

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1956-1957)

**Artikel:** Sur les groupes de Lie compacts non connexes.  
**Autor:** Siebenthal, Jean de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515697>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les groupes de LIE compacts non connexes

par JEAN DE SIEBENTHAL, Lausanne

## Introduction

La théorie classique<sup>1)</sup> des groupes de LIE compacts (ou clos) s'attachant essentiellement aux groupes *connexes*, je vais essayer de présenter ici une étude systématique des groupes de LIE clos *non connexes*

$$G = G_0 + G_1 + G_2 + \dots \quad \text{où} \quad G_0, G_1, G_2, \dots$$

sont les composantes connexes de  $G$ , la première  $G_0$  étant la composante neutre<sup>2)</sup>.

*Construction de tous ces groupes.* On sait que  $G_0$  est un sous-groupe invariant de  $G$  et que le quotient  $G/G_0$  est un groupe fini  $H$ ; ainsi  $G$  est une extension du groupe clos connexe  $G_0$  par un groupe fini  $H$ .

Un élément  $x$  de  $G$  détermine un automorphisme intérieur de  $G$  qui, restreint à  $G_0$ , est un automorphisme  $\varphi x$  de  $G_0$ ;  $x \rightarrow \varphi x$  est un homomorphisme appliquant  $G$  dans le groupe  $A(G_0)$  des automorphismes de  $G_0$ , et induisant un homomorphisme  $\chi$  de  $H$  dans le groupe  $A(G_0)/I(G_0)$  où  $I(G_0)$  est formé des automorphismes intérieurs de  $G_0$ .

Or une circonstance remarquable se présente ici:  $A(G_0)$  est le produit  $I(G_0) \cdot U$  de  $I(G_0)$  et d'un sous-groupe fini  $U$ , avec  $I(G_0) \cap U = e$ . Cela permet de considérer le caractère  $\chi$  de l'extension comme un homomorphisme de  $H$  dans  $U$ , de construire le produit semi-direct  $(G_0 \times H)_\chi$ , et d'en déduire toutes les extensions de  $G_0$  par  $H$  de caractère  $\chi$ <sup>3)</sup>. Les extensions les plus intéressantes sont celles pour lesquelles  $\chi$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $U$  (extensions naturelles); le produit semi-direct devient l'*extension principale*, ainsi nommée parce que  $U$  est le centralisateur dans  $A(G_0)$  d'un sous-groupe principal de  $I(G_0)$ <sup>4)</sup>.

Le chapitre I développe cette théorie; j'y donne la structure de  $U$  pour  $G_0$  semi-simple, et toutes les extensions naturelles pour  $G_0$  simple.

*Sous-groupe abélien*  $T^{(h)}(G_1)$  associé à une composante connexe  $G$ .  $x$  étant un élément de  $G_1$ , je construis le normalisateur connexe<sup>5)</sup>  $N_x$  de  $x$ , un toroïde  $T_0^h$  maximum dans  $N_x$ , puis le sous-groupe  $T^{(h)}(G_1)$  engendré par  $x$

---

<sup>1)</sup> [2], chap. III; aussi [3], [4], [7] et [10].

<sup>2)</sup> composante connexe de l'élément neutre  $e$ .

<sup>3)</sup> d'après [6], n° 1.

<sup>4)</sup> [9], chap. IV; si  $G_0$  est abélien,  $I(G_0) = e$ ,  $A(G_0) = U$ .

<sup>5)</sup> Le normalisateur connexe de  $x$  est la composante neutre du normalisateur de  $x$ .



et par  $T_0^h$  en posant  $T_1^{(h)} = xT_0^h$ . Par définition,  $T^{(h)}(G_1)$  est le sous-groupe abélien associé à la composante connexe  $G_1$ , et on a la propriété fondamentale suivante :

*$T^{(h)}(G_1)$  contient un représentant au moins de toute classe d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$ ; de plus, les  $T^{(h)}(G_1)$  sont conjugués relativement à  $G_0$ .* Le chapitre II est consacré à cette théorie; certaines propositions n'y sont pas nouvelles <sup>6)</sup>.

*Diagramme associé à une composante connexe.* La représentation linéaire adjointe de  $G$ , restreinte à  $T^{(h)}(G_1)$ , est un groupe abélien orthogonal dont la réduction canonique fait apparaître  $m$  caractères  $\chi_1, \dots, \chi_m$  de  $T^{(h)}(G_1)$ ; les noyaux de ces caractères sont les sous-groupes singuliers  $U_1, \dots, U_m$  de  $T^{(h)}(G_1)$  dans  $G$ . Il existe un groupe fini  $\Phi(G_1)$  de transformations de  $T^{(h)}$  en lui-même conservant  $T_1^{(h)}$  et l'ensemble des  $U_j$ , chacune de ces opérations étant la restriction à  $T^{(h)}$  d'un automorphisme intérieur de  $G$  associé à un élément de  $G_0$ .

Cela permet de construire le diagramme  $D(G_1)$ : si  $R_1^h$  désigne le recouvrement euclidien de l'espace de RIEMANN  $T_1^{(h)}$ , alors, aux  $U_j \cap T_1^{(h)}$  correspondent dans  $R_1^h$  des  $(h-1)$ -plans singuliers répartis en  $m$  familles. Les symétries par rapport à ces plans engendrent un groupe spatial discontinu  $\Gamma(G_1)$  correspondant à  $\Phi(G_1)$ ; de plus, ces mêmes plans singuliers partagent l'espace  $R_1^h$  en domaines sur lesquels  $\Gamma(G_1)$  opère transitivement; l'un d'eux,  $P(G_1)$ , est un polyèdre fondamental, en ce sens qu'il contient un représentant au moins de toute classe d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$ . Il y a un tel représentant et un seul si  $G_0$  est semi-simple simplement connexe.

Le chapitre III développe cette théorie, le cas où  $G_0$  est simple étant traité complètement. On pourra remarquer le théorème du § 3, n° 4, qui donne  $D(G_1)$  d'une façon très simple à partir de  $P(G_0)$  et de la permutation associée à  $G_1$ . La notion de sous-groupe principal  $\gamma^4)$  n'apparaît pas dans la construction de  $D(G_1)$ , et n'intervient que pour faire certains rapprochements.

La connaissance des polyèdres  $P(G_i)$  permet de dominer maintenant l'ensemble des classes d'éléments conjugués dans un groupe de LIE compact et la structure des normalisateurs d'éléments de  $G$ . En application, j'ai montré comment on obtient les automorphismes involutifs des groupes simples compacts, par simple lecture des  $P(G_i)$  <sup>7)</sup>.

<sup>6)</sup> En ce qui concerne les points fixes d'automorphismes, voir des résultats plus généraux dans: A. BOREL-G. D. MOSTOW, Ann. Math. 61, p. 389-405 (1955).

<sup>7)</sup> Dans [5], F. GANTMACHER a traité complètement le cas des groupes d'automorphismes des algèbres de LIE semi-simples complexes, groupes en général non connexes. Ma méthode est indépendante de la sienne; l'objet de mon chapitre III n'est pas étudié dans [5].

Je désire exprimer ma reconnaissance à Mr. ARMAND BOREL, dont certaines remarques ont permis d'améliorer plusieurs points de ce travail.

## CHAPITRE I

### Construction des groupes de LIE clos non connexes

#### § 1. Extensions algébriques

1. *Définitions.* Le groupe  $E$  est une *extension* du groupe  $Q$  si  $Q$  est un sous-groupe invariant de  $E$ .

Le groupe  $E$  est une *extension* du groupe  $Q$  par le groupe  $H$  s'il existe un homomorphisme  $\pi$  de  $E$  sur  $H$ , de noyau  $Q$ . L'extension est désignée par  $(E, \pi)$ . Deux extensions  $(E, \pi)$ ,  $(E', \pi')$  de  $Q$  par  $H$  sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme  $\alpha$  de  $E'$  sur  $E$  avec  $\alpha(q) = q$  pour tout  $q \in Q$ .

L'extension  $E$  de  $Q$  est dite *centrale* si le centralisateur de  $Q$  dans  $E$  rencontre chaque classe de  $E$  suivant  $Q$ . L'extension est dite *complète* si tout automorphisme de  $Q$  provient de la restriction à  $Q$  d'un automorphisme intérieur de  $E$ . L'extension est dite *naturelle* si elle est complète et si le centralisateur de  $Q$  dans  $E$  est dans  $Q$ . Enfin, l'extension est dite *semi-directe* s'il existe dans  $E$  un sous-groupe  $V$  tel que  $V \cap Q = e$ , et rencontrant chaque classe de  $E$  suivant  $Q$ .

J'introduis encore les notations suivantes (classiques) :  $A(Q)$  est le groupe des automorphismes de  $Q$ ,  $I(Q)$  est le groupe des automorphismes intérieurs de  $Q$ ;  $O(Q)$  est le groupe  $A(Q)/I(Q)$  des automorphismes extérieurs de  $Q$ .

2. *Caractère d'une extension.* Soit  $a \in E$ ; l'automorphisme  $x \rightarrow axa^{-1}$  de  $E$  est un automorphisme intérieur de  $E$  dont la restriction à  $Q$  est un automorphisme  $r(a)$  de  $Q$ . L'application  $a \rightarrow r(a)$  est une représentation  $r$  de  $E$  sur un sous-groupe  $A'$  de  $A(Q)$  qui contient  $I(Q)$ ; elle applique chaque classe de  $E$  suivant  $Q$  sur une classe de  $A$  suivant  $I$ ; elle détermine ainsi une représentation  $\chi$  de  $H$  sur un sous-groupe  $O'$  de  $O(Q)$ . Cette représentation  $\chi$  est justement le *caractère* de l'extension  $E$  de  $Q$  par  $H$ .

Le caractère  $\chi$  est trivial si l'extension est centrale; si l'extension est complète,  $\chi$  applique  $H$  sur  $O(Q)$  (épimorphisme); enfin  $\chi$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $O(Q)$  si l'extension est naturelle.

3. *Produit semi-direct.* Soient  $Q$  un groupe abstrait,  $A(Q)$  son groupe d'automorphismes, et  $V$  un groupe admettant une représentation  $\chi$  dans  $A(Q)$ .

Par définition, le produit semi-direct  $S = (Q \times V)_\chi$  est le groupe obtenu en munissant l'ensemble produit  $Q \times V$  de la loi de composition  $(q, v)(q', v') = (qq'^v, vv')$ , où  $q'^v = \chi(v) \cdot q'$ . On vérifie que cette loi est associative, admet un élément neutre  $(e, e)$ , chaque élément  $(q, v)$  ayant un inverse  $[(q^{-1})^{v^{-1}}, v^{-1}]$ . De plus,  $q \rightarrow (q, e)$  plonge  $Q$  isomorphiquement dans  $S$  sur un sous-groupe invariant de  $S$ , et  $v \rightarrow (e, v)$  prouve que  $S$  est une extension semi-directe de  $Q$  par  $V$ . Maintenant,  $(e, v)$  détermine un automorphisme intérieur de  $S$  qui applique  $(q, e)$  sur  $(q^v, e)$ , ce qui montre que  $\chi$  peut être considéré comme le caractère de l'extension  $S$ .

4. *Extensions de même caractère*<sup>8)</sup>. Soit  $(P, \pi)$  une extension de  $Q$  par  $H$  de caractère  $\chi$ ; à chaque classe de  $P$  suivant  $Q$  correspond un automorphisme du centre  $C$  de  $Q$ , d'où un homomorphisme  $\chi_0$  de  $H$  dans le groupe  $A(C)$  des automorphismes de  $C$ .

**Définition.** Soient  $(P, \pi)$  une extension de  $Q$  par  $H$ , et  $(F, \varphi)$  une extension du centre  $C$  de  $Q$  par  $H$ ;  $(F, \varphi)$  est dite compatible avec  $(P, \pi)$  si les homomorphismes de  $H$  dans  $A(C)$  associés coïncident.

Je dis qu'il existe au moins une extension de  $C$  par  $H$  compatible avec  $(P, \pi)$ . En effet, si  $h \in H$  avec  $\pi(p) = h$ , l'application  $c \rightarrow pc p^{-1}$  est un automorphisme de  $C$ , indépendant du choix de  $p$  dans la classe  $h$ ; en désignant cet automorphisme par  $\chi_0(h)$ , on voit que  $\chi_0$  est une représentation de  $H$  dans  $A(C)$ , et l'on peut construire le produit semi-direct  $(C \times H)_{\chi_0} = F_0$ , qui est compatible avec  $P$ .

Considérons l'ensemble  $\mathfrak{E} = \text{Ext.}(Q, H, \chi)$  des extensions de  $Q$  par  $H$  de caractère  $\chi$ , puis l'ensemble  $\mathfrak{E}_0 = \text{Ext.}(C, H, \chi_0)$  des extensions de  $C$  par  $H$  compatibles avec  $P \in \mathfrak{E}$ . L'élément  $(F, \varphi) \in \mathfrak{E}_0$  engendre une transformation de  $\mathfrak{E}$  appliquant  $(P, \pi)$  sur  $(P_1, \pi_1)$  défini comme suit: on forme le produit direct  $F \times P$ , puis le sous-groupe  $D$  constitué par les  $(f, p)$  tels que  $\varphi f = \pi p$ ; si  $C_0$  est le sous-groupe invariant de  $D$  formé des  $(c, c^{-1})$  où  $c \in C$ , alors  $D/C_0$  est un élément de  $\mathfrak{E}$  désigné par  $(P_1, \pi_1)$ . On pose

$$(P_1, \pi_1) = (F, \varphi) \otimes (P, \pi) .$$

Alors  $(F_1, \varphi_1) \otimes (F_2, \varphi_2)$  est défini, et  $\mathfrak{E}_0$  est revêtu d'une structure de groupe abélien opérant effectivement et transitivement sur  $\mathfrak{E}$ .  $F_0$  est l'élément neutre de  $\mathfrak{E}_0$ . La construction de G. HOCHSCHILD est valable dans les cas qui nous intéressent,  $Q$  et  $H$  étant compacts.

<sup>8)</sup> D'après [6], n° 1.

5. *Sur certains groupes abstraits.* Soit  $Q$  un groupe ayant la propriété suivante : Le groupe  $A(Q)$  est une extension semi-directe de  $I(Q)$ . Autrement dit,  $A(Q)$  contient un sous-groupe  $U$  qui rencontre chaque classe suivant  $I(Q)$  en un élément et en un seul. Il existe un isomorphisme canonique  $\delta$  de  $O(Q)$  sur  $U$ , qui applique  $bI \in O(Q)$  sur l'élément  $U \cap bI$  dans  $A(Q)$ .

Lorsque  $Q$  a la propriété indiquée, on peut indiquer un procédé qui, dans les cas en vue, permet en principe de construire toutes les extensions de  $Q$ .

En effet, soit  $(P, \pi)$  une extension quelconque de  $Q$  par  $H$  de caractère  $\chi$ ;  $\chi$  applique  $H$  sur  $O'(Q) \subset O(Q)$ , et  $\delta\chi$  applique  $H$  sur  $U' \subset U$ . Le produit semi-direct  $S = (Q \times H)_{\delta\chi}$  est une extension de  $Q$  par  $H$  de caractère  $\chi$ . Comme  $\mathfrak{E}_0$  opère transitivement sur  $\mathfrak{E}$ , il existe  $(F, \varphi) \in \mathfrak{E}_0$  tel que  $(P, \pi) = (F, \varphi) \otimes S$ . Ainsi, connaissant les extensions de  $C$  par  $H$  compatibles avec  $S$ , on en tire toutes les extensions  $(P, \pi) \in \text{Ext}(Q, H, \chi)$ .

Remarquons que  $S$  contient  $(C \times H)_{\chi} = F_0$ ; alors  $F \otimes S$  contient  $F \otimes F_0 = F$ .

En résumé, on obtiendra toutes les extensions de  $Q$  en prenant dans  $U$  un sous-groupe arbitraire  $U'$ , puis en construisant un groupe quelconque  $H$  admettant une représentation  $\chi$  sur  $U'$ . Le produit  $S = (Q \times H)_{\chi}$  engendre alors avec les extensions  $F$  du centre de  $Q$  par  $H$  compatibles avec  $S$  toutes les extensions de  $Q$  par  $H$  de caractère  $\chi$ . En faisant varier  $U'$  dans  $U$ ,  $H$  et  $F$ , on pourra construire toutes les extensions de  $Q$ .

Lorsque le caractère  $\chi$  est trivial, on dira que les extensions obtenues sont aussi triviales : ce sont les extensions centrales, avec parmi elles les produits directs. En un sens facile à comprendre, les extensions les plus „riches“ sont les extensions complètes, dans l'ensemble desquelles les extensions naturelles me paraissent être les plus intéressantes.

Nous nous restreindrons précisément aux extensions naturelles de  $Q$ , déduites du produit semi-direct  $S = (Q \times F)_{\chi}$ , où  $\chi$  est un isomorphisme de  $F$  sur  $U$ , et des extensions du centre  $C$  de  $Q$  par  $F$  compatibles avec  $S$ . Dans les cas en vue,  $Q$  est un groupe de LIE semi-simple clos connexe,  $F$  est un groupe fini, et  $A(Q)$  est un produit semi-direct du type désiré, comme nous allons justement le voir.

## § 2. Automorphismes de groupes clos connexes.

1. *Notations.* Je désigne par  $G_0$  un groupe de LIE clos connexe de centre  $Z_0$ , par  $\tilde{G}_0$  le recouvrement simplement connexe de  $G_0$ , par  $\tilde{Z}_0$  le centre de  $\tilde{G}_0$ , par  $\bar{G}_0$  le groupe adjoint  $\tilde{G}_0/\tilde{Z}_0$ . De plus,  $R_0^l$  sera le diagramme<sup>9)</sup> de la famille, avec des applications canoniques  $\tilde{f}, f, \bar{f}$  de  $R_0^l$  sur les toroïdes  $\tilde{T}_0^l, T_0^l, \bar{T}_0^l$  maxi-

<sup>9)</sup> [10].

mums respectivement dans les groupes  $\tilde{G}_0$ ,  $G_0$ ,  $\bar{G}_0$ . Si  $\lambda$  désigne l'homomorphisme canonique  $\tilde{G}_0 \rightarrow G_0$ , on a  $f = \lambda \tilde{f}$ . Je pose

$$\tilde{\delta}_i = \tilde{f}^{-1}(e), \quad \delta_i = f^{-1}(e), \quad \bar{\delta}_i = \bar{f}^{-1}(e)$$

respectivement réseau minimum, réseau unité, et réseau central, avec  $\tilde{\delta}_i \subset \delta_i \subset \bar{\delta}_i$ .

Le diagramme  $R_0^l$  possède une origine  $O$  et un polyèdre fondamental  $P_0$ , défini par une suite fondamentale  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  accompagnée de paramètres angulaires dominants  $\omega, \omega', \dots$

Les égalités  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_l$  définissent une diagonale  $t$  de l'angle polyèdre  $\mathfrak{P}_0\{\varphi_1 \geq 0, \dots, \varphi_l \geq 0\}$ ;  $t$  représente dans  $R_0^l$  un sous-groupe simple de rang un appelé sous-groupe principal de  $G_0$  (dit associé à  $P_0$ )<sup>10</sup>.

2. *Automorphismes de groupes de LIE clos connexes quelconques.* On sait<sup>11</sup>) que le groupe  $A(\tilde{G})$  des automorphismes d'un groupe de LIE simplement connexe  $\tilde{G}$  est isomorphe au groupe des automorphismes de l'algèbre de LIE  $R$  de  $\tilde{G}$ . Si  $G$  est localement isomorphe à  $\tilde{G}$ ,  $A(G)$  coïncide avec le sous-groupe des éléments de  $A(\tilde{G})$  qui conservent le noyau de l'homomorphisme canonique  $\tilde{G} \rightarrow G$ . On peut ainsi se ramener à  $A(\tilde{G})$  ou à  $A(R)$ .

Si le groupe  $G = G_0$  est clos et connexe, il possède un groupe d'automorphismes  $A(G_0)$  dont la composante neutre  $A_0$  est le groupe  $I(G_0)$  des automorphismes intérieurs de  $G_0$ , avec un homomorphisme canonique  $\varphi: G_0 \rightarrow G_0/Z_0 = A_0$  où  $Z_0$  est le centre de  $G_0$ . Si  $G_0$  est abélien,  $A_0 = e$ , et  $A(G_0)$  est discret. Si  $G_0$  n'est pas abélien, prenons dans  $G_0$  un sous-groupe principal  $\gamma$ . Les éléments de  $A(G_0)$  qui conservent chaque élément de  $\gamma$  forment un sous-groupe  $U$ . Soit  $\alpha \in A(G_0)$ ; il existe  $a \in G_0$  tel que  $(\varphi a)\alpha$  soit l'identité dans  $\gamma^*$ , ce qui signifie que chaque composante connexe de  $A(G_0)$  contient un élément de  $U$ . De plus, si  $\alpha \in U \cap A_0$ , il existe  $a \in G_0$  tel que  $\alpha = \varphi a$ , et  $a$  est dans le centralisateur de  $\gamma$  c'est-à-dire dans  $Z_0$ . On a  $\alpha = \varphi a = e$ , et  $U \cap A_0 = e$ .

**Théorème.** *Le groupe  $A(G_0)$  des automorphismes d'un groupe de LIE clos connexe possède un sous-groupe  $U$  ayant un élément et un seul dans chaque composante connexe; si  $G_0$  n'est pas abélien, chaque élément de  $U$  conserve chaque élément d'un sous-groupe principal fixe de  $G_0$ .*

<sup>10</sup>) [9], chap. IV.

<sup>11</sup>) voir par exemple [4], chap. IV, § XV.

\*) cf. [9], Théorème 4, p. 253–254.

*Autrement dit,  $A(G_0)$  est le produit semi-direct de sa composante neutre par un groupe discret  $U^*$ ).*

3. *Automorphismes des groupes de LIE clos semi-simples connexes.* Il suffit d'étudier le groupe  $A(\tilde{G}_0) = A_0 + A_1 + \dots$  où  $\tilde{G}_0$  est semi-simple clos simplement connexe. Prenons à nouveau un sous-groupe principal  $\gamma$  de  $\tilde{G}_0$  associé à un angle polyèdre  $\mathfrak{P}_0$  et soit  $U$  le centralisateur de  $\gamma$  dans  $A(\tilde{G}_0)$ ; il possède un élément  $u_i$  et un seul dans chaque composante connexe  $A_i$  de  $A(\tilde{G}_0)$ .

