Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 32 (1957-1958)

Artikel: Über ein gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene.

Autor: Bilinski, Stanko

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25334

Über eine gewisse Kurvenzuordnung in der hyperbolischen Ebene

von Stanko Bilinski, Zagreb

Es sei in der hyperbolischen Ebene eine Kurve E durch ihre natürliche Gleichung

$$E \ldots . \kappa = \kappa(s) \tag{1}$$

gegeben, wo κ die Krümmung und s die Bogenlänge dieser Kurve bedeutet. Dabei setzen wir voraus, daß die Funktion (1) eindeutig und stetig ist, und daß sie die jeweils erforderliche Anzahl von Ableitungen hat[1]).

Im allgemeinen können wir auf der Kurve E zwei Arten von Bogen unterscheiden: Ein Bogen soll der ersten oder der zweiten Art heißen, ja nachdem auf ihm in jedem Punkte die Bedingung $|\kappa| \geqq 1$ oder $|\kappa| < 1$ erfüllt ist. In einzelnen Fällen kann natürlich auch die ganze Kurve aus einem einzigen Bogen einer der beiden Arten bestehen.

In jedem Punkte eines Bogens erster Art wird der Schmiegungskreis (wenn $|\kappa| > 1$) oder der Schmiegungsgrenzkreis (wenn $|\kappa| = 1$) bestimmt sein. Zu jedem Punkt des Bogens erster Art gibt es also auch einen endlich oder unendlich entfernten Krümmungsmittelpunkt. Es existiert daher in diesem Falle die Evolute der Kurve E. Ist die Gleichung (1) gegeben, so kann man leicht auch die natürliche Gleichung der Evolute dieser Kurve bestimmen. Es ist ferner nicht schwer, zu zeigen, daß die Kurvenzuordnung „Evolute-Evolvente" in der hyperbolischen Ebene alle jene wesentlichen geometrischen und kinematischen Eigenschaften hat, die diese Zuordnung in der parabolischen oder elliptischen bzw. sphärischen Geometrie besitzt. Hier ist also in der hyperbolischen Geometrie nichts wesentlich Neues gegen den parabolischen Fall zu erwarten, daher wird diese Zuordnung hier auch nicht betrachtet.

Für einen Punkt eines Bogens zweiter Art gibt es dagegen keinen reellen Krümmungsmittelpunkt, das heißt, zu einem Bogen zweiter Art gehört keine Evolute. Wir können jedoch in diesem Falle eine andere, ähnliche Kurvenzuordnung definieren, die nur in der hyperbolischen Geometrie möglich ist, und zwar folgendermaßen:

Jedem Punkte T eines Bogens zweiter Art der Kurve E ordnen wir den entsprechenden Fußpunkt M der Normalen n auf der Basis (Nulllinie) b der

---

[1]) Siehe auch: S. Bilinski, Einige Anwendungen der Polarkoordinaten in der hyperbolischen Geometrie. Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. (Zagreb) (2) 11 (1956), 25–35.

Schmiegungsäquidistante zu. Der geometrische Ort dieser Punkte M ist eine Kurve B. Da die Beziehung zwischen den Kurven E und B eine gewisse Verallgemeinerung der Beziehung zwischen der Äquidistante und ihrer Basis darstellt, so soll B die „Basoide" der Kurve E, und E die „Äquidistantoide" der Kurve B heißen (oder kürzer nur die „Kurve B" und die „Kurve E").

Man könnte nun fragen, warum neben der Kurve B nicht auch die Einhüllende der Basen b aller Schmiegungsäquidistanten der Kurve E betrachtet wird. Diese Einhüllende existiert aber nicht. Es gilt nämlich

Satz A. *Ist auf einem Bogen zweiter Art $\kappa(s)$ eine (im engeren Sinne) monotone Funktion, so bilden die Basen der Schmiegungsäquidistanten eine Schar Nichtschneidender.*

Der Beweis dieser Behauptung ist leicht auf Grund des nächstfolgenden Satzes B zu führen.

