

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1956-1957)

**Artikel:** Zur konformen Abbildung auf Normalgebiete.  
**Autor:** Renggli, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515696>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Zur konformen Abbildung auf Normalgebiete**

von HEINZ RENGLI, Luzern

## **Einleitung**

Die vorliegende Arbeit kann in zwei Teile gegliedert werden. Im ersten Teil, der die ersten sechs Abschnitte umfaßt, werden die sogenannten konformen Normalgebiete erklärt und diskutiert. Dabei war es unser Ziel, auch die klassischen minimalen Schlitzbereiche, nämlich die Parallelschlitzbereiche sowie die Radial- und Kreisbogenschlitzbereiche der Ebene in die Darstellung einzubeziehen. In den letzten drei Abschnitten, dem zweiten Teil, leiten wir das Resultat her, daß umgekehrt für gewisse gegebene Gebiete konforme Abbildungen auf Normalgebiete existieren.

Die Definition der Normalgebiete wird mit Hilfe des Begriffs der Extremallänge geprägt. Deswegen geben wir vorgängig in den beiden ersten Abschnitten einen Abriß der Theorie der Extremallängen. In Abschnitt 3 behandeln wir dann einige Beispiele von Extremallängen, während der vierte Abschnitt die Erklärung sowie die wichtigsten Eigenschaften der sogenannten Normalgebiete enthält.

In Abschnitt 5 zeigen wir ebenfalls mit Hilfe der Extremallängen, daß die Normalgebiete sozusagen konform starr in die übergeordneten Gebiete eingebettet sind. Dies ist die Übertragung des klassischen Resultates, wonach die konformen Abbildungen auf die entsprechenden Schlitzbereiche bei geeigneter Normierung eindeutig bestimmt sind. Damit soll rückwärts die gegebene Definition der Normalgebiete gerechtfertigt werden. Zur Vervollständigung behandeln wir in Abschnitt 6 die Parallelschlitzgebiete und zeigen, daß unsere Definition mit der klassischen Erklärung äquivalent ist.

Als Vorbereitung zur Diskussion der konformen Abbildung auf Normalgebiete werden in Abschnitt 7 diejenigen Spezialfälle behandelt, bei denen relativ zum übergeordneten Gebiet nur einzelne Berandungen auftreten. Werden nun diese in sogenannte normale Schlitze resp. in sogenannte normale Einschnitte verwandelt, so sind die betreffenden Bildgebiete Normalgebiete. Im achten Abschnitt lösen wir für gewisse Gebietsklassen ein Extremalproblem, das bezüglich der Extremallängen formuliert wird, und beweisen schließlich im letzten, neunten Abschnitt, daß damit für unsere Spezialfälle zugleich die Frage der konformen Abbildung auf Normalgebiete erledigt ist.

Wir bemerken noch, daß jedem Abschnitt eine kurze Zusammenfassung vorangestellt ist. Dort findet man auch nähere Hinweise mit den wichtigsten Literaturangaben und den notwendigen historischen Bemerkungen.

### § 1. Der Begriff der Extremallänge

Wir geben zuerst die Definition der Extremallänge nach L. AHLFORS und A. BEURLING [1]. Nachher stellen wir kurz den Zusammenhang mit dem DIRICHLETSchen Prinzip her.

1. In der komplexen  $z$  ( $= x + iy$ )-Ebene  $E$  sei eine Kurvenschar  $\{\gamma\}$  gegeben. Unter einer Kurve  $\gamma \in \{\gamma\}$  verstehen wir das stetige Bild  $z_\gamma(t)$  eines Parameterintervalls  $0 < t < 1$  oder im Falle geschlossener Kurven das stetige Bild von  $0 \leq t \leq 1$  mit  $z_\gamma(0) = z_\gamma(1)$ .  $\Gamma$  bezeichne den Träger von  $\{\gamma\}$ , das heißt die Menge derjenigen Punkte, welche die  $\gamma$  aus  $\{\gamma\}$  überdecken.

In  $E$  werden Funktionen  $\varrho(z) \geq 0$  betrachtet; sie definieren durch  $d\sigma = \varrho(z) |dz|$  eine konforme Metrik. Wenn nun  $\varrho(z)$  im LEBESGUESchen Sinne quadratisch integrierbar ist, so ist  $F(\varrho) = \iint_E \varrho^2(z) dx dy$  die bezüglich  $\varrho(z)$  gemessene Fläche. Andernfalls werde  $F(\varrho) = \infty$  gesetzt.

Besteht  $\gamma \in \{\gamma\}$  aus abzählbar vielen rektifizierbaren Teilkurven  $\gamma_i$ ,  $\gamma = \bigcup \gamma_i$ , so ist ihre durch  $\varrho(z)$  bestimmte Länge durch

$$l_\varrho(\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\gamma_i} \varrho(z(s_i)) ds_i \quad (\leq \infty)$$

erklärt.  $s_i$  bedeutet dabei die bezüglich  $\gamma_i$  gemessene euklidische Bogenlänge, während die Integrationen im LEBESGUESchen Sinne über  $s_i$  auszuführen sind. Besteht keine solche Zerlegung in rektifizierbare Teilkurven oder sind die Integrale nicht definiert, so werde  $l_\varrho(\gamma) = \infty$  gesetzt.

Es sei

$$L(\varrho) = \inf_{\{\gamma\}} l_\varrho(\gamma)$$

die sogenannte Minimallänge der Schar  $\{\gamma\}$  für gegebenes  $\varrho(z)$ . Eine konforme Metrik  $\varrho(z)$  ist zulässig und gehört zur zulässigen Klasse  $\{\varrho(z)\}$ , wenn  $L(\varrho)$  und  $F(\varrho)$  nicht gleichzeitig 0 oder  $\infty$  sind.

**Definition 1.** Die Größe  $\lambda(\varrho) = \sup_{\{\varrho\}} L^2(\varrho) \cdot F^{-1}(\varrho)$ ,  $0 \leq \lambda(\varrho) \leq \infty$  heißt Extremallänge der Kurvenschar  $\{\gamma\}$ .

Es sei  $\Gamma \subset \Delta$  und  $\Delta$  von positivem LEBESGUESchem Maß. Eine in  $\Delta$  konforme Metrik  $\varrho(z)$  ist zulässig, falls die Minimallänge  $L(\varrho)$  und die bezüglich  $\Delta$  gemessene Fläche  $F(\varrho)$  nicht gleichzeitig 0 oder  $\infty$  sind. Aus Definition 1 ergibt sich unmittelbar, daß die in  $E$  oder  $\Delta$  berechneten Extremallängen übereinstimmen, die Extremallänge also nur von der Kurvenschar  $\{\gamma\}$  abhängig ist. Insbesondere folgt noch, daß  $\lambda(\varrho)$  entweder 0 oder  $\infty$  ist, falls  $\Gamma$  eine LEBESGUESche Nullmenge darstellt.

*Bemerkung:* Ohne ausdrückliche Erwähnung werden wir im folgenden von der Beschränkung auf  $\Delta$  keinen Gebrauch machen.

2. Oft ist es günstig, die Klasse  $\{\varrho(z)\}$  zu normieren. Ist  $\lambda(\gamma) < \infty$ , also  $F(\varrho) > 0$ , so kann für endliche  $F(\varrho)$  zur Berechnung der Extremallänge wegen der Homogenität von  $L^2(\varrho)$  und  $F(\varrho)$  in  $\varrho(z)$  für die Fläche  $F(\varrho) = c$ ,  $c > 0$  gesetzt werden. Aus Definition 1 ergibt sich

**Zusatz 1'.** Ist für die zugelassene Klasse  $\{\varrho(z)\}$  die Fläche  $F(\varrho) = c$ ,  $c > 0$  und  $\sup_{\{\varrho\}} L^2(\varrho) < \infty$ , so heißt die Größe  $\lambda(\gamma) = c^{-1} \cdot \sup_{\{\varrho\}} L^2(\varrho)$ ,  $\lambda(\gamma) < \infty$  Extremallänge von  $\{\gamma\}$ .

Ist dagegen  $\lambda(\gamma) > 0$ , das heißt  $L(\varrho) > 0$  für gewisse  $\varrho(z)$ , so darf man sich zur Bestimmung der Extremallänge auf die  $\varrho(z)$  beschränken, für die  $L(\varrho) \geq 1$  gilt. Mit Hilfe von Definition 1 folgt damit

**Zusatz 1''.** Ist für die zugelassene Klasse  $\{\varrho(z)\}$  die Minimallänge  $L(\varrho) \geq 1$  und  $\inf_{\{\varrho\}} F(\varrho) < \infty$ , so heißt die Größe  $\lambda(\gamma) = [\inf_{\{\varrho\}} F(\varrho)]^{-1}$ ,  $\lambda(\gamma) > 0$  Extremallänge von  $\{\gamma\}$ .

3. Es soll noch kurz gezeigt werden, wie der Begriff der Extremallänge mit dem DIRICHLETSchen Prinzip verknüpft ist. Wir beschränken uns bei der folgenden Darlegung auf ein einfaches Beispiel, bemerken aber, daß die auftretenden Zusammenhänge viel allgemeinere Gültigkeit besitzen.

Es sei der Träger  $\Gamma_R$  der Schar  $\{\gamma_R\}$  das Rechteck

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

während jedes  $\gamma_R \in \{\gamma_R\}$  die Punktmenge

$$E_0 = \{(x, y) \mid 0 < x < a, y = 0\} \quad \text{mit} \quad E_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < a, y = b\}$$

verbinde, das heißt es gelte  $\lim_{t \rightarrow 0} \Im z_{\gamma_R}(t) = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow 1} \Im z_{\gamma_R}(t) = b$ . Beschränken wir die konforme Klasse  $\{\varrho(z)\}$  gemäß § 1.1 auf  $R$  und ist  $\varrho(z)$  quadratisch integrierbar, so existiert nach dem Satz von FUBINI  $\int_0^b \varrho^2(x, y) dy$  fast überall in  $0 < x < a$ . Also ist infolge der SCHWARZSchen Ungleichung fast überall

$$L^2(\varrho) \leq [\int_0^b \varrho(x, y) dy]^2 \leq b \cdot \int_0^b \varrho^2(x, y) dy,$$

da jede Kurve  $x = \text{const.}$ ,  $0 < x < a$  zu  $\{\gamma_R\}$  gehört. Integriert man nun

über  $x$ , so ergibt sich  $aL^2(\varrho) \leq bF(\varrho)$ . Gemäß Definition 1 ist also  $\lambda(\gamma_R) = a^{-1} \cdot b$  und das Gleichheitszeichen steht nur dann, wenn fast überall in  $R$  für die Metrik  $\varrho(z) = \text{const.}$  gilt.

Es sei die Klasse  $\Phi = \{f(x, y)\}$  gegeben. Dabei sei  $f(x, y)$  in  $R$  stetig differenzierbar und  $f = 0$  auf  $E_0$ ,  $f = 1$  auf  $E_1$ . Es ist

$$D(f) = \iint_R \text{grad}^2 f \, dx \, dy$$

das DIRICHLETintegral von  $f(x, y)$ . Gesucht sei nun die Funktion  $f(x, y) \in \Phi$ , für die  $D(f)$  einen möglichst kleinen Wert besitzt. Einen derartigen Ansatz macht man beim DIRICHLETSchen Prinzip. Es gilt in unserm Falle  $D(f) \geq D(u)$ , wobei  $u(x, y) = b^{-1} \cdot y$  ist. In den physikalischen Anwendungen ist  $u(x, y)$  das Potential und  $D(u)$  die Kapazität. Ferner wird der Zusammenhang mit der Extremallänge hergestellt, indem man  $\varrho(z) = |\text{grad } f(x, y)|$  wählt.

## § 2. Einige Eigenschaften der Extremallänge

In diesem Abschnitt sind einige Eigenschaften der Extremallänge zusammengestellt. Der Satz von der konformen Invarianz (Satz 2) wurde der Arbeit von L. AHLFORS und A. BEURLING [1] entnommen. Die beiden Zerlegungssätze (Sätze 3 und 4) sind Verallgemeinerungen von Sätzen derselben Verfasser. Satz 5 fußt auf einer von K. STREBEL [15] entdeckten Ungleichung. Die hier gegebene Verschärfung stammt von J. HERSCHE [8].

1. In vielen Fällen gibt es in der zugelassenen Klasse  $\{\varrho(z)\}$  mindestens eine Metrik, für die in Definition 1 das Gleichheitszeichen steht.

**Definition 2.**  $P(z)$  heißt Extremalmetrik, wenn  $L^2(P) \cdot F^{-1}(P) = \lambda(\gamma)$  ist.

Für Extremalmetriken gilt ein gewisser Eindeutigkeitssatz. Vorgängig soll aber in zwei Beispielen die Ausnahmestellung von  $\lambda(\gamma) = 0$  und  $\lambda(\gamma) = \infty$  dargelegt werden.

a) Jede Kurve  $\gamma$  einer Schar  $\{\gamma\}$  sei zu einem Punkt degeneriert. Dann ist  $L(\varrho) = 0$  für jedes  $\varrho(z) \in \{\varrho(z)\}$ . Es ist also  $\lambda(\gamma) = 0$  und jedes  $\varrho(z) \in \{\varrho(z)\}$  ist Extremalmetrik.

b) Die Schar  $\{\gamma\}$  bestehe aus allen Kurven  $\gamma$ , die eine abgeschlossene Punktmenge in  $\{z \mid |z| > r > 0, 0 < r < 1\}$  mit  $z = 0$  verbinden. Setzt man  $\varrho(z) = -[|z| \cdot \log |z|]^{-1}$  in  $\{z \mid |z| < r\}$  und  $\varrho(z) = 0$  in  $\{z \mid |z| \geq r\}$ , so erhält man  $L(\varrho) = \infty$  und  $F(\varrho) = -2\pi(\log r)^{-1}$ , also  $\lambda(\gamma) = \infty$ . Auch jede andere Metrik, die in  $\{z \mid |z| < r\}$  mit dieser übereinstimmt, ist Extremalmetrik.

Dagegen gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage :

**Satz 1.** *Für  $0 < \lambda(\gamma) < \infty$  ist die Extremalmetrik, falls sie existiert, bis auf einen konstanten Faktor fast überall eindeutig bestimmt [14].*

*Beweis.* Nach § 1.2 dürfen wir uns auf den Fall normierter Extremalmetriken beschränken. Es seien also  $P_i(z)$  ( $i = 1, 2$ ) zwei Extremalmetriken mit  $F(P_i) = 1$ . Für  $P_0(z) = \frac{1}{2}[P_1(z) + P_2(z)]$  ist

$$L(P_0) \geq [\lambda(\gamma)]^{\frac{1}{2}}$$

und aus der SCHWARZSchen Ungleichung folgt

$$F(P_0) = \frac{1}{2} [1 + \iint_E P_1(z) \cdot P_2(z) dx dy] \leq 1.$$

Gemäß Definition 1 ist aber  $F(P_0) \geq L^2(P_0) \cdot \lambda^{-1}(\gamma) \geq 1$ . Also muß in  $\iint_E P_1(z) \cdot P_2(z) dx dy \leq 1$  das Gleichheitszeichen stehen und demnach fast überall  $P_1(z) = P_2(z)$  sein.

2. Bildet  $z'(z)$  ein die Schar  $\{\gamma\}$  enthaltendes Gebiet  $\Delta$  konform in eine komplexe  $z'$ -Ebene ab, so wird durch  $\varrho(z) |dz| = \varrho'(z') |dz'|$  jede konforme Metrik von  $\Delta$  auf das Bild  $\Delta'$  konform übertragen und umgekehrt. Für solche einander zugeordnete Metriken kann die Abbildung als Isometrie aufgefaßt werden. Somit folgt

**Satz 2.** *Die Extremallänge ist eine konforme Invariante, das heißt wird ein  $\{\gamma\}$  enthaltendes Gebiet  $\Delta$  konform auf ein Gebiet  $\Delta'$  abgebildet und ist  $\{\gamma'\}$  die entsprechende Bildschar, so gilt  $\lambda(\gamma) = \lambda(\gamma')$ .*

3. Es seien abzählbar viele Kurvenscharen  $\{\gamma_i\}$  gegeben, die zueinander disjunkte Punktmengen  $\Gamma_i$  überdecken. Ferner seien die Träger  $\Gamma_i$  im LEBESGUESchen Sinne meßbar. Wir betrachten zunächst den Fall, daß jede Kurve  $\gamma_i \in \{\gamma_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) eine Kurve  $\gamma$  der Schar  $\{\gamma\}$  enthält. Es existiere also zu jeder Kurve  $\gamma_i$ , dargestellt durch  $z_{\gamma_i}(t)$ ,  $0 < t < 1$  eine Kurve  $\gamma$  und ein Teilintervall  $(0 \leq) t' < t < t'' (\leq 1)$  derart, daß  $\gamma$  das durch  $z_{\gamma_i}(t)$  vermittelte Bild von  $t' < t < t''$  ist. Dies nennen wir eine Zerlegung erster Art von  $\{\gamma\}$ .

**Satz 3.** *Für eine Zerlegung erster Art gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} [\lambda(\gamma_i)]^{-1} \leq [\lambda(\gamma)]^{-1}$ .*

*Beweis.* Der Fall  $\lambda(\gamma) = 0$  ist trivial. Für  $\lambda(\gamma) > 0$  existieren im Sinne von Zusatz 1" zulässige  $\varrho(z)$ , für die  $L(\varrho) \geq 1$  ist. Beschränkt man  $\varrho(z)$  auf  $\Gamma_i$ , das heißt setzt  $\varrho_i(z) = \varrho(z)$  in  $\Gamma_i$  und  $\varrho_i(z) = 0$  in  $E - \Gamma_i$ , so folgt mit Hilfe von Zusatz 1" sofort Satz 3.