En partant de l'algèbre  $R$  de  $\tilde{G}_0$  plongée dans l'algèbre de LIE complexe  $\mathfrak{R}$  associée, mise sous la forme canonique de H. WEYL, on peut montrer<sup>12)</sup> qu'à toute isométrie  $S$  du diagramme conservant l'origine correspond un élément  $s \in A(R)$  prolongeant  $S$ ; supposons en particulier que  $S$  conserve  $\mathfrak{P}_0$ ; si  $s \in A_i$ , alors  $s$  et  $u_i$  ont le même effet sur  $\mathfrak{P}_0$ .  $U$  est un groupe d'isométries du diagramme conservant  $\mathfrak{P}_0$  et la correspondance  $u_i \rightarrow S$  est un homomorphisme de  $U$  sur le groupe fini  $U_1$  des isométries du diagramme qui conservent  $\mathfrak{P}_0$ . D'autre part, si  $u_i$  est l'identité sur  $\mathfrak{P}_0$ ,  $u_i$  conserve chaque élément de  $\tilde{T}_0^i$  et de  $\gamma$ , donc aussi chaque élément de  $\tilde{G}_0$ , d'où  $u_i = e$ .  $U$  et  $U_1$  sont isomorphes.

**Théorème.** *Soient  $\tilde{G}_0$  un groupe de LIE semi-simple clos simplement connexe,  $\mathfrak{P}_0$  un angle polyèdre fondamental de  $\tilde{G}_0$ , et  $\gamma$  un sous-groupe principal de  $\tilde{G}_0$  associé à  $\mathfrak{P}_0$ . Il existe un groupe  $U$  d'automorphismes de  $\tilde{G}_0$  conservant  $\mathfrak{P}_0$  et chaque élément de  $\gamma$ , canoniquement isomorphe au groupe des isométries du diagramme qui laissent  $\mathfrak{P}_0$  invariant.*

On a un isomorphisme d'inclusion  $\chi: U \rightarrow A(\tilde{G}_0)$ . Quel est l'effet des opérations de  $U$  sur le centre  $\tilde{Z}_0$ ? Si  $\mathfrak{Z}$  désigne l'intersection  $\bar{\delta}_1 \cap P_0$ , on peut voir que  $\tilde{f}$  est biunivoque sur  $\mathfrak{Z}$ <sup>13)</sup>, et l'effet des opérations de  $U$  sur  $\tilde{Z}_0$  est décrit par leur effet sur  $\mathfrak{Z}$ .

Si  $G_0$  est localement isomorphe à  $\tilde{G}_0$ ,  $A(G_0)$  est un sous-groupe de  $A(\tilde{G}_0)$  qui contient visiblement  $A_0$ , car tout  $\alpha \in A_0$  conserve chaque élément du centre  $\tilde{Z}_0$ . Ici,  $A(G_0)$  est le produit semi-direct de sa composante neutre par un sous-groupe du groupe  $U$  de l'angle polyèdre.

\*) cf. DYNKIN E. B. Dokl. Akad. Nauk. SSSR NS (76), 629–632 (1951) d'après Math. Rev. 12, 8 (1951), p. 585.

<sup>12)</sup> [5], chap. III.

<sup>13)</sup> voir chap. III, § 4, n° 1.



### § 3. Extensions principales des groupes semi-simples clos

Soient  $\tilde{G}_0$  un groupe de LIE clos semi-simple simplement connexe et  $U$  le groupe d'automorphismes associé à un sous-groupe principal  $\gamma$ , avec l'isomorphisme d'inclusion  $\chi: U \rightarrow A(\tilde{G}_0)$ . Formons le produit semi-direct  $\tilde{S} = (\tilde{G}_0 \times U)_\chi$ , qui contient  $\tilde{G}_0$  et un sous-groupe  $U_1 \simeq U$  formé des  $(e, u)$ , situé dans le centralisateur  $Z_\gamma$  de  $(\gamma, e)$  par construction;  $U_1$  a un élément et un seul dans chaque composante connexe de  $\tilde{S}$ . Cette extension  $\tilde{S}$  est une extension naturelle particulière de  $\tilde{G}_0$ , dite extension principale.

(Remarquons que  $Z_\gamma$  est le produit semi-direct  $(\tilde{Z}_0 \times U)_\chi$  dont on peut prouver qu'il est isomorphe au groupe  $K$  des isométries du diagramme qui conservent un ployèdre fondamental  $P_0$  de  $\tilde{G}_0$ .)

*Notion d'extension principale.* Si  $G_0 = \tilde{G}_0/V$ , où  $V$  est un sous-groupe du centre  $\tilde{Z}_0 = Z$ , soit  $U_v$  le plus grand sous-groupe de  $U$  dont toutes les opérations conservent  $V$ ; alors  $S = (G_0 \times U_v)_\chi$  est par définition l'extension principale de  $G_0$ .

Toutes les autres extensions naturelles de  $G_0$  s'obtiennent en composant  $S$  avec une extension  $F$  quelconque de  $Z_0$  par  $U_v$ , compatible avec  $S$ . On voit que l'extension  $F$  de  $Z_0$  caractérise l'extension naturelle considérée; on peut même préciser :

**Proposition.** Soient  $S = (G_0 \times U)_\chi$  l'extension principale de  $G_0$ ,  $F$  une extension du centre  $Z_0$  de  $G_0$  compatible avec  $S$ , et  $S_1$  l'extension naturelle composée  $F \otimes S$ . Alors  $S_1$  contient un sous-groupe isomorphe à  $F$ , centralisateur d'un sous-groupe  $\gamma$  principal dans la composante neutre.

$(F, \beta)$  et  $(S, \pi)$  sont des extensions de  $Z_0$  et  $G_0$  par  $U$  compatibles;  $S_1$  est obtenu à partir du produit direct  $F \times S$  dans lequel on isole le sous-groupe  $D$  formé des  $(f, s)$  tels que  $\beta f = \pi s$ .  $D$  possède une composante neutre  $(e, G_0)$  qui contient un sous-groupe principal  $(e, \gamma)$  dont tout élément est échangeable avec chaque  $(f, u) \in D$  où  $u$  décrit le centralisateur  $Z_\gamma = (Z_0 \times U)_\chi$ . Lorsqu'on prend comme unité le sous-groupe des  $(c, c^{-1})$  avec  $c \in Z_0$ , alors  $(e, \gamma)$  reste principal dans la composante neutre; de plus, le sous-groupe des  $(f, u)$  indiqués devient  $F_1$  isomorphe à  $F^{14}$ , et est contenu dans le centralisateur de  $(e, \gamma)$ ; comme  $F_1$  contient  $(e, Z_0)$  et a des éléments dans chaque composante connexe de  $S_1$ , il coïncide avec ce centralisateur, et la proposition est établie.

On peut dire que  $S_1$  contient une extension de  $Z_0$  qui caractérise  $S_1$  comme extension de  $G_0$ .

<sup>14)</sup> cf. § 1, n° 5.

# § 4. Extensions naturelles des groupes simples clos

1. *Plan.* Les extensions naturelles des groupes de LIE clos connexes simples sont faciles à construire, car les centres  $Z_0$  ont toujours une structure remarquablement simple. Nous allons passer en revue les divers groupes simples, en examinant pour chacun d'eux successivement : la suite fondamentale, le paramètre dominant, le centre  $\tilde{Z}_0$  représenté par  $\mathfrak{Z}$ , la structure de  $\tilde{Z}_0$  d'après E. CARTAN [3], l'effet de  $U$  sur  $\tilde{Z}_0$ , les sous-groupes de  $\tilde{Z}_0$  invariants par chaque opération de  $U$  ainsi que les autres s'il en existe, puis les extensions de  $Z_0$  compatibles avec l'extension principale  $S$  (extensions que l'on trouve notamment dans le livre de H. ZASSENHAUS<sup>15</sup>), d'où l'énumération de toutes les extensions naturelles désirées.

2. *Groupes  $A_l$ .* Je désigne par  $\tilde{A}_l$  le groupe simplement connexe de la famille. La suite fondamentale est décrite par la figure de SCHLÄFLI :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcirc & \text{---} & \bigcirc & \text{---} & \cdots & \text{---} & \bigcirc & \text{---} & \bigcirc \\ \varphi_1 & & \varphi_2 & & & & \varphi_{l-1} & & \varphi_l \end{array} \quad \omega = \varphi_1 + \cdots + \varphi_l .$$

$\omega$  étant le paramètre angulaire dominant.

Les sommets du polyèdre fondamental  $P_0$  sont, en coordonnées  $\varphi_i$  :  $O(0, \dots, 0)$ ,  $A'_1(1, 0, \dots, 0)$ ,  $A'_2(0, 1, 0, \dots, 0) \dots$ ,  $A'_l(0, \dots, 0, 1)$ . Ils appartiennent tous à  $\mathfrak{Z}$ , et le centre  $Z$  de  $\tilde{A}_l$  est  $Z_{l+1}$  cyclique d'ordre  $l+1$  ; un générateur  $a$  de  $Z$  est représenté par  $A'_1$ , avec  $a = \tilde{f}(A'_1)$ ,  $a^2 = \tilde{f}(A'_2), \dots$ . Le groupe  $U$  est formé de deux éléments  $e, u$  ; le second détermine sur la suite fondamentale la permutation  $\varphi_i \rightarrow \varphi_{l+1-i}$  ; on voit que  $u$  applique  $a$  sur son inverse  $a^{-1}$  et tous les sous-groupes  $V$  de  $Z$  sont stables pour  $u$ .

En écrivant  $G_0 = \tilde{A}_l/V$ , on obtient tous les groupes  $G_0$  localement isomorphes à  $\tilde{A}_l$ , qui admettent tous une extension principale

$$S = [(\tilde{A}_l/V) \times U]_\chi$$

possédant deux composantes connexes. D'autres extensions naturelles de  $G_0 = \tilde{A}_l/V$  se présentent si et seulement si l'ordre du centre  $Z_0$  de  $G_0$  est un nombre pair  $2p$ . Il y a dans un tel cas une seconde extension naturelle, composée de l'extension principale  $S$  et de l'extension  $F$  de  $Z_0$  décrite par

$$a, u, \quad a^{2p} = e, \quad u^2 = a^p, \quad uau^{-1} = a^{-1}.$$

<sup>15</sup> cf. [11]. Notamment le théorème 20 (HÖLDER), p. 95, 111, 114.



Groupes  $D_l$ . Je désigne par  $\tilde{D}_l$  le groupe simplement connexe de la famille. La suite fondamentale est décrite par la figure de SCHLÄFLI

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \circ \\ \varphi_2 \circ \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \varphi_3 \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \varphi_4 \end{array} \text{---} \cdots \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \varphi_{l-1} \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \varphi_l \end{array} \quad \omega = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + 2\varphi_4 + \cdots + 2\varphi_{l-1} + \varphi_l .$$

$\omega$  étant le paramètre dominant. Les sommets du polyèdre fondamental  $P_0$  qui appartiennent au réseau central  $\bar{\delta}_l$  forment  $\mathfrak{Z}$  et représentent le centre  $Z$  de  $\tilde{D}_l$ ; ce sont

$$O, \quad A'_1(1, 0, 0, \dots, 0), \quad A'_2(0, 1, 0, \dots, 0), \quad A'_l(0, 0, \dots, 0, 1) .$$

*l* impair. Dans ce cas,  $Z$  est cyclique d'ordre 4 engendré par  $a = \tilde{f}(A'_1)$ , avec  $\tilde{f}(A'_2) = a^3 = a^{-1}$ ,  $\tilde{f}(A'_l) = a^2$ . On a  $U = (e, u)$  avec  $ua u^{-1} = a^{-1}$ , et  $Z$  a le sous-groupe non trivial  $(e, a^2)$  stable pour  $u$ . Les groupes localement isomorphes à  $\tilde{D}_l$  sont les suivants:  $\tilde{D}_l$ ,  $\tilde{D}_l/(e, a^2)$ ,  $\tilde{D}_l/Z$ ; ils admettent une extension principale à deux composantes connexes, respectivement

$$\tilde{S} = (\tilde{D}_l \times U)_\chi, \quad S = [\{\tilde{D}_l/(e, a^2)\} \times U]_\chi, \quad \bar{S} = (\tilde{D}_l/Z \times U)_\chi .$$

Le groupe  $\tilde{D}_l$  admet encore une seconde extension naturelle, composée de  $\tilde{S}$  et de l'extension suivante de  $Z$

$$a, u, \quad a^4 = e, \quad u^2 = a^2, \quad ua u^{-1} = a^{-1} .$$

Le groupe  $\tilde{D}_l/(e, a^2)$  admet aussi une seconde extension naturelle, composée de  $S$  et de l'extension de son centre  $(e, c)$  qui est décrite par

$$c, u, \quad c^2 = e, \quad u^2 = c, \quad uc u^{-1} = c .$$

*l* pair. Le centre  $Z$  est le produit direct  $Z_2 \times Z_2 = (e, a, b, ab)$  avec  $\tilde{f}(A'_1) = a$ ,  $\tilde{f}(A'_2) = b$ ,  $\tilde{f}(A'_l) = ab$ . Les groupes  $G_0$  localement isomorphes à  $\tilde{D}_l$  sont les suivants :

$$\begin{aligned} &\tilde{D}_l, \quad \tilde{D}_l/(e, ab) \text{ de centre } (e, c), \quad \tilde{D}_l/Z, \\ &\tilde{D}_l/(e, a) \text{ isomorphe à } \tilde{D}_l/(e, b) . \end{aligned}$$

Les trois premiers admettent une extension principale à deux composantes connexes:  $(\tilde{D}_l \times U)_\chi$ ,  $S = [\tilde{D}_l/(e, ab) \times U]_\chi$ ,  $(\tilde{D}_l/Z \times U)_\chi$ , tandis que le dernier n'a pas d'extension naturelle non triviale.

Le groupe  $\tilde{D}_4/(e, ab)$  admet encore une seconde extension naturelle, composée de  $S$  et de l'extension

$$1) \quad \boxed{c, u, \quad c^2 = e, \quad u^2 = c, \quad ucu^{-1} = c}$$

du centre  $(e, c)$ .

*Groupes  $D_4$ .* La suite fondamentale est définie par la figure de SCHLÄFLI

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \varphi_2 \circ \quad \varphi_3 \circ \quad \varphi_4 \circ \end{array} \quad \omega = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + \varphi_4 .$$

$\omega$  étant le paramètre angulaire dominant. Les sommets du polyèdre fondamental  $P_0$  qui appartiennent au réseau central sont comme précédemment  $O, A'_1, A'_2, A'_4$ . Ils représentent  $Z$ , qui est du type  $Z_2 \times Z_2 = (e, a, b, c)$ , avec  $a^2 = b^2 = c^2 = e$ ,  $\tilde{f}(A'_1) = a$ ,  $\tilde{f}(A'_2) = b$ ,  $\tilde{f}(A'_4) = c$ . Ici, le groupe  $U = \mathfrak{S}_3$  est formé de six éléments qui permutent  $A'_1, A'_2, A'_4$ , ainsi que  $a, b, c$ .

Le groupe  $\tilde{D}_4$  admet l'extension principale  $\tilde{S} = (\tilde{D}_4 \times U)_\chi$ , à six composantes connexes; comme  $Z_2 \times Z_2$  n'admet pas d'extension par  $\mathfrak{S}_3$  compatible avec  $\tilde{S}$  distincte du produit semi-direct<sup>16)</sup>, il n'y a pas d'autre extension naturelle de  $\tilde{D}_4$ .

Comme toujours, le groupe adjoint  $\tilde{D}_4/Z$  n'a qu'une seule extension naturelle:  $A(\tilde{D}_4)$  principale. Le groupe  $\tilde{D}_4/(e, a)$  de centre  $(e, c)$  a une extension principale à deux composantes connexes, et une seconde extension naturelle provenant de 1).

*Groupes  $E_6$ .* La suite fondamentale est définie par

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & & & \\ & & | & & & & & & \\ & & \circ & & & & & & \\ & & \varphi_6 & & & & & & \end{array} \quad \omega = \varphi_1 + 2\varphi_2 + 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 + 2\varphi_6 .$$

$\omega$  étant le paramètre angulaire dominant. Les sommets du polyèdre fondamental  $P_0$  situés dans le réseau central sont  $O, A'_1(1, 0, 0, \dots, 0), A'_5(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$ . Ils représentent le centre  $Z$  de  $\tilde{E}_6$  cyclique d'ordre 3, avec  $Z = (e, a, a^2)$ ,  $\tilde{f}(A'_1) = a$ ,  $\tilde{f}(A'_5) = a^2$ . Le groupe  $U$  est formé de deux éléments  $e, u$ , le second appliquant  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  respectivement sur  $\varphi_5, \varphi_4, \varphi_3, \varphi_2, \varphi_1, \varphi_6$ .

<sup>16)</sup> cf. [11], p. 111.

Les deux groupes de la famille sont  $\tilde{E}_6$  et  $\tilde{E}_6/Z$ , qui ne possèdent chacun qu'une seule extension naturelle : leur extension principale, formée de deux composantes connexes.

Groupes  $B_1, C_1, E_7, E_8, F_4, G_2$ . Ici, on a toujours  $U = e$ , et aucune extension naturelle non triviale.

## CHAPITRE II

### Sous-groupe abélien associé à une composante connexe

#### § 1. Propriétés élémentaires

1. *Définitions.* Soient  $G$  un groupe de LIE clos,  $x$  un élément quelconque de  $G$ ,  $T_x$  la composante neutre du sous-groupe abélien fermé  $\bar{T}$  engendré par  $x$ , et  $N_x$  le normalisateur connexe de  $x$ . On a  $T_x \subset N_x$ ; de plus, chaque élément  $a$  de  $N_x$  étant échangeable avec  $x$  est aussi échangeable avec chaque élément de  $\bar{T}$  et en particulier avec chaque élément de  $T_x$ ; cela prouve que  $T_x$  est dans le centre de  $N_x$ . Soit  $T_0^h$  un toroïde maximum de  $N_x$ ; il contient nécessairement  $T_x$ . Cela étant, j'appelle  $T^{(h)}$  le sous-groupe fermé engendré par  $T_0^h$  et par  $x$ , et je pose  $T_1^{(h)} = xT_0^h$ .

2. *Produit direct.* Il existe un entier positif  $q'$  tel que  $x^{q'} \in T_x$ , d'où  $x^{q'} \in T_0^h$ ; je désigne par  $q$  le plus petit de tous les entiers  $q'$  positifs qui ont cette propriété. On a  $x^q = a \in T_0^h$ , et il existe  $b \in T_0^h$  tel que  $b^q = a^{-1}$ . L'élément  $\tau = xb$  est d'ordre fini  $q$  vu que  $(xb)^q = x^q b^q = aa^{-1} = e$ ; de plus, si  $p \leq q$  est un entier positif tel que  $\tau^p \in T_0^h$ , alors  $x^p b^p \in T_0^h$ , puis  $x^p \in T_0^h$ , d'où  $p = q$ . Cela prouve que le sous-groupe cyclique  $V$  engendré par  $\tau$  est d'ordre  $q$  et coupe  $T_0^h$  en  $e$  seulement. Le produit  $V \cdot T_0^h$  est un produit direct  $V \times T_0^h = T'^{(h)}$ . Comme  $T'^{(h)}$  contient  $T_0^h$  et  $x$ , on a  $T^{(h)} \subset T'^{(h)}$ ; comme  $T^{(h)}$  contient  $T_0^h$  et  $\tau$ , on a  $T'^{(h)} \subset T^{(h)}$ , d'où  $T'^{(h)} = T^{(h)}$ . Le sous-groupe  $T^{(h)}$  est le produit direct de sa composante neutre par un groupe cyclique fini.

3. *Génération par un élément.* Soit  $c$  un générateur de  $T_0^h$ ; l'élément  $\nu = c\tau$  engendre un sous-groupe abélien fermé  $T$  de  $T^{(h)}$ , contenant les suites

$$\nu^q, \nu^{2q}, \dots, \nu^{kq} \quad \text{et} \quad \nu^{q+1}, \nu^{2q+1}, \dots, \nu^{kq+1}, \dots$$

$$\text{ou} \quad c^q, c^{2q}, \dots, c^{kq} \quad \nu c^q, \nu c^{2q}, \dots, \nu c^{kq}, \dots$$

d'où  $T = T^{(h)}$ , et  $\nu$  engendre  $T^{(h)}$ .

**Théorème.** *A tout élément  $x$  d'un groupe de LIE clos on peut associer un sous-groupe abélien  $T^{(h)}$  engendré par  $x$  et par un toroïde maximum  $T_0^h$  du normalisateur connexe de  $x$ .  $T^{(h)}$  est le produit direct de sa composante neutre  $T_0^h$  par un sous-groupe cyclique fini  $V$ , et la composante connexe  $T_1^{(h)}$  de  $x$  dans  $T^{(h)}$  contient un générateur de  $T^{(h)}$ .*

Si  $x$  est dans la composante neutre  $G_0$  de  $G$ , alors il existe un toroïde maximum  $T^l$  de  $G_0$  contenant  $x$ , et  $T_0^h = T^{(h)} = T^l$ . Si  $G_1$  est une composante connexe de  $G$  distincte de  $G_0$ , alors  $T^{(h)}$  n'est pas connexe, et  $h$  est en général inférieur au rang  $l$  de  $G_0$ . Nous verrons que l'entier  $h$  ne dépend que de  $G_1$ , et non de la situation de  $x$  dans  $G_1$ ; de plus, tout  $y \in G_1$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$  relativement à  $G_0$ . Ces faits sont établis dans les paragraphes 2 et 3 du présent chapitre.

Je désigne désormais le sous-groupe  $T^{(h)}$  associé à l'élément  $x$  de  $G_1$  par la notation  $T^{(h)}(G_1)$ .

## § 2. Sous-groupe $T^{(h)}(G_1)$ discret

1. *Normalisateur discret.* Si le normalisateur de  $x$  dans le groupe clos  $G$  est discret, alors  $T_0^h$  se réduit à l'élément neutre  $e$  de  $G$ , et  $T^{(h)}(G_1)$  est un groupe cyclique fini. Le théorème qui domine la question dans ce cas est le suivant :

**Théorème.** *Soit  $G$  un groupe de LIE clos; s'il existe dans  $G$  un élément  $x$  à normalisateur discret, alors la composante neutre  $G_0$  de  $G$  est un groupe commutatif, et la composante connexe de  $x$  est formée tout entière d'éléments conjugués de  $x$ .*

On voit que  $T_1^{(h)} = x$  est à lui seul un domaine fondamental d'éléments de  $G_1$  (conjugués relativement à  $G_0$ ).

