

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1956-1957)

Artikel: Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche.
Autor: Wirth, Eva Maria
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515698>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Bestimmung des Typus einer RIEMANNschen Fläche

von EVA MARIA WIRTH, Zürich

I. Einleitung

1. Es handelt sich im folgenden um die Bestimmung des Typus von in gewisser Weise dargestellten zweifach zusammenhängenden RIEMANNschen Flächen. In der komplexen Ebene sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet gegeben, dessen Rand aus drei stückweise analytischen Jordanbögen mit den Endpunkten O, P, Q bestehe. Zwischen zweien dieser (offenen) Bögen, etwa PO und PQ , bestehe eine eindeutige analytische Beziehung, welche die Orientierung \overrightarrow{PO} bzw. \overrightarrow{PQ} erhält. Werden alle mittels dieser Beziehung einander zugeordneten Punkte sowie O und Q identifiziert, so ist damit ein zweifach zusammenhängendes RIEMANNsches Flächenstück gegeben. Sein Rand besteht aus der geschlossenen Kurve OQ und der P zugeordneten idealen Randkomponente. Nach dem RIEMANNschen Abbildungssatz ist jede solche Fläche konform äquivalent mit einem Kreisring $1 \leq |\omega| \leq R$ der komplexen Ebene. Der äußere Radius R kann endlich oder unendlich sein. Ist R endlich – geht also die zum Punkt P gehörige Randkomponente der Fläche in einen endlichen Kreis über – so heißt die Fläche vom *hyperbolischen Typus*. Unendliches R ist gleichbedeutend mit *parabolischem* Flächentypus. Wegen des Zusammenhangs dieses Problems mit der allgemeineren Frage der Polygondarstellung einer RIEMANNschen Fläche vergleiche man zum Beispiel den Abschnitt über geschlossene RIEMANNsche Flächen von [5].

Jede Aussage über den Typus einer in der oben beschriebenen Weise definierten RIEMANNschen Fläche bezieht sich einerseits auf die geometrische Form des zugrunde gelegten Gebietes und andererseits auf die Eigenschaften der analytischen Beziehung zwischen zweien der Randkurven. P. J. MYRBERG [2] hat für gewisse RIEMANNsche Flächen, die durch das Fundamentalpolygon einer fuchsoiden Gruppe definiert sind, eine für den parabolischen Typus hinreichende Bedingung gegeben. Ein für den parabolischen Typus hinreichendes Kriterium gibt auch R. NEVANLINNA [3]. Dieses Kriterium ist auf ein beliebiges von drei JORDANKurven berandetes Gebiet anwendbar. Ebenso auf ein beliebiges Gebiet anwendbar sind die beiden Kriterien von L. I. VOLKOVYSKIJ [6]¹⁾: eines hinreichend für Parabolität, das andere hinreichend für Hyperbolität.

¹⁾ Herr Professor A. PFLUGER hat mich auf diese Arbeit aufmerksam gemacht und mir freundlicherweise eine deutsche Übersetzung zur Verfügung gestellt.

Die an sich verschiedenen Methoden der beiden letztgenannten Verfasser haben das Gemeinsame, daß die Schärfe der zur Herleitung des Kriteriums verwendeten Ungleichungen wesentlich von der effektiven Wahl einer quasikonformen Hilfsabbildung abhängt.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir nur ein ganz spezielles Gebiet, den Parallelstreifen $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$, wobei der Randpunkt $z = \infty$ dem Punkt P entspreche. Die eineindeutige analytische Beziehung zwischen den beiden Halbgeraden $y = 0$ und $y = 1$ ($0 \leq x < \infty$) werde vermittelt durch eine positive reelle Funktion $f = f(x)$, derart, daß die Punkte $P_* = x$ auf $y = 0$ und $P^* = x + f(x) + i$ auf $y = 1$ identifiziert werden (vgl. Fig. 2). Das Parabolitätskriterium von NEVANLINNA, mittels einer besonders einfachen quasikonformen Abbildung auf dieses spezielle Gebiet angewandt, sagt aus, daß die *Divergenz* des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + f(x)^2}$$

den parabolischen Typus garantiert. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß sich dieses Resultat durch Variation der Hilfsabbildungen nicht wesentlich verbessern läßt. Die Vermutung, daß es sich bei der Divergenz des obigen Integrals um eine für die Parabolität nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung handle, liegt deshalb nahe. Mit anderen Worten: Es stellt sich die Frage, ob die *Konvergenz* dieses Integrals eine hinreichende Bedingung für die Hyperbolität darstelle. In so allgemeiner Form darf diese Frage wahrscheinlich nicht bejaht werden. Hingegen wird die vorliegende Arbeit nachweisen, daß dies unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über $f(x)$ wohl der Fall ist. Bei der Herleitung des Kriteriums benützen wir nicht eine quasikonforme Abbildung, sondern direkt die Eigenschaften einer eineindeutigen konformen Abbildung der durch $f(x)$ bestimmten Fläche auf den konform äquivalenten Kreisring.

VOLKOVYSKIJ hat sein Hyperbolitätskriterium selbst auch auf den Parallelstreifen $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$ angewandt. Für einen Vergleich seines Resultats mit dem unsrigen verweisen wir auf den Schluß.

II. Ein Hyperbolitätskriterium

2. Wir gehen aus vom Streifen S_z : $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$ in der komplexen z -Ebene. Mittels der reellen Funktion $f = f(x)$ ordnen wir die Punkte $P_* = x$ auf $y = 0$ und die Punkte $P^* = x + f(x) + i$ auf $y = 1$ ein-

ander zu. Die Funktion $f(x)$ sei so gewählt, daß die Zuordnung $P_* \leftrightarrow P^*$ eine eindeutige und stückweise analytische Abbildung von $y = 0$ auf $y = 1$ darstellt. Die durch Identifikation aller P_* und P^* gegebene zweifach zusammenhängende RIEMANNSche Fläche werde durch die Funktion

$$\omega = \omega(z)$$

eindeutig und konform auf den Kreisring $1 \leq |\omega| \leq R$ abgebildet; etwa so, daß die beiden (identifizierten) Punkte $z = 0$ und $z = i$ in $\omega = 1$ übergehen. Das Bild der identifizierten Strahlen $y = 0$ und $y = 1$ ($0 \leq x < \infty$) bei dieser Abbildung ist eine stückweise analytische Kurve, die durch $\zeta = \zeta(x)$ in Parameterform dargestellt sei. Denkt man sich die ω -Ebene längs der Kurve $\zeta(x)$ aufgeschnitten und diese im Sinne wachsender x durchlaufen, so ist der linke Schnittrand Bild von $y = 0$, der rechte Bild von $y = 1$.