Wendet man Satz 1 auf Satz 3 an, so ergibt sich unmittelbar mit Hilfe von Zusatz 1"

**Satz 3'.** Es sei  $0 < \lambda(\gamma) < \infty$  und  $P(z)$  Extremalmetrik für  $\{\gamma\}$  mit der Normierung  $L(P) = 1$ . Dann steht in Satz 3 das Gleichheitszeichen nur dann, wenn für die  $\{\gamma_i\}$  mit  $\lambda(\gamma_i) < \infty$  das auf  $\Gamma_i$  beschränkte  $P(z)$  Extremalmetrik für  $\{\gamma_i\}$  und  $\iint_{E \cap \Gamma_i} P^2(z) dx dy = 0$  ist.

Satz 3 enthält als Spezialfall

**Satz 3''.** Ist  $\{\gamma_T\} \subset \{\gamma\}$ , das heißt  $\gamma_T \in \{\gamma\}$  für jedes  $\gamma_T \in \{\gamma_T\}$ , so heißt  $\{\gamma_T\}$  eine Teilschar von  $\{\gamma\}$  und es gilt  $\lambda(\gamma_T) \geq \lambda(\gamma)$ .

4. Es seien wie bei § 2.3 Scharen  $\{\gamma_i\}$  mit meßbaren disjunkten Trägern  $\Gamma_i$  gegeben. Es enthalte nun jede Kurve  $\gamma \in \{\gamma\}$  für jedes  $i = 1, 2, \dots$  eine Kurve  $\gamma_i$ , das heißt zu jedem Index  $i$  und zu jeder Kurve  $\gamma$ , dargestellt durch  $z_\gamma(t)$ ,  $0 < t < 1$  existiere also eine Kurve  $\gamma_i$  und ein Teilintervall  $(0 \leq t''_i < t < t'_i \leq 1)$  derart, daß  $\gamma_i$  das durch  $z_{\gamma_i}(t)$  vermittelte Bild von  $t''_i < t < t'_i$  ist. Dies nennen wir eine Zerlegung zweiter Art von  $\{\gamma\}$ .

**Satz 4.** Für eine Zerlegung zweiter Art gilt  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\gamma_i) \leq \lambda(\gamma)$ .

*Beweis.* Der Fall, daß alle  $\lambda(\gamma_i)$  verschwinden, ist trivial. Ist eines der  $\lambda(\gamma_i) = \infty$ , so auch a fortiori  $\lambda(\gamma) = \infty$ . Es seien also alle  $\lambda(\gamma_i)$  endlich. Wir wählen  $m$  Scharen  $\{\gamma_k\}$  aus, für die  $\lambda(\gamma_k) > 0$  ist. Gemäß § 1.2 gibt es zu den  $\{\gamma_k\}$  zulässige  $\varrho_k(z)$  mit  $F_k(\varrho_k) = \lambda(\gamma_k)$ , die außerhalb  $\Gamma_k$  verschwinden. Setzt man  $\varrho(z) = \sum_{k=1}^m \varrho_k(z)$ , so ist  $\varrho(z)$  zulässig bezüglich  $\{\gamma\}$ . Aus Zusatz 1' folgt zunächst  $\sum_{k=1}^m \lambda(\gamma_k) \leq \sup_{\{\varrho\}} L(\varrho)$ , dann  $\sum_{k=1}^m \lambda(\gamma_k) \leq \lambda(\gamma)$  bei festem  $m$  und durch Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  die Behauptung von Satz 4.

5. Die Schar  $\{\gamma_{\cup}\}$  bezeichne die Vereinigungsmenge zweier beliebiger Scharen  $\{\gamma_1\}$  und  $\{\gamma_2\}$ , das heißt jedes Element von  $\{\gamma_{\cup}\}$  gehöre entweder zu  $\{\gamma_1\}$  oder zu  $\{\gamma_2\}$ .

**Satz 5.** Für die Vereinigungsmenge  $\{\gamma_{\cup}\}$  zweier Scharen  $\{\gamma_1\}$  und  $\{\gamma_2\}$  gilt  $[\lambda(\gamma_{\cup})]^{-1} \leq [\lambda(\gamma_1)]^{-1} + [\lambda(\gamma_2)]^{-1}$ .

*Beweis.* Verschwindet eine der Größen  $\lambda(\gamma_i)$  ( $i = 1, 2$ ), so ist der Satz trivial. Andernfalls gibt es nach § 1.2 zulässige Metriken  $\varrho_i(z)$  mit  $L_i(\varrho_i) \geq 1$  bezüglich der einzelnen Scharen  $\{\gamma_i\}$ . Setzt man

$$\bar{\varrho}(z) = \max \{\varrho_1(z), \varrho_2(z)\} \quad \text{bezüglich } \{\gamma_{\cup}\},$$

so gilt  $L(\bar{\varrho}) \geq 1$  und  $F(\bar{\varrho}) \leq F_1(\varrho_1) + F_2(\varrho_2)$ . Daraus ergibt sich in Verbindung mit Zusatz 1'' das gewünschte Resultat.

*Bemerkung.* Sind insbesondere  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  disjunkt und meßbar, so steht gemäß Satz 3 in Satz 5 das Gleichheitszeichen.

6. Es sei  $\{\gamma\}$  eine bestimmte Kurvenschar. Dann gilt für die Extremallänge jeder beliebigen Teilschar  $\{\gamma_T\} \subset \{\gamma\}$  nach Satz 3" die Ungleichung  $\lambda(\gamma_T) \geq \lambda(\gamma)$ . Man fragt oft nach denjenigen Teilscharen, für die in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen steht.

**Definition 3.** Die Kurvenschar  $\{\gamma\}$  heißt durch  $\{\gamma_T\}$  ersetzbar, wenn  $\{\gamma_T\} \subset \{\gamma\}$  und  $\lambda(\gamma_T) = \lambda(\gamma)$  ist.

*Beispiel.* Es sei  $\{\gamma\}$  die Vereinigungsmenge zweier Scharen  $\{\gamma_T\}$  und  $\{\gamma_\perp\}$  mit  $\lambda(\gamma_\perp) = \infty$ . Dann ist  $\{\gamma\}$  durch  $\{\gamma_T\}$  ersetzbar. Einerseits ist nämlich  $\lambda(\gamma_T) \geq \lambda(\gamma)$  nach Satz 3", anderseits aber  $\lambda(\gamma) \geq \lambda(\gamma_T)$  gemäß Satz 5.

Der Begriff ersetzbar soll im folgenden noch verallgemeinert werden. Vorbereitend definieren wir die Durchschnittsschar  $\{\gamma_\wedge\}$  zweier Scharen  $\{\gamma_I\}$  und  $\{\gamma_{II}\}$ . Darunter verstehen wir die Menge der Kurven, die sowohl zu  $\{\gamma_I\}$  wie auch zu  $\{\gamma_{II}\}$  gehören. Dabei setzen wir ausdrücklich voraus, daß  $\{\gamma_\wedge\}$  nicht mit  $\{\gamma_I\}$  oder  $\{\gamma_{II}\}$  identisch ist, da man sonst nur ein Teilscharenverhältnis im Sinne von Satz 3" hätte.

**Definition 4.** Die Kurvenscharen  $\{\gamma_I\}$  und  $\{\gamma_{II}\}$  heißen vertauschbar, wenn  $\lambda(\gamma_I) = \lambda(\gamma_{II}) = \lambda(\gamma_\wedge)$  ist und beide Inklusionen  $\{\gamma_\wedge\} \subset \{\gamma_I\}$  und  $\{\gamma_\wedge\} \subset \{\gamma_{II}\}$  echt sind.

### § 3. Einige Beispiele für Extremallängen

In Ergänzung zu § 1.3 werden sogenannte Normalgebiete im Rechteck definiert, und es wird der Zusammenhang mit der auf P. KOEBE [9] zurückgehenden Erklärung der betreffenden minimalen Schlitzbereiche hergestellt. Schon H. GRÖTZSCH [4, 5] hat übrigens die minimalen Schlitzbereiche mit seiner Streifenmethode eingeführt. Im nächsten Abschnitt soll der Begriff des Normalgebietes verallgemeinert werden. Vorbereitend dazu behandeln wir zum Schluß eine gewisse Klasse von speziellen Gebieten.

1. Die Schar  $\{\gamma_R\}$ , die im Rechteck  $R = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$  die beiden Längsseiten miteinander verbindet, hat gemäß § 1.3 als Extremallänge  $\lambda(\gamma_R) = a^{-1} \cdot b$ . Dieser Wert, der Modul des Rechtecks, ist nach Satz 2 eine konforme Invariante. Ferner ist die gewöhnliche euklidische Metrik Extremalmetrik.

Identifiziert man in geeigneter Weise die Seiten von  $R$  und bildet nachher  $R$  konform auf einen Kreisring ab, so lassen sich die Resultate auf Kreisringe

übertragen. In Verbindung mit Satz 2 ergibt sich  $\lambda(\mu) = (2\pi)^{-1} \cdot \log(r_1^{-1} \cdot r_2)$  für  $\{\mu\}$  als Schar der Kurven, die

$$\{z \mid |z| = r_1\} \quad \text{mit} \quad \{z \mid |z| = r_2, r_1 < r_2\}$$

verbinden, sowie  $[\lambda(\nu)]^{-1} = (2\pi)^{-1} \cdot \log(r_1^{-1} \cdot r_2)$ , wenn  $\{\nu\}$  aus den  $\{z \mid |z| = r_1\}$  und  $\{z \mid |z| = r_2\}$  trennenden Kurven besteht. Ferner ist der Modul  $(2\pi)^{-1} \cdot \log(r_1^{-1} \cdot r_2)$  eines Ringgebietes eine konforme Invariante und  $\varrho(z) = |z|^{-1}$  Extremalmetrik.

2. Es sei im Innern des Rechtecks  $R$  eine abgeschlossene Punktmenge  $A$  gegeben. Wir betrachten folgende Klasse  $X = \{h(x, y)\}$  von Funktionen:  $h(x, y) \in X$  sei stetig differenzierbar in  $R - A$ , auf  $E_0$  sei  $h = 0$ , auf  $E_1$  dagegen  $h = 1$ .  $D'(h)$  bezeichne das über  $R - A$  erstreckte DIRICHLETintegral von  $h(x, y)$ . Ist  $\Phi = \{f(x, y)\}$  die in § 1.3 erklärte Funktionenklasse und  $D(f)$  das über  $R$  erstreckte DIRICHLETintegral, so gilt ersichtlicherweise  $\inf_{\{h\}} D'(h) \leq \inf_{\{f\}} D(f)$ .

a) P. KOEBE definierte die bezüglich  $R$  minimalen Schlitzbereiche durch die Forderung, daß in dieser Ungleichung das Gleichheitszeichen stehen soll. Er zeigte, daß dann  $A$  das Flächenmaß Null hat und sämtliche Komponenten von  $A$  Schlitze (bzw. Punkte) sind, die in  $R$  vertikal liegen. Ferner sind zwei minimale Schlitzbereiche dann und nur dann konform äquivalent, wenn sie bei einer Bewegung des ganzen Rechtecks ineinander übergehen.

b) Es sei  $\{\gamma_A\}$  die Teilschar der in  $R$  definierten Schar  $\{\gamma_R\}$ , deren Träger  $\Gamma_A$  gerade das Teilgebiet  $R - A$  ist. Gemäß Definition 3 in § 2.6 sind solche Teilscharen ausgezeichnet, die  $\{\gamma_R\}$  ersetzen können.  $R - A$  heiße nun Normalgebiet bezüglich  $R$ , wenn  $\{\gamma_R\}$  durch  $\{\gamma_A\}$  ersetzbar ist. Da nun jede Metrik  $\varrho(z) = |\operatorname{grad} h(x, y)|$ ,  $h(x, y) \in X$  für  $\{\gamma_A\}$  zulässig ist und hiefür  $L(\varrho) \geq 1$  gilt, so ergibt sich bei normalem  $R - A$  die Ungleichung  $\inf_{\{h\}} D'(h) \geq \lambda^{-1}(\gamma_A) = \lambda^{-1}(\gamma_R) = \inf_{\{f\}} D(f)$ . In Verbindung mit  $\inf_{\{h\}} D'(h) \leq \inf_{\{f\}} D(f)$  folgt daraus, daß jedes in unserm Sinn normale Gebiet ein minimaler Schlitzbereich ist. Daß auch die Umkehrung richtig ist und die für minimale Schlitzbereiche zitierten Eigenschaften gelten, werden wir später darlegen.

*Anmerkung:* Die in § 3.1 erwähnte Übertragung auf Kreisringe liefert minimale Radial- bzw. Kreisbogenschlitzbereiche bezüglich eines Kreisrings [5].

3. Es sollen nun die in § 3.1 erklärten Beispiele verallgemeinert werden. Gegeben sei in der  $z$ -Ebene ein Gebiet  $G$ , das von endlich vielen analytischen Kurven  $C_i$  berandet werde. Auf jedem der  $C_i$  seien endlich viele offene und disjunkte Teilbogen  $C'_i$  derart ausgewählt und in zwei Klassen  $E_0$  und  $E_1$  ein-

geteilt, daß die Komponenten der Punktmenge  $E^* = \cup C_i - \cup C'_i$  abgeschlossene Intervalle sind, die ihrerseits immer Intervalle verschiedener Klasse miteinander verbinden.

Die Kurvenschar  $\{\gamma\}$  verbinde in  $G$  die Bogen von  $E_0$  mit denen von  $E_1$ , das heißt zu jedem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  existiere ein  $\delta > 0$  derart, daß der euklidisch gemessene Abstand  $d[E_0, z_\gamma(t)] < \varepsilon$  für jedes  $t$  mit  $t < \delta$  resp.  $d[E_1, z_\gamma(t)] < \varepsilon$  für jedes  $t$  mit  $1 - t < \delta$ .

Wie im Beispiel von § 1.3 existiert eine in  $G$  harmonische Funktion  $u(x, y)$ , für die  $0 < u < 1$  in  $G$  gilt, mit  $u = 0$  auf den Bogen von  $E_0$ ,  $u = 1$  auf denen von  $E_1$  und  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  für die Normalableitung längs  $E^*$ . Die

Existenz von  $u(x, y)$  ergibt sich am einfachsten mit Hilfe der sogenannten SCHOTTKYSchen Verdoppelung von  $G$  bezüglich  $E^*$ , das heißt man legt ein zweites Exemplar von  $G$  über  $G$  und verheftet beide Exemplare längs der inneren Punkte von  $E^*$  derart zu einer RIEMANNSchen Fläche  $G^*$ , daß  $G^*$  bei Spiegelung an  $E^*$  in sich übergeht. Ordnet man übereinanderliegenden Randpunkten von  $G^*$  gleiche Werte von  $u$  zu, so ist auf  $G^*$  ein Randwertproblem erster Art zu lösen.

**Theorem 1.** *Es sei  $D(u)$  das für  $G$  berechnete DIRICHLETintegral von  $u(x, y)$  und  $\lambda(\gamma)$  die Extremallänge der  $E_0$  und  $E_1$  innerhalb  $G$  verbindenden Schar  $\{\gamma\}$ . Dann gilt  $\lambda^{-1}(\gamma) = D(u)$  und  $P(z) = |\operatorname{grad} u(x, y)|$  ist Extremalmetrik von  $\{\gamma\}$ .*

*Beweis.* Wir betrachten in  $G$  das Feld der Linien  $dv = 0$  der konjugiert-harmonischen Funktion von  $u(x, y)$ . Im Anschluß an die physikalischen Interpretationen in § 1.3 werden wir diese Linien Flußlinien nennen. Mit Ausnahme von endlich vielen, die sich in den Punkten mit  $\operatorname{grad} u = 0$  verzweigen, ist jede Flußlinie  $C$  eine Kurve der Schar  $\{\gamma\}$  und kann durch  $z_c(u)$ ,  $0 < u < 1$  dargestellt werden. Da sich auch bei harmonischer Fortsetzung über  $E_0$  und  $E_1$  hinaus die Linien  $u = 0$  resp.  $u = 1$  auf  $E_0$  bzw.  $E_1$  nirgends verzweigen, verzweigen sich ebenso die Linien  $v = \operatorname{const.}$  nicht. Von jedem Punkt von  $E_0$  und  $E_1$  geht also infolge  $|\operatorname{grad} u| > 0$  genau eine Flußlinie aus.

Nun ist für jede auf  $G$  beschränkte zulässige Metrik  $\varrho(z)$  und für jede sich nicht verzweigende Flußlinie

$$L(\varrho) \leq \int_C \varrho(z) |dz| = \int_0^1 \varrho[z_c(u)] \cdot \left| \frac{dz_c}{du} \right| du$$

bezüglich der Schar  $\{\gamma\}$ . Nach der SCHWARZSchen Ungleichung erhält man daraus

$$L^2(\varrho) \leq \int_0^1 \varrho^2[z_c(u)] \left| \frac{dz_c}{du} \right|^2 du.$$

Dabei ist die Minimallänge für gegebenes  $\varrho(z)$  konstant, während die rechte Seite der Ungleichung als eine auf  $E_0$  resp.  $E_1$  definierte Funktion betrachtet werden kann. Wir multiplizieren diese Ungleichung mit  $dv$  und integrieren – nach Numerierung der zu  $E_1$  gehörenden Bogen – über diese Bogen der Reihe nach derart, daß die sich verzweigenden Flußlinien weggelassen werden und das Gebiet  $G$  links liegt. Dann folgt

$$L^2(\varrho) \cdot \int_{E_1} dv = L^2(\varrho) \cdot D(u) \leq \int_{E_1} dv \cdot \int_0^1 \varrho^2[z_C(u)] \left| \frac{dz_C}{du} \right|^2 du.$$

Da aber durch jeden Punkt von  $G$  mit  $|\operatorname{grad} u| > 0$  nur eine Flußlinie geht, erhält man daraus mit Hilfe von  $dudv = |\operatorname{grad} u|^2 \cdot dx dy$  die Beziehung  $L^2(\varrho) \cdot D(u) \leq \iint_G \varrho^2(x, y) dx dy = F(\varrho)$ .