*Preuve.* a)  $x$  possède un voisinage formé d'éléments conjugués de  $x$ . Dire que le normalisateur  $N$  de  $x$  est discret revient à dire qu'il existe un voisinage  $U$  de  $e$  tel que  $N \cap U = e$ . Il existe alors un voisinage  $V'$  de  $e$  tel que  $V'^{-1}V' \subset U$ ; de plus, il existe dans  $V'$  un voisinage compact  $V$  de  $e$ , pour lequel on a encore  $V^{-1}V \subset U$ .

Soit maintenant  $V_x$  l'ensemble des  $axa^{-1}$  pour  $a$  décrivant  $V$ ; l'application  $f: a \rightarrow axa^{-1}$  est une application continue de  $V$  sur  $V_x$ . Je dis que  $f$  est bi-univoque:  $a, b \in V$  avec  $a \neq b$  entraîne  $f(a) \neq f(b)$ ; en effet, si  $axa^{-1} = byb^{-1}$ , on a  $(b^{-1}a)x = x(b^{-1}a)$ , avec  $b^{-1}a \in U$  en vertu de  $V^{-1}V \subset U$ . Le normalisateur  $N$  contient dans  $U$  un élément  $b^{-1}a$  distinct de  $e$ , contrairement à l'hypothèse faite sur  $U$ .

En résumé,  $f$  est une application continue biunivoque de  $V$  compact sur  $V_x$ , qui est séparé. Ainsi,  $f$  est un homéomorphisme de  $V$  sur  $V_x$ , avec

$f(e) = x$ ; comme  $G$  est un groupe de LIE, le théorème d'invariance du domaine est valable, et  $V_x$  est un voisinage (compact) de  $x$ . En résumé, il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  tel que à tout  $y \in V_x$  correspond un  $a \in V$  avec  $y = axa^{-1}$ ; tout  $y \in V_x$  est un conjugué de  $x$  (relativement à  $V$ ).

b) *La composante connexe de  $x$  est formée d'éléments conjugués de  $x$ .* On prend ici  $V \subset G_0$ ,  $G_1$  étant la composante connexe de  $x$ . L'application  $f : a \rightarrow axa^{-1}$  ( $a \in G_0$ ) est une application continue de l'espace compact et connexe  $G_0$  dans l'espace connexe et séparé  $G_1$ ; ainsi  $f(G_0) = \mathfrak{D}$  est un sous-ensemble compact et connexe de  $G_1$ , fermé dans  $G_1$ .

Soit  $y$  quelconque dans  $\mathfrak{D}$ ; il existe  $a \in G_0$  tel que  $axa^{-1} = y$ . D'autre part, soit  $\varphi a$  l'automorphisme intérieur  $z \rightarrow aza^{-1}$  ( $z \in G$ );  $\varphi a$  applique  $z = bxb^{-1} \in \mathfrak{D}$  ( $b \in G_0$ ) sur  $(\varphi a)z = abxb^{-1}a^{-1} = f(ab) \in \mathfrak{D}$ . Donc  $\varphi a$ , qui est un homéomorphisme de  $G_1$  sur elle-même, conserve  $\mathfrak{D}$ ; c'est un homéomorphisme de  $\mathfrak{D}$  sur lui-même. Maintenant  $f(V)$ , qui est un voisinage de  $x$  dans  $\mathfrak{D}$  est appliqué par  $\varphi a$  sur un voisinage de  $y$  dans  $\mathfrak{D}$ . L'ensemble  $\mathfrak{D}$  étant un voisinage de chacun de ses points est un ensemble ouvert dans  $G_1$ .

En résumé,  $\mathfrak{D} = f(G_0)$  est un ensemble ouvert et fermé situé dans  $G_1$ , d'où  $\mathfrak{D} = G_1$ . Finalement, à tout  $y \in G_1$  correspond un  $a \in G_0$ , avec  $axa^{-1} = y$ , ce qui établit l'affirmation.

c) *La composante neutre est commutative.* Soit  $G_1$  la composante connexe de  $x$ ; si la composante neutre  $G_0$  n'est pas commutative, il existe dans  $G_0$  un tore maximum  $T$  et un angle polyèdre fondamental  $P \subset T$ . L'automorphisme  $\varphi x$  applique  $T$  sur  $T'$  et  $P$  sur  $P'$  contenu dans  $T'$ ; il existe alors  $a \in G_0$  tel que  $(\varphi a)T' = T$ ,  $(\varphi a)P' = P$ , et  $\varphi(ax)$  conserve  $T$  ainsi que  $P$ . Mais alors chaque point de la diagonale principale de  $P$  est invariant par  $\varphi(ax)$ , ce qui signifie que le normalisateur de  $ax \in G_1$  n'est pas discret, ce qui est absurde.  $G_0$  est nécessairement commutative.

Le théorème est établi.

2. *Automorphismes à sous-groupe de points fixes discret.* Le théorème envisagé entraîne immédiatement la

**Proposition.** *Soit  $G$  un groupe de LIE semi-simple clos connexe; s'il existe un automorphisme  $\alpha$  de  $G$  ayant un sous-groupe de points fixes discret, alors  $G$  se réduit à l'élément neutre.*

Soient  $A(G)$  le groupe des automorphismes de  $G$ , et  $A_0$  la composante neutre de  $A(G)$ ; l'application  $x \rightarrow \varphi x$  de  $x \in G$  sur l'automorphisme intérieur de  $G$  déterminé par  $x$  est un isomorphisme local de  $G$  dans  $A_0$  en même temps qu'un homomorphisme de  $G$  sur  $A_0$ . La relation  $\varphi(\alpha x) = \alpha(\varphi x)\alpha^{-1}$ , valable

pour tout  $x \in G$ ,  $\alpha \in A(G)$ , prouve que l'automorphisme  $\alpha$  dans  $G$ , et l'automorphisme intérieur de  $A(G)$  déterminé par  $\alpha$  sont identifiés par l'isomorphisme local  $\varphi$  dans un voisinage de l'élément neutre.  $\alpha$  n'ayant par hypothèse pas de point fixe autre que  $e$  dans ce voisinage, il en est de même dans  $A_0$ , ce qui signifie que le normalisateur de  $\alpha$  dans  $A(G)$  est discret; de là résulte, en vertu du théorème, que  $A_0$  est commutative, et de plus semi-simple; il vient  $A_0 = e$ ,  $G = e$ , c. q. f. d.

### § 3. Sous-groupe $T^{(h)}(G_1)$ non discret

1. *Dans un groupe de LIE clos à composante neutre commutative.* Soient  $G$  un groupe de LIE clos à composante neutre commutative  $G_0 = T_0^l$ , et  $G_1 = T_1^{(l)}$  une composante connexe quelconque. S'il existe dans  $T_1^{(l)}$  un élément  $x$  à normalisateur discret, nous avons le cas analysé aux § 2. Si  $T_1^{(l)}$  ne contient pas d'élément de cette sorte, je choisis un  $x \in T_1^{(l)}$  arbitraire, puis je forme le sous-groupe abélien  $T^{(h)}(G_1)$  associé; ici, le normalisateur connexe  $N_x$  de  $x$  coïncide avec le toroïde  $T_0^h$  vu que  $G_0$  est commutative. Nous savons que  $T_1^{(h)} = xT_0^h$  contient au moins un élément  $x'$  d'ordre fini  $q$  (§ 1). Nous allons voir que tout  $y \in T_1^{(l)}$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$  relativement à  $T_0^l$ .

Soit en effet  $T^{(l)}$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $T_0^l$  et par  $x$ ; on voit que  $T_0^h$  est un sous-groupe invariant de  $T^{(l)}$ , composante neutre du centre de  $T^{(l)}$ , et que  $T_1^{(h)}$  est un système abélien toroïdal contenu dans  $T_1^{(l)}$ . Etudions le groupe  $T^{(l)}/T_0^h$  des classes de  $T^{(l)}$  suivant  $T_0^h$ , et, dans ce groupe, le sous-groupe  $U$  des classes échangeables avec  $T_1^{(h)}$ . Si  $z \in T_0^l$  appartient à la composante neutre  $U_0$  de  $U$ , l'automorphisme intérieur  $\varphi z$  conserve  $T_1^{(h)}$  par définition de  $U$ . Appliquons à  $x' \in T_1^{(h)}$  tous les  $\varphi z$ , avec  $z \in U_0$ . Nous obtenons dans  $T_1^{(h)}$  une sous-variété connexe  $W$ ; comme  $x'$  est d'ordre fini  $q$ , il en est de même de tous les éléments de  $W$ , qui sont de plus deux à deux échangeables; ces éléments engendrent dans  $T^{(l)}$  un sous-groupe abélien  $\mathfrak{T}$  dont tous les éléments sont d'ordre fini  $\leq q$ ; l'adhérence  $\overline{\mathfrak{T}}$  de  $\mathfrak{T}$  est un sous-groupe abélien fermé, dont tous les éléments sont d'ordre fini  $\leq q$ . La composante neutre de  $\overline{\mathfrak{T}}$  se réduit ainsi nécessairement à  $e$ , d'où  $W = x'$ ; en résumé, si  $\varphi z$  ( $z \in U_0$ ) conserve  $T_1^{(h)}$ , alors  $\varphi z$  conserve  $x'$ , et  $z$  est dans le normalisateur connexe de  $x'$ , d'où  $U_0 = T_0^h$ . Ainsi :

le normalisateur de  $T_1^{(h)}$  dans  $T^{(l)}/T_0^h$  est discret.

D'après le résultat du n° 1, § 2, les éléments  $yT_0^h$  de  $T^{(l)}/T_0^h$  où  $y \in T_1^{(l)}$  sont des conjugués de  $T_1^{(h)}$  relativement à  $T_0^l/T_0^h$ ; ou encore : tout élément de  $T_1^{(l)}$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$ . On peut énoncer :



**Proposition 1.** *Soient  $G$  un groupe de LIE clos à composante neutre commutative,  $x$  un élément de  $G$ ,  $T_0^h$  le normalisateur connexe de  $x$ , et  $T_1^{(h)} = xT_0^h$ ; alors tout élément de la composante connexe de  $x$  dans  $G$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$  relativement à  $T_0^l$ .*

Cet énoncé est valable dans les cas extrêmes :

- 1)  $h = 0$ ,  $T_1^{(h)} = x$ : le normalisateur de  $x$  est discret,
- 2)  $h = l$ ,  $T_1^{(h)} = T_1^{(l)}$  et le groupe  $T^l$  est abélien.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas où la composante neutre  $G_0$  de  $G$  n'est pas commutative, ce qui me paraît devoir être précédé du n°.

2. *Sur les points fixes des automorphismes des groupes clos.*

**Proposition 2.** *Soient  $G$  un groupe de LIE clos connexe non abélien, et  $\alpha$  un automorphisme de  $G$ ; alors*

1) *la composante neutre  $U$  du sous-groupe des points fixes de  $\alpha$  est régulière dans  $G$ ,*

2) *il existe un toroïde maximum  $T$  de  $G$  et un angle polyèdre fondamental  $P \subset G$  invariants par  $\alpha$ .*

*Preuve.*  $G$  n'étant pas abélien, il résulte de la proposition du § 2, n° 2, que  $U$  est distincte de  $e$ . Soit alors  $t$  un toroïde maximum de  $U$ ; je désigne par  $Z$  le centralisateur connexe<sup>17)</sup> de  $t$  dans  $G$ , en remarquant que  $t$  est dans le centre de  $Z$ . On a  $t = U \cap Z$ , car si  $y$  est dans cette intersection,  $y$  est un élément de  $U$  échangeable avec chaque élément de  $t$ , d'où  $y \in t$ . Soit maintenant  $S$  le facteur semi-simple connexe de  $Z$ ; le sous-groupe  $U$  coupe  $Z$  suivant  $t$ , qui est dans le centre continu de  $Z$ ; donc, l'intersection  $U \cap S$  est discrète. D'autre part, l'automorphisme  $\alpha$ , qui conserve  $t$ , conserve le centralisateur  $Z$  de  $t$ ; la restriction de  $\alpha$  à  $Z$  est un automorphisme de  $Z$  qui conserve  $S$ . Finalement, la restriction de  $\alpha$  à  $S$  est un automorphisme de  $S$  à sous-groupe de points fixes discret. D'après la proposition du § 2, on a  $S = e$ , ce qui prouve que  $Z$  est abélien; un élément générateur de  $t$  ne peut ainsi appartenir qu'à un seul toroïde maximum de  $G$ : c'est un élément régulier de  $G$ , et la première partie de la proposition est établie.

Prenons un élément  $y \in G$ , voisin de  $e$ , régulier dans  $G$ , invariant par  $\alpha$ ; le toroïde maximum  $T$  et l'angle polyèdre fondamental  $P \subset T$  uniques qui contiennent  $y$  sont tous deux invariants par  $\alpha$ .

**Corollaire.** *Soient  $G$  un groupe de LIE clos non abélien, et  $x$  un élément quelconque de  $G$ ; alors le normalisateur connexe de  $x$  est régulier dans la compo-*

<sup>17)</sup> Composante neutre du centralisateur de  $t$ .

sante neutre  $G_0$  de  $G$ ; de plus, il existe dans  $G_0$  un toroïde maximum et un angle polyèdre fondamental invariants par l'automorphisme intérieur  $\varphi x$ .

Cette proposition était bien connue dans le cas où  $G$  est connexe. Il est judicieux d'étendre encore à des  $G$  non connexes la définition des éléments réguliers :

**Définition.** Un élément  $x$  d'un groupe de LIE clos est régulier ou singulier suivant que son normalisateur connexe est abélien ou non.

3. Dans un groupe de LIE clos à composante neutre non commutative. Soient  $G$  un groupe de LIE clos à composante neutre  $G_0$  non commutative,  $G_1$  une composante connexe quelconque de  $G$ ,  $x$  un élément arbitraire de  $G_1$ ,  $T_0^h$  un toroïde maximum du normalisateur connexe  $N_x$ , et  $T_1^{(h)} = xT_0^h$ ; je dis que tout  $y \in G_1$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$  relativement à  $G_0$ .

En effet,  $T_0^h$  étant régulier, il existe un toroïde maximum  $T_0^l$  de  $G_0$  et un seul contenant  $T_0^h$ ; posons  $T_1^{(l)} = xT_0^l$ . Soit  $P$  un angle polyèdre fondamental de  $T_0^l$  contenant un élément régulier de  $T_0^h$ . On a

$$a) \quad (\varphi x)T_0^l = T_0^l \quad (\varphi x)P = P.$$

Je dis que tout  $y \in G_1$  possède un conjugué dans  $T_1^{(l)}$  relativement à  $G_0$ . Il existe un toroïde maximum  $T'^l$  de  $G_0$  et un angle polyèdre fondamental  $P'$  de  $T'^l$  invariants par  $\varphi y$ ; on sait qu'on peut trouver un élément  $a \in G_0$  tel que  $(\varphi a)T'^l = T_0^l$ ,  $(\varphi a)P' = P$ ; je pose  $(\varphi a)y = x' \in G_1$ .  $\varphi a$  étant un automorphisme, l'élément  $x'$  jouit par rapport à  $T_0^l$ ,  $P$ , des mêmes propriétés que  $y$  par rapport à  $T'^l$ ,  $P'$ . Autrement dit :

$$b) \quad (\varphi x')T_0^l = T_0^l \quad (\varphi x')P = P.$$

Les relations a) et b) prouvent d'abord que  $x$  et  $x'$  appartiennent au normalisateur de  $T_0^l$ ; ensuite, comme  $xx'^{-1} \in G_0$  avec  $[\varphi(xx'^{-1})]T_0^l = T_0^l$ ,  $[\varphi(xx'^{-1})]P = P$ , on a  $xx'^{-1} \in T_0^l$  et  $x' \in T_1^{(l)}$ . En résumé,  $y$  possède un conjugué  $(\varphi a)y$  dans  $T_1^{(l)}$ .

Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que tout  $x' \in T_1^{(l)}$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$ . Or  $T_0^l$  et  $x$  engendrent dans le normalisateur  $N(T_0^l)$  de  $T_0^l$  dans  $G$  un sous-groupe  $T^{(l)}$  à composante neutre  $T_0^l$  commutative, contenant  $T_1^{(l)}$  ainsi que  $x$ ,  $N'_x = T_0^h$ , et  $T_1^{(h)} = xT_0^h$ . En vertu de la proposition 1, l'élément  $x'$  de  $T_1^{(l)}$  possède effectivement un conjugué dans  $T_1^{(h)}$ , et la première affirmation est établie.

Le principal résultat de ce chapitre est exprimé dans le

**Théorème.** Soient  $G$  un groupe de LIE clos,  $G_0$  la composante neutre de  $G$ ,  $x$  un élément de  $G$ ,  $T_0^h$  un toroïde maximum du normalisateur connexe de  $x$ , et



$T_1^{(h)} = xT_0^h$ ; alors tout élément de la composante connexe de  $x$  possède un conjugué dans  $T_1^{(h)}$  relativement à  $G_0$ .

Il est visible que  $T_0^h$  est un tore maximum pour tous les normalisateurs connexes d'éléments de  $T_1^{(h)}$ ; cela prouve que tous les normalisateurs d'éléments de  $G_1 = xG_0$  ont le même rang  $h$ . D'où le

**Théorème.** *Toute composante connexe  $G_1$  d'un groupe de LIE clos  $G$  contient un système abélien toroïdal  $T_1^{(h)}$  coupé par toutes les classes d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à la composante neutre de  $G$ . Les normalisateurs des éléments de  $G_1$  ont tous le même rang, égal à la dimension du tore  $T_1^{(h)}$ . Le sous-groupe  $T^{(h)}(G_1)$  est engendré par  $T_1^{(h)}$ .<sup>18)</sup>*

**Corollaire.** *Les sous-groupes abéliens  $T^{(h)}(G_1)$  associés à une composante connexe  $G_1$  fixe sont conjugués relativement à  $G_0$ .*

Cela permet de parler du sous-groupe  $T^{(h)}(G_1)$ .

### CHAPITRE III

## Diagramme associé à une composante connexe

### § 1. Caractères relatifs à $T^{(h)}(G_1)$

1. *Définition de ces caractères.* Soient  $G = G_0 + G_1 + \dots$  un groupe de LIE clos de composante neutre  $G_0$ , et  $T^{(h)}(G_1)$  le sous-groupe abélien associé à la composante connexe  $G_1$ . Répétons que  $T^{(h)} = T^{(h)}(G_1)$  est le produit direct de sa composante neutre  $T_0^h$  et d'un groupe cyclique fini de type  $Z_q$  engendré par  $x \in T_1^{(h)}$ ; on peut trouver un élément  $c \in T_0^h$ , régulier, voisin de  $e$ , générateur de  $T_0^h$ , tel que  $c^q$  soit aussi voisin de  $e$  qu'on le désire. Alors  $v = xc$  est un générateur de  $T^{(h)}$  et  $v^q = c^q$ .

Le groupe des automorphismes intérieurs de  $G$  possède une représentation linéaire adjointe  $y \rightarrow D(y)$  dans l'espace  $R(G_0)$  tangent à  $G_0$  en  $e$ .  $G$  étant compact, il existe même un repère de  $R(G_0)$  dans lequel les transformations linéaires  $D(y)$  sont représentées par des matrices orthogonales encore désignées par  $D(y)$ . En particulier,  $D(v)$  est orthogonale. Il existe alors un nouveau repère de  $R(G_0)$  dans lequel  $D(v)$  reçoit la forme canonique quasi-diagonale

$$D(v) = (E_{h''}, -E_{h''}, D_1, \dots, D_r, D_{r+1}, \dots, D_{r'}) .$$

$E_{h''}$  désigne la  $h'' \times h''$  matrice unité;  $D_1, \dots, D_{r'}$  sont des  $2 \times 2$  matrices ortho-

<sup>18)</sup>  $T_1^{(h)}$  correspond à l'ensemble des „chief elements“ de F. GANTMACHER [5], § 8, lorsque  $G_0$  est semi-simple clos.

gonales de déterminant  $+1$ , les  $r$  premières étant d'ordre fini, et les autres d'ordre infini.

Considérons  $D(\nu^a) = D(c^a)$ ; on peut choisir  $c$  en sorte que  $D(c^a)$  soit aussi voisine de  $E_{h''+h''' + 2r}$  qu'on le désire. Alors

$$D(\nu^a) = (E_{h''+h''' + 2r}, D_{r+1}^a, \dots, D_r^a) .$$

Le sous-espace de  $R(G_0)$  associé à  $E_{h''+h''' + 2r}$  est exactement tangent au normalisateur de  $c_a$ , désigné par  $N(c^a)$ . Or,  $c^a$  est régulier et  $N(c^a) = T^l$  est l'unique toroïde maximum de  $G_0$  qui contient  $T_0^h$ . On a donc  $h'' + h''' + 2r = l$ , d'où, avec de nouvelles notations

$$\Delta(\nu) = \{E_h, I_{l-h}, \Delta_1(\nu), \dots, \Delta_m(\nu)\} .$$

$E_h$  et  $I_{l-h}$  indiquent l'effet de  $\Delta(\nu)$  dans  $R(T^l)$ ; les  $m$  autres matrices indiquent les rotations produites par  $\Delta(\nu)$  dans  $m$  plans à deux dimensions  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ . Finalement, en considérant  $T^h$  engendré par  $\nu$ , on a

$$\Delta(y) = \{E_h, I_{l-h}(y), \Delta_1(y), \dots, \Delta_m(y)\} \quad y \in T^{(h)} . \quad (1)$$

$I_{l-h}(y)$  est constante dans chaque composante connexe de  $T^{(h)}$ ;  $\Delta_j(y)$  définit un caractère  $\chi_j(y)$  de  $T^{(h)}$  sur le groupe  $T_j^1 = T^1$  des rotations de  $\Delta_j$  autour de l'origine, avec le caractère inverse  $\chi_j^{-1}$ .