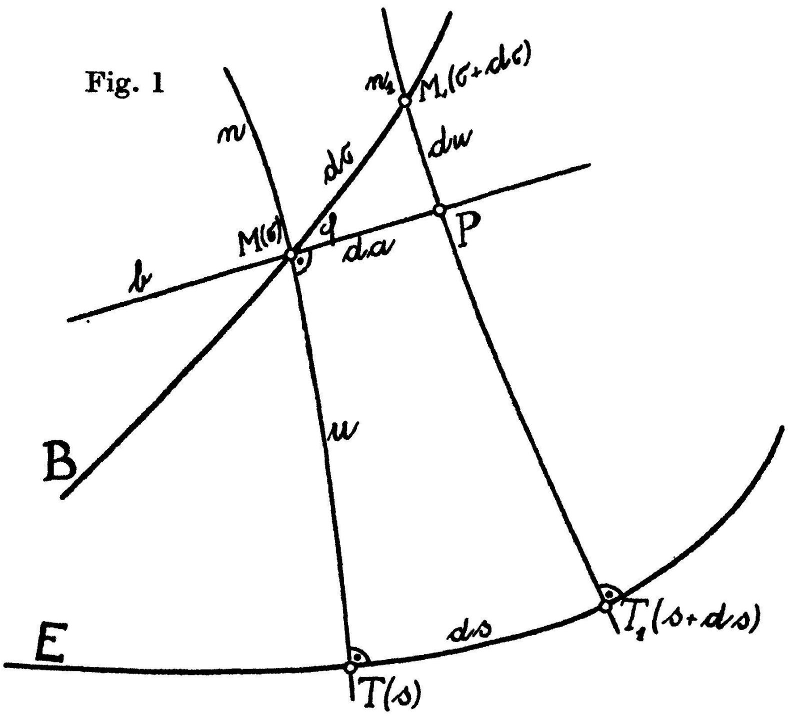
Wir stellen nun das folgende Problem: Wenn die Gleichung (1) einer Kurve E gegeben ist, so soll für ihre Bogen zweiter Art die natürliche Gleichung

$$k = k(\sigma)$$

der Basoide gefunden werden.

Hier wird also mit k die Krümmung und mit σ die Bogenlänge der Basoide bezeichnet, zum Unterschied von der Krümmung κ und der Bogenlänge s der Äquidistantoide.

Fig. 1



Zwecks Lösung des gestellten Problems brauchen wir einige Beziehungen für gewisse Hilfsgrößen.

Wir suchen also zuerst die Beziehung zwischen den einander entsprechenden Bogenelementen ds und $d\sigma$ der gegebenen Kurve und ihrer Basoide. Es seien T und T_1 zwei unendlich nahe Punkte eines Bogens zweiter Art der Kurve E, und M und M_1 die entsprechenden Punkte der Kurve B (Fig. 1). Offenbar können wir einen genügend kleinen Bogen $\overset{\frown}{TT_1}$ beliebig genau durch den zugehörigen Bogen der Schmiegungsäquidistante approximieren. Da aber für die Bogenlänge s der

Äquidistante und für das zugehörende Segment a von deren Basis die bekannte Beziehung $s = a \operatorname{ch} u$ gilt, wobei u die Entfernung eines Punktes der Äquidistante von der Basis bezeichnet, so wird in unserem Falle

$$ds = \operatorname{ch} u \cdot da \ . \tag{2}$$

Da wir ferner auf das infinitesimale Dreieck MM_1P, das im Grenzfalle $ds \to 0$ in ein rechtwinkliges übergeht, die Formeln der euklidischen Geometrie anwenden können, so wird

$$d\sigma^2 = \operatorname{ch}^{-2} u \cdot ds^2 + du^2 \ . \tag{3}$$

Da jetzt die Krümmung der Kurve E der Krümmung

$$\kappa = \operatorname{th} u \tag{4}$$

der Schmiegungsäquidistante gleich ist, so erhalten wir durch Elimination der Veränderlichen u aus (3) und (4) die gesuchte Beziehung

$$d\sigma = \frac{[\dot{\kappa}^2 + (1 - \kappa^2)^3]^{1/2}}{1 - \kappa^2} ds \ , \tag{5}$$

wo hier, wie auch im folgenden, durch einen Punkt die Ableitung nach der Bogenlänge s bezeichnet ist.

Wir bestimmen jetzt den Winkel φ, den in einem Punkte M die Basoide mit der Basis b der Schmiegungsäquidistante des zugehörigen Punktes T der Äquidistantoide einschließt (Fig. 1). Aus dem Dreieck MPM_1 entnehmen wir, daß im Grenzfalle, wenn T_1 gegen T strebt, die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{du}{da}$$

gültig ist. Daraus erhält man unter Anwendung von (2) und (4)

$$\operatorname{tg} \varphi = \dot{\kappa}(1 - \kappa^2)^{-3/2} \ . \tag{6}$$

Außer diesen Beziehungen benötigen wir ferner den folgenden

Satz B. *Es sei* $\widehat{MM_1}$ *ein Bogen der Basoide* (Fig. 2), *der zu einem Bogen* $\widehat{TT_1}$ *ihrer Äquidistantoide gehört. Es sei ferner* n *jene Normale der Äquidistantoide, welche durch die Punkte* T *und* M *geht, und* b_1 *sei die Basis der Schmiegungsäquidistante für den Punkt* T_1 *der Äquidistantoide. Schneiden sich nun die Geraden* n *und* b_1 *in einem Punkte* N *und schließen sie dabei den Winkel*

$\vartheta = \sphericalangle MNM_1$ *ein, so ist der Flächeninhalt des Bereiches* MM_1N, *den die Geraden* n *und* b_1 *und der Bogen* $\widehat{MM_1}$ *begrenzen, gleich*

$$F = \frac{\pi}{2} - \vartheta\,. \qquad (7)$$

Ist dabei $\kappa(s)$ *auf dem Bogen* $\widehat{TT_1}$ *eine monotone Funktion (hier betrachten wir zum Beispiel den Fall, daß sie monoton steigend ist), so schneidet der Bogen* $\widehat{MM_1}$ *der Basoide das Segment* $\overline{NM_1}$ *der Basis* b_1 *bestimmt nicht, und es ist sicher* $F > 0$. *Dann ist nach* (7) *sicher* $\vartheta < \pi/2$.