$|\omega| = \rho$ ($1 \leq \rho < R \leq \infty$) sei ein fester Kreis; wir betrachten seine gemeinsamen Punkte mit der Kurve $\zeta(x)$. Entweder sind dies isolierte Punkte: wenn $|\zeta(x_0)| = \rho$ und $|\zeta(x)| \neq \rho$ in $|x - x_0| < \varepsilon$; oder es sind gemeinsame Bogenstücke: wenn $|\zeta(x)| \equiv \rho$ für ein geschlossenes Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$. Wegen der Analytizität ist sowohl die Anzahl der isolierten gemeinsamen Punkte, als auch die Anzahl der gemeinsamen Bogenstücke, für jedes ρ endlich. Von den isolierten Punkten interessieren uns im folgenden nur die Schnittpunkte, das heißt diejenigen, für welche $|\zeta(x)| < \rho$ in $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, und $|\zeta(x)| > \rho$ in $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, oder umgekehrt. Entsprechend interessieren uns von den gemeinsamen Bogen nur diejenigen, wo, wenn $\zeta(x_1)$ und $\zeta(x_2)$ die Randpunkte sind, entweder $|\zeta(x)| < \rho$ in $x_1 - \varepsilon < x < x_1$ und $|\zeta(x)| > \rho$ in $x_2 < x < x_2 + \varepsilon$, oder umgekehrt.

Wir durchlaufen die Kurve $\zeta(x)$ im Sinne wachsender x -Werte und nummerieren die Schnittpunkte mit $|\omega| = \rho$ und, bei den oben charakterisierten gemeinsamen Bogen, einen der beiden Randpunkte fortlaufend mit $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. (Welcher der Randpunkte dafür gewählt wird, ist zunächst unwichtig.) Für jeden Kreis $|\omega| = \rho$ ($1 \leq \rho < R$) sind auf diese Weise $n = n(\rho)$ Punkte $\zeta_i = \zeta_i(\rho)$ ausgezeichnet. Der Einfachheit halber nennen wir im folgenden alle diese Punkte „Schnittpunkte“. Ihre Anzahl $n(\rho)$ ist eine ganzzahlige Treppenfunktion, die für $\rho \rightarrow R$ unbeschränkt wachsen kann.

Satz. *Der Kreisring $1 \leq |\omega| \leq R$ hat einen endlichen äußeren Radius R , wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *$f(x)$ ist eine monoton wachsende Funktion von x .*

(2) *Das Integral $\int \frac{dx}{1 + f(x)^2}$ konvergiert.*

(3) Die Anzahl $n(\varrho)$ der Schnittpunkte ist gleichmäßig beschränkt in

$$1 \leq \varrho \leq R : n(\varrho) \leq N .$$

3. Die folgenden Bemerkungen sollen den Beweis des Satzes vorbereiten. Ausgehend vom Kreis $|\omega| = \varrho$ und seinen Schnittpunkten $\zeta_i = \zeta_i(\varrho)$ ($i = 1, 2, \dots, n(\varrho)$) betrachten wir die durch diese Punkte bestimmte Aufteilung der Kreisperipherie in n Bogenstücke $\{\zeta_i, \zeta_k\}$. ζ_i und ζ_k seien auf dem Kreis aufeinanderfolgende Punkte; die Gesamtheit aller Bogen $\{\zeta_i, \zeta_k\}$ bildet also wiederum den ganzen Kreis. Wir interessieren uns für ihre Urbilder in S_z . Die Urbildpunkte von $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ seien auf $y = 0$ die von links nach rechts aufeinanderfolgenden Punkte P_1, P_2, \dots, P_n . Ihre äquivalenten Punkte auf $y = 1$ bezeichnen wir mit P^1, P^2, \dots, P^n . Falls der Bogen $\{\zeta_i, \zeta_k\}$ kein mit $\zeta(x)$ gemeinsames Bogenstück enthält, so verbindet seine Urbildkurve entweder zwei Punkte desselben Strahls miteinander, oder sie verbindet zwei Punkte auf verschiedenen Strahlen, je nachdem ob $\{\zeta_i, \zeta_k\}$ zwischen zwei Punkten desselben Ufers oder zwischen den Punkten verschiedener Ufer von $\zeta(x)$ liegt. Ist hingegen $\{\zeta(x_1), \zeta(x_2)\}$ ein beliebiges gemeinsames Bogenstück von $\zeta(x)$ mit $|\omega| = \varrho$ ($|\zeta(x)| = \varrho$ in $x_1 \leq x \leq x_2$), so unterscheiden wir die Fälle

a) Das linke Ufer von $\zeta(x)$ ist innen: Hier gilt nur die Strecke $\overline{x_1 x_2}$ als Urbild von $\{\zeta(x_1), \zeta(x_2)\}$. Ist einer der Randpunkte von $\{\zeta(x_1), \zeta(x_2)\}$ als Schnittpunkt zu zählen, dann der, bei dem das rechte Ufer außen liegt.

b) Das rechte Ufer von $\zeta(x)$ ist innen: Hier gilt nur die äquivalente Strecke von $\overline{x_1 x_2}$ auf $y = 1$ als Urbild von $\{\zeta(x_1), \zeta(x_2)\}$; und ist einer der Randpunkte als Schnittpunkt zu zählen, dann der, bei dem das linke Ufer außen ist.

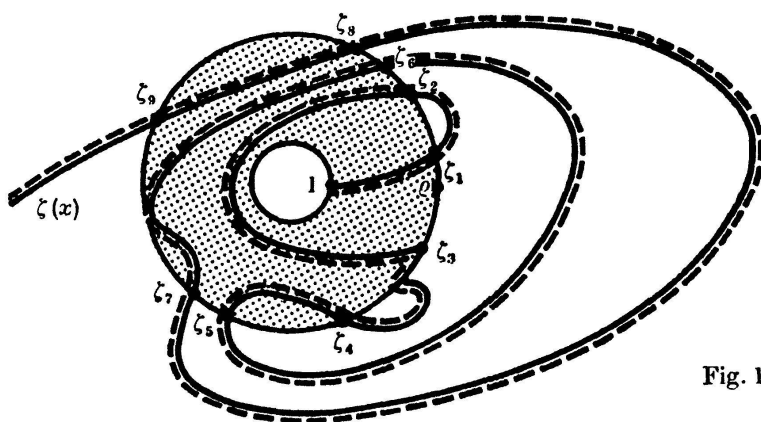


Fig. 1

Man überlegt sich, daß mit dieser Übereinkunft von jedem Punkt P_i und von jedem Punkt P^i genau eine Urbildkurve ausgeht. Die Gesamtlänge aller dieser Kurven sei $L = L(\varrho)$. Ist $A = A(\varrho)$ die Urbildfläche des Kreisrings $1 \leq r \leq \varrho$, so grenzt jede der Kurven $P_n P_i$ und $P^k P^l$ und $P_m P^n$

an A . Außerdem wird A berandet von der Strecke $x = 0$ ($0 \leq y \leq 1$) und den beiden Halbgeraden $y = 0$ und $y = 1$ ($0 \leq x < \infty$). Vgl. auch Figur 3.

