Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1956-1957)

Artikel: Konvexität in der komplexen Analysis.
Autor: Grauert, Hans / Remmert, Reinhold
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515702

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Konvexität in der komplexen Analysis

Nicht-holomorph-konvexe Holomorphiegebiete und Anwendungen auf die Abbildungstheorie *)

von HANS GRAUERT und REINHOLD REMMERT, Münster (Westfalen)

Einleitung

1. Die Charakterisierung der Existenzgebiete holomorpher Funktionen über dem Raum C^n von n komplexen Veränderlichen durch Eigenschaften lokaler Natur ist während der letzten Jahre eines der Hauptanliegen in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen gewesen. Man verdankt vor allem K. OKA die Lösung des bekannten LEVIschen Problems.[1]) K. OKA zeigte 1942 (vgl. [24]), daß ein Gebiet G im zweidimensionalen Zahlenraum C^2 genau dann ein Holomorphiegebiet ist, wenn G in jedem seiner Randpunkte pseudokonvex[2]) (im Sinne von H. CARTAN [7]) ist, das heißt, wenn es zu jedem Randpunkt $\mathfrak{z}$ von G eine Umgebung $U(\mathfrak{z}) \subset C^n$ gibt, so daß jede zusammenhängende Komponente von $G \cap U(\mathfrak{z})$ ein Holomorphiegebiet ist. Im Jahre 1953 hat K. OKA (vgl. [25]) die Gültigkeit dieses fundamentalen Satzes für beliebige unverzweigte RIEMANNsche Gebiete über einem Zahlenraum C^n beliebiger endlicher Dimension bewiesen und überdies eine weitere Verallgemeinerung für verzweigte RIEMANNsche Gebiete über dem C^n angekündigt; für Gebiete im Zahlenraum haben 1954 H. BREMERMANN [6] und F. NORGUET [22] ebenfalls Beweise für den OKAschen Satz angegeben.

Die grundlegende Bedeutung des Satzes von OKA für die komplexe Analysis läßt die Frage berechtigt erscheinen, ob es bei der LEVI-OKAschen Charakterisierung der Holomorphiegebiete des C^n notwendig ist, die Pseudokonvexität des Gebietes G in *jedem* seiner Randpunkte zu fordern, oder ob es vielleicht genügt, die Pseudokonvexität von G nur in einer „genügend dicht liegenden Randpunktmenge von G" vorauszusetzen. In der vorliegenden Arbeit wird ge-

---

*) Die Resultate der vorliegenden Arbeit wurden zum Teil in einer Comptes Rendus-Note der Verfasser angekündigt; vgl. [12].

[1]) Bereits 1910 hat E. E. LEVI notwendige Bedingungen für Holomorphiegebiete im C^2 mit glattem Rand in Form von Differentialungleichungen angegeben; vgl. [20] sowie auch [5]. Die Frage, ob diese Bedingungen hinreichend sind, bildet den Inhalt des sogenannten LEVIschen Problems.

[2]) Es ist eine bekannte Tatsache in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, daß sich Holomorphiegebiete durch Eigenschaften charakterisieren lassen, die in einer gewissen Analogie zu der Elementarkonvexität stehen. Vgl. hierzu etwa die ausführliche Darstellung in [4].

zeigt, daß in der Tat Aussagen in dieser Richtung gemacht werden können. *So ist zum Beispiel ein Gebiet G im C^n bereits dann ein Holomorphiegebiet, wenn der Rand von G bis auf eine diskrete Menge nicht isoliert liegender Randpunkte pseudokonvex ist* (vgl. Satz 6).

Um eine möglichst weitgehende Aussage formulieren zu können, führen wir den Begriff der dünnen sowie hebbaren Randpunktmenge ein. Wir nennen in Verallgemeinerung des Begriffes der dünnen Menge (vgl. [14]) eine Randpunktmenge A eines Gebietes G des C^n dünn, wenn es zu jedem Punkt $\mathfrak{z}^* \in A$ eine Umgebung $U \subset C^n$ und eine in $U \cap G$ holomorphe, nirgends identisch verschwindende Funktion f gibt, so daß zu jedem Punkt $\mathfrak{z} \in A \cap U$ eine gegen $\mathfrak{z}$ konvergierende Punktfolge $\mathfrak{z}_\nu \in U \cap G$ existiert, für die gilt: $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{z}_\nu) = 0$.