Infolge  $u(x, y) \not\equiv 0$  ist einmal  $D(u) > 0$ . Anderseits gilt in der euklidischen Metrik  $L(\varrho) > 0$  und  $F(\varrho) < \infty$ , so daß  $D(u)$  endlich sein muß. Für  $P(z)$  ergibt sich schließlich  $D(u) = F(P)$ ,  $L(P) = 1$  und somit Theorem 1.

*Anmerkung:* Die Voraussetzung, daß die Bogen von  $E_0$  und  $E_1$  auf den  $C_i$  alternieren, wurde im Beweis nicht benutzt, wird aber später verwendet werden. Dagegen ist es wesentlich, daß  $E^*$  keine isolierten Punkte enthält. In diesem Fall gilt nämlich  $\lambda(\gamma) = 0$ . Zum Beweise betrachten wir einen zu  $E^*$  gehörenden, isolierten Punkt  $p$ . Dann ist  $\lambda(\gamma)$  nach Satz 3" und Satz 4 kleiner als die Extremallänge derjenigen Kurvenschar, die in einem genügend kleinen Kreis um  $p$  das Zentrum  $p$  von der Peripherie trennt. Diese verschwindet aber gemäß § 3.1 und somit folgt  $\lambda(\gamma) = 0$ .

4. Mit Hilfe der in § 3.3 erklärten Scharen  $\{\gamma\}$ ,  $0 < \lambda(\gamma) < \infty$  werden wir im nächsten Abschnitt die sogenannten Normalgebiete einführen. Statt einer Schar  $\{\gamma\}$  können wir uns auch ein Gebiet  $G$  mit ausgezeichneten Berandungen  $E_0$  und  $E_1$  vorgeben. Mit  $\mathfrak{G} = \{(G; E_0, E_1)\}$  bezeichnen wir die Gesamtmenge der Gebiete  $G$  samt ihren Randmengen  $E_0$  und  $E_1$ .

#### § 4. Normalgebiete

Zuerst geben wir den Begriff der Normalität. Dieser stellt eine Weiterentwicklung der auf P. KOEBE [9, 10] zurückgehenden Erklärung der minimalen Schlitzbereiche dar. Nachher beweisen wir einige Eigenschaften der Normalgebiete, wie zum Beispiel das Analogon zum Satz von P. KOEBE über das Maß der Berandung. Zum Schluß werden die Normalgebiete an Hand der Extremallängen erklärt, die den bei P. KOEBE mit Hilfe der Strömungspotentiale erklärten minimalen Schlitzbereichen entsprechen. Die Äquivalenz der beiden Definitionen beweisen wir dagegen erst später.

1. Es sei ein Element  $(G; E_0, E_1)$  der in § 3.4 erklärten Menge  $\mathfrak{G}$  gegeben.  $\{\gamma\}$  sei gemäß § 3.3 die in  $(G; E_0, E_1)$  definierte Kurvenschar. Von den Teilscharen  $\{\gamma_T\} \subset \{\gamma\}$  sind diejenigen ausgezeichnet, die nach Definition 3 in § 2.6 die gegebene Schar  $\{\gamma\}$  ersetzen können. In Verallgemeinerung der in § 3.2 für das Rechteck skizzierten Definition treffen wir folgende Erklärung

**Definition 5.** Eine Teilschar  $\{\gamma_T\}$  von  $\{\gamma\}$  heißt *normal bezüglich  $\{\gamma\}$*  und wird mit  $\{\gamma_N\}$  bezeichnet, wenn  $\{\gamma\}$  durch  $\{\gamma_T\}$  ersetzbar ist. Ist überdies der Träger  $\Gamma_T$  ein Gebiet  $G_T \subset G$ , so heißt  $G_T$  *Normalgebiet bezüglich  $(G; E_0, E_1)$*  und wird dann einfach mit  $G_N$  bezeichnet.

Durch die beiden folgenden Zusatzvoraussetzungen zu Definition 5 soll vermieden werden, daß dasselbe  $G_N$  gleichzeitig bezüglich verschiedener Elemente  $(G; E_0, E_1)$  normal sein kann.

**Definition 5'.** Ein Gebiet  $G_N$  heißt nur dann *Normalgebiet*, wenn einerseits je zwei Randkomponenten  $C_i$  von  $G$  durch eine in  $G_N$  verlaufende JORDANKURVE  $L$  voneinander getrennt werden können, und anderseits jeder Teilbogen von  $E^*$  von jeder Komponente von  $G - G_N$  (bezüglich der Ebene) getrennt liegt.

2. In den folgenden Theoremen 2 und 3 werden zwei wichtige Eigenschaften der Normalgebiete hergeleitet.

**Theorem 2.** Die in § 3.3 erklärte Extremalmetrik

$$P(z) = |\operatorname{grad} u(x, y)| \quad \text{von} \quad \{\gamma\}$$

ist zugleich Extremalmetrik für  $\{\gamma_N\}$ . Die Menge  $G - G_N$  hat das Flächenmaß Null.

**Beweis.** Die für  $P(z)$  berechneten Größen  $F(P)$  und  $L(P)$  beziehen sich auf  $\{\gamma\}$ ,  $F_N(P)$  und  $L_N(P)$  dagegen auf  $\{\gamma_N\}$  resp.  $G_N$ . Nun ist  $L_N(P) \geq L(P) = 1$  und

$$\lambda^{-1}(\gamma) = F(P) \geq F_N(P) \geq L_N^2(P) \cdot \lambda^{-1}(\gamma_N) \geq \lambda^{-1}(\gamma_N) .$$

Infolge der Voraussetzung der Normalität ist also  $P(z)$  Extremalmetrik für  $\{\gamma_N\}$ . Weiter gilt  $F(P) - F_N(P) = \iint_{G - G_N} P^2 dx dy = 0$ . Da  $\operatorname{grad} u$  nur in endlich vielen Punkten verschwindet, ergibt sich daraus die zweite Behauptung von Theorem 2, q. e. d.

**Anmerkung.** Theorem 2 folgt auch direkt aus Definition 5 unter Heranziehung von Theorem 1 und Satz 3'.

**Theorem 3.** Es sei  $q$  ein Punkt aus  $G_N$  und  $V$  eine in der Extremalmetrik gemessene beliebige  $\varepsilon$ -Umgebung von  $q$  (bezüglich  $G_N$ ). Dann existiert ein durch  $V$

gehendes  $\gamma_N$  aus  $\{\gamma_N\}$  von der Länge

$$l_P(\gamma_N) = \int_{\gamma_N} |\operatorname{grad} u(x, y)| \, dz < 1 + \varepsilon.$$

*Beweis.* Die Gegenannahme besagt, daß für jede derartige Kurve  $l_P(\gamma_N) \geq 1 + \varepsilon$  ist. Es sei  $V'$  die in der Extremalmetrik gemessene  $\varepsilon/2$ -Umgebung von  $q$ . Wir setzen  $\varrho_0(z) = P(z)$  in  $G_N - V'$  und  $\varrho_0(z) = 0$  in  $V'$ . Dann bleibt ersichtlicherweise  $l_{\varrho_0}(\gamma_N) \geq 1$  bestehen, während  $F(\varrho_0) < F(P)$  in Widerspruch zu Zusatz 1" und Theorem 2 ist.

3. Eine bemerkenswerte Folgerung aus Theorem 3 ist

**Theorem 3'.** *Es sei  $C$  eine beliebige, sich nicht verzweigende Flußlinie in  $G$ . Dann gibt es zu jeder in der Extremalmetrik gemessenen  $\vartheta$ -Umgebung  $W$  von  $C$  eine Kurve aus  $\{\gamma_N\}$ , die ganz in  $W$  verläuft.*

*Beweis.* Die zu  $u(x, y)$  konjugiert-harmonische Funktion  $v(x, y)$  werde auf  $C$  durch  $v = 0$  normiert und an Hand dieser Normierung fortgesetzt. Da  $\operatorname{grad} u$  auf der abgeschlossenen Kurve  $C$  nirgends verschwindet und in  $G$  stetig ist, bilden für genügend kleines  $\vartheta$  die Punkte  $\{(x, y) \mid 0 < u(x, y) < 1, -\vartheta < v(x, y) < \vartheta\}$  eine in der  $P(z)$ -Metrik gemessene  $\vartheta$ -Umgebung  $W$  von  $C$ , in der  $|\operatorname{grad} u| > 0$  gilt. Wir betrachten die in  $W$  definierte Funktion  $\Omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Diese bildet  $W$  konform auf das Rechteck  $\overline{W} = \{(u, v) \mid 0 < u < 1, -\vartheta < v < \vartheta\}$  der  $(u, v)$ -Ebene ab. Der Extremalmetrik  $P(z)$  in  $W$  entspricht dabei nach § 2.2 die gewöhnliche euklidische Metrik von  $\overline{W}$ . Ferner gibt es nach Definition 5' Punkte  $q$  auf  $C$ , die in  $G_N$  liegen.

Wir berufen uns nun auf Theorem 3 und gehen indirekt vor. Es sei  $q$  ein Punkt von  $G_N$  auf  $C$  und  $\gamma_N$  eine Kurve, die die in Theorem 3 erwähnte, zu  $q$  gehörende Umgebung  $V$  durchquert. Dann gäbe es zu jedem solchen  $\gamma_N$  einen Punkt  $q'$  auf  $\gamma_N$ , der außerhalb  $W$  liegt. Wir wählen  $\varepsilon = \vartheta^2/2(1 + \vartheta) < \vartheta$  und  $q_0$  sei ein Punkt auf  $\gamma_N$ , der in  $V$  liegt. Bei konformer Übertragung auf  $\overline{W}$  erhält man  $l_P(\gamma_N) \geq d(E_0, q_0) + d(q_0, q') + d(q', E_1)$  für eine Kurve, die bei wachsendem  $t$  die Umgebung  $V$  vor  $q'$  passiert.  $d(E_0, q_0)$  bezeichnet den betreffenden in  $\overline{W}$  gemessenen euklidischen Abstand. Wird  $V$  nach  $q'$  durchquert, so ändert sich der Beweis nur unwesentlich. Nun gilt offensichtlich  $d(E_0, q_0) + d(q_0, q') + d(q', E_1) \geq [1 + (\vartheta - \varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}$ , woraus sich in Widerspruch zu Theorem 3 die Ungleichung  $l_P(\gamma_N) \geq 1 + \varepsilon$  ergibt, q. e. d.

4. Es sei gemäß Definition 5 und 5' ein Normalgebiet  $G_N$  gegeben und  $a$  sei eine Komponente von  $A = G - G_N$ . Aus Theorem 3' folgt unmittelbar, daß jedes  $a$  auf einer (eventuell sich verzweigenden) Flußlinie  $C$  liegen muß. Besteht  $a$  aus einem einzelnen Punkt, so gehört es zum Randdiskontinuum

$A_D$  von  $A$ . Andernfalls ist  $a$  Element des Randkontinuums  $A_K$  von  $A$ . Dann liegen entweder alle Häufungspunkte von  $a$  in  $G$  und  $a$  heißt ein normaler Schlitz, oder es gibt Häufungspunkte von  $a$ , die zum Rande von  $G$  gehören, und  $a$  ist ein normaler Einschnitt. Nach Definition 5' gehen von  $E^*$  keine Einschnitte aus. Alle Punkte von  $E_1$ , deren zugehörige Flußlinien Elemente  $a$  enthalten, bilden die sogenannte Projektionsmenge  $PA$  von  $A$ . Die analog definierten Projektionsmengen von  $A_D$  resp.  $A_K$  bezeichnen wir mit  $PA_D$  bzw.  $PA_K$ .

$m(C)$  sei das lineare, in der Extremalmetrik  $P(z)$  berechnete Maß der auf einer beliebigen Flußlinie  $C$  gelegenen Punkte von  $A$ .  $m(C)$  kann als eine auf  $E_1$  definierte Funktion aufgefaßt werden. Integriert man  $m(C)$  – nach Multiplikation mit  $dv$  wie beim Beweis von Theorem 1 in § 3.3 – über die Bogen von  $E_1$  und benutzt den in Theorem 2 angegebenen Satz über das Maß der Berandung, so ergibt sich mit Hilfe des Satzes von FUBINI, daß  $m(C)$  fast überall auf  $E_1$  verschwinden muß. Insbesondere folgt daraus, daß  $PA_K$  eine lineare Nullmenge ist. Dagegen braucht dies für  $PA_D$  – wie wir noch näher erläutern werden – durchaus nicht der Fall zu sein.

Wir gehen umgekehrt von einer Teilschar  $\{\gamma_T\} \subset \{\gamma\}$  aus. Der Träger  $\Gamma_T$  sei ein Teilgebiet  $G_T$  von  $G$  und die Randmenge  $A = G - G_T$  bestehe aus Punkten, normalen Schlitzten und normalen Einschnitten. Ist nun die betreffende Projektionsmenge  $PA$  von  $A$  eine Nullmenge, so erhält man für  $\{\gamma_T\}$  wie beim Beweis von Theorem 1 in § 3.3 die Beziehung  $\lambda^{-1}(\gamma_T) = D(u)$ , so daß also  $G_T$  gemäß Definition 5 Normalgebiet ist. P. KOEVE [9] hat für seine minimalen Schlitzbereiche die Vermutung geäußert, daß – auf unsern Fall übertragen – die Menge  $PA$  auch umgekehrt bei normalem  $G_N$  eine lineare Nullmenge darstelle. Erst H. GRÖTZSCH [4] und R. DE POSSEL [11] gelang gleichzeitig deren Widerlegung. Damit wurde gezeigt, daß das Randdiskontinuum  $A_D$  für die Frage der Normalität nicht unwesentlich ist. Die betreffenden Gegenbeispiele haben infolge der in § 3.2 angekündigten Äquivalenz der Definitionen auch für unsere Normalgebiete Gültigkeit.

5. Es werden im folgenden die normalen Kreisbogen- und Radialschlitzgebiete wie auch die Parallelschlitzgebiete mit Hilfe der Extremallängen erklärt. Den Äquivalenzbeweis mit der KOEBESCHEN Definition werden wir erst später durchführen.

Das Gebiet  $G_E$  enthalte  $z = 0$  und  $z = \infty$ . Wir betrachten Zahlen  $\eta$  und  $H$ ,  $0 < \eta < H$  derart, daß der Kreisring  $R_E = \{z \mid \eta < |z| < H\}$  die gesamte Berandung von  $G_E$  enthält.  $G_E$  heißt dann normales Kreisbogen- bzw. Radialschlitzgebiet, falls das in  $R_E$  gelegene Teilgebiet von  $G_E$  für alle derartigen  $\eta$  und  $H$  im betreffenden Sinne gemäß § 3.2 und Definition 5 normal ist.

Anderseits seien bei gegebenem Gebiete  $G_P$ , das den Punkt  $z = \infty$  enthält,  $\vartheta$  und  $\Theta$  positive Zahlen derart, daß das Rechteck

$$R_P = \{(x, y) \mid -\vartheta < x < \vartheta, -\Theta < y < \Theta\}$$

die gesamte Berandung von  $G_P$  enthält.  $G_P$  heißt normales, horizontal gelegenes Parallelschlitzgebiet, wenn das in  $R_P$  gelegene Teilgebiet von  $G_P$  für jedes  $\vartheta$  und  $\Theta$  normal bezüglich der Schar ist, die in  $R_P$  die Seiten  $\{(x, y) \mid x = -\vartheta, -\Theta < y < \Theta\}$  und  $\{(x, y) \mid x = \vartheta, -\Theta < y < \Theta\}$  miteinander verbindet.

## § 5. Konforme Abbildung von Normalgebieten

Die in den Theoremen 4 und 4' formulierten Abbildungssätze sind Verallgemeinerungen von Resultaten, wie sie von H. GRÖTZSCH [5] und E. RENGEL [13] für einfache Spezialfälle aufgestellt wurden. Unter Anwendung des in § 2.1 formulierten Satzes 1 läßt sich auch die Eindeutigkeitsfrage für konforme Abbildungen von Normalgebieten mit Hilfe der Extremallängen behandeln. Auf diese Möglichkeit wurde andernorts [14] kurz hingewiesen.