**Proposition 1 et définition.** *La représentation linéaire adjointe de  $T^{(h)}(G_1)$  dans  $R(G_0)$  fait apparaître  $m$  caractères  $\chi_1, \dots, \chi_m$  de  $T^{(h)}(G_1)$ ; ce sont les caractères de  $G$  relatifs à  $T^{(h)}(G_1)$ .*

2. *Sous-groupes singuliers.* Le caractère  $\chi_j$  est un homomorphisme de  $T^{(h)}$  sur  $T^1 = T_j^1$ ; si  $U_j$  désigne le noyau de  $\chi_j$ , ensemble des  $y \in T^{(h)}$  tels que  $\chi_j(y) = e$ , alors  $T^{(h)}/U_j$  est homéomorphe à  $T^1$ , qui est connexe. Cela signifie que  $U_j$  possède un élément au moins dans chaque composante connexe de  $T^{(h)}$ , notamment dans  $T_1^{(h)}$ .

**Définition.** *Le noyau de l'homomorphisme  $\chi_j$  est un sous-groupe  $U_j$  de  $T^{(h)}(G_1)$ , dit sous-groupe singulier, qui possède des éléments dans chaque composante connexe de  $T^{(h)}$ .*

C'est de plus un sous-groupe de dimension  $h-1$ ; dans  $T_1^{(h)}$ , les composantes connexes des  $U_j$  forment un ensemble fini de sous-variétés à  $h-1$  dimensions. Il existe des éléments de  $T_1^{(h)}$  non situés sur ces sous-variétés; si  $z$  désigne l'un d'eux, on a  $\Delta_j(z) \neq E_2$  pour tout  $j$ , et le normalisateur connexe  $N_z$  coïncide avec  $T_0^h$ . On voit que les éléments réguliers de  $T_1^{(h)}$  forment des domaines à  $h$  dimensions. Les éléments situés sur un  $U_j$  au moins sont singuliers, car leur normalisateur a une dimension supérieure à  $h$ , avec un rang égal à  $h$ .

**Proposition 2.** *Les sous-groupes singuliers  $U_j$  et  $U_i$  diffèrent si  $j \neq i$ .*

Considérons en effet le centralisateur connexe  $N_j$  de  $U_j$ . On a  $T_0^h \subset N_j \subset N_z$  où  $z \in U_j \cap T_1^{(h)}$ ; cela prouve que  $N_j$  est de rang  $h$ . De plus,  $N_j$  est tangent à  $\Lambda_j$  et la dimension  $\dim N_j$  est supérieure à  $h$ ; ajoutons que la composante neutre  $U_{0j}$  de  $U_j$  est dans le centre connexe de  $N_j$ . Alors  $H = N_j/U_{0j}$  est un groupe clos de rang  $h - (h - 1) = 1$  de dimension supérieure à 1; c'est un sous-groupe simple de rang un de dimension trois. Cela entraîne  $\dim N_j = h + 2$ , et  $N_j$  est exactement tangent à  $R(T_0^h) + \Lambda_j$ . De là résulte  $U_i \neq U_j$  si  $i \neq j$ .

Le cas  $U_{0i} = U_{0j}$  n'est pas exclu et sera analysé ultérieurement. Le facteur semi-simple de  $N_j$  est de dimension 3 et de rang 1; c'est le sous-groupe  $g_j$  simple de rang 1 associé à  $\Lambda_j$ , à  $U_j$  ou à  $\chi_j$ ; il est tangent à  $\Lambda_j$  en 0.

3. *Groupe fini  $\Phi(G_1)$ .* Construisons des automorphismes intérieurs de  $G$  qui conservent chaque composante connexe de  $T^{(h)}$ . Prenons  $z$  quelconque dans  $T_1^{(h)}$  et construisons le normalisateur  $N_z(T_0^h)$  de  $T_0^h$  dans le normalisateur connexe  $N_z$ ; d'après cette définition,  $T_0^h$  est la composante neutre de  $N_z(T_0^h)$ . Si  $a$  est dans ce groupe, l'automorphisme  $\varphi a$ , qui conserve  $T_0^h$ , conserve encore  $z$ , c'est-à-dire  $T_1^{(h)}$  et chaque composante connexe de  $T^{(h)}(G_1)$ . En résumé, au normalisateur  $N_z$  correspond un groupe fini  $N_z(T_0^h)/T_0^h$  d'automorphismes de  $T^{(h)}$  conservant  $T_1^{(h)}$ .

On peut se restreindre au centralisateur connexe  $N_j$  du sous-groupe singulier  $U_j$ ; il existe dans le sous-groupe  $g_j$  associé à  $U_j$  un élément  $d_j$  tel que l'automorphisme  $\varphi(d_j)$  conserve  $T_0^h$  et  $T^{(h)}$ , en induisant dans ce dernier une transformation involutive non identique  $S_j$  conservant chaque élément de  $U_j$ . Les  $d_j T_0^h$  engendrent un sous-groupe  $F$  du normalisateur de  $T_1^{(h)}$  et  $F/T_0^h$  est un groupe fini  $\Phi(G_1)$  de transformations de  $T^{(h)}$  en lui-même, conservant chaque composante connexe.

**Proposition 3 et définition.** *Il existe un groupe fini  $\Phi(G_1)$  de transformations de  $T^{(h)}(G_1)$  en lui-même, engendré par les involutions par rapport aux sous-groupes singuliers  $U_1, \dots, U_m$ . Ces involutions sont les restrictions à  $T^{(h)}(G_1)$  d'automorphismes intérieurs de  $G$ .*

4. *Caractères de  $G$  relatifs à  $T_0^l$ .* Il existe dans  $G_0$  un toroïde maximum  $T_0^l$  et un seul contenant  $T_0^h$ ; lorsque  $\tau$  décrit  $T_0^l$ , les automorphismes intérieurs  $\varphi \tau$  forment un groupe abélien dont la représentation linéaire adjointe dans  $R(G_0)$  est un groupe orthogonal; chaque matrice de ce groupe conserve  $m$  2-plans fixes  $\pi_1, \dots, \pi_m$  et chaque point de  $R_0^l = R(T_0^l)$ .  $\varphi \tau$  induit dans  $\pi_j$  une rotation  $\theta_j(\tau) \in T^1$  et les  $\theta_j^{\pm 1}(\tau)$  sont les caractères<sup>19)</sup> de  $G$  relatifs à  $T_0^l$ .

<sup>19)</sup> [10], § 2, n° 3.

L'automorphisme  $\varphi x$  ( $x$  générateur de  $Z_q$  dans  $T_1^{(h)}$ ) conserve  $T_0^l$  (et chaque point de  $T_0^h$ ); il permute donc en particulier les caractères  $\theta_j^{\pm 1}$ ; ainsi, l'ensemble des  $\theta_j^{\pm 1}$  se décompose en cycles relatifs à  $\varphi x$ . D'ailleurs, les  $\theta_j^{\pm 1}$  se répartissent en suites de caractères égaux sur  $T_0^h$ . Je désire prouver que ces deux partitions sont identiques.

**Lemme.** *Si l'automorphisme intérieur  $\varphi x$  du groupe de LIE semi-simple clos  $H$  détermine sur les paramètres angulaires fondamentaux  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  une permutation  $\varphi_u \rightarrow \varphi_{i_u}$ , alors le toroïde maximum  $T_0^h$  du normalisateur connexe de  $x$  est défini par le système obtenu en égalant les  $\varphi_i$  dans chaque cycle.*

*Le rang du normalisateur connexe est égal au nombre des cycles.*

En effet, soit  $\sigma$  la transformation linéaire du diagramme  $R_0^l$  induite par  $\varphi x$ ; le sous-espace  $R_0^h$  des points fixes de  $\sigma$  dans  $R_0^l$  est appliqué canoniquement sur  $T_0^h$  dans  $T_0^l$  et possède aussi la dimension  $h$ ; il détermine  $T_0^h$ . Soit  $L$  un point  $R_0^l$ ; l'hypothèse  $\sigma L = L$ , jointe à la relation

$$\varphi_u(y) = (\sigma \varphi_u)(\sigma y) \quad \text{où} \quad y \in R_0^l$$

entraîne  $\varphi_u(L) = \varphi_{i_u}(L)$ . Si donc la permutation  $\varphi_u \rightarrow \varphi_{i_u}$  est décomposée en cycles, et si  $\sigma L = L$ , alors les  $\varphi_j(L)$  sont des nombres égaux dans chaque cycle. Réciproquement, si  $\varphi_u(L) = \varphi_{i_u}(L)$ , on a  $\varphi_{i_u}(L) = \varphi_{i_u}(\sigma L)$  pour les  $l$  indices, d'où  $L = \sigma L$ .

S'il y a  $s$  cycles de longueurs respectives  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , le système qui définit  $T_0^h$  possède  $(a_1 - 1) + \dots + (a_s - 1)$  équations linéaires indépendantes; la dimension du sous-espace des solutions est

$$l - [(a_1 - 1) + \dots + (a_s - 1)] = \sum_1^s a_j - [\sum_1^s a_j - s] = s,$$

d'où  $s = h$ .

Revenons au groupe  $G$ , et soient  $\theta_1, \dots, \theta_n$  les caractères de  $G$  qui sont égaux à  $\theta_1$  sur  $T_0^h$ ; l'automorphisme  $\varphi x$  permute  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , car  $\varphi x$  conserve chaque point de  $T_0^h$ ; soit  $s$  le nombre des cycles de cette permutation. Passons aux paramètres angulaires de  $G_0$  relatifs à  $T_0^l$ ; à  $\theta_j^{\pm 1}$  correspondent respectivement  $\pm \mu_j$ , et à  $\theta_1, \dots, \theta_n$  correspondent  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . Comme  $T_0^h$  est régulier,  $\mu_i - \mu_j$  n'est jamais un paramètre angulaire ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ), et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  est une suite fondamentale d'un sous-groupe  $Q$  de rang  $l$  de  $G_0$  contenant  $T_0^l$  et  $T_0^h$ . Le normalisateur connexe  $N'$  de  $x$  dans  $Q$  contient  $T_0^h$  et est de rang  $h$ . Remarquons que  $T_0^h$  contient un sous-groupe  $U$  de dimension  $h - 1$  défini par  $\mu_1(y) = \dots = \mu_n(y) = 0$  avec  $y \in R_0^h$ ; d'après cette définition,  $U$  est dans le centre de  $Q$ .

Soit maintenant  $Q'$  le facteur semi-simple de  $Q$ ; son toroïde maximum  $T_0^n$  est défini dans  $R_0^l$  par les vecteurs du diagramme  $\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n$ .  $\varphi x$  conserve  $Q'$ ,

$T_0^h$ , ainsi que l'angle polyèdre fondamental  $\mu_1 \geq 0, \dots, \mu_n \geq 0$  dans  $R_0^n$ . Le toroïde maximum du normalisateur connexe de  $x$  dans  $Q'$  est défini par l'égalité des  $\mu_i$  dans chaque cycle relatif à  $\varphi x$ , et la dimension de ce toroïde est égale à  $s$ . Le sous-groupe  $U$  et ce toroïde engendrent dans  $Q$  un sous-groupe abélien connexe de  $N'$ , de dimension au moins égale à  $(h-1) + s$ , et au plus égale à  $h$ , d'où  $s = 1$ .

**Proposition 4.** *Tout automorphisme intérieur  $\varphi x$  d'un groupe de LIE clos  $G$  conserve un toroïde maximum  $T^1$  de la composante neutre de  $G$ , ainsi que dans  $T^1$  chaque point d'un toroïde  $T_0^h$  maximum dans le normalisateur connexe de  $x$ . Les caractères de  $G$  relatifs à  $T^1$  se répartissent en suites de caractères égaux sur  $T_0^h$ ;  $\varphi x$  permute circulairement les caractères de chaque suite.*

5. *Caractères associés.* Revenons à  $x \in T_1^{(h)}$  générateur de  $Z_q$  dans  $T^{(h)}$  et soit  $\theta_1, \dots, \theta_n$  un cycle de la permutation des  $\theta_j^{\pm 1}$  induite par  $\varphi x$ . Le sous-espace  $\Pi = \Pi_1 + \dots + \Pi_n$  est invariant par  $\varphi x$ ; soit  $\alpha$  la transformation linéaire orthogonale induite par  $\varphi x$  dans  $\Pi$ . Revenons maintenant aux caractères  $\chi_j^{\pm 1}$  relatifs à  $T^{(h)}$ ; en vertu de la proposition 2, on a sur un générateur  $\nu$  de  $T^{(h)}$ :  $\chi_i \neq \chi_j$  si  $i \neq j$ , et tout sous-espace de  $R^{2m} = \sum_{i=1}^m \Pi_i$  stable pour  $\varphi \nu$  est somme directe de 2-plans du type  $\Lambda_i$  (cf. n° 1).

Or  $\Pi$ , stable pour  $\varphi z$  ( $z \in T_0^1$ ) est aussi stable pour  $\varphi x$ , et est donc stable pour tous les  $\varphi \tau$  ( $\tau \in T^{(h)}$ ) et en particulier pour  $\varphi \nu$ ; ainsi,  $\Pi$  est somme directe de  $n$  plans  $\Lambda_i$ , désignés par  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  avec les caractères associés  $\chi_1, \dots, \chi_n$ .

Je dis que  $\alpha$  fait tourner  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  d'angles en progression arithmétique de raison  $2\pi/n$ . En effet,  $\alpha$  est dans  $\Pi$  une transformation linéaire orthogonale d'ordre  $q'$  diviseur de  $q$ ; de plus,  $n$  est un diviseur de  $q'$ , avec  $q' = np$ . Il existe dans  $T_0^h$  un élément  $z$  tel que  $\varphi z$  fasse tourner  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  d'un même angle  $-2\pi/q'$ ; alors  $\pi_1, \dots, \pi_n$  tournent de ce même angle. Si  $\beta'$  désigne la transformation linéaire induite par  $\varphi z$  dans  $\Pi$ , on a  $\alpha\beta' = \beta'\alpha = \beta$ . Soit  $e_1$  un vecteur quelconque de  $\Pi_1$ ; on peut voir que  $\beta^n e_1 = e_1$ ; en effet,  $\beta^n = \beta'^n \alpha^n$ , où  $\alpha^n$  est une rotation de  $\pi_1$  d'ordre  $p$ , et  $\beta'^n$  une rotation de  $\Pi_1$  d'angle  $-\frac{2\Pi}{q'} \cdot n = -\frac{2\Pi}{p}$ , ce qui donne  $\beta^n e_1 = e_1$ . En résumé,  $\beta$  permute circulairement  $e_1, \beta e_1, \dots, \beta^{n-1} e_1$ . Or, les valeurs propres d'une telle matrice sont  $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$  avec  $\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$ ; cela prouve que  $\beta$  fait tourner  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  d'angles respectifs  $0, 2\pi/n, \dots, 2\pi(n-1)/n$  (avec une numérotation convenable). Finalement, si  $\tau = tx$  ( $t \in T_0^h$ ),  $\varphi_\tau = \varphi_t \varphi_x$  fait tourner  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  d'angles en progression arithmétique de raison  $2\pi/n$ .

**Proposition 5.** Soient  $T^{(h)}(G_1) = T_0^h + T_1^{(h)} + \dots$  et  $T^l(G_0)$  deux sous-groupes abéliens associés respectivement à la composante connexe  $G_1$  et à la composante neutre  $G_0$  du groupe clos  $G$ , avec  $T_0^h \subset T^l$ ,  $T_1^{(h)} \subset G_1$ .

A tout caractère  $\theta_1$  de  $G$  relatif à  $T^l$  est associée la suite  $\theta_1, \dots, \theta_n$  des caractères de même espèce égaux à  $\theta_1$  sur  $T_0^h$ ; les caractères de  $G$  relatifs à  $T^{(h)}(G_1)$  égaux à  $\theta_1$  sur  $T_0^h$  forment une suite  $\chi_1, \dots, \chi_n$ . Si  $y \in T_1^{(h)}$ , alors l'automorphisme  $\varphi y$  permute circulairement  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , tandis que  $\chi_1(y), \dots, \chi_n(y)$  forment une progression géométrique de raison  $\exp(2\pi i/n)$ .

## § 2. Diagramme $D(G_1)$

1. *Données.* Soient  $G$  un groupe de LIE clos,  $G_0$  la composante neutre de  $G$ ,  $G_1$  une composante connexe quelconque, puis  $G_0 + G_1 + \dots$  le groupe engendré dans  $G$  par  $G_1$ ,  $T^{(h)}(G_1)$  le sous-groupe abélien associé à  $G_1$ , avec  $T^{(h)}(G_1) = T_0^h + T_1^{(h)} + \dots$  produit direct  $T_0^h \times Z_q$ ,  $T_0^h \subset G_0$ ,  $T_1^{(h)} \subset G_1$ , l'élément  $x \in T_1^{(h)}$  étant un générateur de  $Z_q$  cyclique d'ordre  $q$ .

Soient encore  $T_0^l$  l'unique toroïde maximum de  $G_0$  qui contient  $T_0^h$ , puis  $R_0^l$  le diagramme de  $G_0$  pourvu de ses paramètres angulaires; soit  $f: R_0^l \rightarrow T_0^l$  l'application usuelle de recouvrement (cf. I, § 2, n° 1),  $f^{-1}(e)$  étant le réseau unité  $\delta_i$ ; on a de plus une origine  $O$  située dans le réseau central  $\bar{\delta}_i$ .

Si  $c$  est un élément de  $T_0^h$  voisin de  $e$  et régulier, il existe un polyèdre fondamental  $P(G_0)$  de  $R_0^l$  contenant un représentant de  $c$  voisin de  $O$ . Je désigne par  $R_0^h$  le  $h$ -plan appliqué sur  $T_0^h$  par  $f$  et qui contient  $O$ .

2. *Définition de  $R^{(h)}(G_1)$ .* Formons la somme directe  $R^{(h)}$  de  $R_0^h$  et du groupe  $Z$  des entiers rationnels. Je pose  $J = (0, 1)$ ,  $R_1^h = (R_0^h, 1)$ ,  $R_k^h = (R_0^h, k)$ . L'application  $f$ , déjà définie sur  $R_0^h$ , va être étendue à  $R^{(h)}$ . Je pose

$$f: R^{(h)} \rightarrow T^{(h)} \quad \text{avec} \quad f(t, k) = f(t) x^k, \quad t \in R_0^h.$$

On a

$$f(A + B) = f(A)f(B), \quad f(R_k^h) = x^k T_0^h, \quad f(R_1^h) = T_1^{(h)}, \quad f(R_q^h) = T_0^h.$$

Il nous sera utile ci-dessous de posséder une décomposition de l'application  $f$  restreinte à  $R_1^h$ , que je désigne par  $f|_{R_1^h}$ . Prenons  $B$  fixe quelconque dans  $R_1^h$ ,  $b = f(B)$ , et soient  $f_1: R_1^h \rightarrow R_0^h$  définie par  $f_1(A + B) = A$ , puis  $f_2: T_0^h \rightarrow T_1^{(h)}$  définie par  $f_2(x) = bx$ . Alors

$$f|_{R_1^h} = f_2 f_1.$$

Cela permet déjà de considérer  $f|_{R_1^h}$  comme une application de recouvrement,  $R_1^h$  étant un recouvrement simplement connexe de  $T_1^{(h)}$ .



Nous pouvons aussi introduire une métrique sur  $R_1^h$  : en effet, le groupe clos  $G$  est un espace de RIEMANN dont la métrique induit sur  $T_0^h, T_1^{(h)}$  une métrique localement euclidienne ; de plus,  $R_0^l$  et  $R_0^h$  sont des espaces euclidiens appliqués isométriquement par  $f$  sur  $T_0^l$  et  $T_0^h$ . Alors  $f_1^{-1}$  définit une métrique euclidienne sur  $R_1^h$  par la formule  $\text{dist}(B + A, B + A') = \text{dist}(A, A')$ , cette métrique ne dépendant pas de  $B$ . D'autre part, la translation  $f_2$  est une isométrie. On voit que  $f|R_1^h = f_2 f f_1$  applique  $R_1^h$  isométriquement sur  $T_1^{(h)}$ .

3. *Réseau unité dans  $R^{(h)}(G_1)$ .* Soient  $A, B \in R_1^h$ , avec  $f(A) = f(B)$  ; on a  $f(A)[f(B)]^{-1} = e$ ,  $f(A)f(-B) = e$ ,  $f(A - B) = e$  et  $f(C) = e$  si  $C = A - B$ , ce qui prouve que  $C$  est dans le réseau unité  $\delta_i$  et dans  $R_0^h$ . En résumé,  $f(A) = f(B)$  si et seulement si  $A - B$  est dans la trace sur  $R_0^h$  du réseau unité  $\delta_i$  ; autrement dit, les translations de recouvrement dans  $R_1^h$  sont définies par le réseau-trace  $\delta_{0h} = \delta_i \cap R_0^h$ .

Maintenant, les points de  $R^{(h)}(G_1)$  qui sont appliqués sur  $e$  par  $f$  forment un réseau unité  $\delta_h$  engendré par  $\delta_{0h}$  et par  $qJ \in R_q^h$ .

4. *Caractères et paramètres angulaires. Diagramme.* Soit

$$\varrho : \theta_1, \dots, \theta_n ; \chi_1, \dots, \chi_n \quad (1)$$

une ligne de caractères associés, les  $n$  premiers étant relatifs à  $T_0^l$ , et les  $n$  derniers à  $T^{(h)}$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les paramètres angulaires relatifs à  $T_0^l$  qui correspondent respectivement à  $\theta_1, \dots, \theta_n$ . Je fais correspondre au caractère  $\chi_j$  une forme linéaire  $\xi_j$  définie sur  $R^h(G_1)$  à l'aide des formules

$$\xi_j(t, k) = \varrho(t) + k \varepsilon_j(J)$$

avec  $x = f(J)$ ,  $\exp[2\pi i \varepsilon_j(J)] = \chi_j(x)$ ,  $\varrho(t) = \mu_j(t)$ ,  $t \in R_0^h$ . On a

$$\exp \xi_j(t, k) = \chi_j[f(t)x^k] .$$

Les  $\chi_j(x)$  forment une progression géométrique de raison  $\exp[2\pi i/n]$  comprenant  $n$  termes, permutée circulairement si on multiplie ces derniers par  $\exp[2\pi i r/n]$  ( $r$  entier arbitraire). De là résulte qu'on peut écrire

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon + \frac{1}{n}, \dots, \quad \varepsilon_n = \varepsilon + \frac{n-1}{n} .$$

$\varepsilon$  pouvant être remplacé par  $\varepsilon + r/n$ , avec une numérotation convenable. En particulier, on peut supposer, si c'est nécessaire :  $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{n}$ . A la ligne 1) correspondent dans la ligne 2) les formes

$$\varrho : \mu_1, \dots, \mu_n ; \quad \varrho + \varepsilon k, \varrho + \left(\varepsilon + \frac{1}{n}\right)k, \dots, \varrho + \left(\varepsilon + \frac{n-1}{n}\right)k . \quad (2)$$

Les formes  $\xi$  ainsi introduites sont par définition les paramètres angulaires de  $G$  relatifs à  $T^{(h)}(G_1)$ .

