Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1957-1958)

Artikel: L'équation des ondes avec second membre invariant
Autor: Methée, Pierre-Denis
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-25341

L'équation des ondes avec second membre invariant

par PIERRE-DENIS METHÉE, Lausanne

1. Introduction

Dans un travail antérieur (M1) ont été obtenues toutes les distributions, au sens de L. SCHWARTZ, qui sont invariantes par le groupe des rotations propres de LORENTZ (en abrégé : invariantes) et qui vérifient l'équation $(\square + \varkappa)T = 0$ ou δ_O, $\varkappa$ désignant une constante complexe quelconque, δ_O la distribution de Dirac relative au centre O des rotations dans R^n (n entier $\geqslant 3$) et $\square$ le dalembertien

$$\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Nous complétons ici cette étude en déterminant une solution invariante (l'existence d'une telle solution n'est pas évidente a priori) de l'équation $(\square + \varkappa)T = Z$, où Z est une distribution invariante quelconque.

On sait (M1, p. 234) qu'à toute distribution invariante T dans $R^n - O$ on peut associer un couple $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ de distributions sur la droite Ou (u est la forme quadratique $x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$) qui coïncident sur la demi-droite $u<0$, et, réciproquement, qu'un tel couple définit dans $R^n - O$ une distribution invariante[1]. De plus (M1, p. 235), le couple associé à $\square\, T$ s'écrit $(D_n\mathcal{T}_1, D_n\mathcal{T}_3)$, où D_n est l'opérateur différentiel $4u\dfrac{d^2}{du^2} + 2n\dfrac{d}{du}$.

Il est donc indiqué de commencer par résoudre l'équation différentielle sur Ou: $(D_n + \varkappa)U = V$, où V est une distribution quelconque sur Ou.

2. Solutions usuelles de l'équation $(D_1 + \varkappa)y = b$ et de l'équation adjointe

L'équation $(D_1 + \varkappa)y = 0$ admet pour système fondamental de solutions

$$y_1 = e_1(u) \ , \qquad y_2 = |u|^{1/2} e_2(u) \ , \tag{2.1}$$

où $e_1(u)$ et $e_2(u)$ sont, respectivement, $\cos\sqrt{\varkappa u}$ et $\dfrac{\sin\sqrt{\varkappa u}}{\sqrt{\varkappa u}}$, fonctions entières de u non nulles en $u=0$. Le wronskien de y_1 et de y_2 vaut $(2u)^{-1}\cdot|u|^{1/2}$ pour tout $u \neq 0$.

---

[1]) Dans (M 1), $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_3$ sont notées respectivement T^+ et T^-.

D'autre part, l'opérateur adjoint ${}^t(D_1 + \varkappa)$ de l'opérateur $(D_1 + \varkappa)$ est égal à $(D_3 + \varkappa)$. On peut prendre comme système fondamental de l'équation ${}^t(D_1 + \varkappa)y = 0$ le système

$$y_1^* = e_2(u) \ , \qquad y_2^* = |u|^{-1/2}e_1(u) \ , \tag{2.2}$$

dont le wronskien vaut $-(2u)^{-1}\cdot|u|^{-1/2}$.

La méthode de la variation des constantes fournit alors une intégrale particulière pour les deux équations $(D_1 + \varkappa)y = b$, ${}^t(D_1 + \varkappa)y = b$, à savoir: pour

$$(D_1 + \varkappa)y = b: \ \ y(u) = \tfrac{1}{2}(y_2 \int_{u_0}^{u} by_2^* dt - y_1 \int_{u_0}^{u} by_1^* dt) = X_{u_0}b \ , \tag{2.3}$$

pour

$${}^t(D_1 + \varkappa)y = b: \ \ y(u) = \tfrac{1}{2}(y_1^* \int_{u_0}^{u} by_1 dt \ - y_2^* \int_{u_0}^{u} by_2 dt) \ = X_{u_0}^* b \ , \tag{2.4}$$

en considérant X_{u_0} et $X_{u_0}^*$ comme des opérateurs.

Soit $\mathcal{E}^p$ l'espace classique des fonctions (d'une variable u dans notre cas) à dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclusivement. Soit $\mathcal{R}^0$ l'espace suivant : une fonction $g(u) \in \mathcal{R}^0$ si

a) $g(u)$ est continue pour $u \neq 0$,

b) $\lim_{u \to 0} |u|^r \cdot g(u) = 0$ si petit soit $r > 0$.