Weiter heißt ein Punkt $\mathfrak{z}$ des Randes von G ein hebbarer Randpunkt, wenn es eine zusammenhängende Umgebung U von $\mathfrak{z}$ und eine in U analytische Menge $M \neq U$ gibt, so daß jeder Randpunkt von G, der in U liegt, zu M gehört.

Als wichtiges Resultat ergibt sich nun:

I. *Ein Gebiet G im C^n, welches außerhalb einer dünnen, nicht hebbaren Randpunktmenge überall pseudokonvex ist, ist ein Holomorphiegebiet.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich einerseits wesentlich auf den OKAschen Hauptsatz; andererseits auf einen von den Verfassern früher bewiesenen Satz über hebbare Singularitäten plurisubharmonischer Funktionen [14].

2. Für die Untersuchung der nichtschlichten RIEMANNschen Gebiete über dem C^n hat sich der Pseudokonvexitätsbegriff in der oben angegebenen Form als nicht zweckmäßig erwiesen. OKA legt seinen Untersuchungen daher einen anderen Pseudokonvexitätsbegriff zugrunde; derselbe wird durch die Kontinuitätssätze motiviert (vgl. auch [3]). Bekanntlich ist eine holomorphe Funktion gewiß dann nicht singulär in einem Punkte $\mathfrak{z} \in C^n$, wenn es ein eindimensionales analytisches Flächenstück F durch $\mathfrak{z}$ und eine gegen F konvergierende Schar F_ν von ebensolchen Flächenstücken gibt, derart, daß f auf allen F_ν und auf dem Rande von F holomorph ist (vgl. etwa [3]). In einem schlichten Holomorphiegebiet G kann es daher keine Folge F_ν von eindimensionalen analytischen Flächenstücken geben, die gegen ein analytisches Flächenstück F konvergiert, welches durch einen Randpunkt von G läuft und dessen Rand aus inneren Punkten von G besteht. Diese Eigenschaft eines schlichten Holomorphiegebietes G wird die Pseudokonvexität von G genannt; allgemein nennt man ein Gebiet im C^n pseudokonvex genau dann, wenn es sich gegenüber Scharen von eindimensionalen analytischen Flächenstücken in derselben Weise verhält wie die Holomorphiegebiete. Die Resultate von OKA lehren, daß für

Gebiete im C^n dieser Pseudokonvexitätsbegriff mit dem von CARTAN angegebenen übereinstimmt.

Der Begriff des pseudokonvexen Gebietes läßt sich auf beliebige nichtschlichte RIEMANNsche Gebiete übertragen (vgl. Definition 8), da man auch hier den Begriff des Randpunktes einführen kann. Ebenfalls kann man für beliebige Gebiete über dem C^n den Begriff der dünnen sowie hebbaren Randpunktmenge erklären. Satz I behält dann auch für nichtschlichte unverzweigte RIEMANNsche Gebiete über dem C^n seine Gültigkeit (Satz 4). Der Versuch einer weiteren Ausdehnung dieses Satzes auf beliebige RIEMANNsche Gebiete mit Verzweigungspunkten im Innern scheitert aber. Vielmehr zeigt sich:

Es gibt über dem C^n, $n \geqslant 3$, verzweigte, nicht-pseudokonvexe RIEMANNsche Gebiete, deren Rand bis auf einen nicht-hebbaren Randpunkt überall pseudokonvex ist.

Das zu diesem Zwecke konstruierte Beispiel lehrt darüber hinaus:

II. *Es gibt über dem C^n, $n \geqslant 3$, verzweigte (sogar zweiblättrige) Holomorphiegebiete mit lauter uniformisierbaren Punkten, die weder holomorphkonvex noch pseudokonvex sind.*

Man kann im Anschluß an dieses Beispiel weiter zeigen, daß in verzweigten Holomorphiegebieten nicht mehr alle Aussagen gelten, die von der Funktionentheorie in schlichten Gebieten her bekannt sind (vgl. auch [16]).