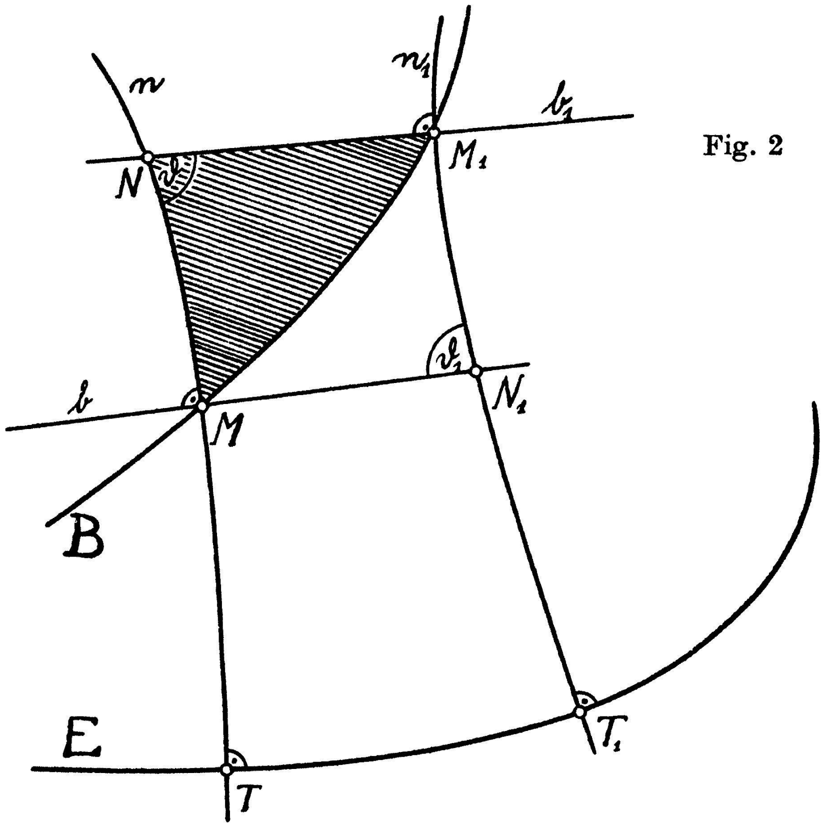


Fig. 2

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf dem folgenden einfachen Satze über Polygone (Fig. 3):

Satz C. *Sind in einem* $2n$*-Eck* $n+1$ *innere Winkel gleich* $\pi/2$, $n-2$ *innere Winkel gleich* $3\pi/2$, *und ist* ϑ *der einzige übriggebliebene Winkel, so hat dieses Polygon den Flächeninhalt* $F = \pi/2 - \vartheta$. *Schneiden die Seiten dieses Polygons einander nicht, so ist sicher* $\vartheta < \pi/2$. *Ein solches Polygon, wie es in diesem Satze beschrieben wurde, heiße* Π*-Polygon.*

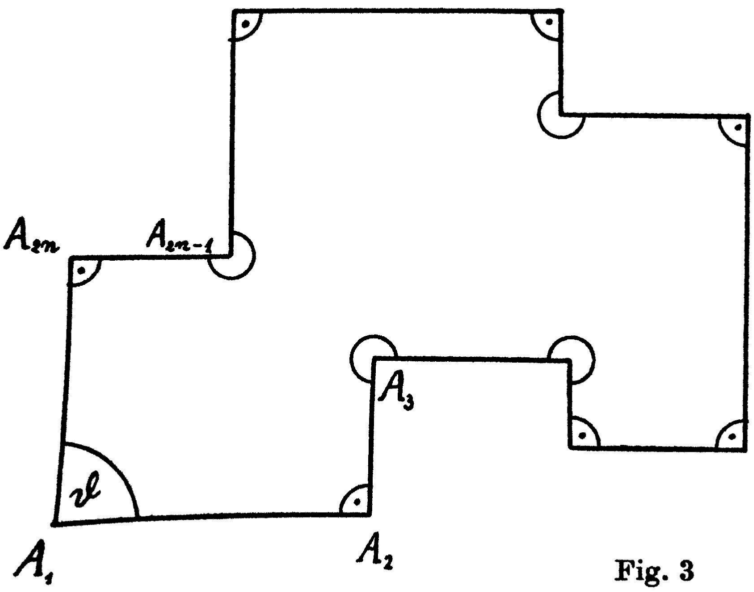


Fig. 3

Den Bereich MM_1N aus Satz B können wir aber jetzt auffassen als Grenzfall eines bestimmten Π-Polygons, wobei die Anzahl der Seiten gegen Unendlich strebt.

