

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 33 (1959)

**Artikel:** Moyennes généralisées.  
**Autor:** Delsarte, J. / Lions, J.L.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26008>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Moyennes généralisées

par J. DELSARTE et J. L. LIONS (Nancy)

## Introduction

Dans une note récente [1], l'un d'entre-nous a donné le théorème suivant :

*Si  $f$  est une fonction indéfiniment dérivable dans  $R^n$ , désignons par  $u(x, r)$  la moyenne de  $f$  sur la sphère de centre  $x$  et de rayon  $r$ . Soient alors  $a$  et  $b$  deux nombres positifs fixes, distincts. Si l'on a, pour tout  $x \in R^n$ :*

$$u(x, a) = u(x, b) = f(x) ,$$

*alors la fonction  $f$  est harmonique (sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles de  $a$  et  $b$  en nombre fini).*

On sait, depuis Poisson, que  $u(x, r)$  est solution d'un problème de CAUCHY hyperbolique singulier :

$$(*) \quad -\Delta_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$(**) \quad u(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial}{\partial r} u(x, 0) = 0$$

(cf. en particulier A. WEINSTEIN, [1], [2]).

Nous dirons qu'une solution  $u(x, r)$  de ce problème, possède la *propriété de moyenne* pour le rayon  $a > 0$ , si l'on a :

$$u(x, a) = u(x, 0)$$

pour tout  $x$  dans  $R^n$ . Plus généralement, on peut se proposer l'étude systématique du problème suivant :

*Etant donné un opérateur hyperbolique singulier*

$$D = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{t} q(t) \frac{\partial}{\partial t} + r(t)$$

(où les variables d'espace et de temps sont *séparées*), on cherche les fonctions  $f$  définies dans  $R^n$ , telles que, si  $u(x, t)$  est la solution de :

$$(***) \quad Du = 0; \quad u(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0,$$

on ait:  $u(x, a) = f(x)$  ( $a$  positif, fixe, donné).

On montrera dans cette note (théorème 5.1) que ce problème (et même un problème un peu plus général) équivaut à *un problème de moyenne périodicité à une variable*. Pour arriver à ce résultat, nous utilisons: (a) la théorie des péra-

teurs de transmutations (n° 2), (b) la théorie des translations généralisées (de DELSARTE-LÉVITAN) dans un cas singulier (n° 3) (cf. LÉVITAN [1] et MARCENKO [1] pour des cas particuliers). On applique ces translations généralisées au problème de CAUCHY considéré (n° 4); le théorème devient alors immédiat.

Le premier paragraphe est consacré à la définition de quelques notations.

### 1. Notations

Soit  $x$  une variable parcourant un ensemble  $\Omega$ . Soit  $\mathfrak{E}$  un espace vectoriel de fonctions définies sur  $\Omega$ , à valeurs scalaires ou vectorielles. La valeur de  $f \in \mathfrak{E}$ , en  $x \in \Omega$  sera notée indifféremment  $f(x)$ , ou  $f_x$ , ou encore  $f^x$ .

Soit  $A$  un opérateur linéaire, de  $\mathfrak{E}$  dans  $\mathfrak{E}$ . L'image  $g$  de  $f$  par  $A$  est notée  $Af$  ou  $A[f]$ . La valeur de  $g$  au point  $x \in \Omega$  sera notée, dans toute la suite  $A_x[f]$  ou encore  $A^x[f]$ . Nous excluons la notation  $Af(x)$ , qui conduirait ici à d'inextricables ambiguïtés. Il arrivera souvent que  $f$  dépende de plusieurs variables et que l'on doive préciser sur laquelle de ces variables « travaille » l'opérateur  $A$ . On écrira alors:  $g(x) = A_x[f(\xi)]$ . Dans cette notation,  $\xi$  est une variable muette, dont il est loisible de changer à volonté le nom, sous la condition qu'on ne lui donne point la dénomination d'une autre variable figurant dans le calcul. En particulier, il ne faut point la nommer  $x$ . On adoptera systématiquement les lettres grecques pour les variables muettes. Soit maintenant  $x, y \rightarrow f(x, y)$  une fonction du couple ordonné  $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ ,  $f$  prenant toujours ses valeurs dans le même espace vectoriel. Supposons que

