

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1956-1957)

**Artikel:** Bemerkung zu einer notwendigen Bedingung von Picone in der Variationsrechnung.  
**Autor:** Gautschi, Walter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515695>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Bemerkung zu einer notwendigen Bedingung von PICONE in der Variationsrechnung<sup>1)</sup>

VON WALTER GAUTSCHI, Rom

I. Es sei vorgegeben:

1. Eine reelle Funktion  $f(x, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ , die in einem abgeschlossenen Bereich  $E$  des  $(x, y_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ -Raumes ( $n \geq 0$ ) definiert und stetig ist;
2. eine Menge  $\Gamma$  von reellen Funktionen  $y(x)$  [oder, wie wir auch sagen, von «Kurven»  $y_0 = y(x)$ ], die folgende Eigenschaften haben:
  - a) Jede Funktion  $y(x)$  der Menge  $\Gamma$  ist in einem gewissen endlichen, abgeschlossenen Intervall, dessen Endpunkte mit  $a[y(x)]$  und  $b[y(x)]$  bezeichnet seien, definiert und besitzt in diesem Intervall stetige Ableitungen  $y^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) bis zur  $n$ -ten Ordnung und stückweise stetige  $(n + 1)$ -ste Ableitung
  - b) falls  $x$  im Intervall  $\langle a[y(x)], b[y(x)] \rangle$  variiert, bleibt der Punkt  $[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)]$  im Bereich  $E$ .

Für jede Funktion  $y(x)$  der Menge  $\Gamma$  ist dann das Integral

$$I[y(x)] = \int_{a[y(x)]}^{b[y(x)]} f[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)] dx \quad (1)$$

wohl definiert und gibt Anlaß zum klassischen Variationsproblem, unter allen Funktionen der Menge  $\Gamma$  diejenigen – falls sie existieren – zu finden, die  $I[y(x)]$  den kleinsten Wert erteilen.

Es sind wohl bekannt die notwendigen Bedingungen (von EULER, LEGENDRE, WEIERSTRASS usw.), die in jedem Punkt einer Minimalkurve erfüllt sein müssen, falls dieser Punkt in einem bestimmten Sinne «im Innern» der Funktionenmenge  $\Gamma$  gelegen ist. Kürzlich hat PICONE<sup>2)</sup> eine neue Bedingung formuliert, die in der Regel auch in «Randpunkten» von  $\Gamma$  gelten muß. Die Bedingung von PICONE hat bemerkenswerte Konsequenzen, unter anderem auch neue Fassungen der LEGENDRESCHEN und WEIERSTRASSSCHEN Bedingungen.

In der folgenden Nr. II soll PICONES Bedingung in den wesentlichen Zügen entwickelt werden. In Nr. III geben wir eine Variante des ursprünglichen

---

<sup>1)</sup> Arbeit, die im «Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo» in Rom ausgeführt wurde.

<sup>2)</sup> M. PICONE, Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni, Mem. Acc. Naz. Lincei, ser. (8), vol. 4 (1954), p. 137–176.

Beweises von PICONE, die nur Stetigkeit von  $f$  voraussetzt, und beantworten damit eine von PICONE<sup>3)</sup> aufgeworfene Frage.

II. Sei  $y_0 = y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) die Gleichung einer Kurve der Menge  $\Gamma$  und  $P_0[x_0, y(x_0)]$ ,  $x_0 < b$ , ein fester Punkt auf dieser Kurve. Seien ferner

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu, p$$

fest vorgegebene reelle Zahlen und die letzten  $\nu + 1$  hiervon positiv. Wir setzen

für ein  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < (b - x_0) / (p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s)$

$$x_s = x_0 + (p_1 + p_2 + \dots + p_s) \varepsilon \quad (s = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$x_{\nu+1} = x_\nu + p\varepsilon.$$

Sei  $y(x, \varepsilon)$  die Funktion

$$y(x, \varepsilon) = \begin{cases} y(x) & (a \leq x \leq x_0) \\ \eta_s(x, \varepsilon) & (x_{s-1} \leq x \leq x_s; s = 1, 2, \dots, \nu) \\ \zeta(x, \varepsilon) & (x_\nu \leq x \leq x_{\nu+1}) \\ y(x) & (x_{\nu+1} \leq x \leq b), \end{cases} \quad (2)$$

wo  $\eta_s(x, \varepsilon)$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  durch die folgenden drei Bedingungen eindeutig festgelegt sind:

(a)  $\eta_s(x, \varepsilon)$  ist ein Polynom in  $x$  höchstens vom Grade  $n + 1$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  ein Polynom höchstens vom Grade  $2n + 1$

(b) es gilt  $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \eta_s(x, \varepsilon) = \lambda_s$  ( $s = 1, 2, \dots, \nu$ ),

(c) es ist  $y(x, \varepsilon)$  im ganzen Intervall  $\langle a, b \rangle$   $n$ -mal stetig differenzierbar.

Der Punkt  $P_0$  heißt dann nach PICONE ein  $\nu$ -facher Konzentrationspunkt nach rechts für die Kurven der Menge  $\Gamma$ , mit den Werten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$  der ersten und  $p_1, p_2, \dots, p_\nu, p$  der zweiten Parameter, falls für jedes absolut hinreichend kleine  $\varepsilon$  die Kurve  $y_0 = y(x, \varepsilon)$  der Menge  $\Gamma$  angehört.

Ganz analog – mit  $\varepsilon < 0$  – wird ein Konzentrationspunkt nach links definiert. (In der Definitionsformel (2) für  $y(x, \varepsilon)$  ist dann  $a$  mit  $b$  zu vertauschen und in allen Ungleichungen  $\leq$  durch  $\geq$  zu ersetzen.)