Um das zu zeigen, denken wir uns einen Bogen $\widehat{TT_1}$ zweiter Art irgendeiner Kurve, und der Einfachheit halber nehmen wir an, daß auf diesem Bogen die Krümmung eine monotone Funktion ist, und zwar etwa eine monoton steigende (Fig. 4). Auf dem Bogen $\widehat{TT_1}$ wählen wir der Reihe nach n Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dabei sei jeder der Bogen $\widehat{TA_1}$, $\widehat{A_1A_2}, \ldots, \widehat{A_nT_1}$ genügend klein, so daß man ihn beliebig genau durch einen Äquidistantenbogen approximieren kann. Zu jedem solchen Äquidistantenbogen $\widehat{A_iA_{i+1}}$ denken wir uns auch das dazugehörige Segment $\overline{C_iD_{i+1}}$ der Basis. Beim Grenzübergang $n \to \infty$, wobei auch die Länge des größten Bogens $\widehat{A_iA_{i+1}}$ gegen Null strebt,

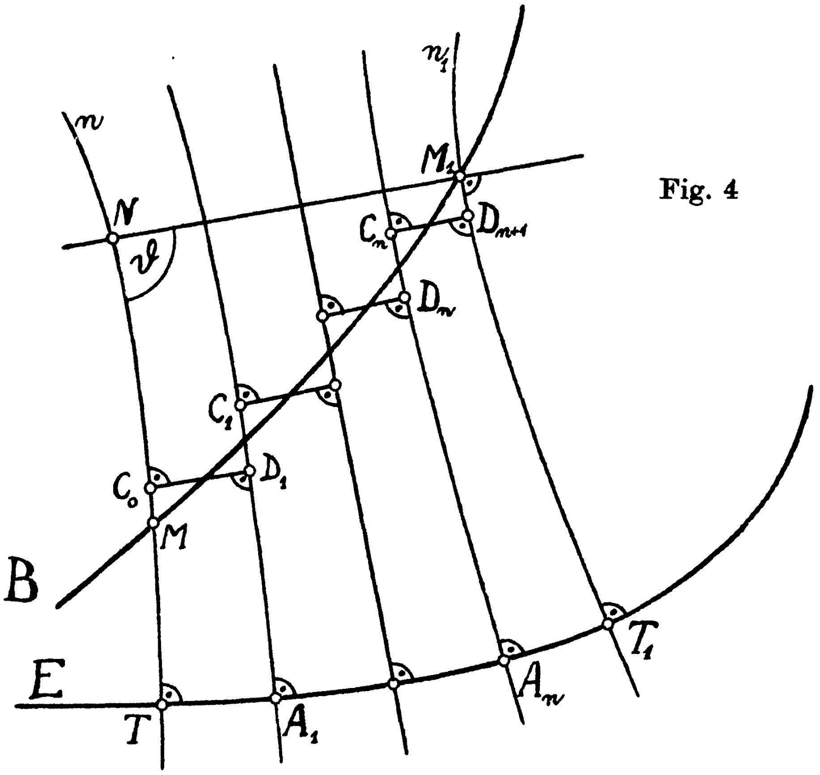


Fig. 4

wird sich die gebrochene Linie $C_0D_1C_1D_2\ldots C_nD_{n+1}$ dem Basoidenbogen $\widehat{MM_1}$ unbegrenzt nähern.

Da aber $NC_0D_1C_1\ldots D_{n+1}M_1N$ ein Π-Polygon ist, so ist wegen des Satzes C auch der Satz B richtig. Es ist nicht schwer einzusehen, daß die vorausgesetzte Monotonie der Funktion $\kappa(s)$ für den Beweis des Satzes nicht wesentlich ist.