1. Das Gebiet  $G_N \subset G$  sei ein Normalgebiet bezüglich  $(G; E_0, E_1)$  sowohl im Sinne von Definition 5 wie auch von Definition 5' und  $\{\gamma_N\}$  die zugehörige ausgezeichnete Kurvenschar.  $G_N$  werde durch  $z' = f(z)$  konform auf  $G'_0$  und  $\{\gamma'_0\}$  auf  $\{\gamma'_0\}$  abgebildet. Jedes Element  $(G; E_0, E_1)$ , das  $G'_0$  derart zugeordnet werden kann, daß  $\{\gamma'_0\}$  Teilschar der in  $G$  definierten Schar  $\{\gamma\}$  ist, gehöre zur Teilmenge  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$ . Die diesbezüglichen Elemente und Kurvenscharen werden mit  $(G'; E'_0, E'_1)$  resp.  $\{\gamma'\}$  notiert. Mit Hilfe der Sätze 2 und 3" erhält man

**Theorem 4.** *Für jede konforme Abbildung  $f(z)$  eines Normalgebietes  $G_N$  und jede zugehörige (nicht leere) Teilmenge  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$  gilt bezüglich der ausgezeichneten Kurvenscharen  $\lambda(\gamma') \leq \lambda(\gamma_N)$ .*

Steht für eine Schar  $\{\gamma'\}$  in Theorem 4 das Gleichheitszeichen, so ist  $G'_0$  Normalgebiet bezüglich  $G'$  mindestens im Sinne von Definition 5. Ist nun die erste Voraussetzung von Definition 5' nicht erfüllt, so gibt es Einschnitte  $e_i$  von  $G'_0$ , die zugleich nicht zerlegende Querschnitte von  $G'$  sind oder solche enthalten. Nun geht jede JORDANKurve  $L$ , die in  $G_N$  verläuft und eine Randkomponente  $C_i$  von  $G$  von den übrigen Randkomponenten trennt, bei der Abbildung  $f(z)$  wieder in eine JORDANKurve  $L'$  über, die ihrerseits eine oder allenfalls endlich viele Randkomponenten von  $G'$  von den übrigen trennt. Dabei machen wir ausdrücklich von der in § 3.3 gegebenen Voraussetzung Gebrauch, wonach auf jeder Randkomponente  $C_i$  resp.  $C'_i$  von  $G$  bzw.  $G'$  Bogen von  $E_0$  oder  $E_1$  resp.  $E'_0$  oder  $E'_1$  ausgezeichnet sind. Die Zusammenhangszahl von  $G'$  ist folglich niemals kleiner als diejenige von  $G$  und muß, wenn Querschnitte  $e_i$  vor-

liegen, offensichtlich größer sein. Wir werden später zeigen, daß man durch eine Hilfsabbildung den Fall auftretender  $e_i$  leicht auf denjenigen zurückführen kann, bei dem  $G$  und  $G'$  die gleiche Zusammenhangszahl besitzen.

Es sei  $Q$  ein Querschnitt von  $G$ , der in  $G_N$  verläuft und dessen Endpunkte zu  $E_0 \cup E_1$  gehören. Ferner trenne  $Q$  ein einfache zusammenhängendes Gebiet  $U$  von  $G$  ab. Ist nun Definition 5' bezüglich  $G'$  erfüllt, so trennt auch das durch  $f(z)$  vermittelte Bild  $Q'$  ein einfache zusammenhängendes Gebiet  $U'$  von  $G'$  ab. Wäre dies nämlich nicht der Fall, also  $U'$  mehrfach zusammenhängend oder  $Q'$  nicht zerlegend, so müßte sich die Zusammenhangszahl für  $G'$  ersichtlicherweise erhöhen.

Ist dagegen für  $G'_0 \subset G'$  die erste Voraussetzung von Definition 5' zwar erfüllt, doch noch nicht die zweite, so gibt es normale Einschnitte  $e_i$ , die in Punkten der für  $G'$  gemäß § 3.3 definierten Randmenge  $E^*$  enden. Geht man wie bei § 3.3 durch SCHOTTKYSche Verdoppelung von  $G'$  zur RIEMANNSchen Fläche  $G^*$  über, so müssen die innern Punkte von  $E^*$ , die Endpunkte von Einschnitten  $e_i$  sind, Nullstellen des auf  $G^*$  definierten  $\text{grad } u'$  sein. Folglich kann es nur endlich viele solche Einschnitte geben. In diesem Fall betrachtet man an Stelle von  $(G'; E'_0, E'_1)$  das Element  $(G' - \cup e_i; E'_0, E'_1)$ , das ebenfalls zur Klasse  $\mathfrak{G}$  gehört. Ferner besitzen  $G'$  und  $G' - \cup e_i$  dieselbe Zusammenhangszahl, die nach Voraussetzung mit der von  $G$  übereinstimmt. Gemäß Satz 3" ist  $G'_0$  auch bezüglich des neuen Elementes normal. Unter Anwendung dieser beiden Reduktionen darf man demnach im Fall des Gleichheitszeichens bei Theorem 4 voraussetzen, daß  $G'_0$  auch im Sinne von Definition 5' normal bezüglich des zugeordneten Elementes ist.

2. Es stehe in Theorem 4 das Gleichheitszeichen und  $G_N \subset G$  sowie  $G'_N \subset G'$  seien Normalgebiete im Sinne von Definition 5 und 5'.  $u(x, y)$  und  $u'(x', y')$  seien die gemäß § 3.3 bezüglich  $G$  und  $G'$  erklärten harmonischen Funktionen und  $h$  sowie  $h'$  die Menge der Punkte  $q$  und  $q'$  von  $G$  und  $G'$ , in denen  $\text{grad } u$  resp.  $\text{grad } u'$  verschwindet. Da  $G_N$  in  $G$  dicht liegt, gibt es zu jedem  $q \in h$  Folgen  $z_i$  aus  $G_N$ , die gegen  $q$  konvergieren. Ferner sei  $H$  resp.  $H'$  die Menge der normalen Schlitze und Einschnitte in  $G$  und  $G'$ , die Punkte aus  $h$  resp.  $h'$  enthalten.

**Theorem 4'.** *Steht in Theorem 4 das Gleichheitszeichen und ist das durch  $f(z)$  vermittelte Bildgebiet  $G'_N$  Normalgebiet bezüglich  $(G'; E'_0, E'_1)$  im Sinne von Definition 5', so kann  $f(z)$  zu einer konformen Abbildung von  $G - H$  auf  $G' - H'$  erweitert werden. Gilt zusätzlich  $\lim_{z_i \rightarrow q} f(z_i) \in h'$  für jedes  $q \in h$  und jede Folge  $z_i \rightarrow q$  mit  $z_i \in G_N$ , so ist  $f(z)$  sogar in  $G$  konform und bildet  $G$  auf  $G'$  sowie  $\{\gamma\}$  auf  $\{\gamma'\}$  ab.*

*Beweis.* Es sei  $L$  entweder eine JORDANKURVE  $J$ , die in  $G_N$  verläuft und deren Inneres  $U$  keinen Randpunkt von  $G$  enthält, oder es sei  $L$  ein in  $G_N$  gelegener QUERSCHNITT  $Q$  von  $G$ , dessen Endpunkte zu  $E_0 \cup E_1$  gehören und der ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $U$  von  $G$  abtrennt. Der Durchschnitt  $U \cap G_N$  werde mit  $V$  bezeichnet. Das durch  $f(z)$  vermittelte Bild  $L'$  definiert in beiden Fällen gemäß § 5.1 ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $U'$ , das in  $G'$  liegt und das Bild  $V'$  von  $V$  enthält.  $\Omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  sei in  $U$  normiert und definiert und ebenso  $\Omega'(x', y') = u'(x', y') + iv'(x', y')$  in  $U'$ . Wir setzen ferner von  $U$  voraus, daß dessen Bild  $S$  in der  $\Omega$ -Ebene schlicht sei. Das Bild von  $V$  werde mit  $T$  und diejenigen von  $U'$  und  $V'$  vermöge  $\Omega'(z')$  mit  $S'$  resp.  $T'$  bezeichnet.

Nach Theorem 1 und 2 sind  $P(z) = |\operatorname{grad} u|$  und  $P'(z') = |\operatorname{grad} u'|$  normierte Extremalmetriken für  $\{\gamma_N\}$  und  $\{\gamma'_N\}$ . Sie müssen sich bei der konformen Abbildung  $f(z)$  infolge der Sätze 1 und 2 in  $G_N$  und  $G'_N$  gegenseitig entsprechen. Überträgt man diese Maßbestimmungen von  $V$  und  $V'$  auf  $T$  und  $T'$ , so erhält man in der  $\Omega$ - und  $\Omega'$ -Ebene die gewöhnliche euklidische Metrik. Für die durch  $f(z)$  induzierte konforme Abbildung  $\Omega' = g(\Omega)$  von  $T$  auf  $T'$  gilt nun nach Satz 1 und § 2.2 fast überall  $|d\Omega| = |d\Omega'|$ , woraus man die in  $T$  gültige Beziehung  $g(\Omega) = a\Omega + b$ ,  $|a| = 1$  folgert. Also ist auch  $T'$  schlicht und die Abbildung  $\Omega'(z')$  besitzt bezüglich  $T'$  die inverse Abbildung  $\Omega'^{-1}$ . Folglich gilt für die durch  $f(z)$  beschriebene Abbildung von  $V$  auf  $V'$  die Formel  $f(z) = \Omega'^{-1}g\Omega(z)$ .

Die rechte Seite von  $f(z) = \Omega'^{-1}g\Omega(z)$  ist nun eindeutig und analytisch auf  $U$  fortsetzbar und definiert eine Abbildung von  $U$  auf  $U'$ . Enthält nämlich  $U$  Randpunkte oder normale Schlitze von  $G_N$ , so müssen diese konform auf entsprechende Randpunkte oder normale Schlitze von  $G'_N$  abgebildet werden. Dasselbe gilt für normale Einschnitte. Dabei benutzen wir einmal die Eigenschaft, daß für  $G_N$  und  $G'_N$  nach Definition 5' in  $E^*$  keine Einschnitte enden. Ferner verbinden gemäß der in § 3.3 gegebenen Voraussetzung die Intervalle von  $E^*$  immer Punkte verschiedener Klasse  $E_0$  resp.  $E_1$  miteinander. Für das vom Querschnitt  $Q$  resp.  $Q'$  abgetrennte  $U$  bzw.  $U'$  darf demnach kein normaler Einschnitt bei der konformen Abbildung in ein Randintervall übergehen.

Da nun zu jedem normalen Schlitz und zu jedem normalen Einschnitt in  $G - H$  ein  $U$  angegeben werden kann, dessen Bild  $S$  schlicht ist, so ist also  $f(z)$  in  $G - (H \cup h)$  konform und bildet dieses Gebiet auf  $G' - (H' \cup h')$  ab. In den endlich vielen Punkten von  $h$ , die nicht zu  $H$  gehören, hat  $f(z) = \Omega'^{-1}g\Omega(z)$  isolierte hebbare Singularitäten, so daß also  $f(z)$  das Gebiet  $G - H$  konform auf  $G' - H'$  abbildet.

Bildet  $f(z)$  bei Fortsetzung auf den Rand  $H$  zusätzlich die Menge  $h$  in  $h'$  ab, so sei  $U(q)$  die bezüglich eines Punktes  $q \in h$  in der  $P(z)$ -Metrik gemessene

$\delta$ -Umgebung und  $V(q) = U(q) \cap G_N$ .  $U(q)$  wird durch das in  $U(q)$  eindeutig definierte  $\Omega(z)$  auf ein mehrfach verzweigtes Flächenstück  $S$  und  $V(q)$  auf  $T \subset S$  abgebildet. Dabei sei  $\delta$  so klein, daß  $U(q)$  keine weiteren Punkte von  $h$  enthält. Das durch  $f(z)$  vermittelte Bild  $V'(q')$  von  $V(q)$  kann infolge der Isometrie bezüglich der Extremalmetriken als Durchschnitt  $U'(q') \cap G'_N$  aufgefaßt werden. Dabei stellt  $U'(q')$  die in der  $P'(z')$ -Metrik bezüglich  $G'$  gemessene  $\delta$ -Umgebung desjenigen Punktes  $q' \in h'$  dar, der  $q$  zugeordnet ist. Die in  $U'(q')$  eindeutig definierbare Funktion  $\Omega'(z')$  bildet  $U'(q')$  auf eine Verzweigung  $S'$  und  $V'(q')$  auf  $T' \subset S'$  ab. Ferner dürfen wir annehmen, daß  $S$  und  $S'$  durch je eine geeignete Wurzeloperation lokal uniformisiert werden können.

Entweder ist  $V(q)$  zusammenhängend oder zerfällt in einzelne Teilgebiete. Die zu  $H$  gehörenden Randufer dieser Teilgebiete sind nun in natürlicher Weise zyklisch um  $q$  angeordnet. Wir behaupten, daß diese zyklische Anordnung bei der Abbildung von  $V(q)$  auf  $V'(q')$  erhalten bleibt, das heißt daß die durch die Abbildung induzierte Anordnung mit der betreffenden zyklischen Ordnung der für die Teilgebiete von  $V'(q')$  erklärten Randufer übereinstimmt.

Zum Beweise ziehen wir in  $G_N$  einen einfachen Querschnitt  $Q$ , dessen beide Enden in  $q$  liegen. Folglich wird  $G_N$  durch  $Q$  zerlegt. Das Bild von  $Q$  ist nach Voraussetzung ein Querschnitt  $Q'$ , der in  $q'$  endigt und  $G'_N$  ebenfalls zerlegt. Enthält nun die eine Komponente der Zerlegung gewisse Randufer, so muß das Bild ebenfalls die entsprechenden Randufer enthalten, so daß folglich die zyklische Anordnung invariant bleiben muß.

Die durch  $f(z)$  induzierte Abbildung  $\Omega' = g(\Omega)$  von  $T$  auf  $T'$  ist wiederum für schlichte Teilgebiete von  $T$  linear. Ferner entsprechen sich die beiden Verzweigungspunkte von  $S$  und  $S'$ . Demnach müssen  $S$  und  $S'$  die gleiche Verzweigungsordnung besitzen. Durch eine Wurzeloperation bilden wir  $S$  und  $S'$  je auf eine schlichte Kreisscheibe ab. Dort werden die Bilder von  $T$  und  $T'$  durch eine gewisse Anzahl getrennt liegender Sektoren dargestellt, die eindeutig und zyklisch invariant aufeinander bezogen sind. Folglich kann  $g(\Omega)$  auf  $T$  durchgedrückt werden und stellt eine konforme Abbildung von  $T$  auf  $T'$  resp. sogar von  $S$  auf  $S'$  dar. Hernach ist die rechte Seite von  $f(z) = \Omega'^{-1}g(\Omega(z))$  eindeutig und analytisch auf  $U(q)$  fortsetzbar und bildet  $U(q)$  konform auf  $U'(q')$  ab.

Führt man dieses Verfahren für alle Punkte von  $h$  durch, so ist damit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt. Somit bildet  $f(z)$  das Gebiet  $G$  konform auf  $G'$  ab. Infolge  $\{\gamma_N\} \subset \{\gamma\}$  und  $\{\gamma'_N\} \subset \{\gamma'\}$  entsprechen sich auch die Scharen  $\{\gamma\}$  und  $\{\gamma'\}$ . Dabei kann  $E_0$  sehr wohl in  $E'_1$  und  $E_1$  in  $E'_0$  transformiert werden.

3. Als Spezialfall von Theorem 4' ergibt sich für die in § 3.2 definierten Normalgebiete die für die KOEBESCHE Definition zitierte eindeutige Bestimmtheit. Ferner erhält man für diese Gebiete bei Anwendung von Theorem 4 Aussagen über die Änderung der Moduln der zugeordneten Rechtecke resp. Kreisringe [14].

Überträgt man ferner durch geeigneten Grenzübergang das soeben auf Kreisringe angewandte Theorem 4 mit Hilfe der Sätze 3 und 4 auf den Kreis und die Ebene, so ergeben sich für die betreffenden, in § 4.5 erklärten Normalgebiete bei geeigneter Normierung der konformen Abbildungen gewisse bekannte Verzerrungssätze.

Ist zum Beispiel in der  $z$ -Ebene ein nach § 4.5 normales Radialschlitzgebiet  $G_E$  gegeben, das durch  $f(z)$  normiert konform  $[f(\infty)=\infty, |f'(\infty)|=1, f(0)=0]$  abgebildet wird, so gilt für jede derartige Abbildung die Beziehung  $|f'(0)| \geq 1$ . Zum Beweise wendet man auf das Teilgebiet  $G_E \cap R_E$ ,  $R_E = \{z \mid \eta < |z| < H\}$  Theorem 4 an und macht nachher unter Benutzung von Satz 4 den Grenzübergang  $\eta \rightarrow 0, H \rightarrow \infty$ . Ein analoges Theorem gilt für normierte konforme Abbildungen von normalen Kreisbogenschlitzgebieten  $G_E$ . In diesem Fall folgt  $|f'(0)| \leq 1$  für jede zugelassene normierte Abbildung. Ferner kann man zeigen, daß das Gleichheitszeichen nur für  $f(z) = e^{i\alpha} \cdot z$ ,  $\alpha$  reell erreicht wird.

## § 6. Die klassischen Normalgebiete

In diesem Abschnitt wird als Beispiel eines Beweises für die Identität der KOEBESCHEN minimalen Schlitzbereiche mit den in § 4.5 definierten Normalgebieten der Fall der betreffenden Parallelenschlitzgebiete betrachtet. Zu diesem Zwecke zeigen wir u. a., daß für beide Definitionen dieselben bekannten Extremaleigenschaften gelten.

1. Es sei  $G_P$  ein nach § 4.5 normales horizontal gelegenes Parallelenschlitzgebiet und  $f(z)$  eine konforme Abbildung von  $G_P$  auf ein schlichtes Gebiet  $G'$  der Zahlenkugel.