Nous sommes en mesure maintenant de définir le diagramme  $D(G_1)$  de support  $R^{(h)}(G_1)$ . Au sous-groupe singulier  $U$ , noyau de  $\chi$ , correspond par  $f^{-1}$  dans  $R^{(h)}$  une famille de  $(h-1)$ -plans parallèles distribuée dans chaque  $R_k^h$ . Pour caractériser cette famille, il suffit de se restreindre à  $R_1^h$ , ce que nous ferons désormais. Lorsque  $j$  varie de 1 à  $n$ , nous obtenons dans  $R_1^h$   $n$  familles de  $(h-1)$ -plans singuliers tous parallèles deux à deux, définies par  $\xi_j \equiv 0 \pmod{1}$ . Dans  $R_0^h$ , ces familles coïncident et sont définies par  $\varrho \equiv 0 \pmod{1}$ .

Toutes les familles ainsi obtenues dans  $R_1^h$  constituent le diagramme  $D(G_1)$  associé à la composante connexe  $G_1$  de  $G$ .

5. *Isométries dans le diagramme.* Considérons à nouveau l'involution  $S_j$  associée au sous-groupe singulier  $U$ , dans  $T^{(h)}$ , qui conserve chaque élément de  $U$ , (voir § 1, n° 3); étudions le relèvement de  $S_j$  par  $f^{-1}$  dans  $R_1^h$ . Examinons d'abord le centralisateur  $N_j$  de  $U$ , dans  $G_0$ ;  $T_0^h$  est un toroïde maximum de  $N_j$ , et nous avons dans  $R_0^h$  le diagramme de  $N_j$  relatif à  $T_0^h$ ;  $\varrho$  est le caractère de  $N_j$  relatif à  $T_0^h$ , et les relations  $\varrho \equiv 0 \pmod{1}$  définissent dans  $R_0^h$  la famille de plans singuliers associés. On sait, par la théorie classique, que le relèvement dans  $R_0^h$  de l'involution  $S_j|T_0^h$  relative à  $N_j$  contient la symétrie par rapport à tout plan singulier  $\varrho = c$  entier, et en particulier la symétrie par rapport à  $\varrho = 0$ .

Cela étant, relevons  $S_j|T_1^{(h)}$ ; il lui correspond dans  $R_1^h$  une classe <sup>20)</sup>  $F(S_j)$  de transformations dont j'affirme qu'elle contient la symétrie par rapport à tout plan singulier  $\xi_j \equiv 0 \pmod{1}$ . En effet soit  $V_{1h}$  un tel plan,  $B \in V_{1h}$ ,  $b = f(B) \in U$ , et remplaçons  $f|R_1^h$  par  $f_2 f f_1$  (voir n° 2). Alors  $f_1$  transforme la symétrie par rapport à  $V_{1h}$  en la symétrie par rapport à  $\varrho = 0$  dans  $R_0^h$ ;  $f$  transforme cette symétrie en  $S_j|T_0^h$  comme nous venons de le voir; enfin,  $f_2$  transforme  $S_j|T_0^h$  en  $S_j|T_1^{(h)}$ , en vertu de  $S_j b = b$ . En résumé,  $f$  transforme la symétrie par rapport à  $V_{1h}$  dans  $R_1^h$  en  $S_j|T_1^{(h)}$ , et l'affirmation est établie.

Il est clair que la symétrie par rapport à tout plan singulier du diagramme  $D(G_1)$  conserve ce diagramme, puisque les involutions  $S_j$  sont les restrictions à  $T^{(h)}(G_j)$  d'automorphismes intérieurs de  $G$ . Nous obtenons ainsi un diagramme  $D(G_1)$  dans  $R_1^h$ , au sens de E. STIEFEL, avec un groupe kaléidoscopique  $\Gamma(G_1)$  engendré par toutes les symétries décrites. Rassemblons les résultats :

**Théorème.** Soient  $G$  un groupe de LIE clos et  $G_1$  une composante connexe quelconque de  $G$ . Le groupe abélien

<sup>20)</sup> [8], début § 4.



$$T^{(h)}(G_1) = T_0^h \times Z_q = T_0^h \cup T_1^{(h)} \cup \dots$$

est l'image par l'application isométrique  $f$  d'un recouvrement euclidien

$$R^{(h)}(G_1) = R_0^h + Z = R_0^h \cup R_1^h \cup \dots \quad (f(R_1^h) = T_1^{(h)})$$

avec  $f(A + B) = f(A)f(B)$ . Le noyau de  $f$  est un réseau unité engendré par la trace sur  $R_0^h$  du réseau unité de  $R_0^l$ , ainsi que par le point unité  $(0, q) = qJ$ .

Aux sous-groupes singuliers de  $T^{(h)}(G_1)$  correspondent dans  $R_1^h$  des familles de  $(h - 1)$ -plans singuliers, parallèles et équidistants dans chaque famille, constituant le diagramme  $D(G_1)$ . La symétrie par rapport à tout plan singulier du diagramme conserve ce dernier, et ces opérations engendrent un groupe spatial  $\Gamma(G_1)$ .

6. *Réduction au cas semi-simple.* Reprenons le groupe  $G = G_0 + G_1 + \dots$ ; on sait que  $G_0$  est localement le produit direct  $T^p \times G'_0$  où  $T^p$  est la composante neutre du centre de  $G_0$ , et  $G'_0$  le facteur semi-simple; prenons  $z$  quelconque dans  $G_1$ , le toroïde  $T_0^h$  maximum dans le normalisateur connexe  $N_z$ , puis  $T^{(h)}(G_1) = \{T_0^h, z\} = T_0^h \times Z_q$ , où  $Z_q$  est engendré par  $x \in T_1^h = zT_0^h \subset G_1$ . Il existe un toroïde maximum  $T_0^l$  unique contenant  $T_0^h$ , et on a

$$T_0^l = T^p \times T_0^{l'} \quad (\text{produit direct local}) \quad T_0^{l'} \subset G'_0,$$

$$T_0^h = T^{p'} \times T_0^{h'} \quad (\text{produit direct local}) \quad T^{p'} \subset T^p; \quad T_0^{h'} \subset T_0^{l'}.$$

$G'_0$  et  $x$  engendrent un sous-groupe  $G'$  de  $G$ , de composante neutre  $G'_0$  puisque  $x$  est d'ordre fini et est échangeable avec  $G'_0$ . Avec  $G'_1 = xG'_0$ , on peut prendre  $T^{h'}(G'_1) = T_0^{h'} \times Z_q$ .

Maintenant, les caractères  $\chi_i$  s'annulent sur  $T^{p'}$ , qui est dans le centre de  $G_0$ ; alors les paramètres angulaires associés  $\xi_i$  sont constants sur chaque  $(h - 1)$ -plan parallèle à  $R^{p'}$  (qui correspond à  $T^{p'}$ ). Cette particularité nous ramène au cas où  $G_0 = G'_0$  est semi-simple, avec  $h = h'$ ,  $l = l'$ , ce que nous supposerons désormais.

7. *Tableau canoniquement associé à  $G_1$  (avec  $G_0$  semi-simple).* Considérons la suite fondamentale qui définit  $P_0 = P(G_0)$  (voir I, § 2, n° 1), et la permutation des éléments de cette suite qui est induite par l'automorphisme intérieur associé à  $z \in T_1^{(h)}$ . En faisant usage du § 1, n° 4, on peut présenter les cycles de cette permutation par lignes

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2} \\ \dots\dots\dots \\ \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_h} \end{array} \right\} \quad (1)$$

les paramètres de la  $i$ -ème ligne se réduisant sur  $R_0^h$  à une forme linéaire  $\varrho_i$ . Je dirai que les valeurs sur  $A \in R_0^l$  des formes (1) sont les coordonnées canoniques de  $A$ ; de plus,  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$  définissent un système de coordonnées sur  $R_0^h$ . Remarquons que  $n_1, n_2, \dots, n_h$  divisent l'ordre  $r$  de  $G_1$  dans  $G/G_0$ , car si  $z \in T_1^{(h)}$ ,  $z^r$  est dans  $T_0^l$  et l'automorphisme associé est l'identité sur la suite fondamentale. On peut présenter maintenant le tableau des lignes de paramètres associés

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} : \varrho_1 + \varepsilon_1 k, \varrho_1 + \left( \varepsilon_1 + \frac{1}{n_1} \right) k, \dots, \varrho_1 + \left( \varepsilon_1 + \frac{n_1 - 1}{n_1} \right) k, \\ \dots \\ \varrho_h : \gamma_1, \dots, \gamma_{n_h} : \varrho_h + \varepsilon_h k, \varrho_h + \left( \varepsilon_h + \frac{1}{n_h} \right) k, \dots, \varrho_h + \left( \varepsilon_h + \frac{n_h - 1}{n_h} \right) k, \end{array} \right.$$

Remplaçons le point unité  $J$  par  $I = J + (-\varepsilon_1, \dots, -\varepsilon_h, 0)$ . Les formules de changement de coordonnées sont  $\varrho_i^* = \varrho_i + \varepsilon_i k$ , d'où le tableau sous forme canonique (en supprimant les astérisques)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varrho_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} : \varrho_1, \varrho_1 + \frac{k}{n_1}, \dots, \varrho_1 + \frac{n_1 - 1}{n_1} k, \\ \dots \\ \varrho_h : \gamma_1, \dots, \gamma_{n_h} : \varrho_h, \varrho_h + \frac{k}{n_h}, \dots, \varrho_h + \frac{n_h - 1}{n_h} k. \end{array} \right.$$

Il ne dépend que de la suite fondamentale de  $G_0$  et de la permutation induite sur cette suite par un élément de  $G_1$ . Je dirai que  $I$  est un point origine dans  $R_1^h$ . D'après ce que nous avons vu (§ 2, n° 4), le point  $I + \left( \frac{r_1}{n_1}, \dots, \frac{r_h}{n_h} \right)$  ( $r_i$  entiers arbitraires) peut aussi être considéré comme origine, le tableau restant canonique.

### § 3. Construction de diagrammes

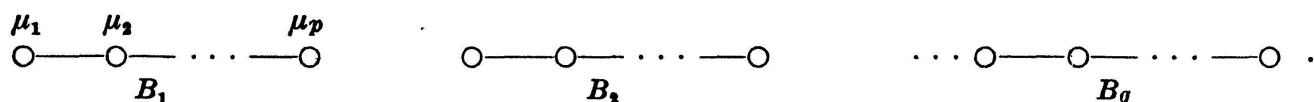
Je considère toujours le groupe de LIE clos  $G = G_0 + G_1 + \dots$  la composante neutre  $G_0$  étant semi-simple; interviennent aussi le recouvrement simplement connexe  $\tilde{G}_0$  de  $G_0$ , le centre  $Z = \tilde{Z}_0$  de  $\tilde{G}_0$ , le sous-groupe  $V$  de  $Z$  tel que  $G_0 = \tilde{G}_0/V$ , cette unité  $V$  étant stable pour l'automorphisme intérieur associé à un élément de  $G_1$ . Dans le diagramme  $R_0^l$  de  $G_0$  relatif à  $T_0^l$ , l'unité est un réseau (unité)  $\delta_i$  dont la trace sur  $R_0^h$  est aussi la trace du réseau unité  $\delta_h$  de  $R^{(h)}(G_1)$ . Ces réseaux seront étudiés et construits au § 4; ici, nous n'étudions que les diagrammes considérés comme ensembles de plans singuliers.

1. *Structure d'un cycle.* Soient  $z \in T_1^{(h)}$ ,  $\varphi z$  l'automorphisme intérieur associé,

et  $\sigma$  l'effet de  $\varphi z$  dans  $R_0^l$ ; considérons une ligne quelconque de paramètres associés

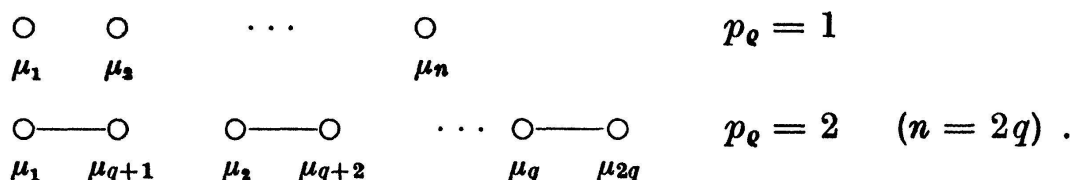
$$\varrho : \mu_1, \dots, \mu_n; \xi_1, \dots, \xi_n ;$$

on sait que  $\sigma$  permute circulairement les formes  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (§ 1, n° 4); alors les vecteurs associés  $\vec{\mu}_1, \dots, \vec{\mu}_n$  ont tous la même longueur, et la figure de SCHLÄFLI  $\mathfrak{F}(\mu_i)$  associée est du type



Elle est formée de  $q$  blocs  $B_1, \dots, B_q$  ayant évidemment tous un même nombre  $p$  de points, à cause de la transitivité de  $\{\sigma\}$  sur le cycle considéré. Les blocs  $B_1, \dots, B_q$  eux-mêmes sont permutés circulairement et transitivement. On peut avoir  $p = 1$ , ce que j'écris  $p_q = 1$ . Si  $p > 1$ , il existe un entier  $s$  tel que  $\sigma^s \mu_1 = \mu_2$ ; alors  $\sigma^s$  conserve  $B_1$  sans se réduire à l'identité sur  $B_1$ , ce qui entraîne  $\sigma^s \mu_1 = \mu_p$  et  $p = 2$ ; je pose ici  $p_q = 2$ .

**Proposition.** Si  $\varrho : \mu_1, \dots, \mu_n; \xi_1, \dots, \xi_n$  est une ligne de paramètres angulaires associés, alors le graphe de SCHLÄFLI associé à  $\mu_1, \dots, \mu_n$  est de l'un des types



2. *Diagramme  $D(N)$  (diagramme réduction).* Nous avons trouvé dans le support  $R_1^h$  du diagramme  $D(G_1)$  un point  $I$  dit origine paraissant jouir de propriétés particulières; étudions le normalisateur connexe  $N$  de l'élément  $x = f(I)$ . C'est d'abord un sous-groupe de rang  $h$  de  $G_0$  ayant un toroïde maximum  $T_0^h$ ; en examinant le tableau canonique (§ 2, n° 7), on voit que les paramètres  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$  relatifs à  $T^{(h)}(G_1)$  s'annulent sur  $I$ , ce qui signifie que  $N$  est tangent notamment aux plans  $\Lambda_{\varrho_1}, \dots, \Lambda_{\varrho_h}$  (§ 1, n° 1, 5), et les formes  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$  sont des paramètres angulaires de  $N$ ; comme l'angle polyèdre  $\varrho_1 > 0, \dots, \varrho_h > 0$  dans  $R_0^h$  est intérieur à  $P(G_0)$ , les formes  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$  constituent nécessairement une suite fondamentale de  $N$ . Les paramètres angulaires  $\pm \varrho_1, \dots, \pm \varrho_h, \dots, \pm \varrho_p$  de  $N$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ , et les  $(h-1)$ -plans  $\varrho_i \equiv 0 \pmod{1}$  forment dans  $R_0^h$  le diagramme  $D(N)$  de  $N$ . Notons que  $N$  possède un groupe fini  $\Phi(N)$  engendré par les symétries par rapport aux plans  $\varrho_1 = 0, \dots, \varrho_h = 0$ .

Je dis maintenant que  $N$  est un sous-groupe  $(H)_0$  de  $G_0$ .<sup>21)</sup> En effet, le centralisateur  $C(N)$  de  $N$  est dans  $T_0^l$  puisque  $N$  est régulier ; si  $c \in C(N)$ , l'automorphisme  $\varphi(c)$  conserve chaque plan  $\Pi_{\alpha_1}, \dots, \Pi_{\alpha_{n_1}}$  ainsi qu'un vecteur de  $\Lambda_{e_1}$  et les projections de ce vecteur sur les  $\Pi_{\alpha_j}$ , c'est-à-dire chaque vecteur de  $\Pi_{\alpha_1}, \dots, \Pi_{\alpha_{n_1}}$  ; il résulte de cela que  $\alpha_1(c), \dots, \alpha_{n_1}(c)$  sont entiers, ainsi que  $\beta_1(c), \dots, \gamma_{n_h}(c)$ , et  $c$  est dans le centre de  $G_0$ . Cela signifie que  $N$  est un sous-groupe  $(H)$  de  $G_0$  ; comme  $N$  a même diagonale principale  $t : e_1 = \dots = e_h$  que  $G_0$ , c'est bien un sous-groupe  $(H)_0$  de  $G_0$ .

On peut ajouter que  $N$  contient un sous-groupe principal  $\gamma$  de  $G_0$  relatif à la diagonale  $t$  ; d'ailleurs<sup>22)</sup>, on a  $\vec{e}_1 = \sum a_i \vec{\alpha}_i$  avec  $\sum a_i = 1$  et de plus  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n_1}$  vu l'effet de  $\sigma$ , d'où

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{n_1} \sum \vec{\alpha}_i.$$

Le normalisateur connexe de  $f(I')$ , où  $I' = I + \left( \frac{r_1}{n_1}, \dots, \frac{r_h}{n_h}, 0 \right)$  ( $r_i$  entiers) jouit des mêmes propriétés que le normalisateur de  $f(I)$ , en étant tangent notamment à  $h$  2-plans du type  $\Lambda_{e_i} + \frac{r'_i}{n_i}$ .

**Proposition.** Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} : e_1, \dots, e_1 + \frac{n_1 - 1}{n_1} k \\ e_h : \gamma_1, \dots, \gamma_{n_h} : e_h, \dots, e_h + \frac{n_h - 1}{n_h} k \end{array} \right.$$

le tableau canoniquement associé à la composante connexe  $G_1$  du groupe de LIE clos  $G$ . Le normalisateur connexe  $N$  de  $x = f(I)$  où  $I$  est l'origine  $(0, 0, \dots, 0, 1)$  de  $R_1^h$  est un sous-groupe  $(H)_0$  ayant une suite fondamentale  $e_1, \dots, e_h$ . Le diagramme  $D(N)$  de  $N$  est entièrement déterminé par les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_1^{n_1} \vec{\alpha}_i, \dots, \vec{e}_h = \frac{1}{n_h} \sum_1^{n_h} \vec{\gamma}_i$$

3. *Diagramme intersection  $D_\cap$ .* Les  $(l - 1)$ -plans singuliers de  $R_0^l$  coupent  $R_0^h$  suivant des familles de  $(h - 1)$ -plans singuliers recouvrant dans  $T_0^h$  les sous-groupes singuliers  $U_i$  restreints à  $T_0^h$ . On a vu que la symétrie par rapport à chacun de ces  $(h - 1)$ -plans est projetée sur une involution  $S_i|T_0^h$  (voir § 2, n° 5). De là résulte que l'intersection  $D_\cap = D(G_0) \cap R_0^h$  est un

<sup>21)</sup> [9], chap. III.

<sup>22)</sup> [9], p. 227.

diagramme, dit diagramme intersection par définition. Par quels vecteurs est-il défini?

Si le paramètre angulaire  $\mu_1$  de  $G_0$  ne se réduit pas sur  $R_0^h$  à l'un des paramètres  $\pm \varrho_i$  de  $N$  ( $i \leq h$ ), on a<sup>23)</sup> sur  $R_0^h$  :  $\bar{\mu}_1 = m\varrho$ , où  $\varrho$  est l'un des  $\pm \varrho_i$  ( $i \leq h$ ), soit  $\varrho_1$  par exemple en faisant usage de  $\Phi(N)$  et en changeant éventuellement les notations. Alors, si  $p_{\varrho_1} = p_1 = 1$ , on a  $\mu_1 = \sum m_i \alpha_i$ , d'où  $m = 1$ , et  $\mu_1$  est l'un des  $\alpha_i$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Si  $p_1 = 2$ , il vient  $m = 2$ ,  $\mu_1 = \alpha_1 + \alpha_{q+1}$  par exemple (voir n° 1). Dans ce cas, la famille des  $(h-1)$ -plans singuliers parallèles à  $\varrho_1 = 0$  est définie par  $p_1 \varrho_1 \equiv 0 \pmod{1}$ . Les vecteurs qui définissent le diagramme sont  $\vec{p_1 \varrho_1}, \dots, \vec{p_h \varrho_h}$ .

**Proposition.** *L'intersection  $D_\wedge = D(G_0) \wedge R_0^h$  est un diagramme de support  $R_0^h$ , déterminé par les vecteurs*

$$\vec{p_1 \varrho_1}, \dots, \vec{p_h \varrho_h} \quad (p_i = 1 \text{ ou } 2).$$

*Remarque.* Si  $p_1 = p_2 = \dots = p_h = 1$ , alors les diagrammes  $D(N)$  et  $D_\wedge$  coïncident.

4. *Formation du diagramme  $D(G_1)$ .* Considérons  $\varrho_1$ , avec  $p_{\varrho_1} = p_1 = 2$ , et la ligne associée

$$\varrho_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_{2q} : \varrho_1, \varrho_1 + \frac{k}{2q}, \dots, \varrho_1 + \frac{2q-1}{2q}k \quad (n_1 = 2q)$$

alors  $\alpha_1 + \alpha_{q+1}, \alpha_2 + \alpha_{q+2}, \dots, \alpha_q + \alpha_{2q}$  sont égaux à  $2\varrho_1$  sur  $R_0^h$ , et il n'y a pas d'autre paramètre angulaire qui se réduise à  $2\varrho_1$  sur  $R_0^h$  (voir n° 1). Cela donne une ligne de paramètres associés

$$2\varrho_1 : \alpha_1 + \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_q + \alpha_{2q} : 2\varrho_1 + \nu_1 k, \dots, 2\varrho_1 + \left(\nu_1 + \frac{q-1}{q}\right)k.$$

Quelle est la valeur de  $\nu_1$ ? Remarquons que l'on peut supposer  $0 \leq \nu_1 < 1/q$  (§ 2, n° 4). On ne peut avoir  $\nu_1 = 0$ ; dans un tel cas,  $N$  serait tangent à  $A_{2\varrho_1}$ , et  $\varrho_1, 2\varrho_1$  seraient des paramètres angulaires de  $N$ , ce qui est impossible. Ainsi,  $0 < \nu_1 < 1/q$ , et le plan  $2\varrho_1 + \nu_1 = 0$  de  $R_1^h$  est entre  $\varrho_1 = 0$  et  $\varrho_1 = -1/2q$ , c'est-à-dire entre deux plans consécutifs de la famille des  $\varrho_1 + p/2q \equiv 0 \pmod{1}$ . Comme la symétrie par rapport à  $2\varrho_1 + \nu_1 = 0$  conserve  $D(G_1)$ , le plan en question est au milieu, et est défini par  $\varrho_1 = -1/4q$ , d'où  $\nu_1 = 1/2q$ .