Jetzt können wir die Krümmung der Basoide in einem Punkte M finden. Es

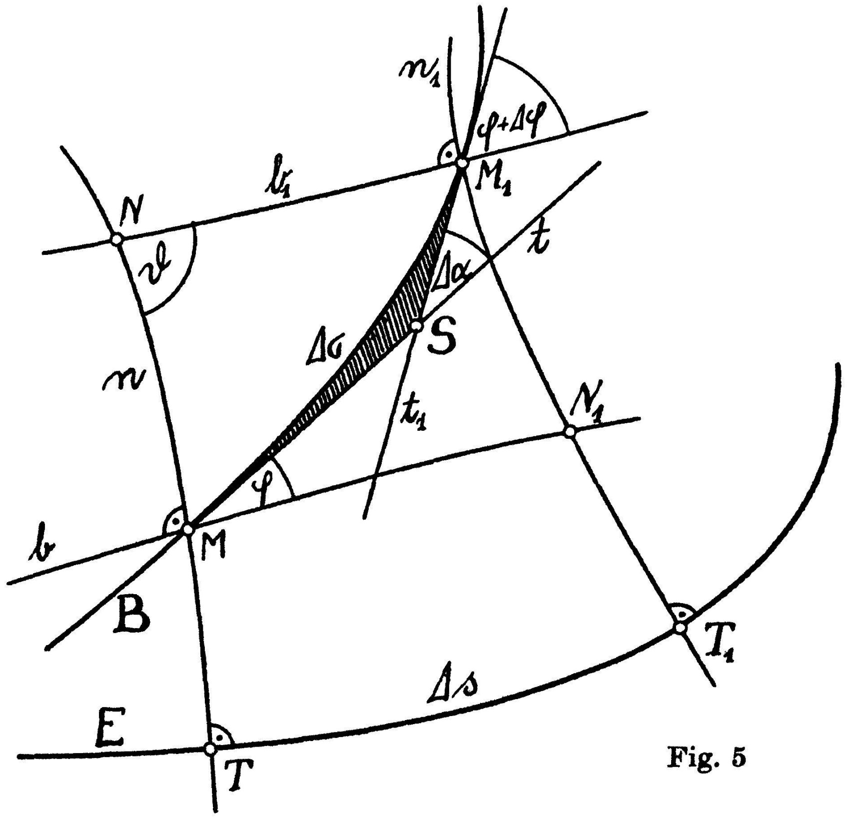


Fig. 5

sei also $\widehat{MM_1}$ ein genügend kleiner Bogen der Basoide, so daß wir annehmen können, daß auf dem zugeordneten Äquidistantoidenbogen die Krümmung $\kappa(s)$ monoton ist, und wir nehmen an, sie sei steigend (Fig. 5). Die Länge des Bogens $\widehat{MM_1}$ sei noch durch die weitere Bedingung eingeschränkt, daß sich die Tangenten t und t_1 in den Punkten M und M_1 der Kurve B in einem Punkte S schneiden. Schließen diese zwei Tangenten den Winkel $\Delta\alpha$ ein, so wird die Krümmung der Basoide im Punkte M als Grenzwert

$$k = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta\sigma} \tag{8}$$

definiert.

Aus der Definition der Basoide folgt unmittelbar, daß die Basis b die Grenzlage der gemeinsamen Normale der Nichtschneidenden n und n_1 ist, wenn der Punkt T_1 gegen T strebt, und ebenso, daß die Basis b_1 die Grenzlage der gemeinsamen Normale dieser Geraden ist, wenn der Punkt T gegen T_1 strebt. Wegen der Stetigkeit folgt daraus, daß die Gerade b die Gerade n_1 in einem Punkte N_1 schneidet, und daß die Gerade b_1 die Gerade n in einem Punkte N schneidet; dabei muß aber der Bogen $\widehat{MM_1}$ genügend klein sein, was wir hier voraussetzen werden.

Da der Flächeninhalt F_1 des Vierecks MSM_1N seinem Defekt gleich ist, so wird

$$F_1 = \frac{\pi}{2} - \vartheta + \Delta\alpha - \Delta\varphi \ .$$

Nach dem Satz B ist dann

$$F_1 - F = \Delta\alpha - \Delta\varphi \ , \tag{9}$$

und das ist gerade der Flächeninhalt der Figur MSM_1, die durch den Bogen $\widehat{MM_1}$ der Basoide und die Segmente $\overline{MS}$ und $\overline{M_1S}$ der beiden Tangenten begrenzt ist.

Strebt jetzt $\Delta\sigma$ gegen Null, so ist offenbar der Flächeninhalt der Figur MSM_1 in bezug auf $\Delta\sigma$ eine infinitesimale Größe höherer Ordnung, und wir bekommen aus (8) und (9) für die Krümmung der Basoide im Punkte M die Formel

$$k = \frac{d\varphi}{d\sigma} \ . \tag{10}$$

Es sei hier noch ein Beweis für die Formel (10) gegeben. Derselbe gründet sich auf zwei Hilfssätze:

Satz D. *Begrenzen die Bogen $L_1, L_2, \ldots, L_m$ einen einfachzusammenhängenden Bereich und schließen dabei zwei benachbarte Bogen L_i und L_{i+1} im Punkte, wo sie sich treffen, den äußeren Winkel β_i ein, so hat der Bereich den Flächeninhalt*

$$F = \sum_{i=1}^{m} (\beta_i + \int_{L_i} \kappa ds) - 2\pi \ .$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Gauß-Bonnetschen Satz; er ist aber auch leicht elementar beweisbar, und zwar durch einen Grenzübergang, wo man von einem Polygon ausgeht, das dem gegebenen krummlinig begrenzten Bereich umgeschrieben ist.