3. Man kann Satz I benutzen, um Aussagen über das Entartungsverhalten holomorpher Abbildungen von komplexen Räumen zu gewinnen. So ergibt sich, wenn man überdies noch einen weiteren Satz über hebbare Singularitäten plurisubharmonischer Funktionen heranzieht:

III. *Eine holomorphe Abbildung eines n-dimensionalen komplexen Raumes X in eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit Y, deren Funktionaldeterminante außerhalb der nichtuniformisierbaren Punkte K von X nirgends verschwindet, besitzt keine Entartungsstellen. Ist die Abbildung außerhalb K eineindeutig, so ist sie in ganz X eineindeutig.*

Für die Gültigkeit dieses Satzes ist wesentlich, daß Y nur aus uniformisierbaren Punkten besteht (vgl. hierzu etwa das in [13], pp. 292–294 angegebene Beispiel einer eigentlichen wesentlichen Modifikation). Man kann alle holomorphen Abbildungen von n-dimensionalen komplexen Räumen ineinander, die in höchstens $(n-2)$-dimensionalen analytischen Mengen entartet sind, zur Konstruktion nicht-holomorph-konvexer Holomorphiegebiete benutzen.

Der Beweis von Satz III ist so angelegt, daß man überdies ein Kriterium für die Existenz nicht-uniformisierbarer Punkte in komplexen Räumen gewinnt:

IV. *Ein n-dimensionaler komplexer Raum X ist im Punkte $x \in X$ genau dann*

nicht-uniformisierbar, wenn es in keiner Umgebung $U(x)$ n holomorphe Funktionen gibt, deren Funktionalmatrix außerhalb einer in $U(x)$ analytischen, höchstens $(n-2)$-dimensionalen Menge vom Maximalrang ist.

Anwendungen dieses Kriteriums zum Nachweis, daß $x \in X$ ein nicht-uniformisierbarer bzw. uniformisierbarer Punkt ist, sind möglich.

§ 1. Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen

1. Wir werden in dieser Arbeit einige Resultate aus der Theorie der plurisubharmonischen Funktionen in komplexen Räumen benutzen. Es sei zunächst an den Begriff des komplexen Raumes erinnert. Zur genauen Definition vgl. [16]: *Unter einem komplexen Raum X wird ein Hausdorffscher Raum verstanden, der mit einer komplex-analytischen Struktur versehen ist. Eine komplex-analytische Struktur ist ein maximales System von komplexen Karten (U, ψ) in X, die untereinander holomorph verträglich sind.* Komplexe Räume haben also folgende charakteristische Eigenschaft: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U, die sich umkehrbar holomorph auf eine endlich-blättrige analytisch-verzweigte Überlagerung[3]) $\mathfrak{R} = (R, \Phi, G)$ eines Gebietes G des C^n abbilden läßt.

Man kennt in der Theorie der komplexen Räume die Begriffe: holomorphe Funktion, holomorphe Abbildung von komplexen Räumen ineinander, analytische Menge usw. Der Begriff der plurisubharmonischen Funktion in einem komplexen Raum ist von den Verfassern in einer früheren Arbeit eingeführt worden [14]. Es wurde definiert:

Definition 1. *Eine Funktion $p(x)$ in einem komplexen Raum X heißt plurisubharmonisch in X, wenn folgendes gilt:*

α) *Die Werte von $p(x)$ sind reelle Zahlen oder $-\infty$,*

β) *$p(x)$ ist in X halbstetig nach oben:* $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}}\, p(x) \leqslant p(x_0)$,

γ) *Ist τ eine holomorphe Abbildung eines Gebietes W der komplexen Zahlenebene in X, so ist $p \circ \tau$ eine subharmonische Funktion in W* [4]).

2. Es sei $P = \{p_\iota(x), \iota \in J\}$ eine Familie von in einem komplexen Raum X reellwertigen, nach oben halbstetigen Funktionen ($-\infty$ sei als Wert zugelassen),

---

[3]) Zum Begriff der analytisch-verzweigten Überlagerung vgl. auch [13], [15], [16].