<sup>23)</sup> [9], p. 239.

**Proposition.** Si  $p_1 = 2$ , on a les deux lignes associées

$$\begin{aligned} \varrho_1 : \alpha_1, \dots, \alpha_{2q} : \varrho_1, \varrho_1 + \frac{k}{2q}, \dots, \varrho_1 + \frac{2q-1}{2q} k, \\ 2\varrho_1 : \alpha_1 + \alpha_{q+1}, \dots, \alpha_q + \alpha_{2q} : 2\varrho_1 + \frac{k}{2q}, 2\varrho_1 + \frac{3k}{2q}, \dots, 2\varrho_1 + \frac{2q-1}{2q} k. \end{aligned}$$

En appliquant  $\Phi(N)$  à  $\varrho_1, \dots, \varrho_h, p_1\varrho_1, \dots, p_h\varrho_h$ , on obtient toutes les traces sur  $R_0^h$  des paramètres angulaires de  $G_0$  c'est-à-dire aussi toutes les traces des paramètres angulaires de  $G_1$ , d'où le tableau complet associé. Par quels vecteurs peut-on déterminer le diagramme  $D(G_1)$ ?

Dans  $R_1^h$ , nous avons les familles  $\varrho_i + p/n_i \equiv 0 \pmod{1}$  avec  $p=0, 1, \dots, n_i - 1$  en supposant  $p_i = 1$ ; on définit d'un seul coup tous les plans singuliers parallèles à  $\varrho_i = 0$  dans  $R_1^h$  en posant  $n_i\varrho_i \equiv 0 \pmod{1}$ . Maintenant, si  $p_i = 2$ , on aura les deux familles  $\varrho_i + p/2q_i \equiv 0$  et  $2\varrho_i + p/2q_i \equiv 0 \pmod{1}$ , que l'on définit simultanément en posant  $p_i n_i \varrho_i \equiv 0 \pmod{1}$ , avec  $n_i = 2q_i$ . En résumé, on a dans tous les cas la formule unique  $p_i n_i \varrho_i \equiv 0 \pmod{1}$ , et le diagramme  $D(G_1)$  sera défini par les vecteurs  $p_1 n_1 \vec{\varrho}_1, \dots, p_h n_h \vec{\varrho}_h$ , ou  $p_1 \Sigma \vec{\alpha}_i, \dots, p_h \Sigma \vec{\gamma}_i$  (voir proposition n° 2).

**Théorème.** Le diagramme  $D(G_1)$  associé à la suite fondamentale

$$\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \dots, \beta_{n_2}; \dots; \gamma_1, \dots, \gamma_{n_h}$$

et à la permutation automorphique qui induit une permutation circulaire sur chaque suite partielle, ce diagramme est défini par les vecteurs

$$\vec{\varrho}'_1 = p_1 \sum_1^{n_1} \vec{\alpha}_i = p_1 n_1 \vec{\varrho}_1, \dots, \vec{\varrho}'_h = p_h \sum_1^{n_h} \vec{\gamma}_i = p_h n_h \vec{\varrho}_h.$$

Le coefficient  $p_i$  est égal à 1 si les vecteurs correspondants sont perpendiculaires deux à deux, sinon  $p_i = 2$ .

**Polyèdre fondamental  $P(G_1)$ .** Ce qui précède permet d'introduire dans  $R_1^h$  un système de coordonnées cartésiennes  $\varrho'_1, \dots, \varrho'_h$  d'origine  $I$ , avec  $\varrho'_i(A) = -\vec{\varrho}'_i \cdot \vec{IA}$ . Les inégalités  $\varrho'_1 \geq 0, \dots, \varrho'_h \geq 0$  définissent un angle polyèdre fondamental du diagramme  $D(G_1)$  qui contient un polyèdre fondamental ayant un sommet en  $I$ ; nous avons ainsi par définition le polyèdre fondamental  $P(G_1)$ , défini par des inégalités

$$\varrho'_1 \geq 0, \dots, \varrho'_h \geq 0; \omega'_1 \leq 1, \dots, \omega'_r \leq 1,$$

où les  $\omega'_i$  sont les formes dominantes correspondantes.

Tout  $y \in G_1$  possède dans  $P(G_1)$  au moins un représentant  $Y$ ,  $f(Y)$  étant un conjugué de  $y$  relativement à  $G_0$ . Le domaine fondamental  $\mathfrak{D}(G_1)$  d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$  est dans  $P(G_1)$ ; son étude sera abordée au § 5.

6. *Structure du normalisateur d'un élément de  $T_1^h$* . Nous avons déjà étudié le normalisateur  $N$  de  $x = f(I)$  où  $I$  est origine dans  $R_1^h$ ; quelle est en général la structure du normalisateur  $N_y$  d'un élément  $y$  quelconque de  $G_1$ ? Il suffit de prendre  $y \in T_1^{(h)}$ , et  $Y \in R_1^h$ , avec  $y = f(Y)$ .

D'abord  $N_y$ , qui possède un toroïde maximum  $T_0^h$ , est un sous-groupe de rang  $h$ , de diagramme situé dans le recouvrement  $R_0^h$  de  $T_0^h$ . Cela étant, par  $Y$  passent un certain nombre de plans singuliers du diagramme  $D(G_1)$ , formant un ensemble  $\mathfrak{R}_1$ . Chaque plan de  $\mathfrak{R}_1$  appartient à une famille  $m\rho + k\frac{p}{n} = c$ , où  $c$  est un entier variable ( $p$  constant,  $m = 1$  ou  $2$ ); alors  $m\rho$  est un paramètre angulaire de  $N_y$  défini sur  $R_0^h$ , avec  $N_y$  tangent au 2-plan  $\Lambda_{m\rho + k\rho/n}$ . Réciproquement, tout paramètre angulaire de  $N_y$  est obtenu de cette manière. Les  $(h-1)$ -plans  $m\rho = 0$  correspondant dans  $R_0^h$  aux plans de  $\mathfrak{R}_1$  forment un ensemble  $\mathfrak{R}_0$  déduit de  $\mathfrak{R}_0$  par la translation  $\overrightarrow{YO}$ , et les vecteurs  $m\vec{\rho}$  sont les vecteurs du diagramme de  $N_y$  dans  $R_0^h$ .

Remarquons qu'un angle polyèdre fondamental  $\mathfrak{U}_0$  de  $N_y$  dans  $\mathfrak{R}_0$  est déjà représenté par  $\mathfrak{U}_1$  dans  $\mathfrak{R}_1$ , à l'aide de la translation  $\overrightarrow{OY}$  appliquée à  $\mathfrak{U}_0$ ;  $\mathfrak{U}_1$  n'est traversé par aucun  $(h-1)$ -plan singulier issu de  $Y$  (sinon  $\mathfrak{U}_0$  ne serait pas fondamental dans  $\mathfrak{R}_0$ ).

Supposons maintenant  $Y \in P(G_1)$ , ce qui est toujours possible; je désigne par

$$\begin{aligned} \varrho'_{d_1}, \dots, \varrho'_{d_s} & \quad (\text{nulles sur } Y) \\ \omega'_{l_1}, \dots, \omega'_{l_k} & \quad (\text{égales à 1 sur } Y) \end{aligned} \tag{1}$$

toutes les formes  $\varrho'_i, \omega'_j$  entières sur  $Y$ . Elles définissent un angle polyèdre  $\mathfrak{U}_1$  circonscrit à  $P(G_1)$ ; l'application  $m\rho + k\frac{p}{n} \rightarrow m\rho$  de tout à l'heure fait correspondre aux formes (1) des formes

$$\begin{aligned} \varrho_{d_1}, \dots, \varrho_{d_s} \\ \bar{\omega}'_{l_1}, \dots, \bar{\omega}'_{l_k} \end{aligned} \tag{2}$$

définies dans  $R_0^h$ , constituant une suite fondamentale de  $N_y$ .

La structure de  $N_y$  est pratiquement déterminée en deux temps :

a)  $\vec{\varrho}'_{d_1}, \dots, \vec{\varrho}'_{d_s}, -\vec{\omega}'_{l_1}, \dots, -\vec{\omega}'_{l_k}$  donnent l'angle  $\mathfrak{U}_1$  par simple lecture de la figure de SCHLÄFLI de  $P(G_1)$ ,



b)  $\vec{\varrho}_{d_1}, \dots, \vec{\varrho}_{d_s}, -\vec{\omega}'_{l_1}, \dots, -\vec{\omega}'_{l_k}$  constituent la figure fondamentale de  $N_y$ . En particulier, si  $Y$  est un sommet de  $P(G_1)$  et si  $N$  est simple, on a un procédé analogue à celui décrit dans [1].

#### § 4. Construction du réseau unité

1. *Eléments du centre dans le toroïde caractéristique  $T_0^h$ .* Reprenons les notations déjà introduites (Chap. I, § 2, n° 1, et III, § 3 introduction) avec encore  $f^{-1}(e) = \tilde{f}^{-1}(V) = \delta_i$  et  $Z^{(l)} = \tilde{f}^{-1}(Z) \cap P(G_0)$ .

Je dis que  $\tilde{f}$  est biunivoque sur  $Z^{(l)}$  : en effet, si  $A, B \in Z^{(l)}$  avec  $\tilde{f}(A) = \tilde{f}(B)$ , alors  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur de  $\tilde{\delta}_i$  arête de  $P(G_0)$ , ce qui est impossible si  $A \neq B$ .

Maintenant, si  $y \in T_1^{(h)}$ , l'automorphisme  $\varphi y$  est représenté par une transformation linéaire  $\sigma$  dans  $R_0^l$ ;  $\sigma$  conserve  $P(G_0)$  et permute circulairement les éléments de chaque suite partielle dans  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \dots; \gamma_1, \dots, \gamma_{n_h}$ . Le point  $A$  de coordonnées canoniques

$$A = \begin{pmatrix} a_1, \dots, a_{n_1} \\ b_1, \dots, b_{n_2} \\ \dots\dots\dots \\ c_1, \dots, c_{n_h} \end{pmatrix} \text{ est appliqué sur } \sigma A = A' = \begin{pmatrix} a_{n_1}, a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1} \\ b_{n_2}, b_1, \dots, b_{n_2-1} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n_h}, c_1, \dots, c_{n_h-1} \end{pmatrix}$$

et on a (1)  $(\varphi y)\tilde{f} = \tilde{f}\sigma$ .

Je désigne par  $V_1$  le sous-groupe des éléments de  $Z = \tilde{Z}_0$  centre de  $\tilde{G}_0$  qui sont conservés par  $\varphi y$ . On a

$$V_1 = \tilde{f}[Z^{(l)} \cap R_0^h]; \quad (2)$$

en effet, si  $a \in V_1$ , il existe  $A \in Z^{(l)}$ , avec  $\tilde{f}(A) = a$ ;  $\sigma A = B$  entraîne  $\tilde{f}B = \tilde{f}\sigma A = (\varphi y)\tilde{f}(A) = (\varphi y)a = a = \tilde{f}(A)$ , d'où  $A = B$  puisque  $\tilde{f}$  est biunivoque sur  $Z^{(l)}$ , et  $\sigma A = A$ , ce qui implique  $A \in R_0^h$ ,  $A \in Z^{(l)} \cap R_0^h$ . Inversement, si  $A \in Z^{(l)} \cap R_0^h$ , on a  $\tilde{f}(A) \in \tilde{T}_0^h \cap Z \subset V_1$ . On peut écrire immédiatement

$$V_1 = Z \cap \tilde{T}_0^h. \quad (3)$$

Cherchons enfin l'intersection du centre  $Z_0$  de  $G_0$  et du toroïde caractéristique  $T_0^h$ . Cela revient à chercher les  $z \in Z$  tels que  $\lambda z \in T_0^h$ . Il existe  $u \in \tilde{T}_0^h$  avec  $\lambda u = \lambda z$ , d'où  $\lambda(u^{-1}z) = e$ ,  $u^{-1}z \in V$ ,  $u \in Z$ ,  $u \in Z \cap \tilde{T}_0^h$ ,  $u \in V_1$  (formule 3), et  $z \in VV_1$ . Réciproquement, si  $z \in VV_1$ , on a  $\lambda z \in T_0^h$ . Il vient  $Z_0 \cap T_0^h = \lambda VV_1 = \lambda V_1$

$$Z_0 \cap T_0^h = \lambda V_1. \quad (4)$$



**Proposition.** *Les éléments du centre  $Z_0$  de  $G_0$  qui sont dans le toroïde caractéristique  $T_0^h$  s'obtiennent en projetant canoniquement les éléments centraux du polyèdre fondamental  $P(G_1)$  qui sont stables pour l'isométrie associée à  $G_1$ .*

*Remarque.* Les éléments de  $Z_0$  qui sont stables pour  $\varphi y$  forment un sous-groupe  $V_0$  qui contient  $\lambda V_1$ , et qui peut en différer.

2. *Construction de  $T^{(h)}(G_1)$ .* D'après le chapitre I, § 3, le groupe de LIE clos  $G$  non connexe contient une extension  $\mathfrak{Z}$  du centre  $Z_0$  de  $G_0$ , cette extension caractérisant  $G$  en tant qu'extension de  $G_0$ ; de plus,  $\mathfrak{Z}$  est le centralisateur d'un sous-groupe principal de  $G_0$ . Je me restreins dans  $G$  au sous-groupe  $\mathfrak{G}_1$  qui est engendré par la composante connexe étudiée  $G_1$ , et j'appelle  $r$  l'ordre de  $G_1$  dans  $G/G_0$ ; je pose  $\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z} \cap G_1 = Z_0 + Z_1 + \dots$ , avec  $Z_1 \subset G_1$ . Prenons  $x$  quelconque dans  $Z_1$ , cet élément définissant  $T^{(h)}(G_1)$ . On a  $x^r \in Z_0$  et même  $x^r \in V_0$ . Deux cas sont possibles

1.  $x^r \in \lambda V_1$ ; alors  $x^r \in T_0^h$ , et  $T^{(h)}(G_1)$  possède exactement  $r$  composantes connexes; il existe dans ce cas un sous-groupe  $Z_r$  de  $T^{(h)}(G_1)$ , tel que  $T^{(h)}(G_1) = T_0^h \times Z_r$  (produit direct). Alors  $\mathfrak{G}_1$  est un produit semi-direct  $(G_0 \times Z_r)$ . L'élément  $x$  est un générateur de  $Z_r$  si  $x^r = e$ .

2.  $x^r \notin \lambda V_1$ ; il existe ici un entier  $p > 1$  minimum tel que  $x^{pr} \in T_0^h$ . Il existe un sous-groupe  $Z_{rp}$  de  $T^{(h)}(G_1)$  avec  $T^{(h)}(G_1) = T_0^h \times Z_{rp}$ ,  $p$  des composantes connexes de ce groupe étant dans  $G_0$ .

Remarquons ceci: Lorsque  $G_0 = \tilde{G}_0$ , on a  $\lambda V_1 = V_1 = V_0 \subset \tilde{T}_0^h$ , et  $\tilde{\mathfrak{G}}_1$  est un produit semi-direct. De même, si  $G_0 = \tilde{G}_0/Z$ , on a  $Z_0 = e$ ,  $x^r = e$ , et on a aussi un produit semi-direct.

**Théorème.** *Toute extension cyclique finie d'un groupe de LIE clos connexe semi-simple, simplement connexe ou de centre réduit à  $e$ , est un produit semi-direct.*

3. *Réseau-trace.* Notons  $\tilde{\delta}_{0h} = \tilde{\delta}_i \cap R_0^h$  le réseau-trace minimum, et  $\delta_{0h} = \delta_i \cap R_0^h$  le réseau-trace. Je dis qu'on a

$$\tilde{f} \delta_{0h} = V \cap V_1.$$

En effet, si  $A \in \delta_{0h}$ , on a certainement  $\tilde{f}A \in V$  puisque  $\tilde{f}\delta_i = V$ ;  $A \in R_0^h$  entraîne  $\sigma A = A$ ,  $\tilde{f}A \in V_1$ , d'où  $\tilde{f}\delta_{0h} \subset V \cap V_1$ . Maintenant, si  $a \in V \cap V_1$ , il existe  $A \in Z^{(i)}$ , avec  $\tilde{f}A = a$ ; on a  $A \in \delta_i$ , et  $A \in R_0^h$  en vertu de  $(\varphi x)a = a$  comme au n° 1; ainsi,  $A \in \delta_{0h}$ , et  $\tilde{f}$  applique  $\delta_{0h}$  sur  $V \cap V_1$ . On peut écrire

$$\delta_{0h} = \tilde{f}^{-1}(V \cap V_1) \cap R_0^h$$

ce qui montre que  $\delta_{0h}$  est engendré par  $\tilde{f}^{-1}(e) \cap R_0^h = \tilde{\delta}_{0h}$  et par les sommets de  $P(G_0)$  qui représentent  $V \cap V_1$ .

Il ne reste plus qu'à construire  $\tilde{f}^{-1}(e) \cap R_0^h = \tilde{\delta}_i \cap R_0^h$ ; on sait que  $\tilde{\delta}_i$  est engendré par les extrémités des  $l$  vecteurs  $2\vec{\alpha}_i/\vec{\alpha}_i^2, \dots, 2\vec{\gamma}_i/\vec{\gamma}_i^2$ . Si

$$\vec{v} = \sum a_i 2\vec{\alpha}_i/\vec{\alpha}_i^2 + \dots + \sum c_i 2\vec{\gamma}_i/\vec{\gamma}_i^2 \quad (a_i, \dots, c_i \text{ entiers})$$

est dans  $R_0^h$ , on a  $\sigma\vec{v} = \vec{v}$ , d'où  $a_1 = \dots = a_{n_1}; \dots; c_1 = \dots = c_{n_h}$  et réciproquement. Les  $h$  vecteurs  $2\sum\vec{\alpha}_i/\vec{\alpha}_i^2, \dots, 2\sum\vec{\gamma}_i/\vec{\gamma}_i^2$  forment donc une base de  $\tilde{\delta}_{0h}$ . Un calcul facile prouve de plus que  $2\sum\vec{\alpha}_i/\vec{\alpha}_i^2 = 2p_1\vec{\varrho}_1/(p_1\vec{\varrho}_1)^2, \dots$  en sorte que finalement on a la base suivante pour  $\tilde{\delta}_{0h}$ :

$$2p_1\vec{\varrho}_1/(p_1\vec{\varrho}_1)^2, \dots, 2p_h\vec{\varrho}_h/(p_h\vec{\varrho}_h)^2.$$

4. *Construction du réseau unité de  $R^{(h)}(G_1)$ .* Ce réseau unité a été défini au § 2. Comme nous connaissons  $\delta_{0h}$ , il ne reste plus qu'à trouver  $O_1$  dans  $R_q^h = (R_0^h, q)$  avec  $f(O_1) = e$  ( $q$  est le nombre des composantes connexes de  $T^{(h)}(G_1)$ ).

La droite  $OO_1$  perce  $R_1^h$  en un point  $J$  avec  $qJ = O_1$ ; prenons  $x \in Z_1$  (cf. n° 2), et  $I \in R_1^h$  tel que  $f(I) = x$ . Comme  $x$  est dans le centralisateur d'un sous-groupe  $\gamma$  principal de  $G_0$ , alors le normalisateur  $N_x$  de  $x$  est un sous-groupe  $(H)_0$  de  $G_0$ , de toroïde maximum  $T_0^h$ . Une suite fondamentale de  $N_x$  s'obtient par restriction à  $R_0^h$  des paramètres angulaires d'une suite fondamentale de  $G_0$ ; on peut prendre  $\varrho_1, \dots, \varrho_h$ . Il existe alors  $h$  paramètres angulaires  $\varrho_i + r'_i/n_i$  ( $i = 1, \dots, h$ ) entiers sur  $I$ , et ce point est une origine dans  $R_1^h$  (cf. § 2, n° 4, 7). On a  $x^q = v \in T_0^h$ . L'élément  $v$  est dans le centre  $Z_0$  de  $G_0$  et dans  $T_0^h$ ; il peut être représenté dans  $Z^{(1)}$  par  $W \in R_0^h$ . On a ainsi

$$qI \in R_q^h, \quad qI - W \in \delta_h.$$

Posons  $J = I = W/q$ . Cette formule permet dans tous les cas de situer  $J$  dans  $P(G_1)$ , en faisant éventuellement usage d'un automorphisme intérieur de  $G$  conservant  $T^{(h)}(G_1)$  et  $T_1^{(h)}$ .

**Théorème.** *Le réseau unité  $\delta_h$  de  $R^{(h)}(G_1)$  est engendré par les extrémités des  $h$  vecteurs  $2p_i\vec{\varrho}_i/(p_i\vec{\varrho}_i)^2$ , par les sommets de  $P(G_0)$  situés dans  $V \cap V_1$ , et par le point  $qJ$ , où  $J = I - W/q$ ,  $W$  étant un représentant de  $x^q$  dans  $P(G_0)$ , avec  $x = f(I)$ ,  $I$  étant origine dans  $R_1^h$ .*

### § 5. Domaine fondamental $\mathfrak{D}(G_1)$ d'éléments conjugués

1. *Réduction du problème.* Pour trouver dans le polyèdre fondamental  $P(G_1)$  un domaine fondamental  $\mathfrak{D}(G_1)$  d'éléments conjugués relativement à  $G_0$ , il faut chercher parmi les isométries du diagramme  $D(G_1)$  celles qui sont induites par des automorphismes intérieurs  $\varphi z$  avec  $z \in G_0$ ,  $(\varphi z)T_1^{(h)} = T_1^{(h)}$ ; autrement dit, il faut chercher le normalisateur  $N(T_1^{(h)})$  de  $T_1^{(h)}$  dans  $G_0$ .

