. Es besteht allerdings die Möglichkeit, die Normaltorsion auf andere Art zu definieren³⁾.

In den ersten vier Paragraphen beschränken wir uns auf Untersuchungen in einem bestimmten Punkt der Fläche und suchen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems zu einfachen Formeln zu gelangen und geometrische Eigenschaften zu finden, die nicht vom Koordinatensystem abhängen. Im ersten Paragraphen leiten wir die Formeln für die Berechnung der Normaltorsion her. Gleichzeitig erhalten wir den Ausdruck für die Normalkrümmung. Dann werfen wir die Frage auf, in wieviel Richtungen die Normaltorsion verschwindet. Wir machen die Feststellung, daß in jedem Punkt einer Fläche des vierdimensionalen Raumes die Normaltorsion in mindestens einer Richtung verschwindet.

An Hand von Beispielen zeigen wir im zweiten Paragraphen, daß die Normaltorsion in zwei, drei, vier oder fünf Richtungen verschwinden kann. Ist sie in mehr als fünf Richtungen null, so ist dies für alle Richtungen der Fall. Daß es auch Flächen gibt, auf welchen die Normaltorsion nur in einer Richtung verschwindet, wird später gezeigt.

Im nächsten Abschnitt erklären wir, was wir unter gleichwinkligen Ebenen verstehen. Mit ihrer Hilfe definieren wir die Äquigonen. Diese Flächen genügen Differentialgleichungen, die äquivalent mit den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen der Funktionentheorie sind.

²⁾ Vgl. KOMMERELL, S. 552ff.

³⁾ FINSLER, (1) S. 92.

Im vierten Paragraphen wenden wir unsere Formeln für die Berechnung der Normaltorsion bei den Äquigonon an und erhalten ein Gesetz, welches uns erlaubt, mit Hilfe zweier Größen, τ_0 und α , die Normaltorsion in jeder Richtung zu bestimmen. Dieses Resultat löst für die Normaltorsion die gleiche Aufgabe, wie der Satz von EULER in der Differentialgeometrie für die Normalkrümmungen.

Im fünften Paragraphen bringen wir die Torsion in Zusammenhang mit dem GAUSSSchen Krümmungsmaß. Wir zeigen, daß man bei den Äquigonon die Normaltorsion aus dem GAUSSSchen Krümmungsmaß berechnen kann. Dieses Ergebnis erlaubt uns nun, die Normaltorsion auch in einem allgemeinen Punkt berechnen zu können.

Im letzten Paragraphen zeigen wir an Hand von zwei Beispielen aus der Funktionentheorie, wie man die Ergebnisse praktisch anwenden kann.

In dieser Arbeit wurde der RICCI-Kalkül nicht verwendet. Man kann also auch bei Verwendung geometrischer Überlegungen ohne allzugroßen rechnerischen Aufwand mit den gewöhnlichen Methoden der alten Kurven- und Flächentheorie zu neuen Ergebnissen gelangen, was in einer Arbeit von FINSLER⁴⁾ schon angeregt wurde.

§ 1. Bestimmung der Normalkrümmung und Normaltorsion

Eine Fläche des vierdimensionalen Raumes können wir in der Form $x_i = x_i(u, v)$, ($i = 1, 2, 3, 4$) oder kürzer: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ darstellen. Der Einfachheit halber legen wir das Koordinatensystem so, daß die x_1, x_2 -Ebene die Fläche im Punkte $x_1 = x_2 = 0$ berührt. Als spezielle Parameter wählen wir die Koordinaten x_1 und x_2 (u und v werden später für andere Bezeichnungen verwendet). Die Fläche wird dann durch die beiden Gleichungen •

$$x_3 = x_3(x_1, x_2), \quad x_4 = x_4(x_1, x_2) \quad (1)$$

bestimmt. Soll eine Gleichung nur im Nullpunkt der x_1, x_2 -Ebene gelten, so deuten wir dies durch das Zeichen $\overset{\circ}{=}$ an. Nach unseren Annahmen folgt:

$$x_3 \overset{\circ}{=} 0, \quad x_4 \overset{\circ}{=} 0. \quad (2)$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{x}_{x_1} \overset{\circ}{=} \{1, 0, 0, 0\}, \quad \mathfrak{x}_{x_2} \overset{\circ}{=} \{0, 1, 0, 0\}. \quad (3)$$

Wir wollen nun die Formeln für die Berechnung der Normalkrümmung und Normaltorsion der Flächen des vierdimensionalen Raumes herleiten. Zu diesem Zwecke schneiden wir unsere Fläche mit einer durch den Nullpunkt gehenden und auf der x_1, x_2 -Ebene senkrecht stehenden Hyperebene. Die Torsion der

⁴⁾ FINSLER, (2) S. 17.

Schnittkurve in diesem Punkt bezeichnen wir als «Normaltorsion» der Fläche in der durch die Kurventangente gegebenen Richtung⁵⁾. Die Krümmung der Kurve bestimmt die Normalkrümmung der Fläche.

Die Gleichung

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg} \varphi \quad (4)$$

stellt für die verschiedenen Werte des Parameters φ eine Schar von Normalhyperebenen zum Flächenelement im Nullpunkt dar. Die Beziehung (4) können wir auch in Parameterform schreiben:

$$x_1 = t \cos \varphi, \quad x_2 = t \sin \varphi. \quad (5)$$

Setzen wir diese Gleichungen in (1) ein, so erhalten wir eine neue Darstellung der Fläche mit den Parametern φ und t . Mit (5) zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_1 &= t \cos \varphi, & x_2 &= t \sin \varphi, \\ x_3 &= x_3(x_1(t, \varphi), x_2(t, \varphi)), & x_4 &= x_4(x_1(t, \varphi), x_2(t, \varphi)). \end{aligned} \quad (6)$$

Für $\varphi = \text{const.}$ stellt dieses Gleichungssystem eine Kurve im vierdimensionalen Raum dar. Zur Berechnung der Torsion benutzen wir die Formel⁶⁾:

$$k_2^2 = M_3/M_2^2. \quad (7)$$

Für die Krümmung gilt die Beziehung:

$$k_1^2 = M_2/M_1^3. \quad (8)$$

Unter

$$M_p = \left\| \begin{array}{cccc} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ \dots & & & \\ x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & x_3^{(p)} & x_4^{(p)} \end{array} \right\|^2$$

verstehen wir dabei die Summe der Quadrate der p -reihigen Determinanten ($p = 1, 2, 3$) der obigen Matrix. Die x_i sind Funktionen des Parameters t , und die Striche bedeuten die Ableitungen nach t .

Die Größen M_p lassen sich geometrisch einfach deuten: M_1 ist das Quadrat der Länge des Vektors \mathfrak{x}' , M_2 das Quadrat der Fläche des durch die Vektoren \mathfrak{x}' und \mathfrak{x}'' aufgespannten Parallelogrammes und M_3 das Quadrat des Volumens des durch die Vektoren \mathfrak{x}' , \mathfrak{x}'' und \mathfrak{x}''' gegebenen Parallelepipeds⁷⁾. Somit ist der Zusammenhang mit den Formeln für den dreidimensionalen Raum⁸⁾ gefunden.