Satz E. *Sind $T(s)$ und $T_1(s_1)$ die Endpunkte eines Äquidistantoidenbogens und $\overset{\frown}{MM_1}$ der zugehörige Basoidenbogen* (Fig. 5), *so ist der Flächeninhalt der Figur TT_1M_1M, die durch die zwei erwähnten Bogen und die Geraden TM und T_1M_1 begrenzt ist, gleich*

$$F = \int_s^{s_1} \kappa ds .$$

Beweis. Es ist bekanntlich der Flächeninhalt eines Äquidistantensektors gleich

$$F_1 = a \operatorname{sh} u ,$$

wo a das begrenzende Basissegment dieses Sektors ist. Da weiter die Länge des zugehörigen Äquidistantenbogens gleich

$$s = a \operatorname{ch} u$$

ist, so erhalten wir wegen (4)

$$F_1 = \kappa s .$$

Wählen wir nun auf dem Bogen $\overset{\frown}{TT_1}$ n Punkte A_i $(i = 1, \ldots, n)$, und approximieren wir jeden Bogen $\overset{\frown}{A_iA_{i+1}}$ durch einen Äquidistantenbogen (Fig. 4). Schließlich summieren wir die Flächeninhalte aller so erhaltenen Sektoren. Der Grenzübergang $n \to \infty$ bestätigt dann die Richtigkeit des Satzes E.

Wir können also den Flächeninhalt des Bereiches TT_1M_1M auf zwei verschiedene Weisen bestimmen. Nach dem Satze D wird

$$F = \int_s^{s+\Delta s} \kappa ds + \int_{\sigma+\Delta\sigma}^{\sigma} k d\sigma + \Delta\varphi ,$$

während aus dem Satze E für denselben Bereich

$$F = \int_s^{s+\Delta s} \kappa ds$$

folgt. Es ist also

$$\int_\sigma^{\sigma+\Delta\sigma} k d\sigma = \Delta\varphi .$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $\Delta\sigma$, so ergibt der Grenzübergang $\Delta\sigma \to 0$ die Gleichung (10).

Unter Verwendung der Gleichung (10) können wir jetzt leicht die natürlichen Gleichungen der Basoide finden.

Aus (6) folgt zunächst

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\ddot{\kappa}(1-\kappa^2)^{3/2} + 3\kappa\dot{\kappa}^2(1-\kappa^2)^{1/2}}{\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3}, \tag{11}$$

und aus (5) erhalten wir

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1-\kappa^2}{[\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3]^{1/2}}. \tag{12}$$

Das Produkt von (11) und (12) ergibt dann die Krümmung der Basoide, ausgedrückt durch die Krümmung der Kurve E. Wenden wir hier noch die Gleichung (5) an, so erhalten wir endlich zusammen mit (1) die natürlichen Gleichungen der Basoide in parametrischer Form:

$$\begin{aligned} k &= \frac{[\ddot{\kappa}(1-\kappa^2) + 3\kappa\dot{\kappa}^2](1-\kappa^2)^{3/2}}{[\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3]^{3/2}}, \\ \sigma &= \sigma_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{[\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3]^{1/2}}{1-\kappa^2}\, ds. \end{aligned} \tag{13}$$

Lösen wir jetzt das umgekehrte Problem: Es sei irgendeine Kurve durch ihre natürliche Gleichung gegeben. Diese werden wir jetzt in der Form

$$k = k(\sigma) \tag{14}$$

schreiben. Wir fragen dann, ob eine Kurve existiert, deren Basoide die Kurve (14) wäre. Wenn eine oder mehrere solche Kurven existieren, so soll die natürliche Gleichung

$$\kappa = \kappa(s) \tag{15}$$

solcher Kurven – Äquidistantoiden – bestimmt werden.

Um dieses Problem zu lösen, setzen wir zuerst voraus, daß für die Kurve (14) die Äquidistantoide (15) wirklich existiert, und in diesem Falle werden wir ihre Gleichung bestimmen.

Für den Winkel φ, den die Basoide (14) in irgendeinem Punkte mit der Basis der zugehörigen Schmiegungsäquidistante einschließt, erhalten wir durch Integration aus der Gleichung (10) die Beziehung

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k\,d\sigma. \tag{16}$$

Aus Figur 1 entnehmen wir, daß

$$du = \sin\varphi \cdot d\sigma$$

ist, und daraus folgt wegen (16)

$$u = u_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k\,d\sigma\right) d\sigma \; . \tag{17}$$

Durch Anwendung von (4) erhalten wir aus (17) die Krümmung der Äquidistantoide (15) als Funktion der Bogenlänge σ der gegebenen Basoide (14).