Soit donc  $z \in G_0$ , avec  $(\varphi z)T_1^{(h)} = T_1^{(h)}$ ; on a certainement  $(\varphi z)T_0^h = T_0^h$  et  $(\varphi z)T_0^l = T_0^l$ ; l'opération  $\overline{\varphi z}$  induite dans  $R_0^h$  applique le polyèdre fondamental  $P(N)$  sur  $P'(N)$  et il existe  $b \in N$  avec  $(\varphi b)P' = P$ ; alors  $\overline{\varphi b z}$  conserve  $P(N)$  ainsi que  $P(G_0)$ , avec  $b z \in G_0$ , ce qui entraîne  $b z \in T_0^l$ . A l'aide de  $\Phi(N)$ , on peut donc se ramener à la recherche des  $a \in T_0^l$  tels que  $(\varphi a)T_1^{(h)} = T_1^{(h)}$ , qui constituent  $N(T_1^{(h)}) \cap T_0^l$ .

Considérons un tel élément  $a$ , et soit  $x \in T_1^{(h)}$ ; on a par hypothèse  $axa^{-1} = bx$ , avec  $b \in T_0^h$ , d'où  $axa^{-1}x^{-1} = b$ ; or  $axa^{-1} = a'$  est indépendant de l'élément  $x$  choisi dans  $T_1^{(h)}$ , en sorte que l'on peut écrire

$$\boxed{aa'^{-1} = b \in T_0^h} \quad (1)$$

Réciproquement, si un  $a \in T_0^l$  vérifie cette relation, alors  $(\varphi a)T_1^{(h)} = T_1^{(h)}$ . Remarquons que  $(\varphi a)$  multiplie chaque élément de  $T_1^{(h)}$  par  $b$  fixe (translation dans  $T_1^{(h)}$ ).

2. *Recherche des  $a \in T_0^l$  tels que  $aa'^{-1} = b \in T_0^h$ .* Introduisons dans  $R_0^l$  le sous-espace  $R^{l-h}$  totalement orthogonal à  $R_0^h$  issu de  $O$ . Il est constitué par l'ensemble des points (coordonnées canoniques)

$$X = \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_{n_1} \\ \dots\dots\dots \text{ avec } \Sigma x_i = 0, \dots, \Sigma z_i = 0 \\ z_1, z_2, \dots, z_{n_h} \end{cases}$$

On peut remarquer que pour tout  $A \in R_0^l$ , on a  $A - A' \in R^{l-h}$  (cf. n° 1).

Soit maintenant  $a \in T_0^l$  vérifiant (1); prenons  $A \in R_0^l$  avec  $f(A) = a$ ; on a  $A - A' = L^* \in R^{l-h}$ , et

$$f(L^*) = f(A - A') = f(A)f(-A') = aa'^{-1} = b \in T_0^h.$$

On a  $f(L^*) \in T_0^h$  et le sous-espace  $L^* + R_0^h$  contient un élément  $L$  du réseau unité  $\delta_i$ . Réciproquement, soit  $L \in \delta_i$  puis  $L^*$  sa projection orthogonale sur  $R^{l-h}$ ; formons le système  $A - A' = L^*$ ; les  $n_1$  premières équations sont

$$a_1 - a_{n_1} = l_1^*, \quad a_2 - a_1 = l_2^*, \dots, a_{n_1} - a_{n_1-1} = l_{n_1}^* \quad \text{où} \quad \Sigma l_i^* = 0.$$

Elles admettent la solution

$$a_1 = l_1^*, a_2 = l_1^* + l_2^*, a_3 = l_1^* + l_2^* + l_3^*, \dots, a_{n_1} = l_1^* + \dots + l_{n_1}^* = 0.$$

Les  $h - 1$  autres lignes du système fournissent des résultats analogues. Cela prouve que le système  $A - A' = L^*$  est toujours résoluble.  $A$  désignant une solution, on peut écrire

$$A - A' = L + (L^* - L) \quad \text{où} \quad L^* - L \in R_0^h$$

puis :

$$f(A - A') = f(L)f(L^* - L) \quad \text{et} \quad aa'^{-1} = f(L^* - L) \in T_0^h.$$

**Proposition 1.** On obtient tous les  $a \in T_0^l$  tels que  $aa'^{-1} \in T_0^h$  en prenant les  $A \in R_0^l$  tels que  $A - A' = L^*$ , où  $L^*$  désigne la projection sur  $R^{l-h}$  d'un élément  $L$  quelconque du réseau unité  $\delta_l$ .

La formule  $b = -f(L - L^*)$  montre de plus qu'on obtient les  $b$  de  $aa'^{-1} = b \in T_0^h$  en formant les éléments du type  $L - L^*$ ; or un tel élément n'est pas autre chose que la projection de  $L$  sur  $R_0^h$ .

**Proposition 2.** Les éléments  $b$  susceptibles de figurer dans  $aa'^{-1} = b \in T_0^h$  sont les images par  $f$  des projections sur  $R_0^h$  des points du réseau unité  $\delta_l$ .

Considérons maintenant un système de générateurs du réseau  $\delta_l$ :  $L_1, L_2, \dots$  et soit  $L = l_1 L_1 + l_2 L_2 + \dots$  un élément quelconque de ce réseau ( $l_i$  entiers). On a  $L^* = \Sigma l_i L_i^*$ ; soit  $A_i$  une solution de  $A - A' = L^*$  et posons  $A = \Sigma l_i A_i$ . On a  $A - A' = \Sigma l_i A_i - (\Sigma l_i A_i)' = \Sigma l_i A_i - \Sigma l_i A_i' = \Sigma l_i (A_i - A_i') = \Sigma l_i L_i^* = L^*$ .

**Proposition 3.** On obtient un système de générateurs du sous-groupe des  $a \in T_0^l$  tels que  $aa'^{-1} \in T_0^h$  en résolvant les systèmes  $A - A' = L^*$  où  $L^*$  est la projection sur  $R^{l-h}$  d'un élément  $L$  qui décrit un système de générateurs du réseau unité  $\delta_l$ .

Remarquons que si  $A$  est une solution de  $A - A' = L^*$ , tout  $A + t$  où  $t \in R_0^h$  est aussi une solution.

3. *Constructions.* Un système de générateurs du réseau unité  $\delta_l$  est donné par les extrémités des  $l$  vecteurs  $2\vec{\alpha}_i/\vec{\alpha}_i^2, \dots, 2\vec{\gamma}_i/\vec{\gamma}_i^2$  et par les sommets de  $P(G_0)$  qui appartiennent au réseau unité  $\delta_l$ .

Projetons ces générateurs sur  $R_0^h$ ; la projection de  $\vec{\alpha}_k$  sur  $R_0^h$  est  $\vec{\varrho}_1 = \frac{1}{n_1} \Sigma \vec{\alpha}_i$ .

En effet,  $\vec{\alpha}_k \cdot \vec{x} = \vec{\alpha}_j \cdot \vec{x}$  pour tout  $\vec{x} \in R_0^h$  entraîne  $\Sigma \vec{\alpha}_j \cdot \vec{x} = n_1 \vec{\alpha}_k \cdot \vec{x}$ ,  $\vec{x} (\vec{\alpha}_k - \frac{1}{n_1} \Sigma \vec{\alpha}_j) = 0$ ,  $\vec{x} (\vec{\alpha}_k - \vec{\varrho}_1) = 0$  et  $\vec{\varrho}_1 - \vec{\alpha}_k \in R_0^h$ . Cela étant, la projection de  $2\vec{\alpha}_k/\vec{\alpha}_k^2$  sur  $R_0^h$  est  $2\vec{\varrho}_1/\vec{\alpha}_1^2$ ; un calcul facile montre encore que cette

projection s'écrit  $2\vec{\varrho}'_1/\vec{\varrho}'_1{}^2$  avec  $\vec{\varrho}'_1 = n_1 p_1 \vec{\varrho}_1$  (cf. § 3, n° 4); or  $2\vec{\varrho}'_i/\vec{\varrho}'_i{}^2 (i=1, \dots, h)$  est un système de générateurs du réseau minimum de  $D(G_1)$ .

**Proposition 4.** *La projection sur  $R_0^h$  du réseau minimum de  $G_0$  correspond aux translations du réseau minimum du diagramme  $D(G_1)$ .*

Ces translations ne sont pas en général des translations de recouvrement; on les obtient à l'aide de produits de symétries par rapport à des  $(h-1)$ -plans singuliers parallèles du diagramme  $D(G_1)$ .

Les sommets de  $P(G_0)$  qui sont dans le réseau unité fournissent par projection d'autres translations. Supposons par exemple que le sommet  $P_1$  opposé à la face  $\alpha_1 = 0$  dans  $P(G_0)$  soit dans  $\delta_i$ . Les coordonnées canoniques de  $P_1$  sont

$$P_1 \begin{cases} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad P_1^* = \begin{cases} 1 - 1/n_1, -1/n_1, \dots, -1/n_1 \\ 0, 0, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{cases}$$

$$A \begin{cases} (n_1 - 1)/n_1, (n_1 - 2)/n_1, \dots, 1/n_1, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 0, 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} 1/n_1, 1/n_1, \dots, 1/n_1 \\ 0, 0, \dots, 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots, 0 \end{cases}$$

ou  $B(1/n_1, 0, 0, \dots, 0)$  en coordonnées  $\varrho_i$ . Alors  $-\vec{OB}$  est une translation du diagramme  $D(G_1)$  conservant ce diagramme, et induite par l'automorphisme intérieur  $\varphi a$  avec  $a = f(A) \in T_0^I$ . On aurait des résultats analogues avec d'autres sommets de  $P(G_0)$  appartenant à  $\delta_i$ .

Si  $G_0 = \tilde{G}_0$  est simplement connexe, de telles translations n'existent pas et il n'y a que les translations du réseau minimum de  $D(G_1)$ . Cela entraîne le théorème :

**Théorème.** *Le polyèdre fondamental  $P(G_1)$  est un domaine fondamental d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$  si cette composante neutre est simplement connexe.*

Ce théorème était bien connu dans le cas  $G_1 = \tilde{G}_0$ . Dans le cas général, connaissant encore les translations  $\vec{OB}$ , on pourra trouver dans  $P(G_1)$  un domaine fondamental  $\mathfrak{D}(G_1)$  d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$ , éventuellement plus petit que  $P(G_1)$ .

Pratiquement, on considère dans  $D(G_1)$  le repère  $\vec{\varrho}'_1, \dots, \vec{\varrho}'_h$  d'origine  $I$ ;

le réseau minimum est formé des extrémités des vecteurs  $2\vec{\varrho}'_i/\vec{\varrho}'_i{}^2$  et de leurs combinaisons linéaires à coefficients entiers. Cela étant, les autres translations  $\vec{OB}$  sont déterminées par les composantes covariantes  $b_i$  de  $\vec{OB}$  dans le système  $(\varrho')$ . On forme alors la matrice  $(g_{ij}) = (\vec{\varrho}'_i \cdot \vec{\varrho}'_j)$ , puis l'inverse  $(g^{ij})$ ; alors  $b^i = g^{ij}b_j$ , ce qui permet de comparer directement les translations  $\vec{OB}$  à celles du réseau minimum. Dans les exemples traités ci-dessous (§ 6), j'ai utilisé cette méthode sans présenter le détail des calculs.

4. *Recherche des  $a \in T_0^l$  invariants par  $\varphi x$ , où  $x \in T_1^{(h)}$ .* Ici, on cherche les éléments  $a \in T_0^l$  avec  $aa'^{-1} = e$ , ou  $a = a'$ ; la théorie ci-dessus s'applique avec  $b = e$ .  $L - L^*$  est dans le réseau unité, ainsi que  $L^*$ . Ainsi, on obtient tous les  $a \in T_0^l$  tels que  $a = a'$  en prenant les  $A \in R_0^l$  tels que  $A - A' = L^*$ , le point  $L$  et sa projection sur  $R_0^h$  étant dans le réseau unité.

Remarquons que les nombres  $a_1 - a_{n_1}, a_2 - a_1, \dots, a_{n_1} - a_{n_1-1}$  sont entiers puisque  $L^*$  est dans  $\delta_1$ . Or, on peut faire varier  $A$  dans  $A + R_0^h$  sans changer  $L^*$ , ce qui permet de supposer  $a_{n_1}, b_{n_2}, \dots, c_{n_h}$  entiers; alors  $a_1, a_2, \dots, a_{n_1-1}$  successivement sont aussi entiers, ainsi que les  $b_i, \dots, c_i$ . Cela signifie que  $A + R_0^h$  contient un point du réseau central, et la classe  $aT_0^h$  rencontre le centre  $Z_0$  de  $G_0$ .

**Proposition 5.** *Si  $x \in T_1^{(h)}$ , le normalisateur de  $x$  dans  $T_0^l$  est engendré par  $T_0^h$  et par les éléments du centre de  $G_0$  échangeables avec  $x$ .*

## § 6. Etude des groupes simples

1. *Réduction au cas simple.* Dans le § 2, n° 6, nous avons opéré une réduction au cas semi-simple; ici, je me propose de traiter à nouveau cette question, en effectuant une réduction plus complète; le cas où la composante neutre est simple subit de plus un examen détaillé.

Je considère un groupe de LIE clos  $G = G_0 + G_1 + \dots$  extension cyclique finie de sa composante neutre  $G_0$ ,  $G_1$  étant une composante connexe génératrice; on peut écrire

1)  $G_0 = T^p \times \mathfrak{G}_{01} \times \dots \times \mathfrak{G}_{0t}$  (produit local direct) où  $T^p$  est la composante neutre du centre de  $G_0$ , l'automorphisme intérieur  $\varphi x$  induit par  $x \in G_1$  permutant circulairement les facteurs simples  $\mathfrak{G}_{0i}^1, \dots, \mathfrak{G}_{0i}^{m_i}$  dans  $\mathfrak{G}_{0i}$  ( $i=1, \dots, t$ ). Comme je l'ai souvent fait ci-dessus, je construis dans le normalisateur connexe  $N_x$  un toroïde maximum  $T_0^h$ , lui-même situé dans un toroïde maximum  $T_0^l$  de  $G_0$ . On peut écrire

$$T_0^l = T^p \times T^{l_1} \times \dots \times T^{l_t} \quad (T^{l_i} \text{ maximum dans } \mathfrak{G}_{0i}) \quad (2)$$



$$T_0^h = T^{p'} \times T^{h_1} \times \dots \times T^{h_t} \quad (3)$$

$T^{h_i}$  est la projection de  $T_0^h$  sur  $T^{h_i}$ , tous les produits indiqués étant localement directs.  $T^{(h)}(G_1)$  est alors engendré par  $T_0^h$  et par  $x$ ; il existe dans  $T_1^{(h)} = xT_0^h$  un élément  $z$  qui engendre un sous-groupe fini  $Z_q$  d'ordre  $q$ , avec  $T^{(h)}(G_1) = T_0^h \times Z_q$  (produit direct). D'après (1) et (2), les caractères de  $G$  relatifs à  $T_0^l$  se partagent en  $t$  familles; ceux de la  $i$ -ème sont égaux à l'identité sur  $T^p$  et sur tous les  $T^{h_j}$  sauf sur  $T^{h_i}$ ; leur restriction à  $T_0^h$  est l'identité sur tous les facteurs de (3) sauf sur  $T^{h_i}$ . De même, les caractères de  $G$  relatifs à  $T^{(h)}(G_1)$  se partagent en  $t$  familles naturellement correspondantes, ceux de la  $i$ -ème étant aussi égaux à l'identité sur tous les facteurs de (3) sauf sur  $T^{h_i}$ .

En vertu de (2) et (3), les supports  $R_0^l$  et  $R_0^h$  subissent respectivement les décompositions suivantes

$$R_0^l = R^p + R^{h_1} + \dots + R^{h_t} \quad (4)$$

$$R_0^h = R^{p'} + R^{h_1} + \dots + R^{h_t} \quad (R^{h_i} \subset R^{l_i}) \quad (5)$$

et on a, pour les paramètres angulaires relatifs à  $T_0^l$  et à  $T^{(h)}(G_1)$  des conclusions analogues aux précédentes. L'automorphisme  $\varphi x$  conserve un angle polyèdre fondamental  $P(G_0)$  défini par une suite  $\{\alpha_{ijk}\}$  engendrant un tableau

$$\begin{array}{ccc|ccc} & \varrho_{i1} & & \alpha_{i11}, \dots, \alpha_{i1n_{i1}} & & \\ \dots & \vdots & & \dots & & \dots \\ & \vdots & & & & \\ & \varrho_{ih_i} & & \alpha_{ih_i1}, \dots, \alpha_{ih_in_{ih_i}} & & \end{array}$$

formé de  $t$  tableaux partiels; la suite  $\varrho_{11}, \dots, \varrho_{1n_1}, \dots, \varrho_{ih_t}$  est fondamentale pour le normalisateur principal  $N$ , et se partage en  $t$  suites partielles  $\varrho_{i1}, \dots, \varrho_{ih_i}$  mutuellement orthogonales, avec  $\vec{\varrho}_{ik} \subset R^{h_i}$ ; les formes  $\varrho_{ik}$  s'annulent sur tous les termes de (5) sauf sur  $R^{h_i}$ , et les  $\varrho_{ik} + r/n_{ik}$  sont dans  $R_1^h$  constantes sur les plans parallèles à la somme (5) dans laquelle on supprime  $R_0^{h_i}$ .

Je dis que la figure de SCHLÄFLI  $\mathfrak{F}(\vec{\varrho}_{i1}, \dots, \vec{\varrho}_{ih_i})$  est connexe; en effet, si cela n'était pas, la suite  $\alpha_{ijk}$  ( $i$  fixé) se décomposerait en deux suites au moins mutuellement orthogonales (voir [9], p. 239) et  $\mathfrak{G}_{0i}$  n'aurait pas ses facteurs simples permutés transitivement par  $\varphi x$ . Le normalisateur  $N \cap \mathfrak{G}_{0i}$  est simple. Dans ce sens, la restriction du problème à  $\mathfrak{G}_{0i}$  est une réduction au cas simple.

Le diagramme  $D(G_1)$  défini par les vecteurs  $\vec{\varrho}'_{ik}$  est la somme directe de  $R^{p'}$  et de  $t$  diagrammes simples; le polyèdre fondamental  $P(G_1)$  lui-même est somme directe de simplexes et de  $R^{p'}$ . N'intervient ici que le diagramme

comme ensemble de plan singuliers et non pourvu de translations de recouvrement.

En résumé, on peut se ramener au cas où les facteurs simples de  $G_0$  sont permutés circulairement par  $\varphi x$ . Nous allons examiner en détail le cas des cycles à un seul élément. Il s'agira d'un groupe simple  $G_0$  pourvu d'une extension cyclique finie  $G_0 + G_1 + \dots$  extraite d'une extension naturelle.

2. *Extensions naturelles de  $A_{2h-1}$ .* Comme au chapitre I § 4, nous avons la suite fondamentale  $\varphi_i$  et la permutation  $\sigma$  unique admise par cette suite ( $\sigma$  non triviale), respectivement

$$\begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \dots - \bigcirc - \bigcirc \\ \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \quad \varphi_{l-1} \quad \varphi_l \end{array} \quad |\vec{\varphi}_i| = 1 \quad \sigma \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{l-1}, \varphi_l \\ \varphi_l, \varphi_{l-1}, \dots, \varphi_2, \varphi_1 \end{pmatrix} \quad l = 2h - 1 > 1,$$

ce qui engendre le tableau suivant

Figure associée à $\sigma$	Vecteurs du normalisateur principal $N$	$\mathfrak{F}(N)$	Vecteurs du diagramme $D(G_1)$	Polyèdre fondamental $P(G_1)$
	$\begin{aligned} \vec{\varrho}_1 &= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_l) \\ \vec{\varrho}_2 &= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_{l-1}) \\ &\dots \\ \vec{\varrho}_{h-1} &= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_{h-1} + \vec{\varphi}_{h+1}) \\ \vec{\varrho}_h &= \vec{\varphi}_h \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \vec{\varrho}'_1 &= 2\vec{\varrho}_2 \\ \vec{\varrho}'_2 &= 2\vec{\varrho}_2 \\ &\dots \\ \vec{\varrho}'_{h-1} &= 2\vec{\varrho}_{h-1} \\ \vec{\varrho}'_h &= \vec{\varrho}_h \end{aligned}$	$\begin{aligned} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \dots \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{aligned}$
	$p_1 = p_2 = \dots = p_h = 1$	$\begin{aligned} 1 \circ \\ 2 \circ \\ \vdots \\ h-1 \circ \\ h \circ \end{aligned}$ <p>type <math>C_h</math></p>		<p>type <math>B_h</math></p> $\begin{aligned} \omega' &= \varrho'_1 + 2\varrho'_2 + \dots \\ &\quad + 2\varrho'_h \\ &= 2(\varrho_1 + 2\varrho_2 \\ &\quad + \dots + 2\varrho_{h-1} \\ &\quad + \varrho_h) \end{aligned}$

On a indiqué en regard des vecteurs les longueurs respectives. Voici maintenant les sommets du polyèdre  $P(G_1)$  avec la structure des normalisateurs associés (coordonnées  $\varrho_1, \dots, \varrho_h, k$ )

Origine	$I$	$(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(I) = N$	type $C_h$
	$\mathfrak{A}_1$	$(\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_1)$	type $C_h$
	$\mathfrak{A}_2$	$(0, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_2)$	type $C_{h-2} \times D_2$

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{U}_3 & (0, 0, \frac{1}{4}, \dots, 0, 0, 1) & N(\mathfrak{U}_3) & \text{type } C_{h-3} \times D_3 \\
\text{.....} & & & \\
\mathfrak{U}_{h-1} & (0, 0, 0, \dots, \frac{1}{4}, 0, 1) & N(\mathfrak{U}_{h-1}) & \text{type } C_1 \times D_{h-1} \\
\mathfrak{U}_h & (0, 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 1) & N(\mathfrak{U}_h) & \text{type } D_h
\end{array}$$

Au divers groupes simples du type  $A_{2h-1}$  localement isomorphes correspondent des extensions naturelles dont je vais indiquer le réseau unité  $\delta_h$  associé, avec le domaine fondamental  $\mathfrak{D}(G_1)$  d'éléments de  $G_1$  conjugués relativement à  $G_0$ .