$$f_1: x \rightarrow f(x, y) \quad \text{et} \quad f_2: y \rightarrow f(x, y)$$

soient dans  $\mathfrak{E}$ . On peut alors calculer

$$g_1 = A[f_1] \quad g_2 = A[f_2]$$

dont les valeurs en  $x$ , (resp. en  $y$ ) seront notées:

$$g_1(x) = A_x[f(\xi, y)]; \quad g_2(y) = A_y[f(x, \eta)] .$$

Soient maintenant  $A$  et  $B$  deux opérateurs de  $\mathfrak{E}$  dans lui-même; la valeur en  $x$  de  $g = AB[f] = A[B[f]]$  s'écrira:

$$g(x) = A_x[B_\xi[f(\xi_1)]]$$

si l'on doit préciser les variables sur lesquelles travaillent  $A$  et  $B$ . Concurremment on peut considérer aussi la fonction de deux variables:

$$g(x, y) = A_x B_y[f(\xi, \eta)]$$

qu'il faut soigneusement distinguer de:

$$h(x, y) = A_x B_y[f(\eta, \xi)] .$$

Soit enfin  $\mathfrak{F}$  un deuxième espace vectoriel de fonctions sur  $\Omega$ , et  $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$  l'espace des applications linéaires de  $\mathfrak{E}$  dans  $\mathfrak{F}$ . Soit  $\Phi$  une fonction définie dans  $\Omega$ , à valeurs dans  $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{F})$ . Il est commode de noter sa valeur au point  $y$  de  $\Omega$  par  $\Phi^y$ . Si alors  $f \in \mathfrak{E}$ , la valeur de  $\Phi^y[f]$ , qui appartient à  $\mathfrak{F}$ , au point  $x$  de  $\Omega$  sera notée  $\Phi_x^y[f]$ , ou  $\Phi_x^y[f(\xi)]$  s'il faut préciser la variable sur laquelle travaille  $\Phi^y$ .

## 2. Transmutations

On désigne par  $\mathfrak{E}_*$  l'espace des fonctions indéfiniment différentiables *paires* sur  $R$ , à valeurs dans  $C$ ;  $\mathfrak{E}_*$  est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, pour les fonctions et chacune de leurs dérivées. On posera  $D = \frac{d}{dx}$ . Soient  $q$  et  $r$  deux fonctions de  $\mathfrak{E}_*$ . On considère l'opérateur différentiel:

$$M = D^2 + x^{-1}q(x)D + r(x). \quad (2.1)$$

Il est commode de poser:

$$q(x) = 2p + 1 + xm(x), \quad (p \in C) \quad (2.2)$$

où  $m$  est indéfiniment différentiable *impaire*. Sauf si  $p = -\frac{1}{2}$ , l'opérateur  $M$  est *singulier à l'origine*. On admet ici le théorème suivant (cf. LIONS [2]):

**Théorème 2.1.** *Si  $p \neq -1, -2, \dots$ , il existe un isomorphisme  $X$ , et un seul, de  $\mathfrak{E}_*$  sur lui-même, tel que:*

$$D^2 X = X M \quad (2.3)$$

$$X_0[f(\xi)] = f(0) \quad \text{pour tout } f \in \mathfrak{E}_*. \quad (2.4)$$

En fait, comme  $M$  dépend, entre-autres, de  $p$ , l'opérateur  $X$ , (*opérateur de transmutation*) dépend aussi de  $p$ . Ecrivons-le  ${}^{(p)}X$ . La fonction  $p \rightarrow {}^{(p)}X$  est entière à valeurs dans  $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*)$ .

Si  $X^{-1}$  désigne l'inverse de  $X$ , on a:

$$X^{-1}D^2 = M X^{-1} \quad (2.5)$$

$$X_0^{-1}[f(\xi)] = f(0). \quad (2.6)$$

Si  $s$  est un nombre réel ou complexe, et si l'on pose

$$X_x^{-1}[\cos(s\xi)] = \theta(x, s) \quad (2.7)$$

on a:

$$M_x[\theta(\xi, s)] + s^2\theta(x, s) = 0 \quad (2.8)$$

$$\theta(0, s) = 1; \quad (2.9)$$

$\theta(x, s)$  est paire en  $x$ .