Lemme 1. *$X_{u_0}^*$ applique $\mathcal{R}^0$ dans $\mathcal{E}^0$, et $\mathcal{E}^p$ dans $\mathcal{E}^{p+1}$, si et seulement si*

$$\int_0^{u_0} by_2 dt = 0 \ . \tag{2.5}$$

Ecrivons $X_{u_0}^* b(u) = \frac{1}{2}(f_1(u) - f_2(u))$. Comme y_1 et y_1^* sont des fonctions entières, il est immédiat que $f_1(u) \in \mathcal{E}^0$ si $b(u) \in \mathcal{R}^0$, que $f_1(u) \in \mathcal{E}^{p+1}$ si $b(u) \in \mathcal{E}^p$.

Considérons $f_2(u)$. La condition énoncée est nécessaire, car $y_2^* \to \infty$ si $u \to 0$. Supposons-la vérifiée.

a) Si $b(u) \in \mathcal{R}^0$, $f_2(u) \in \mathcal{E}^0$ si l'on définit $f_2(u)$ à l'origine par sa limite pour $u \to 0$, laquelle vaut 0 comme on le voit facilement ;

b) de plus, pour $u \neq 0$, $f_2'(u)$ s'écrit, après le changement de variable $t = ux$ dans l'intégrale:

$$f_2'(u) = be_1e_2 + (ue_1' - \tfrac{1}{2}e_1) \int_0^1 b(ux)e_2(ux)x^{1/2}dx \ ;$$

si l'on définit $f_2'(u)$ pour tout u par cette dernière expression, il est immédiat que $f_2'(u) \in \mathcal{E}^p$ si $b(u) \in \mathcal{E}^p$. D'où le lemme.

Lemme 2. *X_{u_0} applique $\mathcal{K}^0$ dans $\mathcal{E}^0$. X_{u_0} applique $\mathcal{E}^p$ dans $\mathcal{E}^{p+1}$ si et seulement si*

$$\int_0^{u_0} b y_2^* dt = 0 \ . \tag{2.6}$$

Démonstration analogue à la précédente. Remarquons encore que X_0 satisfait manifestement à la condition énoncée.

3. L'opérateur X^*

Soit $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de la variable u indéfiniment différentiables à support compact, et ${}^t(D_1 + \varkappa)\,\mathcal{D}$ le sous-espace de $\mathcal{D}$ formé des fonctions ${}^t(D_1 + \varkappa)\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{D}$. Notons, d'autre part, $\mathcal{F}$ le sous-espace de $\mathcal{D}'$ (dual de $\mathcal{D}$) formé des distributions U vérifiant $(D_1 + \varkappa)U = 0$. On sait (M1, p. 263) que $\mathcal{F}$ est de dimension 3 et admet pour base l'ensemble des trois distributions

$$U_1 = Pf\, y_\varepsilon y_2 \ , \qquad U_2 = Pf(1 - y_{-\varepsilon})y_2 \ , \qquad U_3 = y_1 \ , \tag{3.1}$$

où $y_\varepsilon(u)$ est la fonction de Heaviside valant 1 si $u > \varepsilon$, 0 si $u < \varepsilon$.

Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on a

$$\langle (D_1 + \varkappa)U_i, \varphi du\rangle = \langle U_i, {}^t(D_1 + \varkappa)\varphi du\rangle = 0\text{[2]} \ .$$

Les conditions

$$\langle U_i, \theta du\rangle = 0 \ , \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.2}$$

sont donc nécessaires pour qu'une fonction θ appartienne à ${}^t(D_1 + \varkappa)\,\mathcal{D}$. Elles sont aussi suffisantes, en vertu d'un théorème d'algèbre (B, p. 50, proposition 10). Dans la suite, θ désignera exclusivement une fonction de

$${}^t(D_1 + \varkappa)\,\mathcal{D} \ .$$

L'application de $\mathcal{D}$ sur ${}^t(D_1 + \varkappa)\,\mathcal{D}$ est biunivoque, car ${}^t(D_1 + \varkappa)\varphi = 0$ entraîne $\varphi = 0$. En effet, une fonction φ satisfaisant à cette équation devrait être égale, pour $u \neq 0$, à une solution (2.2) et avoir un support compact, ce qui est contradictoire. Il suit de là que, pour toute fonction θ, l'équation ${}^t(D_1 + \varkappa)\varphi = \theta$ possède une solution et une seule $\in \mathcal{D}$.