Tout d'abord, la famille  $A_{2h-1}$  provient du groupe  $\tilde{A}_{2h-1}$  simplement connexe, de centre  $Z_{2h} = (e, a, a^2, \dots)$  avec  $a = \tilde{f}(A'_1)$ ,  $A'_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$  en coordonnées  $\varphi_i$ ; on a  $\sigma A'_1 = (0, 0, \dots, 0, 1)$ ,  $\tilde{f}(\sigma A'_1) = a^{-1}$ . Si l'unité  $V$  de  $\tilde{A}_{2h-1}$  est engendrée par  $a^p$ , on a  $A_{2h-1} = \tilde{A}_{2h-1}/V$ ,  $\varphi x(V) = V$ ; le centre de  $A_{2h-1}$  est d'ordre  $p$ . Nous obtenons le tableau suivant

Groupe	Unité $V = (a^p)$	Générateurs du réseau unité $\delta_l$ (système $\varphi$ )	Réseau- trace	Point unité $qJ$	Extension	$\mathfrak{D}(G_1)$
$\tilde{A}_{2h-1}$	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$4\vec{\varrho}_i, 2\vec{\varrho}_h$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$2\mathfrak{U}_h$	semi-directe non principale	$P(G_1)$
$A_{2h-1}$	$p$ pair $2h/p$ im- pair	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_p$ $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\varphi_i = 0$ si $i \neq p$ $\varphi_p = 1$	$4\vec{\varrho}_i, 2\vec{\varrho}_h$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$2\mathfrak{U}_h$	semi-directe non principale	$P(G_1)$
$A_{2h-1}$	$p$ impair $2h/p$ pair	$2\vec{\varphi}$ et $A'_p$ $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\varphi_i = 0$ si $i \neq p$ $\varphi_p = 1$	$4\vec{\varrho}_i, 2\vec{\varrho}_h$ $(0, 0, \dots, 0, 1)$	$2I$	principale	$\frac{1}{2}P(G_1)$ $I$ et $\mathfrak{U}_h$ con- jugés
$A_{2h-1}$	$p$ pair $2h/p$ pair	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_p$ $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\varphi_i = 0$ si $i \neq p$ $\varphi_p = 1$	$4\vec{\varrho}_i, 2\vec{\varrho}_h$ $(0, 0, \dots, 0, 1)$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$4I$	non semi-directe	$P(G_1)$
ad- joint	$p = 1$	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_p$ $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ $\varphi_i = 0$ si $i \neq p$ $\varphi_p = 1$	$4\vec{\varrho}_i, 2\vec{\varrho}_h$ $(0, 0, \dots, 0, 1)$	$2I$	principale	$\frac{1}{2}P(G_1)$ $I$ et $\mathfrak{U}_h$ con- jugés

3. *Extensions naturelles de  $A_{2h}$* . Nous avons de même la suite fondamentale, la permutation  $\sigma$  et le tableau associé, respectivement

$$\begin{array}{c} \bigcirc - \bigcirc - \dots - \bigcirc - \bigcirc \\ \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \quad \varphi_{l-1} \quad \varphi_l \end{array} \quad \sigma \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h, \varphi_{h+1}, \dots, \varphi_{2h-1}, \varphi_{2h} \\ \varphi_{2h}, \varphi_{2h-1}, \dots, \varphi_{h+1}, \varphi_h, \dots, \varphi_2, \varphi_1 \end{pmatrix}$$

Figure associée à $\sigma$	Vecteurs du normalisateur principal $N$	$\mathfrak{F}(N)$	Vecteurs du diagramme $D(G_1)$	Polyèdre fondamental $P(G_1)$	
	<div><math display="block">\begin{aligned}\vec{\varrho}_1 &amp;= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_l) \\ \vec{\varrho}_2 &amp;= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_{l-1}) \\ &amp;\vdots \\ \vec{\varrho}_{h-1} &amp;= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_{h-1} + \vec{\varphi}_{h+2}) \\ \vec{\varrho}_h &amp;= \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_h + \vec{\varphi}_{h+1})\end{aligned}</math></div>	<div><math display="block">\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\end{aligned}</math></div>	<div><math display="block">\begin{aligned}1 \circ \vec{\varrho}'_1 &amp;= 2\vec{\varrho}_1 \\ 2 \circ \vec{\varrho}'_2 &amp;= 2\vec{\varrho}_2 \\ &amp;\vdots \\ h-1 \circ \vec{\varrho}'_{h-1} &amp;= 2\vec{\varrho}_{h-1} \\ h \circ \vec{\varrho}'_h &amp;= 4\vec{\varrho}_h\end{aligned}</math></div>	<div><math display="block">\begin{aligned}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \vdots \\ \sqrt{2} \\ 2\end{aligned}</math></div>	<div></div> <div><math display="block">\begin{aligned}\omega' &amp;= 2\varrho'_1 + 2\varrho'_2 \\ &amp;+ \dots + 2\varrho'_{h-1} + \varrho'_h \\ &amp;= 4(\varrho_1 + \varrho_2 \\ &amp;+ \dots + \varrho_h)\end{aligned}</math></div>
	$p_1 = \dots = p_{h-1} = 1 ; p_h = 2$	$B_h$			

Les sommets du polyèdre fondamental et les normalisateurs associés sont (coordonnées  $\varrho_1, \dots, \varrho_h, k$ )

$I$	$(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(I) = N$	type $B_h$
$\mathfrak{A}_1$	$(\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_1)$	type $C_1 \times B_{h-1}$
$\mathfrak{A}_2$	$(0, \frac{1}{4}, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_2)$	type $C_2 \times B_{h-2}$
.....			
$\mathfrak{A}_{h-1}$	$(0, 0, \dots, \frac{1}{4}, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_{h-1})$	type $C_{h-1} \times B_1$
$\mathfrak{A}_h$	$(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}, 1)$	$N(\mathfrak{A}_h)$	type $C_h$

Je prends ici les mêmes notations qu'au passage correspondant du n° 2 ; il convient de noter que le centre de  $\tilde{A}_{2h}$  est  $Z_{2h+1}$  d'ordre impair.

Groupe	Unité $V$	Générateurs de $\delta_I$	Réseau-trace	Point unité	Extension	$\mathfrak{D}(G_1)$
$\tilde{A}_{2h}$	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$4\vec{\varrho}_i$	$2I$	principale	$P(G_1)$
$A_{2h}$	$(a^p)$	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_p$	$4\vec{\varrho}_i$	$2I$	principale	$P(G_1)$
ad-joint	$Z_{2h+1}$	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_1$	$4\vec{\varrho}_i$	$2I$	principale	$P(G_1)$

4. *Extensions naturelles de  $D_{h+1}$ .* La suite fondamentale, la permutation  $\sigma$  et le tableau associé sont ici respectivement

$$\begin{array}{c} \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{h-1} \quad \circ \quad \varphi_h \\ \circ \quad \circ \quad \dots \quad \circ \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \circ \quad \varphi_{h+1} \end{array} \quad \sigma \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h-1}, \varphi_h & , \varphi_{h+1} \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h-1}, \varphi_{h+1} & , \varphi_h \end{pmatrix}$$

Figure associée à $\sigma$	Vecteurs du normalisateur principal $N$	$\mathfrak{F}(N)$	Vecteurs du diagramme $D(G_1)$	Polyèdre fondamental $P(G_1)$
	$\vec{\varrho}_1 = \vec{\varphi}_1 \quad 1$ $\vec{\varrho}_2 = \vec{\varphi}_2 \quad 1$ $\vdots$ $\vec{\varrho}_{h-1} = \vec{\varphi}_{h-1} \quad 1$ $\vec{\varrho}_h = \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_h + \vec{\varphi}_{h+1}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$		$\vec{\varrho}'_1 = \vec{\varrho}_1 \quad 1$ $\vec{\varrho}'_2 = \vec{\varrho}_2 \quad 1$ $\vdots$ $\vec{\varrho}'_{h-1} = \vec{\varrho}_{h-1} \quad 1$ $\vec{\varrho}'_h = 2\vec{\varrho}_h \quad \sqrt{2}$	<p><math>\omega' = 2\varrho'_1 + 2\varrho'_2 + \dots + 2\varrho'_{h-1} + \varrho'_h</math>  <math>= 2(\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_h)</math></p>

Les sommets du polyèdre fondamental et les normalisateurs associés sont

$I$	$(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N$	type $B_h$
$\mathfrak{A}_1$	$(\frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_1)$	type $B_1 \times B_{h-1}$
$\mathfrak{A}_2$	$(0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_2)$	type $B_2 \times B_{h-2}$
.....			
$\mathfrak{A}_{h-1}$	$(0, 0, 0, \dots, \frac{1}{2}, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_{h-1})$	type $B_{h-1} \times B_1$
$\mathfrak{A}_h$	$(0, 0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}, 1)$	$N(\mathfrak{A}_h)$	type $B_h$

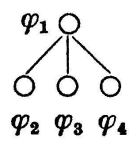


La famille  $D_{h+1}$  provient du groupe  $\tilde{D}_{h+1}$  simplement connexe dont le centre est  $Z_4 = (e, a, a^2, a^3)$  si  $h+1$  est impair, et  $Z_2 \times Z_2 = (e, a, b, ab)$  si  $h+1$  est pair. L'élément  $a$  correspond à  $A'_h : \varphi_j = 0$  si  $j \neq h$ ,  $\varphi_h = 1$ . Les sous-groupes non triviaux invariants par  $\sigma$  sont  $V = (e, a^2)$  ou  $V = (e, ab)$ . On obtient le tableau :

Groupe	Unité $V$	Générateurs de $\delta_l$	Réseau-trace	Point unité	Extension	$\mathfrak{D}(G_1)$
$\tilde{D}_{h+1}$ $h+1$ impair	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$2\mathfrak{A}_1$	semi-directe	$P(G_1)$
$\tilde{D}_{h+1}/$ $(e, a^2)$	$(e, a^2)$	$2\vec{\varphi}_i, A'_1$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$ $(1, 0, \dots, 0)$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$4I$	non semi-directe	$P(G_1)$
adjoint	$(e, a, a^2, a^3)$	$2\vec{\varphi}_i, A'_h$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$ $(1, 0, \dots, 0)$	$2I$	principale	$\frac{1}{2}P(G_1)$ $I, \mathfrak{A}_h$ con- jugués
$\tilde{D}_{h+1}$ $h+1$ pair	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$2I$	principale	$P(G_1)$
$\tilde{D}_{h+1}/$ $(e, ab)$	$(e, ab)$	$2\vec{\varphi}_i, A'_1$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$ $(1, 0, \dots, 0)$	$2I$	principale	$P(G_1)$
				$4I$	non semi-directe	$P(G_1)$
adjoint	$(e, a, b, ab)$	$2\vec{\varphi}_i, A'_h, A'_{h+1}$	$2\vec{\varrho}_i, 4\vec{\varrho}_h$ $(1, 0, \dots, 0)$	$2I$	principale	$\frac{1}{2}P(G_1)$ $I, \mathfrak{A}_h$ con- jugués

5. *Extensions naturelles de  $D_4$* . La suite fondamentale, la permutation  $\sigma$  non encore étudiée, et le tableau associé sont

$$\begin{array}{c}
 \varphi_2 \quad \varphi_1 \quad \circ \quad \varphi_3 \\
 \circ \quad \quad \quad \diagdown \quad \diagup \\
 \quad \quad \quad \circ \quad \varphi_4
 \end{array}
 \quad
 \sigma = \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_1 \end{pmatrix}$$



Figure associée à $\sigma$	Vecteurs du normalisateur principal $N$	$\mathfrak{F}(N)$	Vecteurs du diagramme $D(G_1)$	Polyèdre fondamental $P(G_1)$		
	$\vec{\varrho}_1 = \vec{\varphi}_1$ $\vec{\varrho}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_3 + \vec{\varphi}_4)$	$1$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\vec{\varrho}'_1 = \vec{\varrho}_1$ $\vec{\varrho}'_2 = 3\vec{\varrho}_2$	$1$ $\sqrt{2}$	 $\omega' = 3\rho'_1 + 2\rho'_2 = 3(\rho_1 + 2\rho_2)$

Les sommets du polyèdre fondamental et les normalisateurs associés sont

$I$	$(0, 0, 1)$	$N$	type $G_2$
$\mathfrak{A}_1$	$(\frac{1}{3}, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_1)$	type $A_2$
$\mathfrak{A}_2$	$(0, \frac{1}{3}, 1)$	$N(\mathfrak{A}_2)$	type $A_1 \times A_1$

La famille  $D_4$  est issue du groupe simplement connexe  $\tilde{D}_4$  de centre

$$Z = Z_2 \times Z_2 = (e, a, b, c),$$

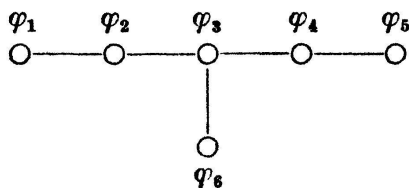
les éléments  $a, b, c$  étant respectivement déterminés par les points suivants (coordonnées canoniques)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \end{pmatrix}$$

$Z$  n'a aucun sous-groupe non trivial invariant par  $\sigma$ . Il vient le tableau

Groupe	Unité	Générateurs de $\delta_I$	Réseau-trace	Point unité	Extension	$\mathfrak{D}(G_1)$
$\tilde{D}_4$	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$2\vec{\varrho}_1, 6\vec{\varrho}_2$	$2I$	principale	$P(G_1)$
groupe adjoint	$Z$	$2\vec{\varphi}_i$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \end{pmatrix}$	$2\vec{\varrho}_1, 6\vec{\varrho}_2$	$2I$	principale	$P(G_1)$

6. *Extensions naturelles de  $E_6$ .* La suite fondamentale et la permutation  $\sigma$  sont



$$\sigma = \downarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & \varphi_5 & \varphi_6 \\ \varphi_5 & \varphi_4 & \varphi_3 & \varphi_2 & \varphi_1 & \varphi_6 \end{pmatrix}$$

Il vient le tableau

Figure associée à $\sigma$	Vecteurs du normalisateur principal $N$	$\mathfrak{F}(N)$	Vecteurs du diagramme $D(G_1)$	Polyèdre fondamental $P(G_1)$
	$\vec{\varrho}_1 = \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_1 + \vec{\varphi}_5)$ $\vec{\varrho}_2 = \frac{1}{2}(\vec{\varphi}_2 + \vec{\varphi}_4)$ $\vec{\varrho}_3 = \vec{\varphi}_3$ $\vec{\varrho}_4 = \vec{\varphi}_4$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $1$ $1$	$\vec{\varrho}'_1 = 2\vec{\varrho}_1$ $\vec{\varrho}'_2 = 2\vec{\varrho}_2$ $\vec{\varrho}'_3 = \vec{\varrho}_3$ $\vec{\varrho}'_4 = \vec{\varrho}_4$	$\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $1$ $1$

Sommets du polyèdre fondamental  $P(G_1)$  et normalisateurs associés

$I$	$(0, 0, 0, 0, 1)$	$N$	type $F_4$
$\mathfrak{A}_1$	$(\frac{1}{4}, 0, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_1)$	type $A_1 \times B_3$
$\mathfrak{A}_2$	$(0, \frac{1}{6}, 0, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_2)$	type $A_2 \times A_2$
$\mathfrak{A}_3$	$(0, 0, \frac{1}{4}, 0, 1)$	$N(\mathfrak{A}_3)$	type $A_3 \times A_1$
$\mathfrak{A}_4$	$(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1)$	$N(\mathfrak{A}_4)$	type $C_4$

La famille  $E_6$  est issue du groupe simplement connexe  $\tilde{E}_6$  de centre  $Z = Z_3 = (e, a, a^2)$  qui n'a aucun sous-groupe non trivial. L'élément  $a$  est représenté par  $A'_1 : \varphi_1 = 1, \varphi_2 = \dots = \varphi_6 = 0$ . On a le tableau :

Groupe	Unité $V$	Générateurs de $\delta l$	Réseau- trace	Point unité $qJ$	Extension	$\mathfrak{D}(G_1)$
$\tilde{E}_6$	$e$	$2\vec{\varphi}_i$	$4\vec{\varrho}_1, 4\vec{\varrho}_2$ $2\vec{\varrho}_3, 2\vec{\varrho}_4$	$2I$	principale	$P(G_1)$
groupe adjoint	$Z_3$	$2\vec{\varphi}_i$ et $A'_1$	$4\vec{\varrho}_1, 4\vec{\varrho}_2$ $2\vec{\varrho}_3, 2\vec{\varrho}_4$	$2I$	principale	$P(G_1)$

7. Automorphismes involutifs. La recherche des automorphismes involutifs des groupes de LIE semi-simples compacts connexes  $G_0$  est facilitée par l'intro-

duction des polyèdres  $P(G_i)$ ; il suffit de se placer dans le groupe  $A(G_0)$  des automorphismes de  $G_0$ , avec  $A(G_0) = A_0 + A_1 + \dots$ ; les éléments des polyèdres  $P(A_i)$  qui sont d'ordre 2 dans le réseau central  $\bar{\delta}_i$  donnent les automorphismes cherchés; si  $i \neq 0$ , la composante connexe  $A_i$  doit être d'ordre 2 dans  $A(G_0)/A_0$ .

J'applique cette méthode au cas où  $G_0$  est simple, en considérant d'abord le polyèdre  $P(A_0)$ . Il est défini par la suite fondamentale  $\varphi_1, \dots, \varphi_l$  et par le paramètre angulaire dominant  $\omega = m_1\varphi_1 + \dots + m_l\varphi_l$ ; c'est un simplexe, dont les sommets sont

$$0(0, 0, 0, \dots, 0) \quad A_1\left(\frac{1}{m_1}, 0, 0, \dots, 0\right), \dots, A_l\left(0, 0, 0, \dots, \frac{1}{m_l}\right).$$

Si  $m_i = 1$ ,  $A_i$  est dans le réseau central. Un élément  $X$  d'ordre 2 a des coordonnées  $\varphi_i(X)$  de la forme  $k_i/2$  où les  $k_i$  sont entiers; de plus,  $X \in P(A_0)$  entraîne  $k_i \geq 0$  et  $m_i\varphi_i(X) \leq 1$ . Si  $m_i > 2$ , on a nécessairement  $k_i = 0$ ;  $m_i = 2$  exige  $k_i = 0$  ou 1; enfin,  $m_i = 1$  donne  $k_i = 0, 1$ , ou 2. Si  $m_i = 1$ ,  $k_i = 2$ , on a  $X \in \bar{\delta}_i$ , ce qui n'apporte rien. Reste le cas  $m_i = 1$ ,  $k_i = 1$ , ce qui fournit  $X = \frac{1}{2}A_i$  ou bien  $X = \frac{1}{2}(A_i + A_j)$  avec  $m_i = m_j = 1$ , solution qui se ramène à  $X = \frac{1}{2}A_k$  ( $m_k = 1$ ) puisque  $A_i, A_j \in \bar{\delta}_i$ . Nous obtenons les solutions

$$\begin{aligned} \text{si } m_i = 2, \quad X &= (0, 0, \dots, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \dots, 0) = A_i; \\ \text{si } m_i = 1, \quad X &= (0, 0, \dots, 0, \tfrac{1}{2}, 0, \dots, 0) = \tfrac{1}{2}A_i, \end{aligned}$$

et il n'y en a pas d'autre. Notons que ce résultat est indiqué dans [1].

Soit maintenant  $A_1$  une composante connexe d'ordre 2 de  $A(G_0)$ , et cherchons les points  $X(\varrho'_1, \dots, \varrho'_h, 1)$  de  $P(A_1)$  d'ordre 2 dans  $\bar{\delta}_l$ . On a  $2X \in \bar{\delta}_l$  et aussi  $2I \in \bar{\delta}_l$ , d'où  $2(X - I) \in \bar{\delta}_l$ ; réciproquement, si  $2(X - I) \in \bar{\delta}_l$ , on a  $2X \in \bar{\delta}_l$ . Tout revient à chercher les  $X \in P(A_1)$  tels que  $2X - 2I$  soit dans le réseau-trace  $\bar{\delta}_l \cap R_0^h$  formé des points à coordonnées  $\varrho_i$  entières. Achéons le calcul en exprimant le paramètre dominant  $\omega'$  de  $D(A_1)$  à l'aide des formes  $\varrho_i$ ; il vient  $\omega' = pn\varrho = s\varrho$  (cf. § 3, n° 4) où  $\varrho$  est un paramètre angulaire du normalisateur principal  $N$ ; on ne peut avoir  $s = 1$ , sinon  $\varrho$  est dominant pour  $N$  et pour  $D(A_1)$ , ce qui ne peut être. On écrit  $\omega' = s \sum_{i=1}^h d_i \varrho_i$  où les  $d_i$  sont des entiers  $\geq 0$ . Une solution est  $X = I$ ; autre possibilité: l'un des  $d_i$  est égal à 1, avec alors  $s = 2$ , ce qui donne un sommet de  $P(A_1)$ . On obtient de la sorte tous les  $X$  cherchés. Un coup d'œil sur [1] p. 219 et sur les n° 2 à 6 de ce paragraphe donne ces automorphismes, bien connus d'ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL ET J. DE SIEBENTHAL, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de LIE clos*. Comment. Helv., 23, 1949, 200–221.
- [2] E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. Mém. Sci. Math., 42, 1930.
- [3] E. CARTAN, *La géométrie des groupes simples*. Ann. Mat. Pura Appl., 4, 1927, 209–256.
- [4] C. CHEVALLEY, *Theory of LIE groups*. Princeton University Press, Princeton 1946.
- [5] F. GANTMACHER, *Canonical représentation of automorphisms of a complex semi-simple LIE group*. Rec. Math. Moscou, 5 (47), 1939, 101–144.
- [6] G. HOCHSCHILD, *Group extensions of LIE groups II*. Ann. Math., 54, 1951, 537–551.
- [7] H. HOPF, *Maximale Toroidale und singuläre Elemente in geschlossenen LIESchen Gruppen*. Comment. Math. Helv., 15, 1942–1943, 59–70.
- [8] H. HOPF, *Zum CLIFFORD-KLEINSchen Raumproblem*. Math. Ann., 95, 1926, 313–339.
- [9] J. DE SIEBENTHAL, *Sur les sous-groupes fermés connexes d'un groupe de LIE clos*. Comment. Math. Helv., 25, 1951, 210–256.
- [10] E. STIEFEL, *Über eine Beziehung zwischen geschlossenen LIESchen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen LIESchen Gruppen*. Comment. Math. Helv., 14, 1942, 350–380.
- [11] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*. BG Teubner, Leipzig und Berlin, 1937.

(Reçu le 13 septembre 1955.)