**Remarque 2.1.** D'après le théorème des noyaux de SCHWARTZ [3], l'opérateur  $X^{-1}$  est représenté par un noyau  $K(x)_\xi$ : la fonction  $x \rightarrow K(x)_\xi$  est indéfiniment différentiable, à valeurs dans l'espace des distributions en  $\xi$ , paires et à support compact. On a:

$$X_x^{-1}[f(\xi)] = \langle K(x)_\xi; f(\xi) \rangle$$

et la formule (2.7) peut s'écrire:

$$\langle K(x)_\xi; e^{i s \xi} \rangle = \theta(x, s). \quad (2.10)$$

### 3. Translations généralisées

Il est utile d'introduire les opérateurs de « translation » dans  $\mathfrak{E}_*$ , qui conservent la parité. On posera, pour tout  $y \in R$ :

$$\sigma_x^y[f(\xi)] = \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y)). \quad (3.1)$$

On définit ainsi  $\sigma^y \in \mathcal{L}(\mathfrak{E}_*; \mathfrak{E}_*)$ . La fonction  $y \rightarrow \sigma^y$  est indéfiniment différentiable paire. On a:

$$\sigma^0 = \text{opérateur identité} \quad (3.2)$$

$$D_y^2[\sigma^y] = \sigma^y \cdot D^2. \quad (3.3)$$

Vérifions ce dernier point:  $g = \sigma^y[f]$  est la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)]$$

Dérivant deux fois en  $y$  on obtient la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{2}[f''(x+y) + f''(x-y)]$$

qui n'est autre que la fonction  $\sigma_x^y[D_\xi^2[f]]$ .

Utilisons maintenant les opérateurs de transmutations définis au n° 2. On suppose  $p$  fixé et différent de  $-1, -2, \dots$ . Posons:

$$U^y = X_y^{-1}[\sigma^y]. \quad (3.4)$$

On définit ainsi une fonction  $y \rightarrow U^y$ , indéfiniment différentiable, paire, définie dans  $R$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{E}_*; \mathfrak{E}_*)$ , et on a, par (3.2):

$$U^0 = \text{opérateur identité}. \quad (3.5)$$

De plus, on peut écrire

$$U_x^y[f(\xi)] = \frac{1}{2}X_y^{-1}[f(x+\eta) + f(x-\eta)] \quad (3.6)$$

d'où, pour  $a$  réel quelconque

$$U_{x+a}^y[f(\xi)] = \frac{1}{2}X_y^{-1}[f(x+a+\eta) + f(x+a-\eta)] = U_x^y[f(\xi+a)].$$

Donc, pour tout  $y$ ,  $U^\nu$  commute avec les translations. C'est donc *un opérateur de convolution*.

**Définition 3.1.** On appelle *opérateur de translation généralisée*, de longueur  $y$ , attaché à  $M$ , l'opérateur :

$$S^\nu = X^{-1} U^\nu X . \quad (3.7)$$

On peut aussi écrire :

$$S_x^\nu[f] = \frac{1}{2} X_x^{-1} X_y^{-1} [X_{\xi+\eta}[f] + X_{\xi-\eta}[f]] . \quad (3.8)$$

**Remarque 3.1.** Comme  $X$  et  $X^{-1}$  sont univoquement définis par l'opérateur différentiel  $M$ , il en est de même de  $S^\nu$ .

Les propriétés de  $U^\nu$ , signalées ci-dessus ont les conséquences suivantes :

**Proposition 3.1.** Pour tout  $y \in R$ ,  $S^\nu \in \mathcal{Q}(\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*)$ ; la fonction  $y \rightarrow S^\nu$  est indéfiniment différentiable paire à valeurs dans  $\mathcal{Q}(\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*)$ , et  $S^0$  est l'identité.

Il résulte aussi de la définition (3.8) la

**Proposition 3.2.** Pour tout  $f \in \mathcal{Q}_*$  on a :

$$S_x^\nu[f] = S_y^\nu[f] . \quad (3.9)$$

De plus, pour  $x = 0$ , (3.9) implique

$$S_0^\nu[f] = f(y) . \quad (3.10)$$

Les propriétés essentielles de  $S^\nu$  sont contenues dans le

**Théorème 3.1.** Les translations généralisées  $S^\nu$  vérifient les identités :

$$M S^\nu = S^\nu M \quad (3.11)$$

$$M_\nu[S^\nu] = S^\nu M . \quad (3.12)$$

**Démonstration.** 1°) à partir de (3.7), on a

$$M S^\nu = M X^{-1} U^\nu X = X^{-1} D^2 U^\nu X$$

et comme  $U^\nu$  est un opérateur de convolution, il permute avec  $D^2$ , donc

$$M S^\nu = X^{-1} U^\nu D^2 X = X^{-1} U^\nu X M = S^\nu M$$

ce qui établit (3.11).