Montrons que la solution $X^*_{-\infty}\theta$ est cette solution. Elle est indéfiniment dérivable, en vertu du lemme 1, puisque $\int_{-\infty}^{0} \theta y_2 dt = 0$ par orthogonalité de θ à U_2. Elle a même support que θ ; c'est évident à gauche, et c'est vrai à droite

[2]) Nous considérons une distribution comme un courant de degré 0. La valeur de la distribution T pour la forme α est notée $\langle T, \alpha\rangle$.

parce que l'on a $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta y_1 dt = 0$ et $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta y_2 dt = 0$ d'après les conditions d'orthogonalité (3.2).

Désormais, nous écrirons simplement X^* pour $X^*_{-\infty}$. On a donc :

$$X^*\theta = \tfrac{1}{2}\Big(y_1^* \int\limits_{-\infty}^{u} \theta y_1 dt - y_2^* \int\limits_{0}^{u} \theta y_2 dt\Big) . \tag{3.3}$$

Remarque. On vérifierait facilement que, si une suite θ_j de fonctions θ, à supports dans un compact K, tend uniformément vers 0 ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, la suite de fonctions $X^*\theta_j$ (à supports dans K) tend uniformément vers 0 ainsi que ses p premières dérivées.

4. L'opérateur $\overline{X}$

Considérons, pour une fonction h à variation bornée, l'opérateur $\overline{X}$ défini par

$$\overline{X}h(u) = \tfrac{1}{2}\Big(y_1 \int\limits_{0}^{u} (y_1^*)' h dt - y_2 \int\limits_{\pm a}^{u} (y_2^*)' h dt\Big) , \tag{4.1}$$

où a est un nombre >0 arbitrairement choisi et où l'on prend pour limite inférieure $+a$ ou $-a$ suivant que u est >0 ou <0. $\overline{X}h(u)$ est une fonction continue pour $u \neq 0$, indéterminée pour $u = 0$. Mais on voit sans peine que le produit $|u|^r \cdot \overline{X}h(u)$ tend vers 0 avec u pour $r > 0$, de sorte que $\overline{X}$ transforme une fonction à variation bornée en une fonction $\in \mathcal{R}^0$. On a, d'autre part :

$$\Big\langle \frac{dh}{du}, \ X^*\theta du\Big\rangle = \langle \overline{X}h, \theta du\rangle , \tag{4.2}$$

la dérivée $\dfrac{dh}{du}$ étant prise au sens des distributions. On peut écrire en effet, d'après (3.3):

$$\langle -2h, (X^*\theta)' du\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h du \Big((y_2^*)' \int\limits_{0}^{u} \theta y_2 dt - (y_1^*)' \int\limits_{-\infty}^{u} \theta y_1 dt\Big) . \tag{4.3}$$

Posons

$$H_1(u) = \int\limits_{0}^{u} h (y_1^*)' dt , \qquad H_2(u) = \int\limits_{\pm a}^{u} h (y_2^*)' dt ,$$

la limite inférieure étant prise comme il a été dit plus haut. Décomposons l'intégrale du second membre de (4.3) en deux intégrales, de $-\infty$ à 0 et de 0 à $+\infty$. Une intégration par parties donne :

$$\int\limits_{0}^{\infty} h du \Big((y_2^*)' \cdot \int\limits_{0}^{u} \theta y_2 dt\Big) = \Big(H_2(u) \cdot \int\limits_{0}^{u} \theta y_2 dt\Big)\Big|_{0}^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} H_2 \theta y_2 du ,$$

$$-\int\limits_{0}^{\infty} h du \Big((y_1^*)' \int\limits_{-\infty}^{u} \theta y_1 dt\Big) = \Big(-H_1(u) \cdot \int\limits_{-\infty}^{u} \theta y_1 dt\Big)\Big|_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} H_1 \theta y_1 du .$$

Les parties tout intégrées sont nulles: à la limite $+\infty$, par orthogonalité de θ à U_1 et U_3; à la limite 0, parce que, d'une part, $H_1(u)$ s'annule à l'origine, et que, d'autre part, comme on peut le vérifier aisément, $\int_0^u \theta y_2 dt$ est un infiniment petit avec u d'ordre > 1 tandis que $H_2(u)\cdot|u|^s$ tend vers 0 avec u dès que $s > \frac{1}{2}$.