4. Wir wollen eine Beziehung herleiten zwischen $L = L(\varrho)$ und $A = A(\varrho)$. Um die Rechnung zu erleichtern, führen wir als Hilfsgröße

$$w = u + iv = (\log \omega)/2\pi$$

ein, wobei die Vieldeutigkeit des Logarithmus unberücksichtigt bleiben kann, da nur das Differential $dw = du + idv$ vorkommt, und dieses eindeutig ist.

Unsere Behauptung heißt: Für jedes $\varrho (1 \leq \varrho < R)$ gilt die Ungleichung

$$L^2 \leq \frac{dA}{du}, \quad (\text{I})$$

wobei $u = (\log \varrho)/2\pi$.

Den Beweis von (I) führen wir mittels einer von AHLFORS [1], GRÖTZSCH und anderen oft angewandten Methode. L setze sich zusammen aus den n Kurven

der Länge l_i : $L = \sum_{i=1}^n l_i$; l_i und A lassen sich darstellen als

$$l_i = \int_{\beta_i} \left| \frac{dz}{dw} \right| dv, \quad A = \sum_1^n \int_{\beta_i} \int_0^u \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 du dv.$$

Hier ist $\frac{dz}{dw}$ eindeutig bestimmt durch die in Nummer 2 definierte Funktion $\omega = \omega(z)$ bzw. ihre Umkehrfunktion $z = z(\omega) = z(e^{2\pi w})$. β_i bezeichnet die logarithmische Länge des Bildbogens von l_i . Durch Anwendung der SCHWARZSchen Ungleichung auf l_i^2 :

$$l_i^2 = \left(\int_{\beta_i} \left| \frac{dz}{dw} \right| dv \right)^2 \leq \beta_i \cdot \int_{\beta_i} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dv$$

ergibt sich zunächst

$$\sum_1^n \frac{l_i^2}{\beta_i} \leq \sum_1^n \int_{\beta_i} \left| \frac{dz}{dw} \right|^2 dv = \frac{dA}{du}.$$

Berücksichtigt man nun noch, daß $\sum_1^n \beta_i = 1$ ist, so folgt aus

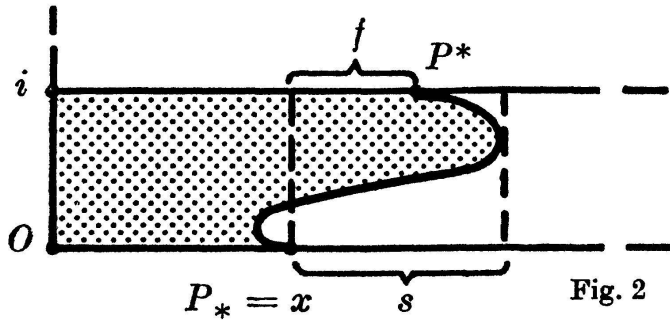
$$\begin{aligned} L^2 &= \left(\sum_1^n l_i \right)^2 \equiv \left(\sum_1^n \frac{l_i}{\sqrt{\beta_i}} \cdot \sqrt{\beta_i} \right)^2 \leq \left(\sum_1^n \frac{l_i^2}{\beta_i} \right) \cdot \left(\sum_1^n \beta_i \right) \\ &= \sum_1^n \frac{l_i^2}{\beta_i} \end{aligned}$$

die Behauptung.

III. Beweis für $N = 1$

5. Wir kommen zum Beweis des in Nr. 2 ausgesprochenen Satzes. Die Funktion $f(x)$ erfülle also die Voraussetzungen (1) und (2), während (3) vorläufig durch die Forderung $N = 1$ verschärft ist. $N = 1$ bedeutet $n(\varrho) \equiv 1$ ($1 \leq \varrho < R$). Zunächst habe ϱ einen festen aber beliebigen Wert.

Wegen $n(\varrho) = 1$ hat der Kreis $|\omega| = \varrho$ als Urbild in S_z eine von einem Punkt P_* auf $y = 0$ nach seinem äquivalenten Punkt P^* auf $y = 1$ führende



Kurve. Diese enthält außer den beiden Randpunkten P_* und P^* keine Punkte auf $y = 0$ oder $y = 1$. Zwischen ihrer Länge $L = L(\varrho)$ und der links von ihr liegenden Fläche $A = A(\varrho)$ besteht die in Nr. 4 hergeleitete Ungleichung (I). Wir setzen $P_* = x$

(wobei $x = x(\varrho)$), so daß $P^* = x + f(x) + i$. Ist dann $s = s(\varrho)$ die „Schwankung“ der Kurve P_*P^* nach rechts, das heißt die Differenz der Abszisse ihres am weitesten rechts liegenden Punktes und x , so gelten offenbar die Ungleichungen

$$A \leq x + s \tag{II}$$

$$1 + f^2 \leq 1 + s^2 \leq L^2 \tag{III}$$

(Vgl. hierzu auch [1].)

Im folgenden betrachten wir die von ϱ abhängigen Größen x , s und A als Funktionen von $u = (\log \varrho)/2\pi$: $x = x(u)$, $s = s(u)$, $A = A(u)$. Definitionsbereich aller dieser Funktionen ist das Intervall

$$0 \leq u < U = (\log R)/2\pi \ .$$

Wir teilen es in zwei Teilmengen M_1 und M_2 ein :

$$u \text{ gehöre zur Menge } M_1, \quad \text{wenn} \quad x(u) < s(u)$$

und

$$u \text{ gehöre zur Menge } M_2, \quad \text{wenn} \quad x(u) \geq s(u) \ ,$$

und behaupten : *Das lineare Maß von M_1 und das lineare Maß von M_2 ist endlich.* Mit dieser Behauptung ist unser Satz für $N = 1$ bewiesen. Denn U ist die Summe der Maßzahlen von M_1 und M_2 , und bei endlichem U ist auch das zugehörige $R = e^{2\pi U}$ endlich.

6. *Das Maß von M_1 .* Aus den Ungleichungen (III) und (I) folgt

$$s(u)^2 < L(u)^2 \leq \frac{dA(u)}{du}$$

und durch Integration

$$\int_{\tau=0}^u s(\tau)^2 d\tau < A(u) .$$

Für $u \in M_1$ folgt aus (II) $A(u) \leq x(u) + s(u) < 2 \cdot s(u)$, so daß

$$\int_0^u s(\tau)^2 d\tau < 2 \cdot s(u) .$$

Mit der neuen Bezeichnung

$$\varphi(u) = \int_0^u s(\tau)^2 d\tau$$

gilt also $\varphi(u) < 2 \sqrt{\frac{d\varphi}{du}}$ oder

$$du < 4 \cdot \frac{d\varphi}{\varphi^2} \quad (u \in M_1) . \quad (1)$$

Die Ungleichung (1) integrieren wir, und zwar über eine Teilmenge \bar{M}_1 von M_1 , die den Nullpunkt nicht enthält. Es sei deshalb \bar{M}_1 definiert durch $\bar{M}_1 = M_1 - M_1 \cap I_0$, wo I_0 ein Intervall $0 \leq u \leq u_0$ ($u_0 > 0$) ist. Unter Berücksichtigung der Monotonität von $\varphi(u)$ gilt dann

$$\int_{\bar{M}_1} du < 4 \int_{\bar{M}_1} \frac{d\varphi}{\varphi^2} \leq 4 \int_{\varphi(u_0)}^{\infty} \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{4}{\varphi(u_0)} .$$

Hieraus folgt

$$\int_{M_1} du < \frac{4}{\varphi(u_0)} + u_0 ,$$

und zwar auch ohne die beim Beweis nirgends verwendeten Voraussetzungen (1) und (2) aus Nr. 2.