[4]) Im komplexen Zahlenraum wurde der Begriff der plurisubharmonischen Funktion von P. Lelong und K. Oka eingeführt. Grundlegende Sätze sowie weitere Literaturhinweise finden sich in [19]. Zur subharmonischen Funktion vgl. [5].

die auf jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig nach oben beschränkt sind. Unter der oberen Einhüllenden $\hat{P}(x)$ der Menge P versteht man die kleinste, nach oben halbstetige Funktion, für die gilt: $\hat{P}(x) \geqslant p_\iota(x)$ für $x \in X$, $\iota \in J$. – Plurisubharmonische Funktionen haben folgende Eigenschaft:

a) *Ist* $P = \{p_\iota(x), \iota \in J\}$ *eine Familie von in einem komplexen Raum* X *plurisubharmonischen Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge von* X *gleichmäßig nach oben beschränkt sind, so ist die obere Einhüllende* $\hat{P}(x)$ *eine in* X *plurisubharmonische Funktion.*[4a])

Offenbar ist die Grenzfunktion einer absteigenden Folge nach oben halbstetiger Funktionen wieder nach oben halbstetig. Für plurisubharmonische Funktionen gilt sogar:

b) *Die Grenzfunktion einer absteigenden Folge von plurisubharmonischen Funktionen ist eine plurisubharmonische Funktion.*

Wie die subharmonischen Funktionen genügen auch die plurisubharmonischen Funktionen dem Maximumprinzip:

c) *Jede plurisubharmonische Funktion, die im zusammenhängenden komplexen Raum* X *ihr Maximum annimmt, ist konstant.*

Wir werden weiter den folgenden, wohl zuerst von OKA (vgl. [23], p. 123) bewiesenen Satz über subharmonische Funktionen benutzen:

d) *Ist* $s(z)$ *eine subharmonische Funktion in einem Gebiet* W *der Zahlenebene und* $\{z(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *ein Weg in* W, *so gilt:* $\overline{\lim\limits_{t \to 1}}\, s(z(t)) = s(z(1))$.

3. Für plurisubharmonische Funktionen gelten zwei Fortsetzungssätze, deren Analoga für holomorphe Funktionen hinreichend bekannt sind. Um diese Sätze im Allgemeinfall formulieren zu können, führen wir den Begriff der dünnen Menge ein (vgl. auch [14]):

Definition 2. *Eine abgeschlossene Teilmenge* D *eines* n*-dimensionalen komplexen Raumes* X *heißt dünn von der Ordnung* k, *wenn es zu jedem Punkt* $x \in X$ *eine Umgebung* $U(x)$ *und eine in* $U(x)$ *analytische, höchstens* $(n-k)$*-dimensionale Menge* M *gibt, so daß gilt:* $U \cap D \subset M$.

In [14] wurde bewiesen:

Satz 1. *Ist* D *eine dünne Menge der Ordnung* 1 *in einem komplexen Raum* X *und ist* $p(x)$ *eine in* $X - D$ *plurisubharmonische Funktion, die in einer Umgebung eines jeden Punktes* $x \in D$ *nach oben beschränkt ist, so existiert genau eine*

[4a]) Der Beweis ergibt sich aus [19] und [14], Satz 3. Die Aussage ist nicht, wie in [14] angenommen, trivial!

plurisubharmonische Fortsetzung $\breve{p}(x)$ *von* $p(x)$ *in ganz* X. *Die Funktion* $\breve{p}(x)$ *ist in den Punkten* $x' \in D$ *wie folgt definiert:* $\breve{p}(x') = \overline{\lim\limits_{x \to x', x \in X - D}} p(x)$.

Satz 2. *Ist* D *eine dünne Menge der Ordnung* 2 *in einem komplexen Raum* X, *so ist jede in* $X - D$ *plurisubharmonische Funktion eindeutig zu einer in ganz* X *plurisubharmonischen Funktion fortsetzbar.*

§2. Pseudokonvexe RIEMANNsche Gebiete und plurisubharmonische Funktionen

1. Es werden in diesem Paragraphen komplexe Räume untersucht, die in bestimmter Weise dem C^n überlagert sind. Man nennt diese Räume in Analogie zu den RIEMANNschen Flächen auch RIEMANNsche Gebiete.

Definition 3. *Ein Paar* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *heißt ein RIEMANNsches Gebiet über dem* C^n, *wenn*

1. G *ein HAUSDORFFscher Raum und* Φ *eine offene, stetige Abbildung von* G *in den* C^n *ist,*

2. *es zu jedem Punkt* $x \in G$ *eine Umgebung* $U(x)$ *gibt, derart, daß*

$$\mathfrak{A} = (U, \Phi, \Phi(U))$$

eine analytisch-verzweigte, endlich-blättrige Überlagerung[5]) *von* $\Phi(U)$ *ist.*

G ist in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen, so daß Φ eine holomorphe Abbildung ist. Wir nennen $\mathfrak{G}$ *unverzweigt*, wenn Φ lokal-topologisch abbildet. Für unsere weiteren Überlegungen benötigen wir den Begriff des (erreichbaren) Randpunktes eines RIEMANNschen Gebietes (vgl. auch [11]).