En traitant de la même manière l'intégrale de $-\infty$ à 0, on obtient

$$\begin{aligned}\langle -2h, (X^*\theta)'du\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_1\theta y_1 du - \int_{-\infty}^{\infty} H_2\theta y_2 du = \langle \theta du, H_1 y_1 - H_2 y_2\rangle \\ &= \langle \theta du, 2\overline{X}h\rangle ,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Recherche d'une solution U de $(D_1 + \varkappa)U = V$, avec V distribution quelconque sur Ou

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution U soit solution de cette équation est qu'elle vérifie, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\langle (D_1 + \varkappa)U, \varphi du\rangle = \langle U, {}^t(D_1 + \varkappa)\varphi du\rangle = \langle V, \varphi du\rangle ,$$

donc

$$\langle U, \theta du\rangle = \langle V, X^*\theta du\rangle . \tag{5.1}$$

Dans le cas particulier où V est une fonction $g \in \mathcal{R}^0$ (resp. $\mathcal{E}^p$), une solution $\in \mathcal{E}^0$ (resp. $\mathcal{E}^{p+1}$) est $X_0 g$, car

$$\begin{aligned}\langle X_0 g, \theta du\rangle = \langle X_0 g, {}^t(D_1 + \varkappa)X^*\theta du\rangle &= \langle (D_1 + \varkappa)X_0 g, X^*\theta du\rangle \\ &= \langle g, X^*\theta du\rangle ,\end{aligned} \tag{5.2}$$

puisque $(D_1 + \varkappa)X_0 g = g$ pour $u \neq 0$.

Soit V quelconque. Choisissons trois fonctions φ_i de $\mathcal{D}$ telles que $\langle U_i, \varphi_j du\rangle = \delta_{ij}$ (δ_{ij} symbole de KRONECKER; $i, j = 1, 2, 3$), et posons

$$L\varphi = \varphi - \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \cdot \langle U_i, \varphi du\rangle .$$

La fonction $L\varphi$ est orthogonale à chacune des distributions U_i, donc elle appartient à ${}^t(D_1 + \varkappa)\mathcal{D}$.

Considérons alors la forme linéaire

$$\langle U, \varphi du\rangle = \langle V, X^* L\varphi du\rangle . \tag{5.3}$$

C'est une distribution : si $\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}$, $L\varphi \to 0$ dans $\mathcal{D}$, et aussi $X^*L\varphi$ (remarque du numéro 3). C'est une solution de l'équation : elle vérifie (5.1), car $L\theta = \theta$. Toute autre solution s'obtient par adjonction d'une combinaison linéaire des U_i définies par les formules (3.1)[3]).

On peut dire plus. Désignons désormais par I un intervalle $-u_1 < u < u_1$ de Ou ($u_1 > 0$ quelconque). Une distribution sur Ou est toujours continue d'ordre fini dans I (S1, p. 85). Soit p l'ordre de continuité de V dans I. D'autre part, $\underline{\varphi}$ représentant le support de φ, choisissons (ce qui est toujours possible) φ_1 dans $\bar{I} \cap (u > 0)$, $\underline{\varphi_2}$ et $\underline{\varphi_3}$ dans $\bar{I} \cap (u < 0)$. La solution (5.3) possède alors les deux propriétés suivantes :

a) elle est continue d'ordre $p - 1$ dans I (car, si $\underline{\varphi} \subset I$, $\underline{X^*L\varphi} = \underline{L\varphi} \subset I$, et l'affirmation résulte de la remarque du numéro 3) ;

b) $V = 0$ sur $u < 0$ entraîne $U = 0$ sur $u < 0$ (car, si $\underline{\varphi} \subset (u < 0)$, $\underline{X^*L\varphi} = \underline{L\varphi} \subset (u < 0)$ en vertu du choix de $\underline{\varphi_2}$ et $\underline{\varphi_3}$ et du fait que $\underline{U_1}$ est nulle sur $u < 0$).

On peut maintenant démontrer le

Théorème 1. *Soit m entier $\geqslant 0$ quelconque. Si p est l'ordre de continuité de V dans I, il existe toujours une solution U de $(D_1 + \varkappa)^{m+p+2}\, U = V$ telle que:* a) *$U \in \mathcal{E}^m$ dans I,* b) *sur $u < 0$; $V = 0 \to U = 0$.*

En effet, la distribution U_0 définie par

$$\langle U_0, \varphi du \rangle = \langle V, (X^*L)^p \varphi du \rangle$$

est solution de $(D_1 + \varkappa)^p\, U = V$, et de ce qui vient d'être dit pour (5.3) il suit que U_0 est continue d'ordre 0 dans I, et nulle sur $u < 0$ si V l'est.