7. *Das Maß von M_2 .* Aus den Ungleichungen (III) und (I) folgt $1 + f^2 \leq \frac{dA}{du}$ oder

$$du \leq \frac{dA}{1 + f^2} . \quad (2)$$

Wir werden das lineare Maß von M_2 durch Integration der Ungleichung (2) über M_2 berechnen und abschätzen, müssen jedoch an dieser Stelle zunächst eine Bemerkung über diese Menge bzw. ihre Komplementärmenge M_1 einschleichen. M_1 wurde definiert als die Menge derjenigen u , für welche $x(u) < s(u)$. Da diese beiden Funktionen stetig sind, ist M_1 eine offene Menge und als solche die Vereinigung von abzählbar vielen offenen Intervallen: $M_1 = \cup I_i$.

Die Aufteilung von M_1 in Intervalle I_i benutzen wir wie folgt zur Definition

einer Funktion $\bar{A} = \bar{A}(u)$ in $0 \leq u < U$. Es sei

$$\bar{A}(u) = A(u) \quad \text{für} \quad u \in M_2 .$$

Gehört u zur Menge M_1 , so liegt es in einem Intervall I_i . Der linke Randpunkt von I_i sei der Punkt u_i ; wir definieren

$$\bar{A}(u) = A(u_i) \quad \text{für} \quad u \in I_i \subset M_1 .$$

Mit dieser Festsetzung, behaupten wir, gilt die Ungleichung

$$\bar{A}(u) \leq 2x(u) . \quad (\text{II}')$$

Für $u \in M_2$ gilt wegen (II) $A(u) \leq x(u) + s(u) \leq 2x(u)$, woraus sofort die Behauptung folgt. Nun sei $u \in I_i \subset M_1$. Da das Intervall I_i offen ist, gehört sein linker Randpunkt u_i zu M_2 , so daß

$$A(u_i) \leq 2x(u_i) \leq 2x(u) \quad (u \in I_i) ,$$

letzteres wegen der Monotonität der Funktion $x(u)$. Daraus folgt die Behauptung.

Wir kommen zurück auf die Ungleichung (2), die über M_2 integriert

$$\int_{M_2} du \leq \int_{M_2} \frac{dA}{1+f^2} \quad (2')$$

ergibt. Da auf Grund der Definition von $\bar{A}(u)$ für $u \in M_1$ $d\bar{A}(u) \equiv 0$, ist

$$\int_{M_2} \frac{dA}{1+f^2} = \int_0^U \frac{d\bar{A}}{1+f^2} , \quad (2'')$$

und in dieser Form erhält man durch partielle Integration

$$\int_0^U \frac{d\bar{A}}{1+f^2} = \left| \frac{\bar{A}}{1+f^2} \right|_0^U + \int_0^U \bar{A} d \left\{ -\frac{1}{1+f^2} \right\} .$$

Aus $d \left\{ -\frac{1}{1+f^2} \right\} = -\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{1+f(x)^2} \right\} dx$ ist ersichtlich, daß wegen der Monotonität von $f(x)$ dieses Differential positiv ist. Wir können deshalb mittels (II') beide Summanden weiter nach oben abschätzen:

$$\int_0^U \frac{d\bar{A}}{1+f^2} \leq \left| \frac{2x}{1+f^2} \right|_0^U - \int_0^U 2x \cdot d \left\{ \frac{1}{1+f^2} \right\} .$$

Integriert man das Integral rechts noch einmal partiell :

$$\int_0^U 2x d\left\{\frac{1}{1+f^2}\right\} = \left|\frac{2x}{1+f^2}\right|_0^U - 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+f(x)^2},$$

so heben sich die beiden ausintegrierten Terme gegenseitig auf, und man erhält

$$\int_0^U \frac{d\bar{A}}{1+f^2} \leq 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+f(x)^2}.$$

Daraus folgt wegen (2') und (2'')

$$\int_{M_2} du \leq 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1+f(x)^2} :$$

das Maß von M_2 ist endlich.

IV. Beweis für beliebiges endliches N

8. Soweit dies möglich ist, wird dieser Beweis demjenigen für den Spezialfall $N = 1$ analog geführt. Es ist deshalb unser Ziel, die Ungleichungen (II) und (III) aus Nr. 5 sinngemäß zu verallgemeinern.

ρ habe also wieder einen festen, aber beliebigen Wert ($1 \leq \rho < R$). Auf dem Kreis $|\omega| = \rho$ sind die $n = n(\rho)$ Schnittpunkte $\zeta_i = \zeta_i(\rho)$ ausgezeichnet. Sie teilen die Kreisperipherie in n Bogen $\{\zeta_i, \zeta_k\}$ auf, deren Urbilder in S_z wir betrachten (vgl. Nr. 3). Zwischen der Gesamtlänge $L = L(\rho)$ dieser Kurven und der Urbildfläche $A = A(\rho)$ des Kreisinnern besteht die in Nr. 4 hergeleitete Ungleichung (I). Mindestens eine der Kurven verbindet einen Punkt P_i auf $y = 0$ mit einem Punkt P^k auf $y = 1$; wir nennen sie einen „Querschnitt“ $P_i P^k$. Nur für $n(\rho) = 1$ ist $i = k$ und zugleich dieser Querschnitt die einzige Urbildkurve; für $n(\rho) \geq 3$, also insbesondere dann, wenn mehrere Querschnitte vorhanden sind, ist für jeden derselben $i \neq k$. $P_r P^s$ sei im folgenden stets der am weitesten links liegende Querschnitt, und der zu P^s äquivalente Punkt heiße x : $P_s = x$. Als Schwankung σ des Querschnitts $P_r P^s$ nach rechts bezeichnen wir die Differenz der Abszisse seines am weitesten rechts liegenden Punktes und x . Rechts von $P_r P^s$ liegt entweder kein Querschnitt mehr oder dann eine gerade Anzahl solcher. Wir fassen sie von links nach rechts in Gruppen von je zweien, die fortlaufend numeriert seien, zusammen. Für die i -te aus den Querschnitten $P_\alpha P^\beta$ und $P_\gamma P^\delta$ ($\alpha < \gamma$) bestehende Gruppe sei die Größe $\bar{\sigma}_i$ definiert als die Differenz des Maximums der