Definition 4. *Ein (erreichbarer) Randpunkt eines RIEMANNschen Gebietes* $\mathfrak{G}$ *ist ein Filter*[6]) r *von offenen, zusammenhängenden Mengen* $U \subset G$ *mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Der Filter der Mengen* $\Phi(U)$, $U \in r$, *konvergiert gegen einen Punkt* $\mathfrak{z}_0 \in C^n$.

2. *Ist* V *eine Umgebung von* $\mathfrak{z}_0$, *so enthält* r *genau eine zusammenhängende Komponente von* $\Phi^{-1}(V)$.

3. *Der Filter* r *hat keinen Häufungspunkt in* G.

Die Menge aller (erreichbaren) Randpunkte von $\mathfrak{G}$ *heißt der Rand* ∂G *von* $\mathfrak{G}$.

---

[5]) Zum Begriff der analytisch-verzweigten Überlagerung vgl. auch [13], [15], [16].

[6]) Unter einem Filter F über einer Menge M verstehen wir ein nichtleeres System nichtleerer Teilmengen von M, derart, daß zu zwei Elementen M_1, M_2 aus F stets eine Menge N aus F existiert, für die gilt: $N \subset M_1 \cap M_2$.

Ist $\mathfrak{G} = (G, \iota)$, wo G ein Gebiet des C^n und ι die Injektion bezeichnet, so nennt man bisweilen jeden Punkt $\mathfrak{z} \in C^n - G$, der Häufungspunkt von G ist, einen Randpunkt von G. Diese Definition ist im allgemeinen nicht mit Definition 4 äquivalent. Wird jedoch G von einer stückweise glatten $(2n-1)$-dimensionalen Fläche berandet (zum Beispiel Hyperkugel oder Polyzylinder), so können offenbar alle Randpunkte von G im Sinne der Definition 4 in eindeutiger Weise durch konkrete Randpunkte – nämlich jeweils durch den Limes des Bildfilters bezüglich ι – repräsentiert werden.

Die Abbildung Φ wird durch die Festsetzung $\breve{\Phi}(r) = \mathfrak{z}_0$, $\breve{\Phi}(x) = \Phi(x)$, $r \in \partial G$, $x \in G$, zu einer Abbildung $\breve{\Phi}$ von $\breve{G} = G + \partial G$ in den C^n fortgesetzt [7]). Wir führen in $\breve{G}$ eine Topologie ein, indem wir den Randpunkten $r_0 \in \partial G$ Umgebungen zuordnen. Es sei etwa U_0 eine beliebige Menge aus r_0. Unter einer Umgebung $V(r_0)$ verstehen wir die Vereinigung von U_0 mit den Filtern $r \in \partial G$, die wenigstens eine Menge $U \subset U_0$ enthalten.

Offenbar wird $\breve{G}$ durch diese Topologie zu einem HAUSDORFFschen Raum gemacht. $\breve{\Phi}$ ist eine stetige Abbildung von $\breve{G}$ in den C^n.

Ist B irgendein Teilbereich von G, so ist $\mathfrak{B} = (B, \Phi)$ wieder ein RIEMANNsches Gebiet über dem C^n. $\breve{B}$ kann im allgemeinen nicht als Teilmenge von $\breve{G}$ aufgefaßt werden. Jedoch läßt sich die Injektion $\iota : B \to G$ in natürlicher Weise zu einer stetigen Abbildung $\breve{\iota}$ von $\breve{B}$ in $\breve{G}$ fortsetzen. Die Abbildung $\Phi \cdot \breve{\iota}$ ist gleich der stetigen Fortsetzung der auf B beschränkten Abbildung Φ in $\breve{B}$.

Wir merken noch an:

Zu jedem Punkt $r \in \partial G$ gibt es eine Kurve $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $x(1) = r$, in $\breve{G}$, die für $0 \leqslant t < 1$ in G verläuft.