Or, on sait que U_0 peut s'écrire $\frac{dh}{du}$ dans I, où h est une fonction à variation bornée. Soit U la solution de $(D_1 + \varkappa)\, U = U_0$ fournie par (5.3) ; on a :

$$\langle U, \varphi du \rangle = \langle U_0, X^*L\varphi du \rangle$$

ou, dans I, en vertu de (4.2) :

$$\langle U, \varphi du \rangle = \langle \frac{dh}{du}, X^*L\varphi du \rangle = \langle \bar{X} h, L\varphi du \rangle$$

$$= \langle \bar{X} h, \varphi du \rangle - \sum_{i=1}^{3} k_i \cdot \langle U_i, \varphi du \rangle$$

[3]) Cette méthode est une généralisation naturelle de celle utilisée par L. SCHWARTZ pour déterminer la primitive d'une distribution (S1, p. 52). Elle a déjà été suivie pour d'autres équations différentielles (cf. G).

en notant k_i la constante $\langle \bar{X}h, \varphi_i du \rangle$. La distribution

$$\bar{U} = U + \sum_{i=1}^{3} k_i U_i$$

est encore une solution de l'équation. Elle se réduit manifestement dans I à $\bar{X}h \in \mathcal{R}^0$; elle est nulle sur $u<0$ si U_0 l'est. En effet, *sur* $u<0$: $U_0 = 0 \rightarrow U = 0$ (propriété de (5.3)); U_1 est nulle par définition; enfin, comme on peut prendre $h = 0$, $\bar{X}h$ est nulle (définition (4.1)), ce qui entraîne $k_2 = k_3 = 0$ par le choix de φ_2 et de φ_3.

Un raisonnement analogue, avec utilisation de $\bar{X}_0$ et de (5.2), mène à une solution qui, dans I, est une fonction $\in \mathcal{E}^0$, puis, par itération, on passe à une solution $\in \mathcal{E}^m$ dans I.

6. Problème analogue pour $(D_2 + \varkappa)U = V$

On résout cette équation par une méthode en tous points semblable à celle qui vient d'être suivie dans les numéros 2 à 5. Seuls les calculs diffèrent légèrement. Nous nous contenterons de donner les définitions (en gardant les mêmes notations pour les quantités correspondantes), et les résultats.

Ce cas a ceci de particulier que ${}^t(D_2 + \varkappa) = (D_2 + \varkappa)$, de sorte qu'il est inutile d'introduire des fonctions ou opérateurs astérisqués.

L'équation $(D_2 + \varkappa)y = 0$ a pour système fondamental usuel

$$y_1 = e_1(u) \ , \qquad y_2 = e_1(u)\log|u| + e_2(u) \ ,$$

où e_1 et e_2 sont des fonctions entières de u, non nulles à l'origine. On pourrait prendre, J, Y et K étant les fonctions classiques de Bessel :

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = J_0(\sqrt{\varkappa u}) \ , \\ y_2 = \pi Y_0(\sqrt{\varkappa u}) \ \text{pour } \varkappa \text{ et } u>0, \quad -2K_0(\sqrt{\varkappa|u|}) \ \text{pour } \varkappa>0 \text{ et } u<0. \end{array}\right\}$$

Une solution particulière s'écrit, pour l'équation $(D_2 + \varkappa)y = b$, sachant que le wronskien de y_1 et y_2 vaut $\frac{1}{u}$:

$$y(u) = X_{u_0}b(u) = \tfrac{1}{4}\{y_2 \int_{u_0}^{u} by_1 dt - y_1 \int_{u_0}^{u} by_2 dt\} \ .$$

Aux énoncés des lemmes 1 et 2 se substitue l'énoncé unique : X_{u_0} applique $\mathcal{R}^0$ dans $\mathcal{E}^0$, et $\mathcal{E}^p$ dans $\mathcal{E}^{p+1}$, si et seulement si

$$\int_0^{u_0} by_1 dt = 0 \ .$$

Les distributions solutions de $(D_2 + \varkappa)U = 0$ sont (M 1, p. 267) les combinaisons linéaires de

$$U_1 = Pf y_\varepsilon y_1 \;, \qquad U_2 = y_2 \;, \qquad U_3 = y_1 \;.$$

La fonction $X\theta = X_{-\infty}\theta$ est encore l'unique solution $\in \mathcal{D}$ de l'équation $(D_2 + \varkappa)\varphi = \theta$, avec $\varphi \in \mathcal{D}$, $\theta \in (D_2 + \varkappa)\mathcal{D}$.