Abszisse x auf $P_\gamma P^\delta$ und des Minimums von x auf $P_\alpha P^\beta$. Es gilt dann die Ungleichung

$$A \leq x + \sigma + \sum_{i=1}^p \bar{\sigma}_i + \sum_{i=1}^q \sigma_i ,$$

wenn mit $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q$ diejenigen Strecken bezeichnet werden, über (bzw. unter) welchen noch nicht berücksichtigte Teile der Fläche A liegen. Setzen wir noch

$$S = \sigma + \sum_{i=1}^p \bar{\sigma}_i + \sum_{i=1}^q \sigma_i ,$$

so heißt die obige Ungleichung

$$A \leq x + S . \tag{II^*}$$

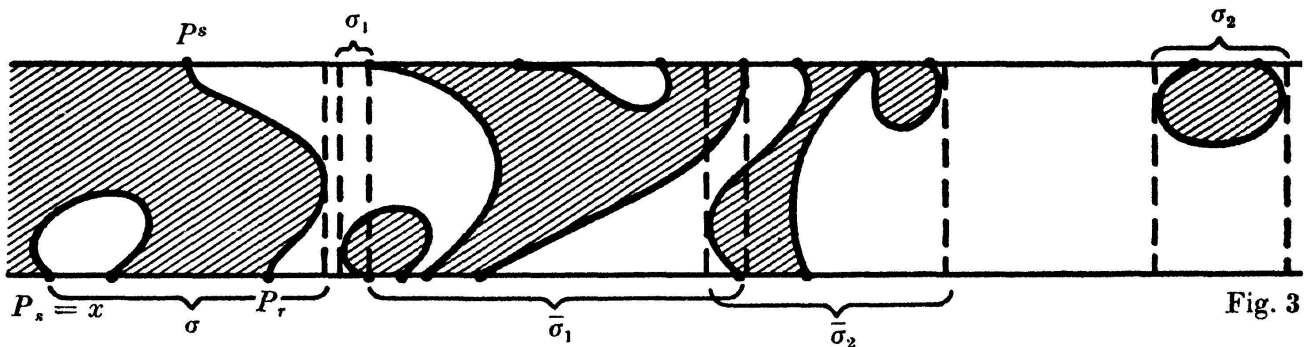


Fig. 3

9. Eine Verallgemeinerung der Ungleichung (III) aus Nr. 5 bedeutet, daß S und $f = f(x)$ mit L zu vergleichen sind. S werde zu diesem Zweck in seine ursprünglichen Summanden zerlegt. Für die Summe der σ_i geht direkt aus deren Definition die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^q \sigma_i < L \tag{1^*}$$

hervor. Eine entsprechende Abschätzung der Summe aller $\bar{\sigma}_i$ zu finden, ist das Ziel der folgenden Ausführungen. Wir betrachten die beiden zusammengehörigen Querschnitte $P_\alpha P^\beta$ und $P_\gamma P^\delta$ und definieren eine Kurve, deren Länge \bar{L}_i größer ist als $\bar{\sigma}_i$: Falls $\alpha > \beta$ beim linken Querschnitt $P_\alpha P^\beta$, so sei dies die Kurve $P^\beta P_\alpha$, $\overline{P_\alpha P_\gamma}$, $P_\gamma P^\delta$, für welche offenbar

$$\bar{\sigma}_i < \bar{L}_i = l_\alpha^\beta + \overline{P_\alpha P_\gamma} + l_\gamma^\delta .$$

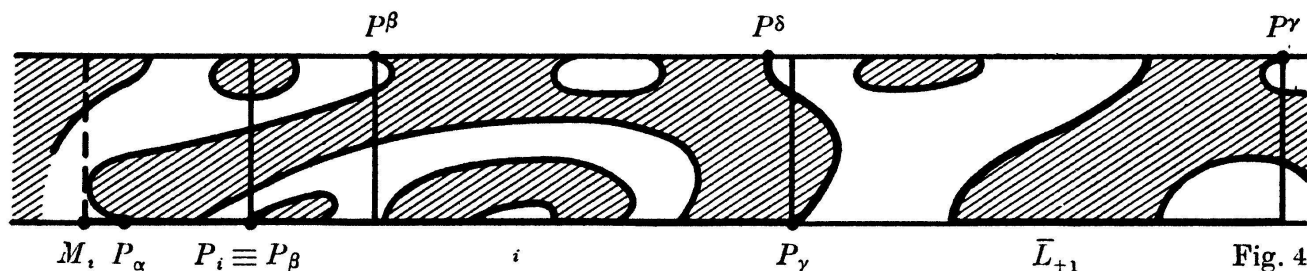
(l_ν^μ = Länge des Querschnitts $P_\nu P^\mu$.) Ist hingegen $\alpha < \beta$, so sei M_i die Abszisse des am weitesten links liegenden Punktes von $P_\alpha P^\beta$, und die Kurve definiert als $\overline{M_i P_\gamma}$, $P_\gamma P^\delta$. Für ihre Länge $\bar{L}_i = \overline{M_i P_\beta} + \overline{P_\beta P_\gamma} + l_\gamma^\delta$ gilt

$$\bar{\sigma}_i < \bar{L}_i < l_\alpha^\beta + \overline{P_\beta P_\gamma} + l_\gamma^\delta .$$

Setzt man deshalb $P_i = P_\alpha$ für $\alpha > \beta$, für $\alpha < \beta$ hingegen $P_i = P_\beta$, so gilt jedenfalls

$$\bar{\sigma}_i < \bar{L}_i \leq l_\alpha^\beta + \overline{P_i P_\gamma} + l_\gamma^\delta .$$

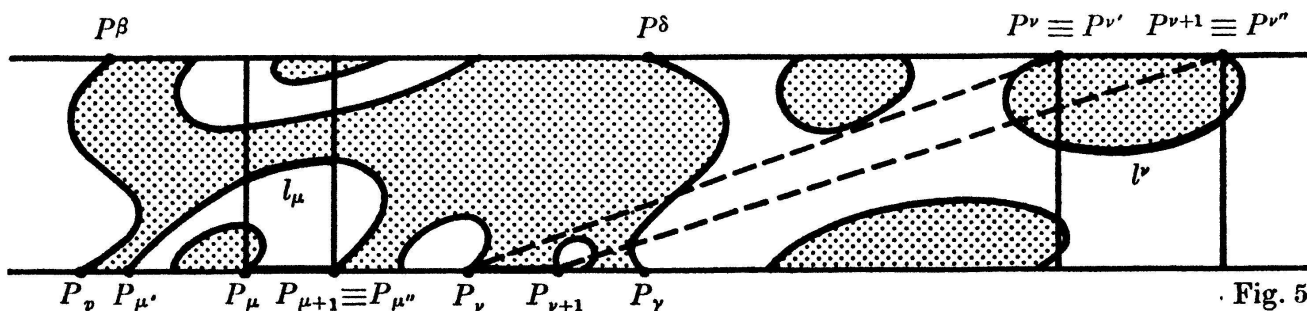
Eine weitere zu den Querschnitten der i -ten Gruppe gehörige Größe L_i definieren wir folgendermaßen: Zwischen den beiden senkrechten Geraden in P_i und P_γ verläuft im allgemeinen eine Anzahl von Kurven $P_\nu P_\mu$ oder Teile von solchen, und ebenso liegen zwischen den beiden senkrechten Geraden in P^i und P^γ eine Anzahl von Kurven $P^\nu P^\mu$, oder Teilstücke solcher. Die Gesamtlänge aller dieser Kurven bzw. Kurvenstücke, vermehrt um $l_\alpha^\beta + l_\gamma^\delta$, sei L_i . Aus dieser Definition folgt, daß $L_i \cap L_k = 0$ für $i \neq k$.