2°) On a, par dérivation sous le signe somme :

$$M_\nu[S^\nu] = M_\nu[X^{-1} U^\nu X] = X^{-1} M_\nu[U^\nu] X .$$

Mais

$$M_\nu[U^\nu] = M_\nu[X_\eta^{-1}[\sigma^{\nu_1}]] = X_y^{-1}[D_\eta^2[\sigma^{\nu_1}]]$$

et par (3.3), il vient :

$$M_\nu[U^\nu] = X_y^{-1}[\sigma^\nu D^2] = X_y^{-1}[\sigma^\nu] D^2 = U^\nu D^2$$

donc,

$$M_\nu[S^\eta] = X^{-1}U^\nu D^2 X = X^{-1}U^\nu XM = S^\nu M$$

ce qui établit (3.12).

Le théorème 3.1 entraîne le

**Théorème 3.2.** *Pour  $f$  donnée dans  $\mathfrak{E}_*$ , on pose*

$$S_x^\nu f = u(x, y). \quad (3.13)$$

La fonction  $u(x, y)$  est solution de:

$$M_x[u(\xi, y)] = M_\nu[u(x, \eta)] \quad (3.14)$$

avec les conditions aux limites

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = 0. \quad (3.15)$$

**Remarque 3.2.** Par utilisation des opérateurs  $X$  et  $X^{-1}$  on voit que le problème (3.14), (3.15) admet une solution unique, de sorte que (3.13) peut servir de *définition* pour les translations généralisées  $S^\nu$ .

**Remarque 3.3.** Comme  $X$  et  $X^{-1}$ , on peut regarder  $S^\nu$  comme une fonction du nombre complexe  $p$ . Cette fonction est méromorphe à valeurs dans  $\mathcal{L}(\mathfrak{E}_*, \mathfrak{E}_*)$ .

**Exemple 3.1.** (DELSARTE [3], LÉVITAN [1]).

Si l'on prend  $q(x) = 2p + 1$ ,  $r(x) = 0$ , on a

$$S_x^\nu f = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(p+\frac{1}{2})} \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) \sin^{2p} \varphi d\varphi$$

(avec  $\operatorname{Re} p > \frac{-1}{2}$ ).

Cette formule peut se prolonger analytiquement (comme dans LIONS [1]) pour  $p \neq -1, -2, \dots$

#### 4. Problèmes de CAUCHY abstraits et translations généralisées

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels topologiques, localement convexes, séparés, complets. On suppose que  $E \subset F$  algébriquement et topologiquement. Enfin  $E_0$  est un sous-espace de  $E$ .

On donne un opérateur  $A$

$$A \in \mathcal{L}(E, F). \quad (4.1)$$

**Problème 4.1.** On cherche une fonction  $u(t)$  indéfiniment différentiable en  $t$ , à valeurs dans  $E$ , possédant les propriétés suivantes:

$$A[u(t)] + M_t[u(\tau)] = 0; \quad (4.2)$$

$$u(0) = e \in E_0 \quad (4.3)$$

$$u(t) \text{ est paire en } t. \quad (4.4)$$

L'opérateur  $M$  est défini comme au n° 2, avec  $p = -1, -2, \dots$ . Le problème (4.1) est dit: Problème de CAUCHY abstrait (singulier), à variables séparées.

**Définition 4.1.** Le problème 4.1 est dit *bien posé dans  $E_0$*  si, pour tout  $e \in E_0$ , il admet une solution unique.

Par utilisation des transmutations, on voit aussitôt que le problème 4.1 équivaut au problème analogue obtenu en remplaçant  $M$  par  $D^2$ ; il suffit en effet d'introduire la nouvelle fonction  $u_1(t) = X_t[u(\tau)]$  (cf. LIONS [1]).