On définit $\overline{X}$ par ;

$$\overline{X}h(u) = \tfrac{1}{4}\{y_1 \int_{\pm a}^{u} h y_2' dt - y_2 \int_0^u h y_1' dt\} \;,$$

et cet opérateur transforme encore une fonction à variation bornée en une fonction $\in \mathcal{R}^0$.

La distribution

$$\langle U, \varphi du\rangle = \langle V, XL\varphi du\rangle$$

est une solution particulière de l'équation $(D_2 + \varkappa)U = V$, et qui possède encore les propriétés a) et b) du numéro 5, les fonctions φ_i étant choisies de la même manière. Il en résulte que *le théorème 1 reste vrai pour l'opérateur* $(D_2 + \varkappa)$.

7. Cas général: $(D_n + \varkappa)U = V$

Notons ñ le nombre valant $\frac{1}{2}(n - 1)$ si n est impair, $\frac{1}{2}(n - 2)$ si n est pair, et γ le nombre valant 1 si n est impair, 2 si n est pair.

On a l'identité :

$$(D_n + \varkappa)^q \left(\frac{d}{du}\right)^{\tilde{n}} = \left(\frac{d}{du}\right)^{\tilde{n}} (D_\gamma + \varkappa)^q \;, \qquad q \text{ entier } \geqslant 0.$$

Théorème 1bis. *Soit m entier $\geqslant 0$, et I un intervalle $-u_1 < u < u_1$ sur Ou. Pour q assez grand, il existe une solution U de $(D_n + \varkappa)^q U = V$ telle que*: a) $U \in \mathcal{E}^m$ *dans* I, b) *sur* $u < 0$: $V = 0 \to U = 0$.

Soit, en effet, $\tilde{V}$ une primitive d'ordre ñ de V – qu'on choisit nulle sur $u < 0$ si V est nulle sur $u < 0$. D'après le théorème 1, l'entier m et l'intervalle I étant donnés, on peut trouver en choisissant q assez grand, une solution $\tilde{U}$ de

$$(D_\gamma + \varkappa)^q \tilde{U} = \tilde{V} \;,$$

qui est une fonction $\in \mathcal{E}^{m+\tilde{n}}$ dans I, et qui est nulle sur $u < 0$ si V l'est. Il suit immédiatement de l'identité que la distribution $U = \left(\frac{d}{du}\right)^{\tilde{n}} \tilde{U}$ vérifie les conditions du théorème.

Dans le cas où V est une fonction $g \in \mathcal{E}^p$, la fonction $U = \widetilde{\left(\frac{d}{du}\right)^n X_0 \tilde{g}}$ est une solution $\in \mathcal{E}^{p+1}$ de $(D_n + \varkappa)U = V$ (cf. (5.2)).

8. L'équation des ondes avec second membre invariant

Nous allons déterminer une solution invariante de $(\Box + \varkappa)^k T = Z$, où Z est une distribution invariante quelconque dans R^n et k un entier > 0. Commençons par deux remarques.

Remarque 1. Si Z est une fonction p fois $(p \geqslant 0)$ continuement différentiable de u dans R^n, il existe toujours une solution T de $(\Box + \varkappa)T = Z$ qui est une fonction $p + 1$ fois continuement différentiable de u dans R^n. Soit, en effet, f l'application qui envoie le point $(x_1, \ldots, x_n)$ de R^n sur le point de la droite Ou d'abscisse $u = x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$. On a, par hypothèse, $Z = f^* g$, avec g fonction de u sur Ou appartenant à $\in \mathcal{E}^p$, et $f^* g$ image transposée de g par f. On peut prendre $T = f^* \widetilde{\left(\frac{d}{du}\right)^n X_0 \tilde{g}}$, qui possède bien la propriété indiquée, car (cf. fin du numéro 7, et M 1, p. 235) :

$$(\Box + \varkappa)T = f^*(D_n + \varkappa)\widetilde{\left(\frac{d}{du}\right)^n X_0 \tilde{g}} = f^* g = Z .$$