⁵⁾ FINSLER, (1) S. 92 ff.

⁶⁾ BRUNEL, S. 42f.

⁷⁾ SPERNER, S. 195ff.

⁸⁾ BLASCHKE, S. 27.

Wir setzen voraus, daß die Funktionen (1) dreimal stetig differenzierbar seien. Wir können sie deshalb nach TAYLOR entwickeln und schreiben:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, & x_2 &= x_2, \\ x_3 &= \frac{1}{2!} (a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2) + \frac{1}{3!} (c_0 x_1^3 + 3c_1 x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3c_2 x_1 x_2^2 + c_3 x_2^3) + R_{34}, \\ x_4 &= \frac{1}{2!} (b_0 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2) + \frac{1}{3!} (d_0 x_1^3 + 3d_1 x_1^2 x_2 \\ &\quad + 3d_2 x_1 x_2^2 + d_3 x_2^3) + R_{44}. \end{aligned} \quad (9)$$

R_{34} und R_{44} sind die Restglieder der Reihenentwicklungen. Wir setzen

$$x_1 = t \cos \varphi = tp, \quad x_2 = t \sin \varphi = tq \quad (10)$$

in (9) ein und erhalten für $t = 0$:

$$\mathbf{x}' \underset{\circ}{=} (p, q, 0, 0), \quad \mathbf{x}'' \underset{\circ}{=} (0, 0, P, Q), \quad \mathbf{x}''' \underset{\circ}{=} (0, 0, R, S), \quad (11)$$

wobei für P, Q, R und S die folgenden Ausdrücke einzusetzen sind:

$$P = a_0 p^2 + 2a_1 pq + a_2 q^2, \quad Q = b_0 p^2 + 2b_1 pq + b_2 q^2, \quad (12)$$

$$R = c_0 p^3 + 3c_1 p^2 q + 3c_2 p q^2 + c_3 q^3, \quad S = d_0 p^3 + 3d_1 p^2 q + 3d_2 p q^2 + d_3 q^3.$$

Da $p^2 + q^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ ist, so wird $M_1 = p^2 + q^2 = 1$, $M_2 = (p^2 + q^2)(P^2 + Q^2) = P^2 + Q^2$, $M_3 = (p^2 + q^2)(PS - QR)^2 = (PS - QR)^2$. Nach Formel (8) ergibt sich für die Krümmung der Kurve:

$$k_1^2 \underset{\circ}{=} P^2 + Q^2 \quad (13)$$

und somit für die Normalkrümmung κ in der durch den Winkel φ bestimmten Richtung

$$\kappa^2 \underset{\circ}{=} P^2 + Q^2. \quad (14)$$

Für die Torsion der Kurve erhalten wir nach Formel (7) $k_2^2 = (PS - QR)^2 / (P^2 + Q^2)^2$. Somit ist das Quadrat der Normaltorsion τ der Fläche:

$$\tau^2 = \frac{(PS - QR)^2}{(P^2 + Q^2)^2}. \quad (15)$$

Bei der Diskussion des Vorzeichens der Normaltorsion erinnern wir uns an die Festlegung des Vorzeichens der Torsion einer Raumkurve im Dreidimensionalen. Dort kann man das begleitende Dreibein einer Kurve so definieren⁹⁾, daß die Binormale nach jener Richtung zeigt, in welcher sich die Kurve von der Schmiegungebene entfernt. Je nachdem die Orientierung des begleitenden Dreibeins mit der des Koordinatensystems übereinstimmt oder nicht, gibt man der Torsion das positive oder negative Vorzeichen. Ähnlich gehen wir in

⁹⁾ FINSLER, (1) S. 57.

unserem Falle vor. Für ein festes φ stellt (6) eine Kurve dar, die in einer Hyperebene liegt. Die Tangente der Kurve, die x_3 - und x_4 -Achse bilden zusammen ein orthogonales Dreibein, durch welches die Hyperebene eine bestimmte Orientierung erhält. Wir untersuchen, ob das begleitende Dreibein dieselbe Orientierung hat. Da beide Dreibeine die Kurventangente als erste Achse gemeinsam besitzen und Haupt- und Binormale in die x_3, x_4 -Ebene fallen, so brauchen wir nur zu entscheiden, ob die Hauptnormale mit der Binormalen ein positives oder negatives Koordinatensystem bildet. Zu diesem Zweck bestimmen wir das Vektorprodukt $[\mathfrak{h}, \mathfrak{b}]$ (\mathfrak{h} = Hauptnormalenvektor, \mathfrak{b} = Binormalenvektor, beide im x_3, x_4 -Koordinatensystem ausgedrückt). \mathfrak{x}'' und \mathfrak{x}''' liegen ebenfalls in der x_3, x_4 -Ebene und bilden im allgemeinen ein schiefwinkeliges Koordinatensystem, das jedoch dieselbe Orientierung besitzt wie $\mathfrak{h}, \mathfrak{b}$. Wir brauchen also lediglich das Vorzeichen von

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = PS - QR$$

zu bestimmen, um dasjenige der Normaltorsion zu erhalten.

Ersetzen wir den Winkel φ durch $\varphi + 180^\circ$, so wechselt $PS - QR$ und damit auch die Normaltorsion das Vorzeichen. Geometrisch läßt sich dies leicht erklären. Bei beiden Winkeln erhalten wir dieselbe Schnittkurve. Diese wird jedoch im entgegengesetzten Sinne durchlaufen, so daß die Tangente in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Da jedoch auch die Binormale die Richtung wechselt, ändert sich die Orientierung des begleitenden Dreibeins nicht. Zufolge der Richtungsänderung der Tangente hat aber die Hyperebene nicht mehr dieselbe Orientierung.

Unter Berücksichtigung des Vorzeichens erhalten wir für die Normaltorsion die Formel:

$$\tau = \frac{PS - QR}{P^2 + Q^2}. \quad (16)$$

Die Normaltorsion der Fläche verschwindet, wenn $PS - QR = 0$ ist. Wir setzen nun die Ausdrücke (12) in diese Formel ein und dividieren noch durch p^5 . Wenn wir die Abkürzung $q/p = \sin \varphi / \cos \varphi = \operatorname{tg} \varphi = y$ einführen, lautet die Bedingung für das Verschwinden der Normaltorsion: $(a_0 + 2a_1y + a_2y^2)(d_0 + 3d_1y + 3d_2y^2 + d_3y^3) - (b_0 + 2b_1y + b_2y^2)(c_0 + 3c_1y + 3c_2y^2 + c_3y^3) = 0$. Eine einfache Umformung führt zur folgenden Bedingung:

$$\begin{aligned} & (a_2d_3 - b_2c_3)y^5 + (2a_1d_3 + 3a_2d_2 - 2b_1c_3 - 3b_2c_2)y^4 \\ & + (a_0d_3 + 6a_1d_2 + 3a_2d_1 - b_0c_3 - 6b_1c_2 - 3b_2c_1)y^3 \\ & + (3a_0d_2 + 6a_1d_1 + a_2d_0 - 3b_0c_2 - 6b_1c_1 - b_2c_0)y^2 \\ & + (3a_0d_1 + 2a_1d_0 - 3b_0c_1 - 2b_1c_0)y + a_0d_0 - b_0c_0 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Wenn der Koeffizient $(a_2d_3 - b_2c_3)$ von Null verschieden ist, so besitzt diese Gleichung mindestens eine reelle Lösung. Das bedeutet, daß in mindestens einer Richtung des Flächenpunktes die Normaltorsion verschwindet. Ist jedoch $(a_2d_3 - b_2c_3) = 0$, so multiplizieren wir die obige Gleichung mit y^{-5} und haben dann eine Bestimmungsgleichung für $\cotg \varphi$. Da jedoch das konstante Glied dieser Gleichung null ist, erhalten wir die Lösung $\cotg \varphi = 0$, das heißt $\varphi = 90^\circ$.