**Theorem 5.** *Für jede in  $z=\infty$  durch  $f(z) = z + (\alpha + i\beta)z^{-1} + z^{-2}(\dots)$  normierte konforme Abbildung eines normalen horizontalen Parallelenschlitzgebietes gilt die Ungleichung  $m(B) + 2\alpha\pi \leq 0$ . Dabei bezeichnet  $m(B)$  das Maß des Komplementes des Bildgebietes  $G'$  bezüglich der Ebene.*

Vor dem Beweis von Theorem 5 wollen wir noch eine wichtige Folgerung ziehen. Es sei  $G$  ein Gebiet, das den Nullpunkt  $\zeta = 0$  enthält und  $z_P(\zeta) = \zeta^{-1} + (A_P + iB_P)\zeta + \zeta^2(\dots)$  die Entwicklung um den Nullpunkt der (als existierend vorausgesetzten) konformen Abbildung von  $G$  auf ein Normalgebiet  $G_P$ . Ist  $f(\zeta) = \zeta^{-1} + (A + iB)\zeta + \zeta^2(\dots)$  eine beliebige derart

normierte konforme Abbildung von  $G$  auf ein Gebiet  $G'$  der Zahlenkugel, so kann  $f(\zeta)$  als Produkt von  $z_P(\zeta)$  und einer geeignet gewählten Abbildung  $f(z)$  aufgefaßt werden. Bei Substitution erhält man gemäß Theorem 5

**Zusatz 2.** *Existiert eine normierte konforme Abbildung  $z_P(\zeta)$  des  $\zeta = 0$  enthaltenden Gebietes  $G$  auf  $G_P$  und ist*

$$f(\zeta) = \zeta^{-1} + (A + iB)\zeta + \zeta^2(\dots)$$

*eine beliebige in  $\zeta = 0$  derart normierte konforme Abbildung von  $G$ , so wird unter all diesen Abbildungen der Realteil  $A$  für  $z_P(\zeta)$  maximal.*

**Literatur.** Die für Parallelschlitzgebiete gültige Extremaleigenschaft des Realteils  $A$  haben gleichzeitig H. GRÖTZSCH [6] und R. DE POSSEL [12] entdeckt. Die Ungleichung in der Form von Theorem 5 stammt von H. GRUNSKY [7], der sie für Schlitzgebiete von endlichem Zusammenhang mit Hilfe von Randintegralen herleitete.

**Beweis.** Wir wählen  $R_P = \{(x, y) \mid -\Theta^2 < x < \Theta^2, -\Theta < y < \Theta\}$ . Dabei sei  $\Theta$  so groß, daß die gesamte Berandung von  $G_P$  im Innern von  $R_P$  liegt. Mit  $C$  bezeichnen wir die positiv durchlaufene Berandung von  $R_P$ . Die in  $R_P$  nach § 4.5 ausgezeichnete Kurvenschar besitzt für jedes vorgegebene  $\Theta$  die Extremallänge  $\Theta$ . Nach Definition 1 gilt für jede in  $R_P \cap G_P$  definierte zulässige konforme Metrik  $\varrho(z)$  die Ungleichung  $L^2(\varrho) \cdot F^{-1}(\varrho) \leq \Theta$ . Diese Ungleichung wenden wir für  $\varrho_0(z) = |f'(z)|$ ,  $\varrho_0(z) \cdot |dz| = |df|$ , das heißt für die euklidische Metrik des Bildgebietes  $G'$  von  $G_P$  an. Setzt man

$$f(z) = u + iv = (x + iy) + (\alpha + i\beta) \cdot (x + iy)^{-1} + (x + iy)^{-2}(\dots),$$

so gelten die Entwicklungen  $u(x, y) = x + (\alpha x + \beta y) \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \dots$  und  $v(x, y) = y + (\beta x - \alpha y) \cdot (x^2 + y^2)^{-1} \dots$  Folglich ist  $L(\varrho_0) = 2\Theta^2 + \Theta^{-2} \cdot 0(1)$  und

$$udv = xdy + \frac{\beta}{2} d\log(x^2 + y^2) - 2x(xdx + ydy) \cdot (\beta x - \alpha y) \cdot (x^2 + y^2)^{-2} \dots$$

Somit ergibt sich für  $F(\varrho_0) + m(B) = \int_C u dv$  bei Ausführung und Abschätzung der Integrationen nach einiger Rechnung die Entwicklung

$$\begin{aligned} \int_C u dv &= 4\Theta^3 - 4\alpha\Theta \cdot \int_{-\Theta^2}^{\Theta^2} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \Theta^2)^2} + \Theta^{-1} \cdot 0(1) \\ &= 4\Theta^3 - 4\alpha \operatorname{arc tang} \Theta + \Theta^{-1} \cdot 0(1). \end{aligned}$$

Infolge  $L^2(\varrho_0) = 4\Theta^4 + 0(1)$  erhält man mit Hilfe von

$$\Theta^{-1} \cdot L^2(\varrho_0) \leq F(\varrho_0)$$

beim Grenzübergang  $\theta \rightarrow \infty$  die gewünschte Beziehung

$$0 \leq -2\alpha\pi - m(B) .$$

2. Nach P. KOEPE und R. COURANT [9, 3] werden die minimalen Parallelschlitzbereiche mit Hilfe der sogenannten Strömungspotentiale definiert. Es sei also  $G$  ein schlichtes Gebiet in der  $\zeta (= \xi + i\eta)$ -Ebene, das  $\zeta = 0$  und also auch einen Kreis  $K$  (vom Radius  $a$ ) um  $\zeta = 0$  enthält. Ferner sei  $S(\xi, \eta)$  die folgendermaßen definierte Singularitätsfunktion:  $S(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi}{a^2}$  in  $K$  und  $S(\xi, \eta) = 0$  in  $G - K$ . Man betrachtet nun alle in dem in  $\zeta = 0$  punktierten  $G$  stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(\xi, \eta)$ , die in  $\zeta = 0$  dieselbe Singularität wie  $S(\xi, \eta)$  besitzen, so daß also die Funktionen  $u(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) - S(\xi, \eta)$  in  $\zeta = 0$  stetig verschwinden.

Dann existiert eine Funktion  $U(\xi, \eta)$  derart, daß für die über  $G$  erstreckten DIRICHLETintegrale von  $U(\xi, \eta)$  resp.  $u(\xi, \eta)$  die Ungleichung  $D(U) \leq D(u)$  gilt. Ferner ist  $\Phi(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) + U(\xi, \eta)$  der Realteil der Funktion  $z = f_s(\zeta)$ , die  $G$  konform derart auf einen minimalen Parallelschlitzbereich abbildet, daß  $\zeta = 0$  in  $z = \infty$  übergeht. Alle Randkomponenten des Bildbereiches sind dabei Punkte oder horizontale Strecken, und die gesamte Berandung besitzt das Flächenmaß Null.

Wir wenden nun dieses Resultat auf folgende Unterklasse von Funktionen  $\varphi(\xi, \eta)$  an: Es sei  $\varphi(\xi, \eta)$  der Realteil einer konformen Abbildung  $f(\zeta)$ , die um  $\zeta = 0$  die Entwicklung

$$f(\zeta) = \zeta^{-1} + (A + iB)\zeta + \zeta^2 (\dots)$$

besitzt.

**Theorem 5'.** *Ist  $f_s(\zeta)$  die normierte KOEBESche Schlitzabbildung von  $G$  und  $U(\xi, \eta)$  die daraus hergeleitete Funktion mit minimalem DIRICHLETintegral  $D(U)$  über  $G$ , so gilt bezüglich jeder normierten konformen Abbildung  $f(\zeta)$  von  $G$  und jeder daraus hergeleiteten Funktion  $u(\xi, \eta)$  die Beziehung  $D(u) - D(U) = 2\pi(A_s - A) - m(B) \geq 0$ . Dabei bezeichnet  $m(B)$  das Maß des Komplementes des durch  $f(\zeta)$  vermittelten Bildgebietes, während  $A_s$  resp.  $A$  der Realteil des Koeffizienten von  $\zeta$  in der Entwicklung von  $f_s(\zeta)$  bzw.  $f(\zeta)$  darstellt.*

*Beweis.* Es sei  $C$  die positiv durchlaufene Berandung von  $K$ . Dann kann der Anteil  $D_K(u)$  von  $D(u)$  bezüglich  $K$  durch  $D_K(u) = \int_C u^* dv^*$  ausgedrückt werden. Dabei werde  $u^*(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta) - S(\xi, \eta)$  und das Differential  $dv^*$  der zu  $u^*(\xi, \eta)$  konjugiert-harmonischen Funktion von  $K$  stetig auf  $C$  fortgesetzt. Da in  $G - K$  für die Funktion  $u(\xi, \eta) = \Re f(\zeta)$  gilt, so kann das über  $G - K$  erstreckte  $D_{G-K}(u)$  als Fläche des Bildgebietes von  $G - K$  ge-

deutet werden. Folglich ist  $D_{G-K}(u) + m(B) = -\int_C u dv$ , wobei  $u$  und das konjugierte Differential  $dv$  von  $G-K$  auf  $C$  stetig fortgesetzt werden. Nun gilt  $\frac{dS}{dn} = 0$  für die Normalableitung längs  $C$ . Also verschwindet das konjugierte Differential von  $S(\xi, \eta)$  und es gilt  $dv = dv^*$  längs  $C$ . Damit ergibt sich  $D(u) + m(B) = -\int_C S dv$ . Dabei ist  $S = 2a^{-1} \cdot \cos \psi$ ,  $\psi = \arg \zeta$ . Es muß daher für die Entwicklung von  $v$  infolge der Orthogonalitätsrelationen der trigonometrischen Funktionen nur der Koeffizient von  $\sin \psi$  bestimmt werden. Dann erhält man  $D(u) + m(B) = -2A\pi + 2a^{-2} \cdot \pi$ . Da anderseits für  $D(U)$  der Anteil von  $m(B)$  nach dem Satz von KOEBE über das Maß der Berandung wegfällt, so gilt  $D(u) - D(U) + m(B) = -2A\pi + 2A_S\pi$  und somit Theorem 5'.

**Zusatz 3.** Setzt man  $u - U = h$ , so ergibt sich aus  $D(u) \geq D(U)$  bekanntlich die Orthogonalitätsrelation  $D(U, h) = 0$ . Daraus folgt  $D(u) = D(U) + D(h)$ . Anderseits ist  $h = \varphi - \Phi$ , so daß Theorem 5' in der Form  $D(h) = D(\varphi - \Phi) = 2\pi(A_S - A) - m(B)$  geschrieben werden kann.

3. Gegeben sei ein horizontales normales Parallelschlitzgebiet  $G_P$ . Dieses kann auf ein KOEBESCHES Parallelschlitzgebiet  $G_S$  und nachher auf ein beliebiges Gebiet  $G$  weiter abgebildet werden. Wir können folglich den Fall betrachten, daß die gemäß § 6.1 und § 6.2 normierten Abbildungen  $z_P(\zeta)$  von  $G$  auf  $G_P$  resp.  $f_S(\zeta)$  von  $G$  auf  $G_S$  existieren. Nun gilt nach Zusatz 2 einerseits  $A_S \leq A_P$ , nach Theorem 5' anderseits  $A_P \leq A_S$ . Stimmen nun aber  $A_S$  und  $A_P$  überein, so erhält man nach Zusatz 3 die Beziehung  $D(\varphi_P - \Phi) = 0$  mit  $\varphi_P = \Re z_P(\zeta)$  und  $\Phi = \Re f_S(\zeta)$ . Also müssen bei unsren Normierungen die Abbildungen übereinstimmen und  $G_P$  ist zugleich ein Gebiet  $G_S$ .

Umgekehrt sei  $R_P = \{(x, y) \mid -\vartheta < x < \vartheta, -\Theta < y < \Theta\}$  derart gegeben, daß die gesamte Berandung von  $G_S$  in  $R_P$  liegt. Dann gilt nach dem Ansatz für die Strömungspotentiale für jede in  $G_S$  erklärte stetig differenzierbare Vergleichsfunktion  $u(x, y)$ , die die verlangte Singularität in  $z = \infty$  besitzt, die Ungleichung  $D[u(x, y)] \geq D(x)$  bezüglich der auf  $G_S \cap R_P$  beschränkten DIRICHLETintegrale. Speziell gilt diese Beziehung für die Funktionen  $u(x, y)$ , die auf

$$\{(x, y) \mid x = -\vartheta, -\Theta < y < \Theta\} \quad \text{und} \quad \{(x, y) \mid x = \vartheta, -\Theta < y < \Theta\}$$

die konstanten Werte  $-\vartheta$  resp.  $\vartheta$  annehmen. Folglich ist  $G_S \cap R_P$  nach § 3.2 ein KOEBESCHES Minimalgebiet. Setzen wir voraus, daß die in § 3.2 angekündigte Äquivalenz für die betreffenden Rechtecke bewiesen sei, so ist  $G_S \cap R_P$

normal im Sinne von Definition 5. Da aber  $R_P$  beliebig ist, muß  $G_S$  nach § 4.5 zugleich ein Gebiet  $G_P$  sein.

### § 7. Normale Schlitze und normale Einschnitte

Als Vorbereitung zur Aufgabe der konformen Abbildung auf Normalgebiete behandeln wir in diesem Abschnitt unter Lemma 1 und Lemma 2 zwei Spezialfälle. Es handelt sich dabei um die noch zu präzisierende Fragestellung, ob einerseits ein inneres Randkontinuum in einen sogenannten normalen Schlitz bzw. anderseits ein auf dem Rande gelegener Bogen in einen normalen Einschnitt verwandelt werden kann. Gleichzeitig wird sich ergeben, daß die in Theorem 4' angegebene Willkür tatsächlich vorliegt. Ferner werden wir zeigen, wie diese aber durch zusätzliche normierende Bedingungen beseitigt werden kann.

1. In der komplexen  $z (= x + iy)$ -Ebene sei ein Element  $(G; E_0, E_1)$  der in § 3.4 definierten Menge  $\mathfrak{G}$  gegeben. Vom Gebiet  $G$  werde ein beliebiges Kontinuum  $K$ ,  $K \subset G$  entfernt. Infolge des RIEMANNSchen Abbildungssatzes, angewandt auf das Komplement von  $K$  bezüglich der Ebene, darf  $K$  als abgeschlossene Kreisscheibe angenommen werden. Ferner sei  $C$  die Peripherie von  $K$ .

Wir betrachten diejenige in  $\tilde{G} = G - K$  enthaltene Teilschar  $\{\tilde{\gamma}\} \subset \{\gamma\}$ , die  $E_0$  mit  $E_1$  innerhalb  $\tilde{G}$  verbindet. Analog § 5.1 ordnen wir den konformen Abbildungen  $f(z)$  von  $\tilde{G}$  eine gewisse Teilmenge  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$  zu. Dabei gehöre  $(G'; E'_0, E'_1)$  dann zu  $\mathfrak{G}'$ , wenn die Bildschar  $\{\tilde{\gamma}'\}$  von  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Teilschar der für  $(G'; E'_0, E'_1)$  erklärten Schar  $\{\gamma'\}$  ist.

**Lemma 1.** *Das Gebiet  $\tilde{G}$  mit der Schar  $\{\tilde{\gamma}\}$  läßt sich durch eine konforme Abbildung  $F(z)$  derart in ein Gebiet  $G'$ ,  $(G'; E'_0, E'_1) \in \mathfrak{G}'$  abbilden, daß das Bildgebiet  $\tilde{G}'$  von  $\tilde{G}$  normal ist.*

**Beweis.** Wir spiegeln  $\tilde{G}$  an  $C$  und erhalten ein Gebiet  $\tilde{\tilde{G}}$ ,  $\tilde{\tilde{G}} \subset \tilde{G}$ . Die Randeinteilung werde dabei von  $\tilde{G}$  auf  $\tilde{\tilde{G}}$  spiegelbildlich übertragen. Zu  $\tilde{\tilde{G}}$  konstruieren wir gemäß § 3.3 durch SCHOTTKYSche Verdoppelung die RIEMANNsche Fläche  $\tilde{\tilde{G}}^*$ . Das auf  $\tilde{\tilde{G}}^*$  erklärte harmonische Maß der nach § 3.3 ausgezeichneten Randkurven beschränken wir auf  $\tilde{G}$  und nachher auf  $\tilde{G}$ . In  $\tilde{G}$  erhalten wir so die harmonische Funktion  $u(x, y)$ , für die  $u = 0$  auf  $E_0$  bzw.  $u = 1$  auf  $E_1$  gilt, während  $\frac{\partial u}{\partial n}$  auf der komplementären Berandung und damit auf  $C$  verschwindet.

Es sei  $U$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $C$  bezüglich  $\tilde{G}$ , und  $V = U \cap \tilde{G}$ . Ein einfacher Fall liegt nun dann vor, wenn die normierte Funktion  $\Omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  in  $V$  schlicht ist und also  $V$  auf ein Ringgebiet  $S$  abbildet. Die innere Berandung von  $S$  ist als Bild von  $C$  ein horizontaler Schlitz  $N$ . Es sei  $T$  dasjenige einfach zusammenhängende Gebiet, das  $S$  enthält und durch die äußere Berandung von  $S$  begrenzt wird. Die beiden Gebiete  $\tilde{G}$  und  $T$  mit dem gegebenen konformen Zusammenhang in  $S$  definieren zusammen eine RIEMANNSCHE Fläche  $R$ . Dabei werde die Funktion  $u$  in natürlicher Weise auf  $T$  und damit auf  $R$  stetig fortgesetzt.

Da  $R$  schlichtartig ist, kann  $R$  konform in die komplexe  $z$ -Ebene abgebildet werden [3, 10]. Es sei  $G'$  das Bildgebiet von  $R$  und  $u'(x, y)$  die von  $R$  auf  $G'$  übertragene Funktion  $u$ .  $E'_0$  bzw.  $E'_1$  bezeichne die durch  $u' = 0$  resp.  $u' = 1$  ausgezeichneten Randbogen von  $G'$ . Bei der konformen Abbildung von  $R$  auf  $G'$  wird nun  $N \subset R$  einem normalen Schlitz  $N' \subset G'$  zugeordnet, so daß das dadurch induzierte Bild  $\tilde{G}'$  von  $\tilde{G} \subset R$  normal ist. Ferner ist  $R$  nach Theorem 4' eindeutig bestimmt, wenn konform äquivalente RIEMANNSCHE Flächen nicht unterschieden werden.

Nun wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu. Hier kann die analoge Einbettung von  $\tilde{G}$  in  $R$  im allgemeinen auf verschiedene, konform nicht äquivalente Arten geschehen. Für den Beweis von Lemma 1 genügt aber die Konstruktion einer einzigen Fläche  $R$ . Diesem Ziel ist das folgende Verfahren gewidmet.