Remarque 2. Une distribution invariante de support O, qui est de la forme $\sum_{l=0}^{L} a_l \Box^l \delta_O$ (M 1, p. 230), peut toujours s'écrire $(\Box + \varkappa)^q F$, où F est une fonction continue de u dans R^n et q un entier > 0. En effet, δ_O est un dalembertien itéré d'une fonction continue de u (cf. S 1, p. 51, form. II, 3 ; 34 ; cf. aussi M 1, § 7 et 8 : des formules données, on déduit aisément que $\Box^{\frac{n+1}{2}} S^1$ pour n impair et $\Box^{\frac{n+2}{2}} S^2$ pour n pair sont proportionnels à δ_O). D'autre part, avec des constantes c_m convenables, on a : $\Box^l = \sum_{m=0}^{l} c_m (\Box + \varkappa)^m$. Grâce à la remarque 1, on met alors toute combinaison $\Sigma a_l \Box^l \delta_O$ sous la forme indiquée. Celle-ci n'est évidemment pas unique : q est au moins égal à $L + \frac{1}{2}(n + 1)$ si n est impair, ou $L + \frac{1}{2}(n + 2)$ si n est pair, mais on peut prendre ce nombre aussi grand qu'on le désire.

Soit (Z_1, Z_3) le couple sur Ou associé à Z dans $R^n - O$: $Z_1 - Z_3 = 0$ sur $u < 0$.

D'après le théorème 1bis, pour tout nombre q_0 assez grand, et I étant un intervalle $-u_1 < u < u_1$ sur Ou, on peut trouver une distribution $\mathcal{T}_1$ sur Ou, fonction continue dans I, vérifiant $(D_n + \varkappa)^{q_0}\mathcal{T}_1 = Z_1$, et une distribution $\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3$, fonction continue dans I et nulle sur $u<0$, solution de

$$(D_n + \varkappa)^{q_0}(\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_3) = Z_1 - Z_3 \ .$$

Autrement dit, $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_3$ sont des fonctions continues dans I, coïncident sur $u<0$, et satisfont respectivement à $(D_n + \varkappa)^{q_0}\mathcal{T}_1 = Z_1$ et $(D_n + \varkappa)^{q_0}\mathcal{T}_3 = Z_3$.

Le couple $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_3)$ définit donc, dans $R^n - O$, une distribution invariante T_0, fonction continue de u dans le domaine $f^{-1}I \cap (R^n - O)$, vérifiant $(\square + \varkappa)^{q_0}T_0 = Z$ dans $R^n - O$.

Comme $f^{-1}I$ est un voisinage du cône $u = 0$, T_0 se prolonge par continuité en O[4]). Notons encore T_0 ce prolongement.

La différence $(\square + \varkappa)^{q_0}T_0 - Z$ est une distribution invariante de support O, bien déterminée, donc (remarque 2) de la forme $(\square + \varkappa)^{q_1}F_1$, où F_1 est fonction continue de u dans R^n. L'entier $k>0$ étant donné, prenons $q_0>k$ et $q_1>k$. La distribution

$$T = (\square + \varkappa)^{q_0 - k}T_0 - (\square + \varkappa)^{q_1 - k}F_1 \tag{8.1}$$

est alors une solution invariante de $(\square + \varkappa)^k T = Z$.

En reprenant un raisonnement connu (S 3, p. 9–01), on détermine aisément une solution invariante de l'équation $(P(\square + \varkappa))T = Z$, où $P(x)$ est un polynôme quelconque en x. En effet, supposons $P(x)$ de degré p, et soient x_i $(i = 1, \ldots, p)$ ses racines. On peut écrire, en décomposant en éléments simples

$$\frac{1}{P(x)} = \Sigma A_{i,k}(x - x_i)^{-k} \ .$$

Dans cette somme sur i et k, les $A_{i,k}$ sont certaines constantes, on donne à i toutes les valeurs correspondant à des racines x_i distinctes, et pour chacune de ces valeurs on fait varier k de 1 jusqu'à l'ordre de multiplicité de la racine x_i. Posons $P_{i,k}(x) = P(x)(x - x_i)^{-k}$. On a les identités opératorielles

$$1 = \Sigma A_{i,k}P_{i,k}(\square + \varkappa) \ ,$$

$$P(\square + \varkappa) = (\square + \varkappa_i)^k P_{i,k}(\square + \varkappa) \ , \qquad \text{avec} \qquad \varkappa_i = \varkappa - x_i \ .$$