**Théorème 4.1.** *On suppose le problème (4.1) bien posé. Soit  $u$  sa solution. Si  $a$  est un nombre  $> 0$  fixé, posons:*

$$v(t) = S_t^a[u(\tau)] \quad (4.5)$$

où  $S^v$  est la translation généralisée introduite par la définition (3.1). La fonction  $v(t)$  vérifie:

$$A[v(t)] + M_t[v(\tau)] = 0 \quad (4.6)$$

$$v(0) = u(a) \quad (4.7)$$

$$v(t) \text{ est paire en } t. \quad (4.8)$$

(4.8) est évident. On a, par (3.11);

$$M_t[S^a u] = S_t^a[M u]$$

donc:

$$A[v(t)] + M_t[v(\tau)] = S_t^a[A[u(t)] + M_t[u(\tau)]] = 0$$

ce qui montre (4.6). Enfin,  $v(0) = S_0^a[u(\tau)] = S_a^0[u(\tau)] = u(a)$ , d'où le théorème.

Voici trois exemples de problèmes bien posés:

**Exemple 4.1.**  $E = F = \mathfrak{C}(R_x^n)$ , espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $R_x^n$ , avec la topologie habituelle. On prend pour  $A$  un opérateur elliptique du deuxième ordre, à coefficients réels  $\in \mathfrak{C}(R_x^n)$ , indépendants de  $t$ , de façon que  $A + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  soit hyperbolique à variables séparées. Le problème est bien posé dans  $\mathfrak{C}(R_x^n)$ .

**Exemple 4.2.** On prend:

$$A = \Sigma(-1)^{|p|} D_x^p(a_{pq}(x)D_x^q), \quad |p|, |q| \leq m; \quad m > 1$$

les fonctions  $a_{pq} \in \mathfrak{B}$ : espace des fonctions indéfiniment différentiables dans  $R_x^n$ , bornées ainsi que toutes leurs dérivées. On désigne par  $H^m$  l'espace des

$u \in L^2(R_x^n)$  tels que  $D^p u \in L^2(R_x^n)$  pour  $|p| \leq m$ , les dérivées étant prises au sens des distributions. Pour  $u \in H^m$ , on pose :

$$\|u\|_m^2 = \sum_{|p| \leq m} \|D^p u\|_0^2$$

où  $\|f\|_0^2 = \int_{R^n} |f(x)|^2 dx$ . L'espace  $H^m$  est alors un espace de HILBERT; son dual sera noté  $H^{-m}$ ; on prend  $E = H^m$  et  $F = H^{-m}$ ;  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ . Pour  $u, v \in E$ , on pose encore :

$$a(u, v) = \sum_{R^n} \int a_{pq}(x) D^p u \overline{D^q v} dx ;$$

et on fait l'hypothèse que  $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$  pour tout  $u, v \in E$ , et que, pour  $\lambda$  réel convenable

$$a(v, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_m^2 \quad (4.9)$$

avec  $\alpha > 0$ , et  $v \in E$ .

Soit enfin  $\mathcal{D}_{L^2}$  l'espace des fonctions  $u$ , indéfiniment différentiables dans  $R^n$ ,  $\in L^2$  ainsi que toutes leurs dérivées.

Dans ces conditions, le problème (4.1) est bien posé dans  $E_0 = \mathcal{D}_{L^2}$ , (cf. LIONS [1]). Notons que la solution est alors indéfiniment différentiable à valeurs dans  $\mathcal{D}_{L^2}$ .

**Exemple 4.3.** Cet exemple est analogue au précédent, mais l'opérateur différentiel  $A$  est remplacé par un opérateur aux différences finies.

## 5. Propriété de moyenne et fonctions moyenne-périodiques

On donne un problème de CAUCHY abstrait, à variables séparées, bien posé dans  $E_0$ .

**Définition 5.1.** Un élément  $e \in E_0$  est dit avoir la propriété de  $a$ -moyenne (relativement à  $A + M$ ) si la solution  $u(t)$  du problème 4.1 vérifie :

$$u(a) = e . \quad (5.1)$$

Cette terminologie est justifiée par les remarques de l'introduction.

**Remarque 5.1.** Dans le cas de l'exemple 4.1, la solution du problème 4.1 est de la forme :

$$u(x, t) = \int \mathfrak{G}(x, y, t) e(y) dy \quad (5.2)$$

où l'intégrale est prise sur un compact (dépendant de  $x$  et  $t$ ). La propriété (5.1) s'écrit :

$$e(x) = \int \mathfrak{G}(x, y, a) e(y) dy . \quad (5.3)$$

Cette équation est une équation de convolution, dans  $R_x^n$ , si, et seulement si,  $\Delta$  est à coefficients constants (par exemple  $\Delta = -\Delta$ ). Dans le cas particulier  $M = D^2 + \frac{n-1}{t}D$ ,  $\Delta = -\Delta$ , (5.3) est la propriété de moyenne usuelle sur la sphère de centre  $x$ , de rayon  $a$ .