Verschwindet mit $PS - QR$ gleichzeitig $P^2 + Q^2$, so ist (16) unbestimmt. Die Schnittkurve ist nicht gekrümmt und die Torsion ist nicht definiert. Wir dürfen sie deshalb gleich Null setzen. Unter dieser Annahme haben wir den Beweis für den folgenden Satz erbracht:

In jedem Punkt einer zweidimensionalen Fläche des vierdimensionalen Raumes gibt es mindestens eine Richtung mit verschwindender Normaltorsion.

Daß jedoch auch 2, 3, 4 oder 5 Richtungen mit verschwindender Normaltorsion auftreten können, zeigen wir im folgenden Paragraphen.

§ 2. Beispiele

Wenn wir in (9) die Konstanten geeignet wählen, so können wir erreichen, daß die oben besprochene Gleichung fünf reelle Wurzeln besitzt. Setzen wir beispielsweise

$$\begin{array}{llll} a_0 = -1, & a_1 = 0, & a_2 = 1, & \\ b_0 = -1, & b_1 = 0, & b_2 = 3, & \\ c_0 = 0, & c_1 = 2/3, & c_2 = 0, & c_3 = 0, \\ d_0 = 0, & d_1 = -1, & d_2 = 0, & d_3 = 1 \end{array}$$

in Gleichung (17) ein, so erhalten wir $y(y^4 - 10y^2 + 5) = 0$. Diese Gleichung hat die folgenden Wurzeln y_k mit den zugehörigen Winkeln φ_k .

$$\begin{array}{ll} y_1 = 0, & \varphi_1 = 0^\circ, \\ y_2 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, & \varphi_2 = 36^\circ, \\ y_3 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, & \varphi_3 = 72^\circ, \\ y_4 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}, & \varphi_4 = 108^\circ, \\ y_5 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, & \varphi_5 = 144^\circ. \end{array}$$

In diesem Beispiel liegt eine regelmäßige Verteilung der Richtungen vor.

Weiter geben wir ein Beispiel für einen Flächenpunkt, in welchem die Normaltorsion in vier Richtungen verschwindet. Setzen wir in (12) für P, Q, R und S folgende Ausdrücke ein: $P = p^2, Q = q^2, R = pq^2, S = pq^2$, so wird $PS - QR = pq^2(p^2 - q^2)$. Die Normaltorsion verschwindet für p bzw.

$q = 0$, das heißt für $\varphi = 0^\circ$ oder $\varphi = 90^\circ$, und desgleichen für $p^2 = q^2$, das heißt wenn $\varphi = 45^\circ$ oder $\varphi = 135^\circ$ ist.

Setzen wir hingegen $P = p^2$, $Q = q^2$, $R = p^3$, $S = q^3$, so erhalten wir ein Beispiel, in welchem die Torsion in drei Richtungen verschwindet, denn es ist $PS - RQ = p^2q^2(q - p)$. Dieser Ausdruck wird für $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$ gleich Null.

Wird aber $P = p^2$, $Q = p^2$, $R = q^3$, $S = 2q^3$, so verschwindet $PS - RQ = p^2q^3$ nur für $\varphi = 0^\circ$ und $\varphi = 90^\circ$.

Flächen, auf denen die Normaltorsion nur in einer Richtung gleich Null ist, werden in den folgenden Paragraphen behandelt.

Soll jedoch die Normaltorsion in mehr als fünf Richtungen verschwinden, so müssen die Koeffizienten der Gleichung (17) gleich Null sein. Dies ist nach (11) der Fall, wenn \mathfrak{x}'' und \mathfrak{x}''' für jeden Wert des Winkels φ linear abhängig sind. Dies trifft zum Beispiel zu, wenn die Fläche in einen dreidimensionalen ebenen Raum gelegt werden kann.

§ 3. Gleichwinklige Ebenen und Äquigonon

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen spezialisieren wir uns auf eine besondere Flächenklasse des vierdimensionalen Raumes. Um diese zu definieren, führen wir den Begriff der «gleichwinkligen Ebenen» ein¹⁰⁾. Unter den beiden Winkeln zweier Ebenen verstehen wir den größten und den kleinsten Winkel, den ein Strahl der einen Ebene mit seiner Orthogonalprojektion auf die andere einschließt. Liegen beide Ebenen speziell in einer Hyperebene (in einem dreidimensionalen, ebenen Raum), dann haben sie im allgemeinen eine Gerade gemeinsam, und der kleinste Winkel ist in jedem Falle gleich Null. Ist im vierdimensionalen Raum der größte Winkel zweier Ebenen gleich dem kleinsten, so nennen wir die beiden Ebenen *gleichwinklig*.

Alle Geraden einer Ebene schließen mit ihren Projektionen auf eine gleichwinklige Ebene denselben Winkel ein. Ist umgekehrt bei zwei Ebenen diese Eigenschaft vorhanden, so sind die beiden Ebenen gleichwinklig. Zwischen einer Strecke a auf der einen Ebene und ihrer Projektion \bar{a} auf der anderen besteht die Beziehung $\bar{a} = a \cos \alpha$, wobei α der Winkel zwischen beiden Ebenen ist.

Eine Figur auf der einen Ebene wird also durch die Orthogonalprojektion auf die andere Ebene ähnlich abgebildet.