Um ein späteres Hauptresultat bequem formulieren zu können, definieren wir noch:

Definition 5. *Ein Randpunkt $r \in \partial G$ heißt ein hebbarer Randpunkt von $\mathfrak{G}$, wenn es eine Umgebung $U(r) \subset \breve{G}$ gibt, so daß $\mathfrak{G}_1 = (U, \breve{\Phi})$ ein schlichtes RIEMANNsches Gebiet ist, in dem $U \cap \partial G$ eine dünne Menge 1. Ordnung ist.*

Randpunkte, die den Bedingungen dieser Definition nicht genügen, heißen *nicht-hebbare Randpunkte.* – Der Begriff des hebbaren Randpunktes ist hier sehr eingeschränkt, damit die Menge der nicht-hebbaren Randpunkte möglichst groß wird. Das ist für die Anwendungen unseres Hauptsatzes (Satz 4) von Bedeutung.

---

[7]) Man beachte, daß für Gebiete G im C^n die abgeschlossene Hülle $\overline{G}$ von G im allgemeinen nicht mit $\breve{G}$ übereinstimmt.

Offenbar ist die Menge der nicht-hebbaren Randpunkte eines RIEMANNschen Gebietes stets *abgeschlossen.*

Der Rand ∂G eines RIEMANNschen Gebietes $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ist in einer Umgebung jedes hebbaren Randpunktes höchstens $(2n - 2)$-dimensional (im Sinne von K. Menger [21]), da ∂G dort Teilmenge einer analytischen Menge ist, deren reelle Dimension höchstens $2n - 2$ ist. Ist der Rand ∂G in allen Punkten $(2n - 1)$-dimensional, so besteht er also aus lauter nichthebbaren Randpunkten. Wir definieren noch:

Definition 6. *Eine abgeschlossene Menge $D \subset \partial G$ heißt eine dünne Menge, wenn es zu jedem Punkt $r_0 \in D$ eine Umgebung $U(r_0)$ und eine in $U \cap G$ holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion f gibt, so daß zu jedem Punkt $r \in D \cap U$ eine gegen r konvergierende Folge $x_\nu \in U \cap G$ existiert, für die gilt:* $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = 0$.

2. Der Begriff der Pseudokonvexität kann in RIEMANNschen Gebieten auf mannigfache Weise eingeführt werden. Wir ziehen zur Definition spezielle Scharen analytischer Mengen heran.

Definition 7. *Unter einer Schar von k-dimensionalen analytischen Mengen in einem RIEMANNschen Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ wird eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ der k-dimensionalen Einheitshyperkugel*

$$K: \{|\mathfrak{w}| = (w_1 \overline{w}_1 + \cdots + w_k \overline{w}_k)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1\}$$

des C^k in $\breve{G}$ verstanden, die noch stetig von einem reellen Parameter t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, abhängt.

Dabei sagen wir, $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$, $t = t_0$, bildet K holomorph in $\breve{G}$ ab, wenn die Abbildung $\breve{\Phi} \circ \sigma^{(k)} : K \to C^n$ in (einer Umgebung von) K holomorph ist.

Eine Schar von analytischen Mengen $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ in $\mathfrak{G}$ heißt ausgezeichnet, wenn $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ für $\mathfrak{w} \in K$, $0 \leqslant t < 1$ und für $\mathfrak{w} \in \partial K$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, in G liegt.

Wir merken sofort an: *Es sei $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ für $0 \leqslant t < 1$ eine Schar von k-dimensionalen analytischen Mengen in G; $\breve{\Phi} \circ \sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ sei stetig fortsetzbar in $t = 1$. Dann gibt es für $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Schar $\breve{\sigma}^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ von k-dimensionalen analytischen Mengen in $\breve{G}$, die für $0 \leqslant t < 1$ mit der Schar $\sigma^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ übereinstimmt.* – Der Beweis ist trivial. Es werde nun definiert:

Definition 8. *Ein RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n heißt pseudokonvex, wenn für jede ausgezeichnete Schar $\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, t)$ von 1-dimensionalen analytischen Mengen in $\mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\{\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, 1)\} \cap \partial G$* leer ist[8]).