Es war  $u(x, y)$  in  $\tilde{G}$  eindeutig. Beim Durchlaufen von  $C$  gilt also  $\int_C du = 0$ , und es gibt deshalb auf  $C$  mindestens eine Nullstelle von  $\text{grad } u$ , wo  $du$  das Vorzeichen wechselt. Es sei  $p$  ein solcher Punkt und  $u(p) = u_0$  zum Beispiel ein relatives Minimum. Wir verfolgen nun auf  $C$  die Funktion  $u(x, y)$  von  $p$  aus nach beiden Seiten so lange, bis wir auf eine erste Schwelle  $u_1$  stoßen, für die  $du$  auf mindestens einer Seite verschwindet. Dann markieren wir uns beidseitig die Stellen  $p'$  und  $p''$ , an denen  $u(x, y)$  erstmalig den Wert  $u_1$  annimmt. Es sei  $C_p$  derjenige offene Teilbogen von  $C$ , der  $p$  enthält und durch  $p'$  und  $p''$  begrenzt wird.  $U_p$  bezeichne ein noch näher zu bestimmendes, in  $\tilde{G}$  gelegenes einfach zusammenhängendes Gebiet, das  $C_p$  als Querschnitt enthält.

Wir normieren  $\Omega(z)$  in  $U_p$  durch  $\Omega(p) = u_0$ . Das noch näher zu bestimmende  $U_p$  werde durch  $\Omega(z)$  auf ein mehrblättriges, nur im Punkte  $(u_0, 0)$  verzweigtes RIEMANNSCHES Flächenstück  $\bar{U}_p$  abgebildet. Das Bild  $\bar{C}_p$  von  $C_p$  liegt dabei über dem Intervall

$$I = \{(u, v) \mid u_0 \leq u < u_1, v = 0\} .$$

Folglich windet sich das Bild  $\overline{V}_p$  von  $V_p = U_p \cap \tilde{G}$  ebenfalls, zum Beispiel  $n$ -fach, um den Punkt  $(u_0, 0)$  herum. Bei geeignet gewählter Umgebung  $U_p$  wird deshalb  $\overline{V}_p$  durch  $\omega(\Omega) = [\Omega(z) - u_0]^{\frac{1}{n}}$  auf ein schlichtes Gebiet  $S_p$  abgebildet, während  $\overline{C}_p$ , dem mit Ausnahme des Nullpunktes doppelt zu zählenden Intervall

$$N_p = \{\omega \mid 0 \leq \Re \omega < (u_1 - u_0)^{\frac{1}{n}}, \Im \omega = 0\}$$

zugeordnet ist. Setzt man  $T_p = S_p \cup N_p$ , so stellt  $N_p$  einen Einschnitt von  $T_p$  dar. Nun definieren  $\tilde{G}$  und  $T_p$  mit ihrem konformen Zusammenhang in  $S_p$  eine RIEMANNSCHE Fläche  $R_p$ . Ferner kann die in  $\tilde{G}$  definierte Funktion  $u(x, y)$  eindeutig auf  $R_p$  fortgesetzt werden und stellt dort eine harmonische Funktion dar, deren Normalableitung längs  $N_p$  verschwindet. Bildet man jetzt das schlichtartige  $R_p$  konform auf ein schlichtes Gebiet  $G'_p$  ab und bezeichnet  $u'(x, y)$  die von  $R_p$  auf  $G'_p$  übertragene Funktion  $u$ , so geht bei der induzierten Abbildung von  $\tilde{G}$  in  $G'_p$  der Randbogen  $C_p$  in einen auf einer Flußlinie von  $G'_p$  gelegenen Einschnitt  $N'_p$  über.

Um die Rekursion zu vervollständigen, fassen wir jetzt  $G'_p$  als neues Gebiet  $\tilde{G}$  auf, so daß also im Vergleich zum alten  $\tilde{G}$  die Berandung um den Einschnitt  $N'_p$  reduziert wurde. Für das neue  $\tilde{G}$  wird nun dasselbe Verfahren Schritt für Schritt iteriert. Ist dabei der betreffende auf der Berandung liegende ausgezeichnete Punkt  $p$  ein relatives Maximum für die Funktion  $u$ , so geht der Beweis ganz analog. Da die Funktion  $u$  bei jeder neuen Einbettung nur fortgesetzt wird und also in entsprechenden Punkten immer gleich bleibt, bleibt auch das entsprechende Bild von  $N'_p$  bei den weiteren Reduktionen auf einer Flußlinie. Sukzessive wird nun die zu reduzierende Berandung verkleinert, bis zuletzt der ganze Rand  $C$  in einen normalen Schlitz verwandelt ist. Es bricht nämlich das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. Dabei wird beim vorletzten Schritt die gesamte Berandung bis auf einen Punkt reduziert, so daß der letzte Schritt darin besteht, die Fläche  $R$  und damit  $G'$  durch Hinzunahme dieses Punktes zu erklären. Damit ist Lemma 1 auch für den allgemeinen Fall bewiesen.

*Bemerkung.* Es soll nun ein Überblick über die möglichen Einbettungen von  $\tilde{G}$  gewonnen werden. Bei der Vorbereitung zum Beweise des elementaren Falles von Lemma 1 wurde das Ringgebiet  $V$  eingeführt. In  $V$  kann die konjugierte Funktion  $v(x, y)$  infolge  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  längs  $C$  nach erfolgter Normierung eindeutig bestimmt werden. Also ist auch  $\Omega(z)$  in  $V$  eindeutig dagegen im allgemeinen, wie wir im folgenden annehmen, nicht schlicht und bildet  $V$  auf

ein verzweigtes Flächenstück  $S$  ab, wobei die  $C$  entsprechende Berandung über demselben horizontalen Intervall liegt. Jetzt muß das zweifach zusammenhängende  $S$  in ein zulässiges einfach zusammenhängendes Flächenstück  $T$  derart eingebettet werden, daß die Berandung von  $T$  nur aus der äußeren Berandung von  $S$  besteht. Jeder möglichen Einbettung von  $S$  entspricht dann eine gewisse RIEMANNSCHE Fläche  $R$ . Schreibt man zusätzlich für  $T$  die auftretenden, über dem erwähnten Intervall liegenden Windungsstellen in zulässiger Weise vor, so werden diese bei der Abbildung auf  $G'$  zu Nullstellen der dort definierten Funktion  $\text{grad } u'$ , so daß dann der Spezialfall von Theorem 4' vorliegt.

*Beispiel.* Es wechsle  $du$  längs  $C$  genau viermal das Vorzeichen. Dann gibt es auf  $C$  für die Funktion  $u(x, y)$  zwei relative Minima  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$  sowie zwei relative Maxima  $\varTheta_1$  und  $\varTheta_2$ . Ferner gilt offenbar

$$\max \{\vartheta_1, \vartheta_2\} = \vartheta_0 \leq \varTheta_0 = \min \{\varTheta_1, \varTheta_2\} .$$

Wir setzen noch voraus, daß das betreffende  $S$  ein zweiblättriges Flächenstück darstelle. Die Einbettung in  $T$  kann nun derart geschehen, daß zuerst ein beliebiger Wert  $\vartheta^*$  mit  $\vartheta_0 \leq \vartheta^* \leq \varTheta_0$  vorgeschrieben wird. Nun identifiziert man auf dem innern Rand von  $S$  diejenigen Punkte, in denen  $u$  den Wert  $\vartheta^*$  annimmt, und wählt den daraus resultierenden Punkt als einzigen Windungspunkt von  $T$ . Jedem vorgegebenen Wert  $\vartheta^*$  entspricht so nach dem weitern bekannten Verfahren eine zugelassene RIEMANNSCHE Fläche  $R$ . Es ist instruktiv, sich die verschiedenen Möglichkeiten in den hierfür auftretenden, konform nicht äquivalenten Gebieten  $G'$  zu veranschaulichen. Die vier sich an der ausgezeichneten Nullstelle von  $\text{grad } u'$  verzweigenden Arme des normalen Schlitzes können demnach sozusagen gegenseitig verschoben werden. Für  $\vartheta_1 = \vartheta_2$  resp.  $\varTheta_1 = \varTheta_2$  können sogar je zwei Arme ganz zum Verschwinden gebracht werden, was für  $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$  und  $\varTheta_1 \neq \varTheta_2$  dagegen nicht vorkommen kann.

2. Unsern Betrachtungen sei ein Element  $(G ; E_0, E_1) \in \mathfrak{G}$  zugrunde gelegt. Im Gegensatz zu § 7.1 ändern wir diesmal die Randeinteilung von  $G$ . Es werde also zum Beispiel auf  $E_1$  ein abgeschlossenes Intervall  $I$  ausgezeichnet, und  $\{\tilde{\gamma}\} \subset \{\gamma\}$  sei diejenige Teilschar, deren Elemente die beiden Punktmengen  $E_0$  und  $E_1 - I$  in  $G$  verbinden. Nun ist zu beachten, daß  $(G ; E_0, E_1 - I)$  gemäß § 3.3|4 nicht zu  $\mathfrak{G}$  gehört. Den konformen Abbildungen  $f(z)$  von  $G$  wird deswegen eine Teilmenge  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$  zugeordnet, wobei  $(G' ; E'_0, E'_1)$  dann zu  $\mathfrak{G}'$  gehört, wenn  $\{\tilde{\gamma}\}$  durch  $f(z)$  in eine Teilschar von  $\{\gamma'\}$  transformiert wird.

**Lemma 2.** *Die Schar  $\{\tilde{\gamma}\}$  und ihr Träger  $G$  lassen sich durch eine konforme Abbildung  $F(z)$  von  $G$  derart in ein Gebiet  $G'$ ,  $(G' ; E'_0, E'_1) \in \mathfrak{G}'$  abbilden, daß das Bildgebiet von  $G$  normal bezüglich  $(G' ; E'_0, E'_1)$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $I^*$  das um die beiden Endpunkte verminderte Intervall  $I$ . Wir konstruieren zunächst zu  $G$  wie in § 3.3 durch SCHOTTKYSche Verdopplung die RIEMANNSche Fläche  $G^*$ , und zwar für die abgeänderte Randeinteilung, so daß also  $I^*$  einen Querschnitt von  $G^*$  darstellt. Das harmonische Maß der über  $E_1 - I$  liegenden Randkurven von  $G^*$  beschränken wir auf  $G$  und erhalten so die gewünschte, zur neuen Randeinteilung gehörende harmonische Funktion  $u(x, y)$ . Beim Durchlaufen von  $I$  gilt nun die Beziehung  $\int_I du = 0$ , so daß also das Rekursionsverfahren von § 7.1 angesetzt werden kann, wobei  $G^*$  die Rolle von  $\tilde{G}$  zu übernehmen hat. Das Verfahren bricht ab, sobald  $I^*$  in einen normalen Einschnitt verwandelt ist. Damit ist dieser Beweis auf denjenigen von Lemma 1 zurückgeführt.

*Bemerkungen.* Der Fall der sogenannten eindeutigen Einbettung bei Lemma 2 kann ähnlich wie derjenige von § 7.1 gesondert behandelt werden. Ferner läßt sich auch für Lemma 2 durch zusätzliche zulässige Normierungen der Spezialfall von Theorem 4' herstellen. Die Bedingung  $\int_I du = 0$  zum Ansetzen des Rekursionsverfahrens verdeutlicht die Forderung von § 3.3, daß nämlich die Intervalle von  $E^*$  immer Intervalle verschiedener Klasse  $E_0$  resp.  $E_1$  miteinander verbinden sollen.

*Anmerkung.* Mit Hilfe von Lemma 2 können wir die in § 5.1 angekündigte Reduktion vornehmen. Es enthalte also  $e_i$  einen nicht zerlegenden Querschnitt von  $G'$ . Ist  $\bar{G}' = G' - e_i$ , so besitzt  $\bar{G}'$  im Vergleich zu  $G'$  kleinern Zusammenhang infolge der beiden zusätzlichen über  $e_i$  gelegenen Randbogen. Es sei  $\bar{e}$  einer der beiden Bogen, und  $\bar{E}'_0 (= E'_0)$  resp.  $\bar{E}'_1 (= E'_1)$  seien die für  $\bar{G}'$  ausgezeichneten Randmengen. Durchläuft man diejenige Randkomponente von  $\bar{G}'$ , die  $\bar{e}$  enthält, so gibt es einen  $\bar{e}$  umfassenden Randbogen  $\bar{\bar{e}}$  von  $\bar{G}'$ , der entweder Intervalle ungleicher oder gleicher Klasse  $\bar{E}'_0$  resp.  $\bar{E}'_1$  miteinander verbindet. Im ersten Fall wird  $\bar{\bar{e}}$  zu der für  $\bar{G}'$  definierten Randmenge  $\bar{E}^*$  gerechnet. Im zweiten Fall dagegen verwandeln wir  $\bar{\bar{e}}$  durch eine konforme Abbildung gemäß Lemma 2 in einen normalen Einschnitt  $\bar{N}'$  und operieren nachher für die weiter vorzunehmenden Reduktionen in dem durch Hinzunahme von  $\bar{N}'$  erweiterten Bildgebiet von  $\bar{G}'$ .

## § 8. Ein Extremalproblem

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Aufgabe, einige spezielle Gebiete konform auf Normalgebiete abzubilden. Dazu formulieren wir zuerst ein gewisses Extremalproblem, dessen Lösung eine notwendige Bedingung unserer Abbildungsaufgabe darstellt. Die dabei an die gegebenen Gebiete ge-

stellten Forderungen werden sich als hinreichend erweisen, so daß dann Extremalproblem und Abbildungsaufgabe gleichzeitig gelöst werden können. Einleitend geben wir in diesem Abschnitt eine Übersicht über Problemstellung und Resultate. Nachher lösen wir das Extremalproblem.

1. Es sei ein Element  $(G; E_0, E_1)$  der in § 3.4 definierten Menge  $\mathfrak{G}$  gegeben.  $\{\tilde{\gamma}\}$  sei eine Teilschar der in  $G$  ausgezeichneten Schar  $\{\gamma\}$  und  $\tilde{E}_0 \subset E_0$  und  $\tilde{E}_1 \subset E_1$  seien die für  $\{\tilde{\gamma}\}$  definierten Punktmengen, in denen die Kurven  $\tilde{\gamma} \in \{\tilde{\gamma}\}$  enden.

**Forderungen.** *Die gegebene Schar  $\{\tilde{\gamma}\}$  genüge den Bedingungen*

- a) *der Träger  $\tilde{\Gamma}$  von  $\{\tilde{\gamma}\}$  sei ein Gebiet  $\tilde{G} \subset G$ ,*
- b) *jede Randkomponente  $C_i$  von  $G$  lasse sich durch eine in  $\tilde{G}$  verlaufende JORDANKURVE  $L_i$  von den übrigen Randkomponenten trennen,*
- c) *der Durchschnitt  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_i$  sei für jedes  $C_i$  nicht leer,*
- d) *die Teilrandmenge  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  von  $G$  sei offen,*
- e) *die nach d) aus abzählbar vielen Kurvenbogen bestehende Menge  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  gehöre zur freien Berandung von  $\tilde{G}$ , das heißt jeder abgeschlossene Teilbogen von  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  lasse sich in  $\tilde{G}$  durch einen Querschnitt von  $\tilde{G}$  von der übrigen, nicht zu  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  gehörenden Berandung von  $\tilde{G}$  trennen.*

Den konformen Abbildungen  $f(z)$  von  $\tilde{G}$  ordnen wir eine gewisse Teilmenge  $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}$  zu. Dabei gehöre  $(G'; E'_0, E'_1)$  dann zu  $\mathfrak{G}'$ , wenn  $G'$  die gleiche Zusammenhangszahl wie  $G$  besitzt und die Bildschar  $\{\tilde{\gamma}'\}$  von  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Teilschar der für  $G'$  definierten Schar  $\{\gamma'\}$  ist. Unter Benutzung der Gesetze über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung zeigt sich, daß auch die Bildschar  $\{\tilde{\gamma}'\}$  im zugeordneten Gebiet  $G'$  die obigen Eigenschaften a) bis e) besitzt. Ferner bemerken wir, daß infolge d) und e) die Extremallänge  $\lambda(\tilde{\gamma})$  endlich ausfällt. Folglich existiert gemäß Satz 2 und 3" eine endliche obere Grenze  $\sup_{\{\gamma'\}} \lambda(\gamma') = \Lambda$ ,  $\Lambda \leq \lambda(\tilde{\gamma})$ .

**Extremalproblem.** *Existiert für die genannten konformen Abbildungen von  $\tilde{G}$  in  $G'$ ,  $(G'; E'_0, E'_1) \in \mathfrak{G}'$  ein Element  $(G'; E'_0, E'_1)$  derart, daß  $\sup_{\{\gamma'\}} \lambda(\gamma')$  angenommen wird, das heißt daß für dieses Element  $\lambda(\gamma') = \Lambda$  gilt?*

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, daß unsere Voraussetzungen a) bis e) hinreichen, um das Extremalproblem zu lösen. Ferner können wir im nächsten Abschnitt zusätzlich beweisen, daß sogar  $\Lambda = \lambda(\tilde{\gamma})$  gilt. Damit ergibt sich der

**Abbildungssatz.** Bei unsrern Forderungen bezüglich  $\{\tilde{\gamma}\}$  läßt sich das Gebiet  $\tilde{G}$  mit der Schar  $\{\tilde{\gamma}\}$  konform derart in ein Gebiet  $G'$ ,  $(G'; E'_0, E'_1) \in \mathfrak{G}'$  abbilden, daß dann  $\{\gamma'\}$  durch die Bildschar  $\{\tilde{\gamma}'\}$  von  $\{\tilde{\gamma}\}$  ersetzbar ist bzw. daß das Bildgebiet  $\tilde{G}'$  von  $\tilde{G}$  ein Normalgebiet bezüglich  $(G'; E'_0, E'_1)$  darstellt.