Offenbar bleibt die Eigenschaft der Gleichwinkligkeit erhalten, wenn wir die beiden Ebenen parallel verschieben. Um die analytische Bedingung für gleichwinklige Ebenen herzuleiten, wählen wir das Koordinatensystem so, daß

¹⁰⁾ KWIETNIEWSKI, S. 10.

die eine Ebene mit der x_1, x_2 -Ebene zusammenfällt. Die andere Ebene legen wir durch den Koordinatenursprung. Ihre Gleichung sei: $\eta = \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2$. \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 seien Vektoren mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (1, 0, A_1, A_2), \\ \mathbf{x}_2 &= (0, 1, B_1, B_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Die Projektionen dieser beiden Vektoren auf die x_1, x_2 -Ebene sind:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (0, 1, 0, 0).$$

Die Vektoren $\bar{\mathbf{x}}_1$ und $\bar{\mathbf{x}}_2$ schließen einen rechten Winkel ein. Deshalb müssen auch die beiden Vektoren (18) senkrecht aufeinander stehen, weshalb die Bedingung

$$\bar{\mathbf{x}}_1 \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 = A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0 \tag{19}$$

erfüllt sein muß. Bezeichnen wir den Winkel zwischen \mathbf{x}_1 und seiner Projektion $\bar{\mathbf{x}}_1$ mit α_1 , so ist: $\cos^2 \alpha_1 = (1 + A_1^2 + A_2^2)^{-1}$. Auf gleiche Weise kann man den Winkel α_2 zwischen \mathbf{x}_2 und $\bar{\mathbf{x}}_2$ berechnen. Wir erhalten: $\cos^2 \alpha_2 = (1 + B_1^2 + B_2^2)^{-1}$. Sollen die beiden Ebenen gleichwinklig sein, so müssen die beiden Winkel α_1 und α_2 gleich sein, was auf die Bedingung

$$A_1^2 + A_2^2 = B_1^2 + B_2^2 \tag{20}$$

führt.

Sind (19) und (20) erfüllt, so ist der Ausdruck $\cos^2 \alpha = (\lambda \bar{\mathbf{x}}_1 + \mu \bar{\mathbf{x}}_2)^2 / (\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2)^2$ von λ und μ unabhängig, so daß (19) und (20) hinreichende Bedingungen für die Gleichwinkligkeit der beiden Ebenen sind.

Die Gleichungen (19) und (20) werden genau dann befriedigt, wenn entweder

$$A_1 = B_2, \quad A_2 = -B_1 \tag{21a}$$

oder

$$A_1 = -B_2, \quad A_2 = B_1 \tag{21b}$$

ist. In diesen beiden Fällen haben wir somit gleichwinklige Ebenen vor uns.

Wir wollen noch untersuchen, ob die Gleichwinkligkeit zweier Ebenen eine transitive Eigenschaft ist. Als erste Ebene wählen wir die x_1, x_2 -Ebene aus. Eine zweite Ebene werde durch die Vektoren

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, A_1, A_2), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, -A_2, A_1) \tag{22a}$$

und eine dritte Ebene durch die Vektoren

$$\eta_1 = (1, 0, D_1, D_2), \quad \eta_2 = (0, 1, -D_2, D_1) \tag{22b}$$

aufgespannt. Nach (18) und (21a) sind die erste und zweite Ebene und auch

die erste und dritte Ebene untereinander gleichwinklig. Wir zeigen, daß auch die zweite und dritte Ebene gleichwinklig sind. In der zweiten Ebene sei der Vektor $\mathfrak{a} = \mathfrak{x}_1 + C \mathfrak{x}_2$ gegeben. Wir wollen nun diesen Vektor auf die dritte Ebene projizieren. Wir projizieren ihn zuerst auf den η_1 - und auf den η_2 -Vektor. Da η_2 senkrecht auf dem Vektor η_1 steht, so ergibt die Summe der beiden projizierten Vektoren den gesuchten Vektor. Es ist also

$$\bar{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{x}_1 \eta_1 + C \mathfrak{x}_2 \eta_1) \frac{\eta_1}{\eta_1^2} + (\mathfrak{x}_1 \eta_2 + C \mathfrak{x}_2 \eta_2) \frac{\eta_2}{\eta_2^2}.$$

Weil $\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 = \eta_1 \eta_2 = 0$, $\mathfrak{x}_1^2 = \mathfrak{x}_2^2$, $\eta_1^2 = \eta_2^2$, $\mathfrak{x}_1 \eta_1 = \mathfrak{x}_2 \eta_2$ und $\mathfrak{x}_1 \eta_2 = -\mathfrak{x}_2 \eta_1$ ist, so wird

$$\begin{aligned} \eta_1^2 \bar{\mathfrak{a}}^2 &= (\mathfrak{x}_1 \eta_1 + C \mathfrak{x}_2 \eta_1)^2 + (\mathfrak{x}_1 \eta_2 + C \mathfrak{x}_2 \eta_2)^2 \\ &= (\mathfrak{x}_1 \eta_1)^2 + 2C (\mathfrak{x}_1 \eta_1) (\mathfrak{x}_2 \eta_1) + C^2 (\mathfrak{x}_2 \eta_1)^2 \\ &\quad + (\mathfrak{x}_1 \eta_2)^2 + 2C (\mathfrak{x}_1 \eta_2) (\mathfrak{x}_2 \eta_2) + C^2 (\mathfrak{x}_2 \eta_2)^2 \\ &= ((\mathfrak{x}_1 \eta_1)^2 + (\mathfrak{x}_1 \eta_2)^2) (1 + C^2). \end{aligned}$$

Da jedoch $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{x}_1^2 (1 + C^2)$ ist, haben wir die von C unabhängige Beziehung $\bar{\mathfrak{a}}^2 = \text{const} \cdot \mathfrak{a}^2$. Alle Vektoren \mathfrak{a} schließen also mit ihren Projektionen $\bar{\mathfrak{a}}$ den gleichen Winkel ein. Somit sind auch die zweite und dritte Ebene gleichwinklig.

Zum gleichen Resultat wären wir gekommen, wenn wir für die Festlegung der Komponenten von (22a) und (22b) die Beziehung (21b) verwendet hätten. Wenden wir jedoch (21b) nur für die dritte Ebene an, ((22a) bleibe unverändert), so sind die zweite und dritte Ebene nicht mehr gleichwinklig. Es gibt also zu einer Ebene im vierdimensionalen Raum zwei Scharen gleichwinkliger Ebenen. Die Ebenen derselben Schar sind alle untereinander gleichwinklig¹¹⁾. Die Unterscheidung besteht in der Anwendung von (21a) oder (21b).

Nach diesen Betrachtungen können wir nun die Äquigone definieren. Eine Fläche, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, nennen wir nach KWIETNIEWSKI eine *Äquigone*. KOMMERELL nennt eine Fläche mit dieser Eigenschaft *R-Fläche*¹²⁾. Es ist nun einfach, die Bedingungen aufzustellen, damit (1) eine Äquigone darstellt. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte \mathfrak{x} der Fläche (1) lautet $(\eta - \mathfrak{x}) = \lambda \mathfrak{x}_{x_1} + \mu \mathfrak{x}_{x_2}$, wobei η den laufenden Punkt bezeichnet. Die Gleichung der durch den Ursprung gehenden parallelen Ebene ist: $\eta = \lambda \mathfrak{x}_{x_1} + \mu \mathfrak{x}_{x_2}$. Die Vektoren \mathfrak{x}_{x_1} und \mathfrak{x}_{x_2} haben die Komponenten:

$$\mathfrak{x}_{x_1} = \left(1, 0, \frac{\partial x_3}{\partial x_1}, \frac{\partial x_4}{\partial x_1} \right), \quad \mathfrak{x}_{x_2} = \left(0, 1, \frac{\partial x_3}{\partial x_2}, \frac{\partial x_4}{\partial x_2} \right).$$

¹¹⁾ KWIETNIEWSKI, S. 11.