**Remarque 5.2.** Dans le cas de l'exemple 4.2, on a une solution de la même forme (5.2), mais l'intégrale est cette fois étendue à l'espace entier, ce qui est compensé par l'hypothèse  $e \in \mathfrak{D}_{L^2}$ .

**Théorème 5.1.** Une condition nécessaire et suffisante pour que  $e \in E_0$  ait la propriété de  $a$ -moyenne (relativement à  $\Delta + M$ ) est que la fonction  $w(t)$  solution de:

$$\Delta w(t) + w''(t) = 0 \quad (5.4)$$

$$w(t) \text{ paire en } t; \quad w(0) = e \quad (5.5)$$

vérifie:

$$K(a)_t * w(t) = w(t). \quad (5.6)$$

(Rappelons que le noyau distribution  $K(a)_t$  a été défini à la remarque (2.1).) La condition (5.6) est une condition de moyenne-périodicité vectorielle à une seule variable, la variable  $t$ . La transformée de FOURIER en  $t$ , de la distribution  $K(a)_t - \delta$  est  $\theta(a, s) - 1$ .

**Démonstration du théorème 5.1.** Soit  $u$  la solution du problème (4.1), supposée vérifier (5.1). D'après le théorème (4.1) on a alors:

$$S^a[u] = u. \quad (5.7)$$

C'est nécessaire et suffisant. Remplaçons  $S^a$  par sa valeur, on voit que (5.7) s'écrit  $X^{-1}U^aX[u] = u$  ou encore, posant  $X[u] = u_1$ ,

$$U^a[u_1] = u_1 \quad (5.8)$$

ce qui, moyennant (3.6) et la remarque (2.1), devient:

$$K(a)_t * u_1(t) = u_1(t).$$

Or, on vérifie immédiatement que  $u_1$  vérifie les conditions (5.4) et (5.5). On a donc  $u_1 = w$ , ce qui termine la démonstration.

## 6. Applications

**Théorème 6.1.** On suppose que  $M = D^2 + t^{-1}q(t)D$ , et que,  $a$  et  $b$  étant deux nombres positifs donnés, la seule racine commune aux deux équations:

$$\theta(a, s) - 1 = 0; \quad \theta(b, s) - 1 = 0, \quad (s \in C) \quad (6.1)$$

soit  $s = 0$ . Dans ces conditions, si  $e \in E_0$  vérifie les propriétés de  $a$ -moyenne et de  $b$ -moyenne, on a :

$$\Lambda e = 0 .$$

**Démonstration.** D'après le théorème (5.1), on a :

$$K(a)_t * w(t) = K(b)_t * w(t) = w(t) .$$

Si  $e' \in E'$ , dual de  $E$ , et si :

$$w_{e'}(t) = \langle w(t); e' \rangle ,$$

on a

$$K(a)_t * w_{e'} = K(b)_t * w_{e'} = w_{e'} .$$

D'après l'hypothèse (6.1), (6.2) et le théorème des moyenne-périodiques (SCHWARTZ [1]), on a nécessairement :

$$w_{e'}(t) = \alpha_{e'} t + \beta_{e'} ,$$

où  $\alpha_{e'}$  et  $\beta_{e'}$  sont deux constantes, car  $s = 0$  est le seul point (d'ordre 2), du spectre de la fonction moyenne-périodique  $w_{e'}(t)$ . Comme cette fonction est paire, on a  $\alpha_{e'} = 0$ , donc  $w_{e'}(t)$  se réduit à une constante. Par suite  $w(t)$  est un élément de  $E$  qui est indépendant de  $t$ , donc, nécessairement  $w(t) = e$ , et (5.4) donne alors  $\Lambda e = 0$  ;