Um auch die Bogenlänge s der Äquidistantoide als Funktion der Bogenlänge σ der Basoide zu bestimmen, wenden wir die Beziehung (2) an. Da außerdem nach Figur 1

$$da = \cos\varphi \cdot d\sigma$$

gilt, so können wir schreiben:

$$ds = \operatorname{ch} u \cos\varphi \cdot d\sigma \; . \tag{18}$$

So erhalten wir aus (4) und (18) durch Anwendung von (16) und (17) die natürlichen Gleichungen der Äquidistantoide in parametrischer Form:

$$\begin{aligned} \kappa &= \operatorname{th}\left[u_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k\,d\sigma\right) d\sigma\right] , \\ s &= s_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left\{\operatorname{ch}\left[u_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \sin\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k\,d\sigma\right) d\sigma\right] \cdot \cos\left(\varphi_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} k\,d\sigma\right)\right\} d\sigma \; . \end{aligned} \tag{19$_{1,2}$}$$

Die Gleichungen (19) der Äquidistantoide für die Kurve (14) sind abgeleitet unter der Voraussetzung, daß diese Äquidistantoide wirklich existiert. Ihre Existenz ist aber für eine beliebig gegebene Kurve nicht so offensichtlich wie die Existenz der Basoide für jeden Bogen zweiter Art einer beliebig gegebenen Kurve. Darum zeigen wir, daß wirklich für eine jede Kurve die Äquidistantoide existiert.

Es sei also irgendeine Kurve durch ihre Gleichung (14) gegeben. Wir zeigen dann, daß für die Kurven, die formal durch die Gleichungen (19) definiert sind, diese Kurve bei beliebig gewählten Integrationskonstanten u_0, φ_0 und s_0 tatsächlich die Basoide ist.

Aus $(19)_1$ folgt sofort $|\kappa| < 1$, darum ist jeder Bogen der so definierten Kurve ein Bogen zweiter Art, und danach existiert die Basoide sicher.

Um für die durch die Gleichungen (19) definierten Kurven die Basoide zu finden, bedienen wir uns der Gleichungen (13). Dabei schreiben wir jetzt k_1 und σ_1, zum Unterschied von den Größen k und σ aus den Gleichungen (14). Die gesuchte Basoide wird also die folgenden natürlichen Gleichungen haben:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{[\ddot{\kappa}(1-\kappa^2) + 3\kappa\dot{\kappa}^2](1-\kappa^2)^{3/2}}{[\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3]^{3/2}} , \\ \sigma_1 &= \sigma_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{[\dot{\kappa}^2 + (1-\kappa^2)^3]^{1/2}}{1-\kappa^2}\, ds , \end{aligned} \tag{20}$$

wo noch für κ und s die Werte (19) einzusetzen sind. Durch Differentiation der Gleichung $(19)_2$ erhalten wir

$$\frac{ds}{d\sigma} = \operatorname{ch} u \cos\varphi \ ,$$

und daraus und aus $(19)_1$ gelangt man zu den Gleichungen

$$\dot{\kappa} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{ch}^3 u} \ , \tag{21}$$

$$\ddot{\kappa} = \frac{k \operatorname{ch} u - 3 \operatorname{sh} u \sin^2\varphi \cos\varphi}{\operatorname{ch}^5 u \cos^3\varphi} \ . \tag{22}$$

Setzen wir die Werte für κ, $\dot{\kappa}$ und $\ddot{\kappa}$ aus (4), (21) und (22) in die Gleichungen (20) ein und beachten dabei, daß hier φ und u kürzere Bezeichnungen für die Funktionen (16) und (17) sind, so erhalten wir

$$k_1 = k \ , \qquad \sigma_1 = \sigma \ .$$

Damit ist bewiesen, daß wirklich für jeden Wert der Konstanten u_0, φ_0, s_0 die Gleichungen (19) eine Äquidistantoide einer beliebigen Kurve (14) darstellen.

Wir sehen also, daß für jeden Bogen zweiter Art einer Kurve eine bestimmte Basoide existiert, umgekehrt gibt es aber für jede beliebige Kurve als Basoide eine zweiparametrige Schar von Äquidistantoiden. In dem Sinne können wir zu einem beliebigen Punkte $M(\sigma_0)$ einer gegebenen Kurve (14) einen beliebigen Punkt T der Ebene als zugehörigen Punkt einer Äquidistantoide wählen. Ist nämlich u_0 die Entfernung von T zu M, und schließt dabei die Normale auf die Verbindungsgerade TM mit der gegebenen Kurve (14) im Punkte M den Winkel φ_0 ein, so sind (19) die Gleichungen jener Äquidistantoide, welche durch den Punkt T geht und auf der dieser Punkt T dem Punkte M zugeordnet ist.

Jetzt können wir auch auf einige speziellere Fragen eingehen. Zuerst bemerken wir, daß die Gleichungen (13) und (19) wirklich eine Verallgemeinerung der Beziehung zwischen der Äquidistante und ihrer Basis ergeben. Denn für $|\kappa| = \text{const} < 1$ folgt aus den Gleichungen (13) $k = 0$. Das heißt, der Äquidistante als Äquidistantoide entspricht ihre Basis als Basoide. Auf ähnliche Weise folgt für $k = 0$, $\varphi_0 = 0$ aus (19) $\kappa = \operatorname{th} u_0$, und das ist gerade die natürliche Gleichung der Äquidistante. Das gilt aber nur im Falle, daß $\varphi_0 = 0$ ist. Im allgemeinen, wenn φ_0 beliebige Werte annehmen kann, haben die Gleichungen (19) für $k = 0$ die Form

$$\kappa = \operatorname{th}[u_0 + (\sigma - \sigma_0) \sin\varphi_0] \ ,$$

$$s = s_0 + \{\operatorname{sh}[u_0 + (\sigma - \sigma_0)\sin\varphi_0] - \operatorname{sh} u_0\} \operatorname{cotg}\varphi_0 \ .$$