10. Wir behaupten, daß für die beiden am weitesten rechts liegenden Querschnitte, die wir wieder mit $P_\alpha P^\beta$ und $P_\gamma P^\delta$ bezeichnen, gilt

$$\bar{L}_p \leq L_p . \tag{1}$$

Zum Beweis zunächst folgende Bemerkungen: Für eine Strecke $\overline{P_\mu P_{\mu+1}}$ auf $\overline{P_p P_\gamma}$, die nicht an A grenzt, ist leicht einzusehen, daß es eine zugehörige Randkurve $P_{\mu'} P_{\mu''}$ von A mit $\mu' \leq \mu$, $\mu + 1 \leq \mu''$ geben muß. Grenzt $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ an A , und liegt $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ rechts von P^δ ($\delta < \nu$), so muß es eine Kurve $P^{\nu'} P^{\nu''}$ mit $\nu' \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \nu''$ geben, denn die Fläche A wird ausschließlich von Bildkurven begrenzt, und $P_\gamma P^\delta$ ist nach Voraussetzung der äußerste Querschnitt rechts. Liegt $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ hingegen zwischen den beiden Querschnitten ($\nu + 1 \leq \delta$), so gibt es entweder eine Kurve $P_\nu P_{\nu''}$ oder eine Kurve $P^{\nu'} P^{\nu''}$ mit $\nu' \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \nu''$. Die Gegenannahme führt sofort auf einen Widerspruch. Das bedeutet: Zu jeder beliebigen Strecke $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ auf $\overline{P_p P_\gamma}$ gibt es entweder eine Kurve $P_\nu P_{\nu''}$ oder eine Kurve $P^{\nu'} P^{\nu''}$ ($\nu' \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \nu''$).



Liegt über der Strecke $\overline{P_\mu P_{\mu+1}}$ eine Kurve $P_{\mu'} P_{\mu''}$ ($\mu' \leq \mu$, $\mu + 1 \leq \mu''$), und bezeichnet l_μ die Länge eines zwischen den senkrechten Geraden in P_μ und $P_{\mu+1}$ verlaufenden Teiles dieser Kurve, so ist offenbar

$$\overline{P_\mu P_{\mu+1}} \leq l_\mu .$$

Ist andererseits $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ eine Strecke, unter welcher eine Kurve $P^{\nu'} P^{\nu''}$ ($\nu' \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \nu''$) verläuft, und bezeichnet l^ν die Länge eines von den senkrechten Geraden in P^ν und $P^{\nu+1}$ aus ihr herausgeschnittenen Kurvenstückes, so gilt auch hier

$$\overline{P^\nu P^{\nu+1}} \leq l^\nu .$$

Zum Beweis setzen wir $P_\nu = x_\nu$ und $P_{\nu+1} = x_{\nu+1}$; die äquivalenten Punkte sind dann $P^\nu = x_\nu + f(x_\nu) + i$ und $P^{\nu+1} = x_{\nu+1} + f(x_{\nu+1}) + i$; und es gilt

$$\overline{P^\nu P^{\nu+1}} = x_{\nu+1} + f(x_{\nu+1}) - [x_\nu + f(x_\nu)] \leq l^\nu .$$

Wegen der Monotonität von $f(x)$ (vgl. Nr. 2, Voraussetzung (1)) folgt hieraus

$$\overline{P_\nu P_{\nu+1}} = x_{\nu+1} - x_\nu \leq x_{\nu+1} - x_\nu + f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu) \leq l^\nu .$$

Daraus, daß, wie oben erläutert, jede der Strecken $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ auf $\overline{P_p P_\gamma}$ durch ein l_ν oder ein l^ν majoriert wird und daß je zwei dieser zu L_p gehörenden Kurven höchstens einen Punkt gemeinsam haben, folgt unsere Behauptung, nämlich

$$\overline{L_p} \leq l_\alpha^\beta + \sum_{\nu=p}^{\gamma-1} \overline{P_\nu P_{\nu+1}} + l_\gamma^\delta \leq L_p .$$

11. Will man die Überlegungen aus Nr. 10 auf eine beliebige Strecke $\overline{P_i P_\gamma}$ ($1 \leq i < p$) übertragen, so zeigt sich (vgl. Fig. 4): Ist $\overline{P_\mu P_{\mu+1}}$ eine Strecke auf $\overline{P_i P_\gamma}$, die nicht an A grenzt, oder $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ eine an A grenzende Strecke mit $\nu + 1 \leq \delta$, so läßt sich alles wörtlich übertragen. Grenzt $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ an A und liegt $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ rechts von P^δ ($\delta < \nu$), so braucht weder über $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ noch unter $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ eine Bildkurve zu liegen, aber $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ liegt in diesem Fall zwischen den zwei Querschnitten einer Gruppe mit dem Index $k \geq i + 1$. Ein Teil der Kurve $\overline{L_k}$ liegt deshalb unter $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$. Wird der Teil von $\overline{L_k}$, der zwischen den senkrechten Geraden in P^i und P^γ verläuft, mit $\overline{L_{k(i)}}$ bezeichnet, so gilt demnach: Ist $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ eine beliebige Strecke auf $\overline{P_i P_\gamma}$, so gibt es entweder über $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$ eine Kurve $P_{\nu'} P_{\nu''}$ oder unter $\overline{P^\nu P^{\nu+1}}$ eine Kurve $P^{\nu'} P^{\nu''}$ ($\nu' \leq \nu$, $\nu + 1 \leq \nu''$) oder eine Kurve $\overline{L_{k(i)}}$ ($k \geq i + 1$). Daraus

folgt die Ungleichung

$$\bar{L}_i \leq L_i + \bar{L}_{i+1(i)} + \bar{L}_{i+2(i)} + \cdots + \bar{L}_{p(i)} ,$$

deren Beweis demjenigen von (1) in Nr. 10 genau analog verläuft.