<sup>3)</sup> loc. cit., pag. 28

Die Funktionen  $\eta_s(x, \varepsilon)$  und  $\zeta(x, \varepsilon)$  genügen folgenden Grenzrelationen<sup>4)</sup>

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_s^{(k)}(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon) = y^{(k)}(x_0) \quad (s = 1, 2, \dots, \nu; \quad k = 0, 1, \dots, n) \quad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta^{(k)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon) = y^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta^{(n+1)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon) = y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t), \quad (5)$$

worin  $t$  eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet und  $\Omega(t)$  in (5) ein wohl bestimmtes Polynom vom Grade  $\leq n$ . Ferner ist

$$y^{(n+1)}(x_0^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} y^{(n+1)}(x)$$

gesetzt, und es gilt in (5) das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem, ob  $\varepsilon$  über positive oder negative Werte nach Null geht.

Es gilt nun folgende

**Bedingung von PICONE.** Falls die Kurve  $C$  mit der Gleichung  $y_0 = y(x)$  eine Minimalkurve für das Integral (1) bezüglich der Menge  $\Gamma$  ist, so gilt in jedem Punkt  $P_0[x_0, y(x_0)]$  von  $C$ , der  $\nu$ -facher Konzentrationspunkt ist, die Relation

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm), \lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p] \geq 0, \quad (6)$$

wo  $F$  gegeben ist durch

$$F[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm), \lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p] \equiv \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) - (p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s) f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] + p \int_0^1 f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] dt. \quad (7)$$

Hierin bedeuten  $Q_0$  der Punkt  $[x_0, y(x_0), \dots, y^{(n)}(x_0)]$ , und  $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu, p_1, \dots, p_\nu, p$  beziehungsweise die ersten und zweiten Parameter, mittels deren sich der Punkt  $P_0$  als Konzentrationspunkt erweist, und es gilt in (6) das Zeichen  $+$  oder  $-$ , je nachdem, ob  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach rechts oder nach links ist.

Für verschiedene interessante Spezialfälle dieser Bedingung sei auf die Originalarbeit von PICONE verwiesen.

III. *Beweis.* Sei  $C$  eine Minimalkurve und  $P_0$  ein Konzentrationspunkt auf  $C$ . Wir bilden gemäß (2) die Kurve  $C_\varepsilon$  mit der Gleichung  $y_0 = y(x, \varepsilon)$ . Das entsprechende, nach (1) gebildete Integral  $I(C_\varepsilon)$  ist sicher definiert für alle hinreichend kleinen positiven  $\varepsilon$ , falls  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach rechts ist, und für alle absolut hinreichend kleinen negativen  $\varepsilon$ , falls  $P_0$  ein Konzentrationspunkt nach links ist.

---

<sup>4)</sup> M. PICONE, loc. cit., pag. 22, pag. 24 Formel (21), pag. 25 Formel (25).

Da ferner  $C$  eine Minimalkurve ist, gilt für jedes absolut hinreichend kleine  $\varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} [I(C_\varepsilon) - I(C)] \begin{cases} \geq 0 & \text{falls } \varepsilon > 0, \\ \leq 0 & \text{falls } \varepsilon < 0, \end{cases}$$

das heißt, sowohl für  $\varepsilon > 0$  als auch  $\varepsilon < 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) \equiv & \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^{\nu} \int_{x_{s-1}}^{x_s} f[x, \eta_s(x, \varepsilon), \dots, \eta_s^{(n)}(x, \varepsilon), \lambda_s] dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f[x, \zeta(x, \varepsilon), \dots, \zeta^{(n)}(x, \varepsilon), \zeta^{(n+1)}(x, \varepsilon)] dx \\ & - \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^{x_{\nu+1}} f[x, y(x), \dots, y^{(n)}(x), y^{(n+1)}(x)] dx \geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

In jedem der  $\nu + 2$  Teilintegrale von (8) führen wir eine neue Integrationsvariable  $t$  ein, indem wir in den ersten  $\nu$  Integralen der Reihe nach die Substitutionen

$$x = x_{s-1} + \varepsilon p_s t \quad (s = 1, 2, \dots, \nu),$$

im vorletzten Integral die Substitution

$$x = x_\nu + \varepsilon p t$$

und im letzten Integral die Substitution

$$x = x_0 + \varepsilon \sigma t, \quad \sigma = p + \sum_{s=1}^{\nu} p_s$$

ausüben. Man erhält

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) = & \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} p_s f[x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \eta_s(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon), \dots, \eta_s^{(n)}(x_{s-1} + \varepsilon p_s t, \varepsilon), \lambda_s] \right. \\ & + p f[x_\nu + \varepsilon p t, \zeta(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon), \dots, \zeta^{(n)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon), \zeta^{(n+1)}(x_\nu + \varepsilon p t, \varepsilon)] \\ & \left. - \sigma f[x_0 + \varepsilon \sigma t, y(x_0 + \varepsilon \sigma t), \dots, y^{(n)}(x_0 + \varepsilon \sigma t), y^{(n+1)}(x_0 + \varepsilon \sigma t)] \right\} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Durch den Grenzübergang  $\varepsilon \downarrow 0$  (beziehungsweise  $\varepsilon \uparrow 0$ ) unter dem Integralzeichen in (9) folgt dann bei Berücksichtigung der Relationen (3) – (5)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\varepsilon) = & \int_0^1 \left\{ \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) + p f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] - \sigma f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] \right\} dt \\ = & \sum_{s=1}^{\nu} p_s f(Q_0, \lambda_s) - \sigma f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm)] + p \int_0^1 f[Q_0, y^{(n+1)}(x_0^\pm) + \Omega(t)] dt \end{aligned}$$

und somit, wegen (8), die Bedingung (6).

(Eingegangen den 5. August 1955)