2. Im folgenden geben wir zuerst den Weg an, den wir zur Lösung des in § 8.1 formulierten Extremalproblems einschlagen. Anschließend werden wir die verschiedenen Schritte einzeln ausführen.

α) In § 8.1 wurden auf dem Rande von  $\tilde{G} \subset G$  die beiden Punktmenge  $\tilde{E}_0$  und  $\tilde{E}_1$  ausgezeichnet. Es sei  $C_i$  eine Randkomponente von  $G$ . Die Komponenten des Durchschnitts  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_i$  sind auf dem Rande  $C_i$  in natürlicher Weise zyklisch geordnet. So folgt in dieser Ordnung auf eine höchstens abzählbare Menge von Bogen von  $\tilde{E}_0$  (resp.  $\tilde{E}_1$ ) eine ebensolche Menge von Bogen von  $\tilde{E}_1$  (resp.  $\tilde{E}_0$ ), und zwar ist die Anzahl  $p_i$  dieser Wechsel von  $\tilde{E}_0$  zu  $\tilde{E}_1$  bzw. von  $\tilde{E}_1$  zu  $\tilde{E}_0$  für jedes  $C_i$  durch eine bestimmte eventuell verschwindende gerade Zahl gegeben.

Es sei  $(G'_k; E'_{0k}, E'_{1k}) \in \mathfrak{G}'$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) eine zum Extremalproblem passende Extremalfolge, das heißt es gelte  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\gamma'_k) = 1$  bezüglich der betreffenden Extremallängen.

Ist jetzt  $f_k(z)$  eine zugehörige Abbildungsfolge von  $\tilde{G}$ , so liegen sämtliche durch  $f_k(z)$  vermittelten Bildpunkte von  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_i$  gemäß § 8.1 auf einer gewissen  $C_i$  zugeordneten Randkomponente  $C'_{ik}$  von  $G'_k$ . Es sei  $p'_{ik}$  die Anzahl der auf  $C'_{ik}$  alternierenden Bogen von  $E'_{0k}$  und  $E'_{1k}$ . Da das Bild von  $\tilde{E}_0$  zu  $E'_{0k}$  resp. dasjenige von  $\tilde{E}_1$  zu  $E'_{1k}$  gehört, muß  $p'_{ik} \geq p_i$  sein.

Der erste Schritt besteht nun darin, daß wir die Folge  $(G'_k; E'_{0k}, E'_{1k})$  durch eine geeignet abgeänderte, mit  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l})$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) bezeichnete Folge ersetzen, die auch zu  $\mathfrak{G}'$  gehört und ebenfalls eine Extremalfolge darstellt. Sind dabei  $p'_{il}$  die bezüglich  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l})$  berechneten Anzahlen, so soll die neue Folge durch die Eigenschaft  $p'_{il} = p_i$  ausgezeichnet sein.

β) Nun geben wir zu  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l})$  eine mit  $(G'_m; E'_{0m}, E'_{1m})$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) notierte Teilfolge an, deren Randeinteilung in noch näher zu beschreibender Weise konvergiert. Ist dann  $f_m(z)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) eine zur Folge  $(G'_m; E'_{0m}, E'_{1m})$  gehörende Abbildungsfolge des Gebietes  $\tilde{G}$ , so wählen wir aus  $f_m(z)$  eine mit  $f_n(z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bezeichnete Teilfolge aus, die gegen eine konforme Abbildung  $F(z)$  von  $\tilde{G}$  strebt. Daraufhin zeigen wir, daß auch zur Teilfolge  $G'_n$  ein Limesgebiet  $G''$  existiert, das ebenfalls ausgezeichnete, durch die Konvergenz bestimmte Randmengen  $E''_0$  resp.  $E''_1$  besitzt. Bezeichnet  $(G''; E''_0, E''_1)$  das

Grenzelement der Folge  $(G'_n; E'_{0n}, E'_{1n})$ , so sei  $\{\gamma''\}$  diejenige Kurvenschar, die die Punktmengen  $E''_0$  und  $E''_1$  in  $G''$  miteinander verbindet. Bei der Grenzabbildung  $F(z)$  geht schließlich  $\{\tilde{\gamma}\}$  in eine Teilschar von  $\{\gamma''\}$  über.

$\gamma)$  Wir beweisen endlich, daß die Extremallänge aufgefaßt als Funktional bezüglich der zu betrachtenden Folge  $\{\gamma'_n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) nach oben halbstetig ist, bzw. daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\gamma'_n) [= \Lambda] \leq \lambda(\gamma'')$  gilt. Damit läßt sich jetzt zeigen,

daß  $(G''; E''_0, E''_1)$  zur Menge  $\mathfrak{G}$  gehört. Da aber  $\{\gamma''\}$  zugleich das Bild von  $\{\tilde{\gamma}\}$  enthält, gilt sogar  $(G''; E''_0, E''_1) \in \mathfrak{G}'$ . Somit folgt die Relation  $\lambda(\gamma'') \leq \Lambda$ , die vereint mit  $\Lambda \leq \lambda(\gamma'')$  das gewünschte Resultat  $\lambda(\gamma'') = \Lambda$  liefert.

Die nach dem vorliegenden Schema durchzuführende Lösung des Extremalproblems beruht im wesentlichen auf dem Auswahlprinzip, m. a. W. auf der Theorie der Normalen Familien von P. MONTEL. So werden wir insbesondere auch die speziellen Sätze über konforme Abbildung von Gebietsfolgen benutzen [2].

Zu  $\alpha)$ . Für die bezüglich der Extremalfolge  $(G'_k; E'_{0k}, E'_{1k})$  berechneten Anzahlen gelten die Ungleichungen  $p'_{ik} \geq p_i$ . Ist  $p'_{ik} = p_i$  für alle  $i$ , so lassen wir das betreffende Element unverändert. Ist dagegen  $p'_{ik} > p_i$  für mindestens ein  $i$ , so röhrt dies von jenen Komponenten  $e_{0k}$  von  $E'_{0k}$  und  $e_{1k}$  von  $E'_{1k}$  her, die keine Bildpunkte von  $\tilde{E}_0$  resp.  $\tilde{E}_1$  enthalten. Es seien  $\bar{E}'_{0k} = E'_{0k} - \cup e_{0k}$  und  $\bar{E}'_{1k} = E'_{1k} - \cup e_{1k}$  die an Stelle von  $E'_{0k}$  und  $E'_{1k}$  ausgezeichneten Randmengen, während die Schar  $\{\bar{\gamma}'_k\}$  die Punktmengen  $\bar{E}'_{0k}$  und  $\bar{E}'_{1k}$  innerhalb  $\bar{G}'_k (= G'_k)$  verbindet. Dann enthält auch  $\{\bar{\gamma}'_k\}$  die durch  $f_k(z)$  vermittelte Bildschar von  $\{\tilde{\gamma}\}$ . Nach Satz 3" gilt ferner  $\lambda(\gamma'_k) \leq \lambda(\bar{\gamma}'_k)$ .

Nun gehört im allgemeinen das Element  $(\bar{G}'_k; \bar{E}'_{0k}, \bar{E}'_{1k})$  nicht zu  $\mathfrak{G}$ , da die zu  $\bar{E}'_{0k} \cup \bar{E}'_{1k}$  komplementäre Randmenge Komponenten enthalten kann, die Intervalle gleicher Klasse  $\bar{E}'_{0k}$  resp.  $\bar{E}'_{1k}$  verbinden. In diesem Fall wenden wir Lemma 2 so oft an, bis die störenden Intervalle in normale Einschnitte verwandelt sind. Jedenfalls gibt es also ein Element  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l}) \in \mathfrak{G}$  derart, daß die in  $G'_l$  ausgezeichnete Kurvenschar  $\{\gamma'_l\}$ , die  $E'_{0l}$  mit  $E'_{1l}$  verbindet, durch  $\{\bar{\gamma}'_k\}$  oder dann durch die betreffende Bildschar im Sinne von Definition 3 ersetzbar ist.

Daraus folgt nun sofort, daß die derart abgeänderte Folge  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l})$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) die verlangte Eigenschaft  $p'_{il} = p_i$  besitzt und a fortiori eine Extremalfolge darstellt.

Zu  $\beta)$ . Für das folgende nehmen wir an, daß  $z = 0$  in  $\tilde{G}$  liege und  $f_l(0) = 0$  gelte. Ferner werden wir den Beweis schrittweise bezüglich der einzelnen

Randkomponenten durchführen. Es sei also  $C_1$  eine Randkomponente von  $G$  und  $C'_{1l}$  seien die  $C_1$  zugeordneten Randkomponenten von  $G'_l$ . Nun bilde  $\varrho_l(z')$ ,  $\varrho_l(0) = 0$  ( $l = 1, 2, \dots$ ) das durch  $C'_{1l}$  begrenzte,  $G'_l$  enthaltende einfach zusammenhängende Gebiet nach dem RIEMANNSCHEN Abbildungssatz konform auf den Einheitskreis  $R = \{\varrho \mid |\varrho| < 1\}$  ab. Die  $2p_1$  Endpunkte der auf  $C'_{1l}$  ausgezeichneten Intervalle kommen dabei auf die Peripherie  $r$  von  $R$  zu liegen. Jetzt läßt sich nach bekanntem Verfahren eine Teilfolge  $(G'_m; E'_{0m}, E'_{1m})$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) der in  $R$  liegenden, wieder mit  $(G'_l; E'_{0l}, E'_{1l})$  bezeichneten Elementen derart auswählen, daß die Endpunkte der  $p_1$  Intervalle auf  $r$  für  $m \rightarrow \infty$  konvergieren.

Für die zugeordneten Abbildungen  $f_m(z)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) gelten die Beziehungen  $f_m(\tilde{G}) \subset G'_m$  und  $f_m(0) = 0$ . Nach der Theorie der Normalen Familien von P. MONTEL enthält  $f_m(z)$  eine Teilfolge  $f_n(z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), die entweder gegen die Grenzfunktion Null oder gegen eine konforme Abbildung  $F(z)$  von  $\tilde{G}$  konvergiert [2]. Auf der Peripherie  $r$  von  $R$  liegen aber für jedes  $n$  Bilder von Bogen, die zu  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  gehören. Gemäß § 8.1 kann nun die Funktion  $f_n(z)$  für  $n = 1, 2, \dots$  über diese Bogen hinaus durch Spiegelung fortgesetzt werden. Auf den Bogen, die nachher im Innern liegen, gilt daher  $|f_n(z)| = 1$ , und somit kann die Folge  $f_n(z)$  niemals gegen die Konstante Null konvergieren.

Folglich bildet  $F(z)$  das Gebiet  $\tilde{G}$  konform derart in den Kreis  $R$  ab, daß das nicht leere Bild von  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_1$  auf  $r$  eine offene freie Randmenge darstellt, also ebenfalls den in § 8.1 angegebenen Forderungen d) und e) genügt. Da nun das durch  $f_n(z)$  vermittelte Bild von  $\tilde{E}_0$  zu  $E'_{0n}$  bzw. dasjenige von  $\tilde{E}_1$  zu  $E'_{1n}$  gehört und die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = F(z)$  für jeden abgeschlossenen Teil von  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_1$  gleichmäßig ist, müssen infolge  $p'_{1n} = p_1$  die Intervalle von  $E'_{0n}$  bzw.  $E'_{1n}$  wiederum gegen Intervalle konvergieren. Überträgt man jetzt die Klasseneinteilung auf die Grenzintervalle, so sind damit auf  $r$  zwei Klassen  $E''_0$  und  $E''_1$  erklärt. Ferner müssen diese Limesintervalle, deren Anzahl  $p_1$  beträgt, wiederum bezüglich der Klasseneinteilung auf  $r$  alternieren.

Sind die Gebiete  $G'_n$  einfach zusammenhängend, so definiert  $G'' (= R)$  mit der auf  $r$  angegebenen Einteilung ein Element  $(G''; E''_0, E''_1)$ . Es sei  $\{\gamma''\}$  diejenige Kurvenschar, die  $E''_0$  mit  $E''_1$  in  $G''$  verbindet. Dann ist die durch  $F(z)$  vermittelte Bildschar von  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Teilschar von  $\{\gamma''\}$ . Dagegen steht noch nicht fest, ob das Komplement von  $E''_0 \cup E''_1$  bezüglich  $r$  keine isolierten Punkte enthält, das heißt ob  $(G''; E''_0, E''_1)$  zur Menge  $\mathfrak{G}$  gehört.

Ist aber  $G$  mehrfach zusammenhängend, so müssen wir das Verfahren in geeigneter Weise iterieren. Vorgängig bemerken wir noch, daß nach der Forderung b) von § 8.1 zu  $C_1$  eine JORDANKURVE  $L_1$  existiert, die in  $\tilde{G}$  verläuft

und  $C_1$  von den übrigen Randkomponenten von  $G$  trennt. Dasselbe gilt entsprechend im Bildgebiet  $F(\tilde{G})$ .

Es sei nun  $C_2$  eine weitere Randkomponente von  $G$ , und  $C'_{2n}$  bezeichne die  $C_2$  entsprechenden Berandungen von  $G'_n$ . Jetzt bilden wir das  $G'_n$  enthaltende, durch  $C'_{2n}$  begrenzte einfach zusammenhängende Gebiet mit Hilfe von  $\sigma_n(\varrho)$ ,  $\sigma_n(0) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) konform auf  $S = \{\sigma \mid |\sigma| < 1\}$  ab. Dabei entspricht  $C'_{2n}$  der Peripherie  $s$  von  $S$ , auf der jeweils  $p_2$  Intervalle ausgezeichnet sind. Ferner sollen diese bereits konvergieren.

Nun ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\varrho)$  entweder die Konstante Null oder stellt eine konforme

Abbildung  $\Sigma(\varrho)$  des sogenannten Kernes  $\Phi$  auf  $S$  dar [2]. Im ersten Fall müßte die in  $\tilde{G}$  definierte Folge  $\sigma_n f_n(z)$  gegen die Konstante Null konvergieren, was man durch Spiegelung an  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap C_2$  widerlegt. Also konvergiert  $\sigma_n f_n(z)$  gegen eine konforme Abbildung  $\tilde{\Sigma}(z)$  von  $\tilde{G}$ . Infolge  $F(\tilde{G}) \subset \Phi$  ist die zusammengesetzte Funktion  $\Sigma F(z)$  in  $\tilde{G}$  definiert und stimmt, da die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\varrho) = \Sigma(\varrho)$  stetig ist [2], in  $\tilde{G}$  mit  $\tilde{\Sigma}(z)$  überein.

Aus  $L'_1 = F(L_1) \subset \Phi$  folgt  $r \subset \Phi$ . Deshalb wird  $r$  durch  $\Sigma(\varrho)$  auf eine mit  $C''_1$  bezeichnete analytische Kurve abgebildet. Überträgt man dabei die Randeinteilung von  $r$ , so sind jetzt auf  $C''_1$  und  $s$  mit  $E''_0$  resp.  $E''_1$  notierte Intervallmengen erklärt. Bei zweifachem Zusammenhang stellt das durch  $C''_1$  und  $s$  begrenzte Gebiet samt der ausgezeichneten Berandung das gesuchte Grenzelement  $(G''; E''_0, E''_1)$  dar. Ferner enthält die zugehörige Schar  $\{\gamma''\}$  die durch  $\tilde{\Sigma}(z)$  vermittelte Bildschar von  $\{\tilde{\gamma}\}$ . Dagegen muß noch  $(G''; E''_0, E''_1) \in \mathfrak{G}$  gezeigt werden.

Analog werde nun das Verfahren bei größerer Zusammenhangszahl für die übrigen Randkomponenten von  $G$  iteriert.

Zu  $\gamma$ ). Es sei  $u''(x', y')$  die zur Randeinteilung von  $G''$  passende gemäß § 3.3 erklärte harmonische Funktion. Für das DIRICHLETintegral über  $G''$  gilt nach Theorem 1 die Beziehung  $\lambda^{-1}(\gamma'') = D_{G''}(u'')$ . Wir führen nun den verlangten Beweis, indem wir die entsprechende bekannte Halbstetigkeit für die betreffenden DIRICHLETintegrale herleiten [3].

Ist  $D_{G''}(u'')$  endlich, so sei  $T'$  ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von  $G''$  derart, daß  $D_{G''}(u'') - D_{T'}(u'') < \varepsilon/2$  ist.  $T$  bezeichne ein Teilkontinuum von  $T'$  mit  $D_{T'}(u'') - D_T(u'') < \varepsilon/2$ . Infolge der Konvergenz der Gebiete  $G'_n$  gegen  $G''$  gilt gemäß  $\beta$ ) für geeignetes festes  $N$  und  $n > N$  die Inklusion  $T \subset G'_n$ . Bezeichnet  $u_n(x', y')$  die  $(G'_n; E'_{0n}, E'_{1n})$  zugeordnete harmonische Funktion, so können die Funktionen  $\Omega_n(z') = u_n(x', y') + i v_n(x', y')$  für  $n > N$  in  $T$  eindeutig definiert werden. Nun enthält die Folge  $\Omega_n(z')$  eine

wieder mit  $\Omega_n(z')$  notierte konvergente Teilfolge, deren Ableitungen  $\Omega'_n(z')$  gegen die Ableitung  $\Omega'_0(z')$  der Grenzfunktion  $\Omega_0(z')$  konvergieren [2]. Infolge

$$D_T(u_n) = \iint_T |\Omega'_n(z')|^2 dx' dy'$$

gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(u_n) = D_T(u_0) , \quad u_0 = \Re \Omega_0(z') .$$

Es kann  $u_0(x', y')$  in  $G''$  eindeutig definiert resp. auf  $G''$  eindeutig fortgesetzt werden. Da die Randeinteilung von  $G'_n$  gegen diejenige von  $G''$  konvergiert, hat  $u_0$  dasselbe Randverhalten wie  $u''$  und muß deshalb mit  $u''$  übereinstimmen. Dabei geht man wie in β) schrittweise bezüglich der einzelnen Randkomponenten vor. So streben für abgeschlossene Teilbogen von  $[E''_0 \cup E''_1] \cap C'_1$  die Funktionen  $u_n$  gleichmäßig gegen 0 bzw. 1. Zum Beweise überträgt man die Funktionen  $u_n$  in die  $\varrho$ -Ebene und setzt sie über die betreffenden auf  $r$  gelegenen Teilbogen von  $E'_{0n}$  und  $E'_{1n}$  hinaus harmonisch fort, so daß nachher diese abgeschlossenen Teilbogen im Innern liegen und die Konvergenz auf ihnen somit gleichmäßig ist. Mit Hilfe harmonischer Fortsetzung zeigt man analog, daß  $\frac{\partial u_n}{\partial n}$  für abgeschlossene Teilbogen der zu  $E''_0 \cup E''_1$  komplementären Berandung bezüglich  $r$  gleichmäßig gegen Null strebt. Ähnlich gestaltet sich der Beweis für die übrigen Teilberandungen von  $G''$ .