Die obige Ungleichung, nacheinander auf $i = p - 1, i = p - 2, \dots, i = 1$ angewandt und mit

$$\bar{L}_p \leq L_p \quad (1)$$

kombiniert, ergibt schließlich die gesuchte Abschätzung der übrigen \bar{L}_i :

Aus (2')

$$\bar{L}_{p-1} \leq L_{p-1} + \bar{L}_{p(p-1)}$$

folgt wegen $\bar{L}_{p(p-1)} \leq \bar{L}_p \leq L_p$

$$\bar{L}_{p-1} \leq L_{p-1} + L_p . \quad (2)$$

Aus (3')

$$\bar{L}_{p-2} \leq L_{p-2} + \bar{L}_{p-1(p-2)} + \bar{L}_{p(p-2)}$$

folgt auf Grund von $\bar{L}_{p-1(p-2)} \leq \bar{L}_{p-1}$ und (2') zunächst

$$\bar{L}_{p-2} \leq L_{p-2} + L_{p-1} + \bar{L}_{p(p-1)} + \bar{L}_{p(p-2)}$$

und hieraus wegen $\bar{L}_{p(p-1)} + \bar{L}_{p(p-2)} \leq \bar{L}_p \leq L_p$

$$\bar{L}_{p-2} \leq L_{p-2} + L_{p-1} + L_p . \quad (3)$$

Aus (4') $\bar{L}_{p-3} \leq L_{p-3} + \bar{L}_{p-2(p-3)} + \bar{L}_{p-1(p-3)} + \bar{L}_{p(p-3)}$ folgt auf Grund von $\bar{L}_{p-2(p-3)} \leq \bar{L}_{p-2}$ und (3') zunächst

$$\bar{L}_{p-3} \leq L_{p-3} + L_{p-2} + \bar{L}_{p-1(p-2)} + \bar{L}_{p-1(p-3)} + \bar{L}_{p(p-2)} + \bar{L}_{p(p-3)} .$$

Weiter ist $\bar{L}_{p-1(p-2)} + \bar{L}_{p-1(p-3)} \leq \bar{L}_{p-1}$, so daß wegen (2')

$$\bar{L}_{p-3} \leq L_{p-3} + L_{p-2} + L_{p-1} + \bar{L}_{p(p-1)} + \bar{L}_{p(p-2)} + \bar{L}_{p(p-3)} .$$

Aus $\bar{L}_{p(p-1)} + \bar{L}_{p(p-2)} + \bar{L}_{p(p-3)} \leq \bar{L}_p \leq L_p$ folgt schließlich

$$\bar{L}_{p-3} \leq L_{p-3} + L_{p-2} + L_{p-1} + L_p . \quad (4)$$

Durch dieses rekursive Verfahren erhält man p Ungleichungen, deren letzte

$$\bar{L}_1 \leq L_1 + L_2 + \cdots + L_{p-1} + L_p \quad (p)$$

lautet. Wir schließen aus ihnen, daß für jedes $i = 1, 2, \dots, p$

$$\bar{L}_i \leq L , \quad \text{das heißt} \quad \sum_{i=1}^p \bar{L}_i \leq pL .$$

Aus Nr. 9 ist ersichtlich, daß daraus

$$\sum_{i=1}^p \bar{\sigma}_i < pL \quad (2^*)$$

folgt.

12. Es fehlt nun nur noch der Vergleich von σ mit L . Wir behaupten, daß

$$1 + f^2 \leq 1 + \sigma^2 \leq L^2 \quad (f = f(x)) , \quad (III_2^*)$$

gilt, woraus

$$\sigma < L \quad (3^*)$$

folgt. Ist beim ersten Querschnitt $P_r P^s$ $r \leq s$, so ist (III_2^*) evident. Für den Fall $r > s$ definieren wir als Länge der Kurve $\overline{P_s P_r}, P_r P^s$

$$\bar{L}_0 = \overline{P_s P_r} + l_r^s .$$

Es ist dann

$$1 + \sigma^2 \leq \bar{L}_0^2 ,$$

und durch Weiterführen des rekursiven Verfahrens in Nr. 11 um einen Schritt erhält man

$$\bar{L}_0 \leq L_0 + L_1 + \dots + L_p \leq L ,$$

wobei L_0 definiert ist als Gesamtlänge der Kurven $P_\nu P_\mu$ oder Teile solcher, die zwischen den senkrechten Geraden in P_s und P_r liegen, zusammen mit den Kurven(stücken) $P^\nu P^\mu$ zwischen den Geraden in P^s und P^r , vermehrt um l_r^s . (III_2^*) folgt so auch für $r > s$.

Durch Addition der Ungleichungen (1^*) , (2^*) , (3^*) erhält man

$$S = \sigma + \sum_{i=1}^p \bar{\sigma}_i + \sum_{i=1}^q \sigma_i < (p + 2)L .$$

Da $p \leq \frac{n-3}{2}$ ist, und dies $p + 2 \leq n$ für $n \geq 1$ bedeutet, können wir daraus

$$S^2 < n^2 L^2 \quad (III_1^*)$$

schließen.

13. Auf Grund von (II^*) , (III_1^*) und (III_2^*) lassen sich die Abschnitte Nr. 6 und Nr. 7 auf den allgemeinen Fall übertragen.

x , S und A seien wiederum als Funktionen von u mit $x(u)$, $S(u)$, $A(u)$ bezeichnet. Definitionsbereich dieser Funktionen ist das Intervall $0 \leq u < U = (\log R)/2\pi$, in dem $x(u)$ und $S(u)$ aber nun nicht mehr stetig zu sein brauchen. In jedem Intervall $u_1 \leq u \leq u_2 (< U)$ gibt es jedoch nur endlich viele Unstetigkeitspunkte beider Funktionen, in $0 \leq u < U$ also höchstens abzählbar viele. Definieren wir M als die Menge, die entsteht, wenn aus

$0 \leq u < U$ eben diese Unstetigkeitspunkte entfernt werden, so sind $x(u)$ und $S(u)$ in M stetig. M werde wie folgt in zwei Teilmengen M_1 und M_2 eingeteilt :

u gehöre zur Menge M_1 , wenn $x(u) < S(u)$
 und u gehöre zur Menge M_2 , wenn $x(u) \geq S(u)$.

Wir behaupten : *Das lineare Maß von M_1 und das lineare Maß von M_2 ist endlich.* Hieraus folgt, daß die Summe der beiden Maße, das lineare Maß von M , endlich ist. Da M das Maß $U = (\log R)/2\pi$ hat, haben wir mit der obigen Behauptung den Satz in Nr. 2 bewiesen.