¹²⁾ KOMMERELL, S. 568.

Mit (18) und (21a) bzw. (21b) können wir unmittelbar die analytische Bedingung aufstellen, damit (1) eine Äquigone darstellt:

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial x_4}{\partial x_1} \quad (23a)$$

bzw.

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial x_4}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{\partial x_4}{\partial x_1}. \quad (23b)$$

Wenn (1) eine Äquigone darstellen soll, so muß entweder (23a) oder (23b) erfüllt sein. Da (23b) durch Vertauschen der Koordinaten x_3 und x_4 aus (23a) hervorgeht, genügt es, Flächen zu betrachten, die den Gleichungen (23a) genügen.

Die Gleichungen (23a) sind nichts anderes als die CAUCHY-RIEMANNSCHEN Differentialgleichungen der Funktionentheorie. Ist nämlich $w = f(z)$, $z = x + iy$, $w = u + iv$, eine analytische Funktion, so sind bekanntlich die CAUCHY-RIEMANNSCHEN Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ erfüllt. Diese stimmen mit (23a) überein. Man braucht nur $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = u$ und $x_4 = v$ zu setzen. Die analytische Funktion $w = f(z)$ läßt sich im vierdimensionalen Raum als Fläche darstellen. Wir nehmen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit den Achsen x , y , u , v . Die Funktion $f(z)$ sei in einem bestimmten Gebiet der z -Ebene regulär. Einen beliebigen Wert z des Gebietes stellen wir in der x , y -Ebene als Punkt dar. In unserem Koordinatensystem hat er die Koordinaten $(x, y, 0, 0)$. Die Funktion $w = f(z)$ ordnet jedem Punkt z einen oder mehrere Funktionswerte w zu, je nachdem die Funktion ein- oder mehrdeutig ist. Wir stellen w als Punkt mit den Koordinaten (x, y, u, v) dar. Ist die Funktion mehrdeutig, so tragen wir auf gleiche Weise die übrigen Werte ein, so daß «über» demselben Punkt z mehrere zugeordnete Punkte liegen. Durchläuft der Punkt z seinen Definitionsbereich, so beschreibt der zugeordnete Punkt eine Fläche, die im Falle der Mehrdeutigkeit aus verschiedenen Blättern besteht. KOMMERELL¹³⁾ nennt diese Fläche *RIEMANNSCHE FLÄCHE* im R_4 , oder kurz *R-Fläche*, weil man sie durch homöomorphe Verformung in eine RIEMANNSCHE FLÄCHE im üblichen Sinn überführen kann; mit anderen Worten: Beide Flächen haben die gleichen Zusammenhangsverhältnisse.

¹³⁾ KOMMERELL, S. 568.

§ 4. Normalkrümmung und Normaltorsion der Äquigonien

Für die Berechnung der Normalkrümmung und Normaltorsion leiten wir aus (23a) die folgenden Beziehungen ab

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1^2} = -\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial^2 x_4}{\partial x_2^2}. \quad (25)$$

x_3 und x_4 sind harmonische Funktionen (Potentialfunktionen), das heißt sie genügen der LAPLACESchen Differentialgleichung:

$$\Delta x_3 = \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} = 0, \quad \Delta x_4 = \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_2^2} = 0.$$

Die geometrischen Eigenschaften der Fläche sind allein schon durch eine der beiden Funktionen gegeben, denn die andere ist durch sie bis auf eine Konstante bestimmt¹⁴⁾. Wir stellen unsere Formeln für Normalkrümmung und Normaltorsion so auf, daß sie nur die Funktion x_3 enthalten.

Aus (24) und (25) folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= -\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_2^3}, & \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} &= -\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \\ \frac{\partial^3 x_4}{\partial x_1^3} &= -\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}, & \frac{\partial^3 x_4}{\partial x_1^2 \partial x_2} &= \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3}, \\ \frac{\partial^3 x_4}{\partial x_1 \partial x_2^2} &= \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}, & \frac{\partial^3 x_4}{\partial x_2^3} &= -\frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Gehen wir wieder zu den in (9) eingeführten Abkürzungen für die Koeffizienten der Taylorentwicklung über und schreiben:

$$a_0 \stackrel{\circ}{=} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2}, \quad a_1 \stackrel{\circ}{=} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad a_2 \stackrel{\circ}{=} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2}, \quad \text{usw.}$$

So erhalten wir aus (24), (25) und (26) die Beziehungen: $a_2 = -a_0$, $b_0 = -a_1$, $b_1 = a_0$, $b_2 = a_1$, $c_2 = -c_0$, $c_3 = -c_1$, $d_0 = -c_1$, $d_1 = c_0$, $d_2 = c_1$, $d_3 = -c_0$. Berücksichtigen wir diese Zusammenhänge in (12), so wird:

$$\begin{aligned} P &\stackrel{\circ}{=} a_0(p^2 - q^2) + 2a_1pq, \\ Q &\stackrel{\circ}{=} a_1(q^2 - p^2) + 2a_0pq, \\ R &\stackrel{\circ}{=} c_0p(p^2 - 3q^2) + c_1q(3p^2 - q^2), \\ S &\stackrel{\circ}{=} c_0q(3p^2 - q^2) + c_1p(3q^2 - p^2). \end{aligned} \quad (27)$$

¹⁴⁾ BEHNKE-SOMMER, S. 156.

Für die Normalkrümmung erhalten wir nach Formel (14) unmittelbar:

$$\kappa^2 \stackrel{\circ}{=} P^2 + Q^2 \stackrel{\circ}{=} a_0^2 + a_1^2. \quad (28)$$

Auf einer Äquigone hängt somit die Normalkrümmung in einem Punkt nicht von der Richtung ab. Die Äquigonen bestehen aus lauter Nabelpunkten¹⁵⁾.