**Exemple 6.1.** Si  $\Lambda = -\Lambda$  et si  $M = D^2 + \frac{n-1}{t}D$ , on retrouve le théorème de DELSARTE [1]. Posons dans ce cas  $n = 2p + 2$ , on a alors :

$$X_x^{-1}[f(\xi)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \cdot f(x \cos \theta) d\theta$$

et  $\theta(x, s) = X_x^{-1}[\cos(s\xi)] = j_p(sx)$  en posant  $j_p(z) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{z^p} J_p(z)$  la fonction  $\theta(x, s)$  ne dépend alors que du produit  $sx$ , et les conditions (6.1) reviennent à supposer que l'équation  $j_p(z) - 1 = 0$ , (qui admet  $z = 0$  comme seule racine réelle, d'ordre deux) ne possède aucun couple de racines complexes dont le rapport soit réel et égal à  $\frac{a}{b}$ . Une analyse facile, mais trop longue pour être reproduite ici, montre par la considération des séries asymptotiques classiques donnant les valeurs de la fonction de BESSEL  $J_p(z)$  pour  $|z|$  très grand, que si cette circonstance se produit, cela ne peut être que pour un nombre fini de valeurs du rapport  $\frac{a}{b}$ , valeurs qu'on peut assigner à l'avance, pour chaque indice  $p$ . En fait, on vérifie directement que cela ne se produit pas pour  $n = 3$ , et il est vraisemblable que cette circonstance est générale.

**Remarque 6.1.** (Note ajoutée à la correction des épreuves). Considérons le problème suivant: On cherche  $u(t)$  indéfiniment différentiable paire à valeurs dans  $E$ , avec

$$\Lambda[u(t)] + M_t[u(\tau)] = 0, \quad (6.2)$$

$$u(a) = u(b) = g \text{ où } g \text{ est donné dans } E \text{ avec } \Lambda g = 0. \quad (6.3)$$

Si  $\vartheta(a, s) = 0$  et  $\vartheta(b, s) = 0$  n'ont aucun zéro commun, la seule solution de (6.2), (6.3) est  $u(t) = g$ .

En effet, si  $v(t) = u(t) - g$ , on a

$$\Lambda[v(t)] + M_t[v(\tau)] = 0, \quad v(a) = v(b) = 0.$$

Ceci équivaut (démonstration comme au § 5) à  $S^{(a)}[v] = 0$ ,  $S^{(b)}[v] = 0$ ; si  $Xv = v_1$ , ceci équivaut à  $K(a)_t * v_1 = 0$ ,  $K(b)_t * v_1 = 0$ , d'où  $v_1 = 0$  grâce à la théorie des fonctions moyenne-périodiques. Donc  $v = 0$ . c.q.f.d.

En particulier, dans  $R^3$ , si une fonction  $f$  a des moyennes sphériques égales à une même fonction harmonique  $g$  pour deux rayons  $a$  et  $b$ , de rapport irrationnel, alors  $f = g$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- J. DELSARTE [1], *Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques*. C. R. Acad. Sc. Paris, 246 (1958), 1358–1360.
- J. DELSARTE [2], *Sur certaines transformations...* C. R. Acad. Sc. Paris, 206 (1938) 1780–1782.
- J. DELSARTE [3], *Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques*. Acta Mathematica, 69 (1938), 259–317.
- J. DELSARTE [4], *Les fonctions moyenne-périodiques*. J. Math. pures et Appl. 14 (1935), 403–453.
- V. M. LEVITAN [1], *Développements de fonctions en série et intégrales de FOURIER-BESSEL*. Ouspecki Mat. Nauk., 6 (1951), 102–143.
- J. L. LIONS [1], *Opérateurs de DELSARTE et problèmes mixtes*. Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 9–95.
- J. L. LIONS [2], *Equations d'EULER-POISSON-DARBOUX généralisées*. C. R. Acad. Sc. Paris, 246 (1958), 208–210.
- V. A. MARCENKO [1], *Sur la théorie des opérateurs différentiels linéaires*. Troudi Mosc. Mat., 1 (1952), 328–420. Troudi Mosc. Mat., 2 (1953), 4–82.
- L. SCHWARTZ [1], *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*. Ann. of Math., 48 (1947), 857–929.
- L. SCHWARTZ [2], *Théorie des distributions Paris*. (Hermann) T. 1 (1950); T. 2 (1951).
- L. SCHWARTZ [3], *Théorie des noyaux*. Proc. International Congress of Maths. 1950.
- A. WEINSTEIN [1], *Sur le problème de CAUCHY pour l'équation de POISSON et l'équation des ondes*. C. R. Acad. Sc. Paris, 234 (1952), 2584.
- A. WEINSTEIN [2], *On a CAUCHY problem with subharmonic initial values*. Annali di Mat. pura ed Applicata, XLIII (1957), 325–340.

(Reçu le 10 juillet 1958)