Das Maß von M_1 . Aus (III₁^{*}) und (I) folgt

$$S(u)^2 < n(u)^2 L(u)^2 \leq n(u)^2 \cdot \frac{dA}{du} .$$

Auf Grund der Voraussetzung (3) in Nr. 2 schließen wir daraus auf

$$S(u)^2 < N^2 \frac{dA}{du} ,$$

um durch Integration

$$\int_{\tau=0}^u S(\tau)^2 d\tau < N^2 \cdot A(u)$$

zu erhalten. Auf genau dieselbe Weise wie in Nr. 6 aus der entsprechenden Ungleichung für $N = 1$ folgt hieraus

$$\int_{M_1} du < \frac{4N^4}{\varphi(u_0)} + u_0 \quad (u_0 > 0) .$$

Das Maß von M_2 . Aus (III₂^{*}) und (I) folgt $1 + f^2 \leq \frac{dA}{du}$ oder

$$du \leq \frac{dA}{1 + f^2} .$$

Der Fortgang des Beweises kann aus Nr. 7 übertragen werden. Die Funktion $\bar{A} = \bar{A}(u)$ wird zwar auf diese Weise zunächst nur für $u \in M$ definiert, während bei der partiellen Integration auch hier über das ganze Intervall $0 \leq u < U$ integriert werden muß. Da M das Maß U hat, kann jedoch die Definition irgendwie erweitert werden. Man erhält so auch hier :

$$\int_{M_2} du \leq 2 \int_0^\infty \frac{dx}{1 + f(x)^2} .$$

V. Vergleich mit dem Ergebnis von L. I. VOLKOVYSKIJ

14. Bei der Anwendung seiner beiden Kriterien auf den Fall des Parallelstreifens $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq 1$ kommt VOLKOVYSKIJ für das Hyperbolititätskriterium zu folgendem Ergebnis: Die durch Identifikation der Punkte $P_* = x$ und $P^* = x + f(x) + i$ definierte RIEMANNsche Fläche ist vom hyperbolischen Typus, wenn die Bedingungen

(a) $f'(x)$ ist eine monoton fallende Funktion mit dem Grenzwert 0 für $x \rightarrow \infty$,

(b) die Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_\nu)}$ konvergiert

erfüllt sind. Dabei ist x_0, x_1, x_2, \dots eine Folge, die ausgehend von einem beliebigen Wert $x_0 > 0$ berechnet wird mittels der Rekursionsformel

$$x_{\nu+1} - x_\nu = f(x_\nu) .$$

Zur Frage, wie weit sich dieser Satz mit dem unsrigen deckt, bemerken wir zunächst folgendes: Die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_\nu)} \quad \text{und das Integral} \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2}$$

konvergieren gleichzeitig, vorausgesetzt, daß $0 \leq f'(x) \leq m (< \infty)$.

Beweis. 1. Aus

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_\nu)} < \infty \quad \text{folgt} \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2} < \infty ,$$

denn es ist

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{f(x)^2} \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{f(x_\nu)^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_\nu)} .$$

2. Aus

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2} < \infty \quad \text{folgt} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_\nu)} < \infty ,$$

denn es ist

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \frac{dx}{f(x)^2} \geq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{f(x_{\nu+1})^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_{\nu+1})} \cdot \frac{f(x_\nu)}{f(x_{\nu+1})} ,$$

und wegen

$$\begin{aligned} \frac{f(x_{\nu+1})}{f(x_\nu)} &= 1 + \frac{f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)}{f(x_\nu)} = 1 + \frac{f'(\xi)(x_{\nu+1} - x_\nu)}{f(x_\nu)} \\ &= 1 + f'(\xi) \leq 1 + m \quad (x_\nu \leq \xi \leq x_{\nu+1}) \end{aligned}$$

gilt

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2} \geq \frac{1}{1+m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_{\nu+1})}.$$

Damit ist gezeigt, daß unter der Voraussetzung $0 \leq f'(x) \leq m$ (b) gleichbedeutend ist mit unserer Voraussetzung (2) in Nr. 2. Um die beiden Sätze gegeneinander abwägen zu können, müßte jedoch zudem ein Vergleich der übrigen Voraussetzungen, nämlich der Bedingung (a) einerseits und (1) und (3) andererseits, möglich sein. F_1 sei die Klasse der Funktionen $f(x)$, die der Bedingung (a) genügen, und F_2 die Klasse der den Bedingungen (1) und (3) genügenden Funktionen. Das einzige, was wir über F_1 und F_2 sagen können, ist dies: F_2 kann nicht in F_1 enthalten sein, denn die Funktion

$$f(x) = cx \quad (c > 1 \text{ und konstant})$$

gehört offensichtlich nicht zu F_1 , wohl aber gehört sie zu F_2 . Das letztere entnehmen wir den Ausführungen von NEVANLINNA in [3], wo die eindeutige konforme Abbildung der durch $f(x) = cx$ bestimmten Fläche auf den Kreisring $1 \leq |\omega| \leq R$ explizit angegeben ist als

$$\omega(z) = R \left(z + \frac{i}{c-1} \right)^{(2i \log R)/2\pi}, \quad \text{wobei} \quad R = e^{\pi^2/\log c}.$$

Man überzeugt sich durch die entsprechende Rechnung leicht davon, daß bei dieser Abbildung die Strahlen $y = 0$ und $y = 1$ ($0 \leq x < \infty$) in eine Spirale übergehen, die jeden Kreis $|\omega| = \rho$ nur einmal schneidet, so daß

$$n(\rho) \equiv 1 = N.$$

Daraus läßt sich jedoch nur der Schluß ziehen, daß unser Satz nicht eine Folge des Kriteriums von VOLKOVYSKIJ sein kann.

Zum Schluß benützen wir noch das Parabolitätskriterium von NEVANLINNA, um den folgenden Satz zu formulieren:

Unter den Voraussetzungen

(1) *$f(x)$ ist eine monoton wachsende Funktion von x*

(3) *Die Anzahl $n(\rho)$ der Schnittpunkte ist gleichmäßig beschränkt in $1 \leq \rho \leq R$*

ist die durch $f(x)$ definierte Fläche vom hyperbolischen oder vom parabolischen Typus, je nachdem, ob das Integral

$$\int \frac{dx}{1+f(x)^2}$$

konvergiert oder divergiert.

Da die gleichzeitige Konvergenz der Summe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{f(x_{\nu})}$ und des Integrals $\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{f(x)^2}$ insbesondere unter der Voraussetzung (a) besteht, können auf Grund des Kriteriums von VOLKOVYSKIJ im obigen Satz die Voraussetzungen (1) und (3) auch durch

(a) $f'(x)$ ist eine monoton gegen 0 fallende Funktion

ersetzt werden.

LITERATUR

- [1] L. AHLFORS, *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildungen und der ganzen Funktionen*. Acta Soc. Sci. Fenn. Nova Ser. A 1 (1930).
- [2] P. J. MYRBERG, *Über die Bestimmung des Typus einer RIEMANNschen Fläche*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I XLV 3 (1935).
- [3] R. NEVANLINNA, *Über die Polygondarstellung einer RIEMANNschen Fläche*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 122 (1952).
- [4] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*. 2. Aufl. Springer 1953.
- [5] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*. Springer 1953.
- [6] L. I. VOLKOVYSKIJ, *Zum Problem des Typus einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche*. Mat. Sb. 18 (60) Nr. 2 (1946).

(Eingegangen den 8. November 1955)