Nach den Formeln (16) und (27) können wir die Normaltorsion der Fläche berechnen. Es ist zunächst:

$$PS - QR = q(a_0c_0 + a_1c_1) + p(a_1c_0 - a_0c_1).$$

Nach Einführung der Abkürzungen: $a_1c_0 - a_0c_1 = A$, $a_0c_0 + a_1c_1 = B$, wird nach (16):

$$\tau \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\kappa^2} (A \cos \varphi + B \sin \varphi). \quad (29)$$

φ ist der Winkel zwischen der x_1 -Achse und der Tangentenrichtung der Schnittkurve. Wir tragen nun die nach Formel (29) berechneten Werte der Normaltorsion auf dem durch den Winkel φ bestimmten Tangentenvektor auf, und zwar die positiven τ in Richtung des Tangentenvektors, die negativen in der entgegengesetzten Richtung. Für die Winkel φ und $\varphi + 180^\circ$ hat τ denselben Absolutbetrag, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen, so daß also die zugehörigen Punkte zusammenfallen. Lassen wir φ von 0 bis 360° wachsen, so durchlaufen die aufgetragenen Punkte zweimal denselben Kreis. Um dies zu zeigen, setzen wir: $(A \cos \varphi + B \sin \varphi)/\kappa^2 = \tau_0 \cos(\varphi - \alpha)$. τ_0 und α lassen sich durch Anwendung des Additionstheorems auf $\cos(\varphi - \alpha)$ und Vergleich der Koeffizienten von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ bestimmen. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{A}{\kappa^2} &= \tau_0 \cos \alpha, \\ \frac{B}{\kappa^2} &= \tau_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

Aus (30) folgt zunächst:

$$\tau_0 = \pm \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\kappa^2}. \quad (31)$$

Einer Änderung des Vorzeichens in (31) entspricht nach den Gleichungen (30) eine Änderung des Winkels α um 180° . Statt τ_0 ein festes Vorzeichen zu geben, machen wir für α die Einschränkung:

$$-90^\circ \leq \alpha < +90^\circ. \quad (32)$$

Der Winkel α ist zusammen mit (32) durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{A} \quad (33)$$

¹⁵⁾ KOMMERELL, S. 580.

eindeutig festgelegt. Durch (32) und (30) ist das Vorzeichen von (31) bestimmt. Es ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \tau_0 &\stackrel{\circ}{=} \operatorname{sgn} A \quad \text{für } A \neq 0, \\ \operatorname{sgn} \tau_0 &\stackrel{\circ}{=} -\operatorname{sgn} B \quad \text{für } A = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Auf den ersten Blick scheint es naheliegender, τ_0 als positive Größe (maximale Torsion) zu definieren und α nicht einzuschränken. Wenn wir jedoch die Torsionsverhältnisse auf einem Bereich einer Fläche statt in einem speziellen Punkt untersuchen, so zeigt es sich, daß mit unserer Festlegung Unstetigkeiten vermieden werden können (vgl. die Beispiele des § 6).

Schließlich führen wir noch den Winkel ψ , der durch die Beziehung

$$\psi = \varphi - \alpha \quad (35)$$

definiert ist, ein, und schreiben statt (29)

$$\tau = \tau_0 \cos \psi. \quad (36)$$

Fig. 1 gibt eine anschauliche Deutung der Formeln (29) bis (33) und zeigt die Lage des oben erwähnten Kreises. Der Winkel α bestimmt die Richtung, in welcher τ den extremalen Wert τ_0 annimmt. In dieser Richtung ist der Winkel ψ gleich null.

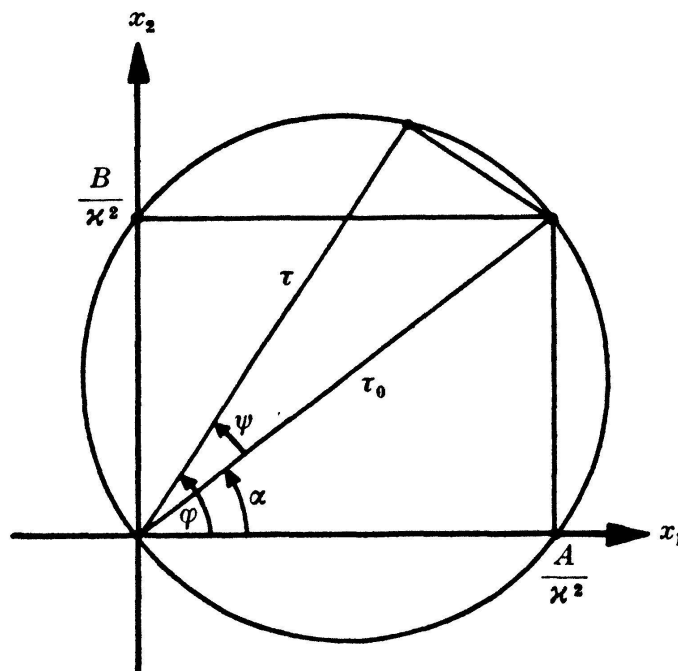


Fig. 1

§ 5. Zusammenhang zwischen der Normaltorsion und dem GAUSSschen Krümmungsmaß auf Äquigonon

In diesem Abschnitt berechnen wir das GAUSSsche Krümmungsmaß K und zeigen den Zusammenhang mit der Normaltorsion. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, die Normaltorsion in einem allgemeinen Flächenpunkt zu bestimmen. Zunächst berechnen wir die Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$E = x_{x_1}^2, \quad F = x_{x_1} x_{x_2}, \quad G = x_{x_2}^2. \quad (37)$$

Aus (23a) folgt unmittelbar

$$E = G = 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2} \right)^2, \quad F = 0. \quad (38)$$

Wie GAUSS gezeigt hat, läßt sich das GAUSSsche Krümmungsmaß K aus E , F und G und deren partiellen Ableitungen berechnen. Wir verwenden eine von FROBENIUS hergeleitete Formel¹⁶⁾, welche sich für unseren Fall sofort wesentlich vereinfacht. Sie lautet:

$$K = -\frac{1}{4W^4} \begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W} \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{E_v - F_u}{W} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{F_v - G_u}{W} \right), \quad (39)$$

wobei $W = +\sqrt{EG - F^2}$ ist und die in (39) verwendeten Parameter u und v durch x_1 und x_2 zu ersetzen sind. Wie man sofort bemerkt, verschwindet wegen $F \equiv 0$ die Determinante, und da $E = G$ ist, so wird $W = +\sqrt{E^2} = E$. Somit geht (39) über in:

$$K = -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{E_{x_2}}{E} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{E_{x_1}}{E} \right)$$

oder

$$K = -\frac{1}{2E^3} (EE_{x_1x_1} - E_{x_1}^2 + EE_{x_2x_2} - E_{x_2}^2). \quad (40)$$

Zur Berechnung der Ableitungen von E benützen wir die in § 4 hergeleiteten Beziehungen. Es wird:

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= 2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ E_{x_2} &= 2 \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} \right), \\ E_{x_1x_1} &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\}, \\ E_{x_2x_2} &= 2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial x_3}{\partial x_1} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} - \frac{\partial x_3}{\partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\}, \\ E_{x_1}^2 + E_{x_2}^2 &= 4(E - 1) \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (40) ein, so erhalten wir nach einer einfachen Zwischenrechnung:

¹⁶⁾ BLASCHKE, S. 117.

$$K = -\frac{2}{E^3} \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\}. \quad (41)$$

Dieser Ausdruck stellt das GAUSSSche Krümmungsmaß in einem beliebigen Punkt dar. Es hat ein negatives Vorzeichen, trotzdem die Normalkrümmung, wie wir in § 4 gezeigt haben, für alle Richtungen den gleichen Wert hat. Zweidimensionale Flächen des vierdimensionalen Raumes verhalten sich nicht gleich wie solche, die sich in einen dreidimensionalen Raum einbetten lassen¹⁷⁾.