Notons $T_{i,k}$ une solution invariante de $(\square + \varkappa_i)^k T_{i,k} = Z$, et soit

$$T = \Sigma A_{i,k}T_{i,k} \ . \tag{8.2}$$

T est encore une distribution invariante, et vérifie $(P(\square + \varkappa))T = Z$, puis-

[4]) On adapte ici à l'opérateur $\square + \varkappa$ une méthode déjà utilisée par G. DE RHAM (R 1, p. 352).

que l'on peut écrire :

$$(P(\square + \varkappa))\, \Sigma A_{i,k} T_{i,k} = \Sigma A_{i,k} P_{i,k}(\square + \varkappa)(\square + \varkappa_i)^k T_{i,k}$$
$$= \Sigma A_{i,k} P_{i,k}(\square + \varkappa) Z = Z \; .$$

On a ainsi le

Théorème 2. *L'équation* $(P(\square + \varkappa))T = Z$, *où* Z *est une distribution invariante,* P *un polynôme, admet toujours une solution invariante. Les formules* (8.1) *et* (8.2) *définissent une telle solution.*

D'autre part, soit $q = \sup\{q_0, q_1\}$. Comme T_0 est fonction continue de u dans $f^{-1}I$, on pourra toujours, *dans ce domaine*, en se servant de la remarque 1, écrire $Z = (\square + \varkappa)^q (T - F)$, avec $T - F$ fonction continue de u. D'où un théorème de «structure locale» des distributions invariantes :

Théorème 3. *Dans tout domaine* $-u_1 < u < u_1$ *de* R^n $(u_1 > 0)$, *une distribution invariante est le* $(\square + \varkappa)$ *itéré d'un certain ordre d'une fonction continue de l'invariant* u.

9. Extension des résultats au cas ultrahyperbolique

Désignons maintenant par $\square$ l'opérateur ultrahyperbolique

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,, \tag{9.1}$$

où $p > 1$ et $n - p > 1$. Soit G le plus grand groupe linéaire connexe qui laisse invariante la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2 \; .$$

Les théorèmes 2 et 3 sont encore vrais dans le cas ultrahyperbolique, $\square$ étant défini par (9.1) et invariant signifiant invariant par G[5]).

En effet, on sait (R 1, p. 351) qu'à toute distribution invariante dans $R^n - O$ on peut associer une distribution sur la droite Ou (au lieu d'un couple coïncidant sur $u < 0$, dans le cas hyperbolique), et, réciproquement, qu'une distribution sur Ou définit dans $R^n - O$ une distribution invariante.

Comme D_n (introduit au numéro 1) est encore l'opérateur sur Ou associé à $\square$ (R 2, p. 12), on est ramené, comme dans le cas hyperbolique, à résoudre l'équation sur Ou $(D_n + \varkappa)U = V$. Le théorème 1bis reste donc utilisable.

D'autre part, dans le cas ultrahyperbolique, les distributions invariantes de support O sont encore les combinaisons linéaires des $\square^l \delta_O$ (R 2, p. 23), et δ_O

---

[5]) On se reportera à (R 1) et (R 2) pour l'étude des distributions invariantes dans le cas ultrahyperbolique.

est encore un dalembertien itéré d'une fonction continue de l'invariant u (cela résulte aisément des formules de R 2).

On peut donc suivre un raisonnement analogue à celui du numéro 8, et parvenir aux mêmes énoncés.

BIBLIOGRAPHIE

B: N. Bourbaki, *Eléments de mathématique*, Algèbre, chap. II. Paris 1947, Hermann.

G: L. D. Jr. Gates, *Differential equations in the distributions of Schwartz*, Iowa State Coll. J. Sci. 27 (1952), 105–111.

M 1: P.-D. Methée, *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz;* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225–269.

M 2: P.-D. Methée, *Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes. «La théorie des équations aux dérivées partielles»*, p. 145–163 (Colloque international du CNRS, Nancy 1956).

R 1: G. de Rham, *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 346–352.

R 2: G. de Rham, *Solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants.* Colloque Henri Poincaré, Paris, octobre 1954.

S 1: L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome 1. Paris 1950, Hermann.

S 2: L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome 2. Paris 1951, Hermann.

S 3: Séminaire L. Schwartz, *Equations aux dérivées partielles.* Faculté des Sciences de Paris, 1954/1955.

(Reçu le 2 mai 1957.)