Durch Elimination des Parameters σ folgt daraus die Gleichung der allgemeinen Äquidistantoide der Geraden in der Form

$$\kappa = \frac{(s - s_0)\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{sh} u_0}{\sqrt{1 + [(s - s_0)\operatorname{tg}\varphi_0 + \operatorname{sh} u_0]^2}} \ .$$

Diese Gleichung erhält man auch durch Lösung der Differentialgleichung (6) für den Fall $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$

Als eine zweite Anwendung der gewonnenen Resultate lösen wir jetzt das Problem, ob eine solche Kurve existiert, bei der die Länge jedes Bogens der Länge des entsprechenden Bogens ihrer Basoide gleich ist.

Dann müßte offenbar $ds = d\sigma$ gelten, und aus (12) erhalten wir für die Funktion $\kappa(s)$ eine Differentialgleichung mit der Lösung

$$\kappa = \sqrt{\frac{e^{s-s_0}}{2\operatorname{ch}(s - s_0)}} \ ,$$

und das ist die natürliche Gleichung der Kurve mit der gewünschten Eigenschaft.

Hat eine Kurve Bogen erster und zweiter Art, so wird sie sowohl Evoluten als auch Basoiden haben. Die Normalen auf diese Kurve in jenen Punkten, wo $|\kappa| = 1$ ist, werden dabei die gemeinsamen Asymptoten der Basoide und der Evolute dieser Kurve. In Inflexionspunkten wird die Basoide die gegebene Kurve schneiden.

Alle diese Verhältnisse sind schematisch in der Figur 6 dargestellt, wo eine

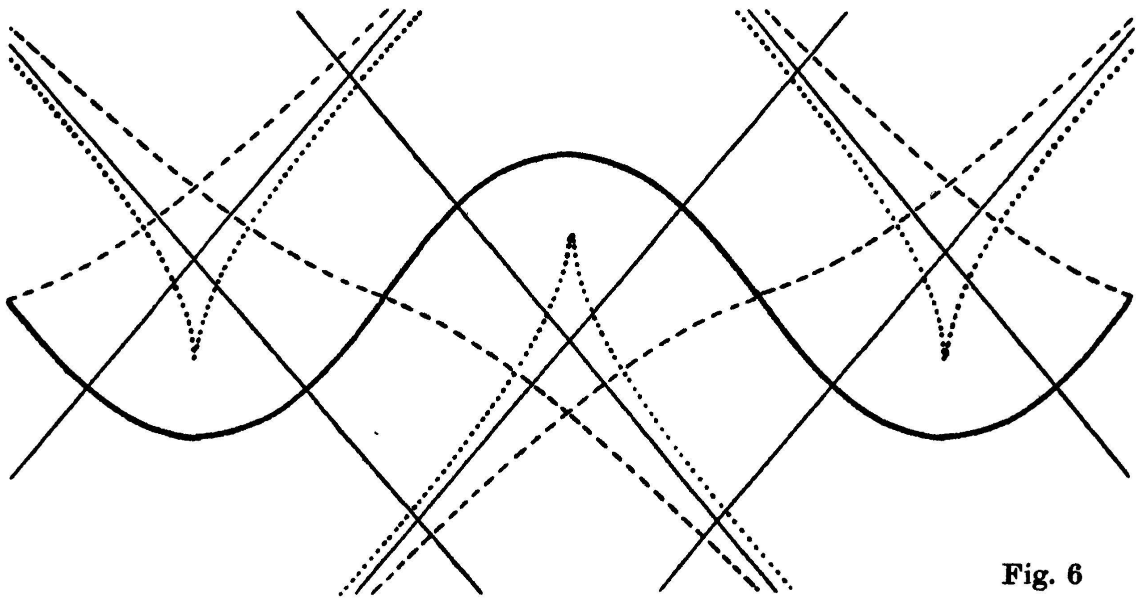


Fig. 6

sinusoidale Kurve mit den Evoluten (punktiert) und den Basoiden (gestrichelt) ihrer Bogen gezeichnet ist.

Bis jetzt bezogen sich unsere Betrachtungen nur auf das reelle Gebiet der hyperbolischen Ebene. Ziehen wir auch die idealen Punkte in Betracht, so wird der Unterschied zwischen den Bogen erster und zweiter Art nicht mehr so wesentlich. Für die Bogen erster Art existieren nämlich reelle Evoluten und die Basoiden bestehen aus idealen Punkten. Für die Bogen zweiter Art verhalten sich die Dinge umgekehrt. Die Basoide ist jetzt reell und die Evolute wird aus idealen Punkten der Ebene gebildet.

(Eingegangen den 12. Oktober 1956.)