Für den Nullpunkt folgt aus (41) und (28):

$$K \underset{\circ}{=} -2(a_0^2 + a_1^2) \underset{\circ}{=} -2\kappa^2.$$

Auf einer Äquigone gilt somit allgemein:

$$K = -2\kappa^2. \quad (42)$$

Wir fragen nun, wie sich das GAUSSSche Krümmungsmaß ändert, wenn wir zu einem benachbarten Punkt übergehen. Es sei: $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$ eine durch den Nullpunkt gehende, stetig differenzierbare Kurve auf unserer Fläche. Als Parameter verwenden wir die Bogenlänge s . Die Ableitungen nach s bezeichnen wir mit \dot{x}_1 und \dot{x}_2 . Leiten wir $K(x_1, x_2)$ in Richtung der Kurventangente nach s ab, so erhalten wir:

$$\dot{K} = K_{x_1} \dot{x}_1 + K_{x_2} \dot{x}_2. \quad (43)$$

Zur Berechnung von K_{x_1} und K_{x_2} leiten wir (41) nach x_1 bzw. x_2 ab. Es folgt:

$$K_{x_1} = -\frac{2}{E^4} \left\{ 2E \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\} - 3E_{x_1} \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} \right\},$$

$$K_{x_2} = -\frac{2}{E^4} \left\{ 2E \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} \right\} - 3E_{x_2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right\} \right\}.$$

Im Nullpunkt unseres Koordinatensystems vereinfachen sich diese Ausdrücke; da dort $E \underset{\circ}{=} 1$ und $E_{x_1} \underset{\circ}{=} E_{x_2} \underset{\circ}{=} 0$ ist, so wird

$$K_{x_1} \underset{\circ}{=} -4 \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\},$$

und

$$K_{x_2} \underset{\circ}{=} -4 \left\{ \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^3 x_3}{\partial x_1^3} \right\}. \quad (44)$$

Führen wir wieder die in § 4 eingeführten Bezeichnungen ein, so folgt:

$$K_{x_1} \underset{\circ}{=} -4(a_0 c_0 + a_1 c_1) \underset{\circ}{=} -4B,$$

$$K_{x_2} \underset{\circ}{=} -4(a_0 c_1 - a_1 c_0) \underset{\circ}{=} +4A. \quad (45)$$

¹⁷⁾ KOMMERELL, S. 579 ff.

Setzen wir diese Beziehungen in Formel (31) ein und drücken κ^2 unter Benutzung von (42) durch K aus, so können wir τ_0 aus K_{x_1} , K_{x_2} und K berechnen:

$$\tau_0 \stackrel{\circ}{=} \mp \frac{\sqrt{K_{x_1}^2 + K_{x_2}^2}}{2K}. \quad (46)$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens von τ_0 folgt aus (34) und (45):

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \tau_0 \stackrel{\circ}{=} \operatorname{sgn} K_{x_2} & \quad \text{für } K_{x_2} \neq 0, \\ \operatorname{sgn} \tau_0 \stackrel{\circ}{=} \operatorname{sgn} K_{x_1} & \quad \text{für } K_{x_2} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Die Formel (33) geht über in:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{K_{x_1}}{K_{x_2}}. \quad (48)$$

Der Vektor mit den Komponenten K_{x_1} , K_{x_2} ist im Nullpunkt identisch mit dem Gradienten der Funktion $K(x_1, x_2)$. Statt Formel (46) dürfen wir deshalb

$$\tau_0 = \mp \frac{|\operatorname{grad} K|}{2K} \quad (49)$$

schreiben, wo $|\operatorname{grad} K|$ die Länge des Gradienten der Funktion K bedeutet. Diese Formel gilt für jeden Punkt des Definitionsbereiches. Die Vorzeichenregel (47) für τ_0 läßt sich noch einfacher formulieren. τ_0 ist positiv, wenn $\operatorname{grad} K$ in der obern Halbebene, die negative x_1 -Achse ausgeschlossen, liegt.

Wir berechnen jetzt den Gradienten von K in einem allgemeinen Punkt. Die Parameterlinien $x_1 = \text{const.}$ bzw. $x_2 = \text{const.}$ bilden ein orthogonales Netz. Wir brauchen deshalb die Funktion K auf den Linien $x_1 = \text{const.}$ und $x_2 = \text{const.}$ nach s abzuleiten und haben dann die Komponenten des Gradienten:

$$K_{x_1} \frac{dx_1}{ds} \Big|_{x_2 = \text{const.}} \quad \text{bzw.} \quad K_{x_2} \frac{dx_2}{ds} \Big|_{x_1 = \text{const.}}$$

Wegen $ds^2 = E(dx_1^2 + dx_2^2)$ folgt unmittelbar

$$\frac{dx_2}{ds} \Big|_{x_1 = \text{const.}} = \frac{1}{\sqrt{E}} \quad \text{und} \quad \frac{dx_1}{ds} \Big|_{x_2 = \text{const.}} = \frac{1}{\sqrt{E}}.$$

Somit ist in einem allgemeinen Punkt:

$$\operatorname{grad} K = \frac{1}{\sqrt{E}} \{K_{x_1}, K_{x_2}\}, \quad (50)$$

oder

$$|\operatorname{grad} K| = + \frac{1}{\sqrt{E}} \sqrt{K_{x_1}^2 + K_{x_2}^2}. \quad (51)$$

§ 6. Beispiele

Wir erläutern den Inhalt des § 5 an Hand zweier Beispiele, die wir der Funktionentheorie entnehmen. Wie wir in § 3 zeigten, läßt sich eine Funktion einer komplexen Variablen als Fläche im vierdimensionalen Raum darstellen, und im Falle einer analytischen Funktion ist die Fläche eine Äquigone. Ist $w = u + iv = f(z)$ eine analytische Funktion, so ist $u_x^2 + u_y^2 = |f'|^2$ und $u_{xx}^2 + u_{xy}^2 = |f''|^2$.

Ferner sind nach (38) die Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} E &= G = 1 + |f'|^2, \\ F &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Statt (41) schreiben wir deshalb¹⁸⁾:

$$K = - \frac{2 |f''|^2}{(1 + |f'|^2)^3}. \tag{53}$$

1. *Beispiel:* Als erstes Beispiel wählen wir die Exponentialfunktion:

$$w = f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Für die erste und zweite Ableitung erhalten wir:

$$f'(z) = f''(z) = e^z,$$

und ihre absoluten Beträge sind: $|f'| = |f''| = e^x$. Nach (52) ist $E = 1 + e^{2x}$. Nach (53) erhalten wir für das GAUSSsche Krümmungsmaß:

$$K = - \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3}. \tag{54}$$

Weiter folgt:

$$K_x = - 4e^{2x} \frac{1 - 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^4}, \quad K_y = 0.$$

Die x -Komponente des Gradienten ist somit nach (50)

$$- 4e^{2x} \frac{1 - 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^{9/2}}.$$