Also gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_T(u_n) = D_T(u'')$ . Gemäß § 8.1 ist ferner  $\Lambda > 0$ . Mit Hilfe von Theorem 1 folgt jetzt

$$\Lambda^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{-1}(\gamma'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{G'_n}(u_n) \geq D_T(u'') > D_{G''}(u'') - \varepsilon ,$$

woraus sich sofort  $\lambda(\gamma'') \geq \Lambda$  ergibt. Weiter zeigt sich, daß für beliebiges abgeschlossenes  $T$  die Integrale  $D_T(u'')$  beschränkt sind und die Annahme  $D_{G''}(u'') < \infty$  demnach erlaubt war.

Infolge  $\lambda(\gamma'') > 0$  kann die zu  $E''_0 \cup E''_1$  komplementäre Berandung von  $G''$  nach § 3.3 keine isolierten Punkte enthalten. Also gehört  $(G''; E''_0, E''_1)$  zur Menge  $\mathfrak{G}$ .

## § 9. Konforme Abbildung auf Normalgebiete

In diesem Abschnitt wird zuerst der in § 8.1 angekündigte Abbildungssatz bewiesen. Nachher stellen wir den Zusammenhang mit einer von H. GRÖTZSCH [5] stammenden und von K. STREBEL [15] wieder aufgenommenen Extremalaufgabe her.

1. Es sei  $F(z)$  die in § 8.2 angegebene konforme Abbildung von  $G$  in  $G''$ , die das in § 8.1 gestellte Extremalproblem löst. Mit  $a$  bezeichnen wir irgend eine Komponente von  $A = G'' - \tilde{G}'$ ,  $\tilde{G}' = F(\tilde{G})$ . Dann muß  $a$  auf einer Flußlinie der dem Element  $(G''; E_0'', E_1'')$  zugeordneten harmonischen Funktion  $u''(x, y)$  liegen, m. a. W. die Komponente  $a$  muß entweder ein Punkt, ein normaler Schlitz oder ein normaler Einschnitt von  $(G''; E_0'', E_1'')$  sein.

Zum Beweise nehmen wir an, daß  $a$  ein Kontinuum darstelle, das nicht auf einer Flußlinie liege.  $\{\gamma_a\}$  bezeichne diejenige Kurvenschar, die  $E_0''$  mit  $E_1''$  innerhalb  $G'' - a$  verbindet. Gemäß Theorem 3' und § 4.4 gilt  $\lambda(\gamma_a) > \lambda(\gamma'')$  für die betreffenden Extremallängen. Nun wenden wir Lemma 1 resp. Lemma 2 an und bilden  $G'' - a$  auf ein Normalgebiet ab, das heißt wir verwandeln  $a$  in einen normalen Schlitz bzw. in einen normalen Einschnitt. Die Extremallänge des betreffenden zugeordneten Elementes stimmt dann nach Satz 2 und Definition 5 mit  $\lambda(\gamma_a)$  überein und ist damit größer als  $\lambda(\gamma'')$ . Dies widerspricht aber der in § 8.2 dargelegten Extremaleigenschaft von  $F(z)$ .

Somit besteht  $A$  aus Punkten, normalen Schlitzen und normalen Einschnitten. Bildet zusätzlich die in § 4.4 erklärte Projektionsmenge  $PA$  auf  $E_1''$  eine lineare Nullmenge, so ist  $\tilde{G}'$  gemäß § 4.4 normal. Für diesen Spezialfall ist damit der in § 8.1 formulierte Abbildungssatz bewiesen. Als Korollar ergibt sich das Resultat, daß  $\tilde{G}'$  dann normal ist, wenn  $A$  aus höchstens abzählbar vielen Komponenten besteht.

2. Jetzt wenden wir uns dem allgemeinen Fall zu. Es bezeichne  $\tilde{G}^*$  die aus  $\tilde{G}$  durch SCHOTTKYSche Verdoppelung bezüglich  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  erzeugte RIEMANNSche Fläche. Demnach kann  $\tilde{G}^*$  durch zwei übereinanderliegende Exemplare von  $\tilde{G}$  dargestellt werden, die längs  $\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1$  miteinander verheftet sind.  $\tilde{g}_\nu^*$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) sei eine noch näher einzuschränkende,  $\tilde{G}^*$  ausschöpfende Gebietsfolge, das heißt es gelte  $\tilde{g}_\nu^* \subset \tilde{g}_{\nu+1}^*$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) sowie  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{g}_\nu^* = \tilde{G}^*$ . Weiter sei  $\tilde{g}_\nu = \tilde{G} \cap \tilde{g}_\nu^*$  und  $\{\tilde{\gamma}_\nu\}$  bezeichne die in  $\tilde{g}_\nu$  gelegene Teilschar von  $\{\tilde{\gamma}\}$ .

Bei genügend großem  $\nu$  erfüllt auch  $\{\tilde{\gamma}_\nu\}$  die Forderungen a) bis e) von § 8.1. Die Folge  $\tilde{g}_\nu^*$  soll jetzt so gewählt werden, daß für  $\tilde{g}_\nu$ , der in § 9.1 zitierte Spezialfall vorliegt und also  $\tilde{g}_\nu$  konform auf ein Normalgebiet abgebildet werden kann. Hierzu bestimme man z. B. die Folge  $\tilde{g}_\nu^*$  derart, daß jedes Element endlichen Zusammenhang besitzt und  $[\tilde{E}_0 \cup \tilde{E}_1] \cap \tilde{g}_\nu^*$  jeweils aus endlich vielen Komponenten besteht. Zur effektiven Konstruktion von

$\tilde{g}^*$  benutzt man dabei wie üblich am besten eine sogenannte Quadrateinteilung von  $\tilde{G}^*$ .

Nach § 9.1 gehört zu jedem  $\tilde{g}_\nu$  ein konform äquivalentes Normalgebiet.  $f_\nu(z)$  bezeichne die diesbezügliche Abbildungsfunktion. Mit  $(G_\nu; E_{0\nu}, E_{1\nu})$  notieren wir ferner die zugehörige Elementenfolge, während  $\{\gamma_\nu\}$  die  $E_{0\nu}$  mit  $E_{1\nu}$  innerhalb  $G_\nu$  verbindende Kurvenschar darstellt. Infolge der Normalität gilt die Beziehung  $\lambda(\gamma_\nu) = \lambda(\tilde{\gamma}_\nu)$ .

Jetzt können wir den Beweis von § 8.2 Schritt für Schritt auf unsren Fall übertragen. Einmal besitzen bei genügend großem  $\nu$  die Gebiete  $G_\nu$  den gleichen Zusammenhang wie  $G$ . Somit ist jeder Randkomponente  $C_i$  von  $G$  eine Berandung  $C_{i\nu}$  von  $G_\nu$  zugeordnet, für die ihrerseits die Anzahl  $p_{i\nu}$  der auf  $C_{i\nu}$  alternierenden Bogen von  $E_{0\nu}$  und  $E_{1\nu}$  erklärt ist. Infolge der Normalität von  $f_\nu(\tilde{g}_\nu)$  ist bei genügend großem  $\nu$  offensichtlich  $p_{i\nu} = p_i$  erfüllt.

Was  $\beta$ ) betrifft, so muß beim ersten durchzuführenden Schritt aus der Folge  $f_\nu(z)$  eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden, die gegen eine konforme Abbildung  $\hat{F}(z)$  konvergiert. Nun ist zu beachten, daß  $f_\nu(z)$  zwar nur in  $\tilde{g}_\nu$  definiert ist. Da aber  $\tilde{g}_\nu$  gegen  $\tilde{G}$  konvergiert, ist somit  $\hat{F}(z)$  in  $\tilde{G}$  konform [2]. Die übrigen Überlegungen von  $\beta$ ) lassen sich mutatis mutandis sofort übertragen. Es existiert demnach eine wiederum mit  $\hat{F}(z)$  bezeichnete Grenzabbildung. Ihr ist ein Element  $(\hat{G}; \hat{E}_0, \hat{E}_1)$  zugeordnet und diesem eine ausgezeichnete Kurvenschar  $\{\hat{\gamma}\}$ . Ferner geht  $\{\tilde{\gamma}\}$  bei der Abbildung  $\hat{F}(z)$  in eine Teilschar von  $\{\hat{\gamma}\}$  über, so daß gemäß Satz 3" die Ungleichung  $\lambda(\hat{\gamma}) \leq \lambda(\tilde{\gamma})$  gilt.

Dank der Ausschöpfung bildet  $\lambda(\tilde{\gamma}_\nu) [= \lambda(\gamma_\nu)]$  infolge Satz 3" eine monoton fallende, durch  $\lambda(\tilde{\gamma})$  beschränkte Zahlenfolge, die also konvergiert. Wie bei  $\gamma$ ) läßt sich nun die Beziehung  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda(\gamma_\nu) \leq \lambda(\hat{\gamma})$  herleiten. Damit ergibt sich jetzt  $\lambda(\tilde{\gamma}) \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda(\tilde{\gamma}_\nu) \leq \lambda(\hat{\gamma}) \leq \lambda(\tilde{\gamma})$ . Da ferner  $(\hat{G}; \hat{E}_0, \hat{E}_1)$  zur Menge  $\mathfrak{G}$  wie auch zu der in § 8.1 erklärten Menge  $\mathfrak{G}'$  gehört, ist damit die behauptete Normalität und also die in § 8.1 angegebene Gleichung  $\Lambda = \lambda(\tilde{\gamma})$  bewiesen.

*Bemerkung.* Die Überlegungen von § 9.2 können zu einem selbständigen, vom Extremalproblem unabhängigen Beweis des Abbildungssatzes vervollständigt werden. Es wurde nämlich einzig benutzt, daß zu  $\tilde{g}_\nu$  ein Normalgebiet existiert. Wählt man aber die  $\tilde{g}_\nu^*$  wie oben angegeben, so kann dieser Existenzsatz direkt durch mehrmalige Anwendung der Lemmata 1 und 2 hergeleitet werden. Daß bei dem so gewonnenen Abbildungssatz zugleich das Extremalproblem gelöst wurde, folgt dann aus Theorem 4.

*Anmerkung.* Endlich läßt sich jetzt der in § 3.2 angekündigte und in § 6.3 benutzte Satz beweisen, daß jeder im Rechteck gelegene minimale Schlitzbereich normal ist. Andernfalls würde nämlich eine konforme Abbildung des Schlitzbereiches auf ein Normalgebiet existieren, wobei der Modul des zugeordneten Rechtecks gemäß Theorem 4 und 4' zunehmen müßte. Also könnte dann im gegebenen minimalen Schlitzbereich gemäß Theorem 1 und 2 eine harmonische Funktion mit kleinerem DIRICHLETintegral angegeben werden in Widerspruch zur Definition in § 3.2 a).

3. Es sei  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Kurvenschar, die den Forderungen von § 8.1 genügt. Ferner sei  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  eine Schar derart, daß  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  im Sinne von Definition 3 durch  $\{\tilde{\gamma}\}$  ersetzbar ist und die beiden Träger der Kurvenscharen übereinstimmen. Wir fragen uns nun, ob auch zu  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  ein Normalgebiet im Sinne der Abbildungsaufgabe von § 8.1 existiert.

**Zusatz 4.** *Zu gegebenem  $\{\tilde{\gamma}\}$  gibt es entweder kein derartiges Normalgebiet oder jedes im Sinne von Definition 5 und 5' zu  $\{\tilde{\gamma}\}$  passende Normalgebiet ist zugleich Normalgebiet für  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$ .*

*Beweis.* Existiert nämlich zu  $\{\tilde{\gamma}\}$  ein Normalgebiet, so ist dieses nach Voraussetzung gemäß Definition 5 ebenfalls Normalgebiet für  $\{\tilde{\gamma}\}$ . Da aber nach Theorem 4' die Normalgebiete bis auf die dort angegebene Willkür eindeutig bestimmt sind, ist jede zu  $\{\tilde{\gamma}\}$  gehörende Lösung des Abbildungssatzes zugleich Lösung für  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$ .

Es ist leicht, explizite Konstruktionen für den ersten Fall von Zusatz 4 anzugeben. Es sei  $\{\gamma\}$  die einem Element  $(G; E_0, E_1) \in \mathfrak{G}$  zugeordnete Kurvenschar. Die Schar  $\{\tilde{\gamma}\}$  erfülle in  $(G; E_0, E_1)$  die Forderungen von § 8.1 und sei normal bezüglich  $\{\gamma\}$ . Wählt man jetzt eine Schar  $\{\gamma_\perp\}$  mit  $\lambda(\gamma_\perp) = \infty$  und setzt  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\} = \{\tilde{\gamma}\} \cup \{\gamma_\perp\}$ , so ist einmal  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  nach dem Beispiel zu Definition 3 in § 2.6 durch  $\{\tilde{\gamma}\}$  ersetzbar. Der zweite Fall von Zusatz 4 ist nun dann ausgeschlossen, wenn  $\{\tilde{\gamma}\}$  und  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  den gleichen Träger besitzen und  $\{\gamma_\perp\}$  keine Teilschar von  $\{\gamma\}$  ist. Mit Hilfe des Beispiels b) von § 2.1 läßt sich unter Benutzung von Satz 5 nachprüfen, daß in dem von H. GRÖTZSCH [5] angegebenen und von K. STREBEL [15] wieder aufgenommenen Extremalproblem tatsächlich dieser Sachverhalt vorliegt.

Mit Hilfe von Definition 4 läßt sich Zusatz 4 verallgemeinern. Es sei  $\{\tilde{\gamma}\}$  eine Kurvenschar, die mit  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$  vertauschbar ist. Ferner erfülle  $\{\tilde{\gamma}\}$  die Forderungen von § 8.1 und die beiden Träger sollen wiederum übereinstimmen. Dann gilt Zusatz 4 unverändert für  $\{\tilde{\tilde{\gamma}}\}$ . Dazu betrachten wir den

Durchschnitt  $\{\gamma_\wedge\} = \{\tilde{\gamma}\} \cap \{\tilde{\gamma}\}$ . Durch zweimalige Anwendung des Beweisverfahrens von Zusatz 4 erhält man sofort die Verallgemeinerung.

Um also die Abbildungsaufgabe für eine gegebene Kurvenschar anzupacken, darf man zu ersetzbaren oder vertauschbaren Scharen übergehen. Ist nämlich für diese die Aufgabe lösbar, so erhält man entweder die verlangte Lösung oder man hat dadurch ein unlösbares Problem durch geeignete Abänderung einer Lösung entgegengeführt.

*Anmerkung.* Nach Abschluß der Redaktion erschien die Arbeit „Die extreme Distanz zweier Enden einer RIEMANNSchen Fläche“ (Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 179, 1955, p. 1) von K. STREBEL. Dort wird die betreffende Abbildungsaufgabe bei zweifach zusammenhängendem Grundgebiet allgemein behandelt.

#### LITERATUR

- [1] L. AHLFORS UND A. BEURLING, *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*. Acta Math. 83, 1950, p. 101.
- [2] C. CARATHÉODORY, *Conformal representation*. Cambridge tracts, second ed. 1952.
- [3] R. COURANT, *Dirichlet's principle*. Intersc. publ. 1950.
- [4] H. GRÖTZSCH, *Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich-vielfach zusammenhängender Bereiche*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. 83, 1931, p. 185.
- [5] H. GRÖTZSCH, *Über Extremalprobleme bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. 84, 1932, p. 3.
- [6] H. GRÖTZSCH, *Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche*. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl. 84, 1932, p. 15.
- [7] H. GRUNSKY, *Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen*. Math. Z. 45, 1939, p. 29.
- [8] J. HERSCHE, *Sur une forme générale du théorème de Phragmen-Lindelöf*. C. R. Acad. Sci. Paris 237, 1953, p. 641.
- [9] P. KOEBE, *Zur konformen Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1918, p. 60.
- [10] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*. Springer Verlag 1953.
- [11] R. DE POSSEL, *Quelques problèmes de représentation conforme*. J. Ecole polytechn. II<sup>e</sup> série, 30<sup>e</sup> cahier, 1932, p. 1.
- [12] R. DE POSSEL, *Sur quelques propriétés de la représentation conforme des domaines multiplement connexes en relation avec le théorème des fentes parallèles*. Math. Ann. 107, 1932, p. 496.
- [13] E. RENGEL, *Über einige Schlitztheoreme der konformen Abbildung*. Schr. math. Sem. u. Inst. Univ. Berlin I, 1933, p. 141.
- [14] H. RENGLI, *Un théorème de représentation conforme*. C. R. Acad. Sci. Paris 235, 1952, p. 1593.
- [15] K. STREBEL, *Eine Ungleichung für extreme Längen*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 90, 1951, p. 1.

(Eingegangen den 7. September 1955.)