Für $x = -\frac{1}{2} \lg 2 = -0,3466$ verschwindet der Gradient. Bei $x > -\frac{1}{2} \lg 2$ zeigt der Gradient in Richtung der positiven x -Achse; bei $x < -\frac{1}{2} \lg 2$ in Richtung der negativen x -Achse. Damit ist auch das Vorzeichen von τ_0 festgelegt. Unter Benützung der Formeln (49) und (54) erhalten wir:

$$\tau_0 = \frac{2e^{2x} - 1}{(1 + e^{2x})^{3/2}}, \tag{55}$$

¹⁸⁾ KOMMERELL, S. 581.

wobei bei der Quadratwurzel der positive Wert zu nehmen ist. Aus (48) und unserer Vereinbarung (32) folgt, daß $\alpha = -90^\circ$ ist. Wir sehen, daß für $x > -\frac{1}{2} \lg 2$ die maximale Torsion bei $\varphi = -90^\circ$ und für $x < -\frac{1}{2} \lg 2$ bei $\varphi = +90^\circ$ erreicht wird. Den Verlauf von τ_0 als Funktion von x haben wir in Fig. 2 dargestellt. Das Maximum von τ_0 liegt bei $x = \frac{1}{2} \lg 3,5 = 0,6264$ und beträgt $+\frac{4}{9} \sqrt{2} = +0,6285$. Für große x kann τ_0 durch $\tau_0 \approx 2e^{-x}$ und für stark negative x durch $\tau_0 \approx 3,5e^{2x} - 1$ approximiert werden. Wir bemerken noch, daß die Definition eines immer positiven τ_0 im Punkte $x = -\frac{1}{2} \lg 2$ zu einer Unstetigkeit der ersten Ableitung von τ_0 und einer Unstetigkeit beim Winkel α , als Funktion von x dargestellt, geführt hätte. Durch unsere Annahmen haben wir diese scheinbaren Unstetigkeiten umgangen.

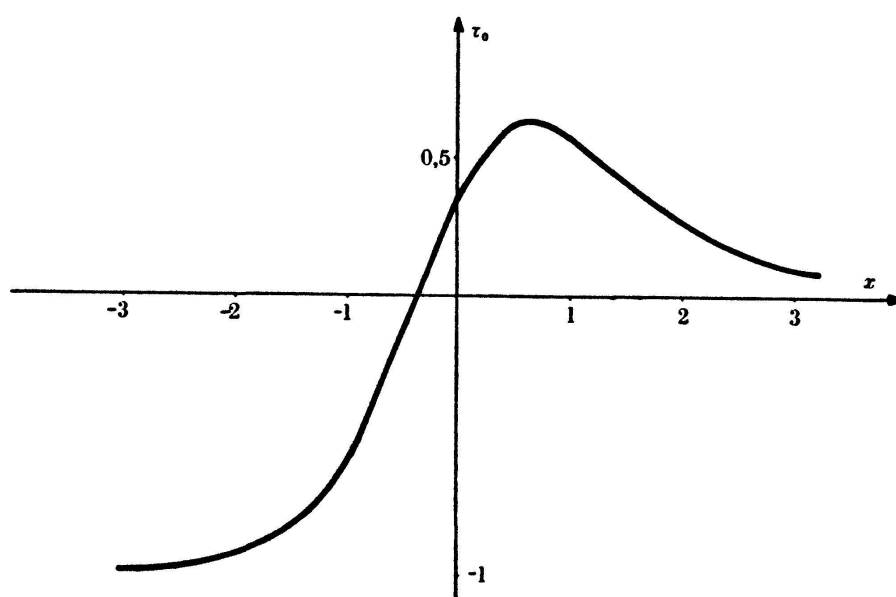


Fig. 2

2. *Beispiel:* Wir betrachten die Funktion $w = f(z) = \frac{1}{2}z^2$. Daraus folgt unmittelbar: $f'(z) = z$ und $f''(z) = 1$. Setzen wir $|z| = r$, so ist $|f'| = r$ und

$$E = 1 + r^2. \quad (56)$$

Somit erhalten wir nach Formel (53) für das GAUSSsche Krümmungsmaß:

$$K = -\frac{2}{(1 + r^2)^3}. \quad (57)$$

Das GAUSSsche Krümmungsmaß hängt also nur von $|z| = r$ ab. Da K mit wachsendem r immer zunimmt, zeigt der Gradient immer in Richtung des Radiusvektors. Die Größe

$$K_r = \frac{12r}{(1 + r^2)^4} \quad (58)$$

ist immer positiv, und da $K_{x_1}^2 + K_{x_2}^2 = K_r^2$ ist, folgt nach (51), (56) und (58):

$$|\text{grad } K| = + \frac{12r}{(1+r^2)^{3/2}}.$$

Mit (49) und (57) folgt schließlich:

$$\tau_0 = \pm \frac{3r}{(1+r^2)^{3/2}}.$$

Für Punkte, die in der obern Halbebene (die negative x -Achse ausgeschlossen) liegen, hat τ_0 das positive, für die übrigen Punkte das negative Vorzeichen.

Für den Winkel α gilt: $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$, ($z = x + iy$) und $-90^\circ < \alpha \leq + < 90^\circ$.

In Fig. 3 ist $|\tau_0|$ als Funktion von r dargestellt.

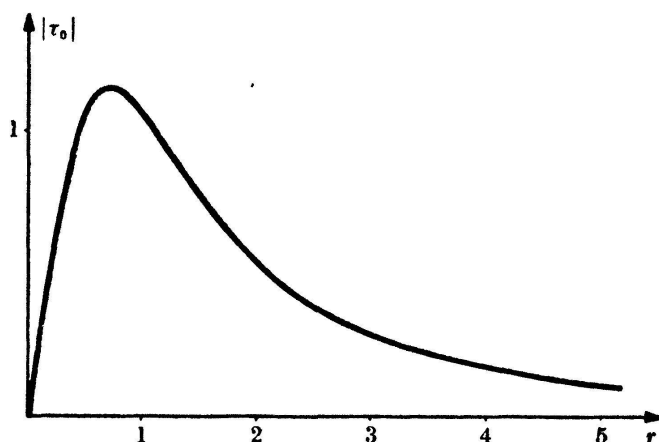


Fig. 3

Das Maximum liegt bei $r = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$ und beträgt $2/\sqrt{3} = 1,1548$.

LITERATURVERZEICHNIS

- BEHNKE und SOMMER, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Berlin 1955.
- BLASCHKE WILHELM, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. 1. Band. New York 1945.
- BRUNEL C. E. A., *Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions*. Math. Ann. 19, 1882, 37–56.
- FINSLER PAUL, (1) *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen*. Dissertation. Göttingen 1918. Neudruck, Basel 1951.
- FINSLER PAUL, (2) *Über die Krümmungen der Kurven und Flächen*. Reale Accad. d'Italia 1940.
- KILLING W., *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*. Leipzig 1885.
- KOMMERELL K., *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen*. Math. Ann. Band 60 (1905), 548–596.
- KWIETNIEWSKI STEFAN, *Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven*. Dissertation. Zürich 1902.
- SPERNER EMANUEL, *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*. 1. Teil. Göttingen 1948.

(Eingegangen den 14. Juli 1958)