---

[8]) Diesem Pseudokonvexitätsbegriff lassen sich sofort schwächere Pseudokonvexitätsbegriffe an die Seite stellen. So kann man etwa ein Riemannsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n pseudokonvex vom Grade q nennen (q-pseudokonvex) $(1 \leq q \leq n - 1)$, wenn für jede aus-

Es bezeichne $\sigma_\varepsilon^{(k)}(\mathfrak{w}, t)$ eine Schar k-dimensionaler analytischer Mengen in $\mathfrak{G}$, bei der die Menge $\{\breve{\Phi} \circ \sigma_\varepsilon^{(k)}(\mathfrak{w}, t)\}$ in einer Hyperkugel vom Radius ε enthalten ist. *Wir nennen $\mathfrak{G}$ pseudokonvex in einem Punkte $r \in \partial G$, wenn es zu r eine Umgebung $U(r)$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß keine ausgezeichnete Schar $\sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, t)$ eindimensionaler analytischer Mengen in $\mathfrak{G}$ mit $U \cap \partial G$ einen Punkt gemeinsam hat.* – Ein Satz von K. OKA besagt [25]:

Satz A. *Ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n ist genau dann pseudokonvex, wenn $-\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ eine in G plurisubharmonische Funktion ist.*

Dabei bezeichnet $\delta_{\mathfrak{G}}(x)$ den euklidischen Abstand des Punktes $x \in G$ zum Rande ∂G. Es gilt ferner, [11]:

Satz B. *Ist $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n, so ist $-\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ genau dann in G plurisubharmonisch, wenn $-\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ in hinreichender Nähe jedes Randpunktes $r \in \partial G$ plurisubharmonisch ist.*

Auf ähnliche Weise wie Satz A zeigt man:

Satz C. *Ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ist genau dann pseudokonvex in einem Randpunkt $r \in \partial G$, wenn $-\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ in einer Umgebung $U(r) \cap G$ plurisubharmonisch ist.*

Unter Verwendung von Satz A und Satz B folgt sofort:

Ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G}$ ist genau dann pseudokonvex schlechthin, wenn es in jedem Randpunkt pseudokonvex ist. Das letztere ist sicher dann der Fall, wenn es zu jedem Punkt $r \in \partial G$ eine Umgebung $U(r)$ gibt, so daß $(U(r) \cap G, \Phi)$ ein pseudokonvexes RIEMANNsches Gebiet ist.

3. Wir entwickeln nun ein Verfahren, das es gestattet, pseudokonvexe Gebiete durch ebensolche auszuschöpfen. Zunächst gilt:

Satz D. *Es sei $p(x)$ eine plurisubharmonische Funktion in einem RIEMANNschen Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n; B sei der Bereich $\{x \in G, p(x) < M\}$. Das RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{B} = (B, \Phi)$ ist dann in allen Randpunkten r^* pseudokonvex, die über einem inneren Punkt von G liegen.*

Beweis: Wäre ∂B in r^* nicht pseudokonvex, so gäbe es zu jeder Umgebung $U(r^*)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ausgezeichnete Schar $\sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, t)$ von 1-dimensionalen analytischen Mengen in $\mathfrak{B}$, so daß $\sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, 1) \cap \partial B \cap U$ nicht leer ist. Sind

gezeichnete Schar $\sigma^{(q)}(\mathfrak{w}, t)$ von q-dimensionalen analytischen Mengen in $\mathfrak{G}$ der Durchschnitt $\{\sigma^{(q)}(\mathfrak{w}, 1)\} \cap \partial G$ leer ist. Ist $\mathfrak{G}$ pseudokonvex vom Grade q, so erst recht vom Grade $q' > q$. Es sei darauf hingewiesen, daß neuerdings W. ROTHSTEIN bei der Untersuchung von Fortsetzungsproblemen analytischer Mengen ebenfalls einen q-Konvexitätsbegriff eingeführt hat (vgl. [31], p. 130); diese ROTHSTEINsche q-Konvexität steht in Beziehung zu der hier definierten $(n-q)$-Pseudokonvexität.

$U(r)$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt, so ist die Menge

$$\{\breve{\iota} \circ \sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, t),\ \mathfrak{w} \in K,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

in G enthalten, da r^* nach Voraussetzung über einem inneren Punkt von G liegen soll. Die Funktion $q(\mathfrak{w}) = p \circ \breve{\iota} \circ \sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, 1)$ ist dann subharmonisch im Einheitskreis K. Es gilt auf ∂K: $q(\mathfrak{w}) < M$; in den Punkten

$$\mathfrak{w} \in K \quad \text{mit} \quad \sigma_\varepsilon^{(1)}(\mathfrak{w}, 1) \in \partial B$$

aber hat man $q(\mathfrak{w}) = M$. Da ferner $q(\mathfrak{w}) \leqslant M$ in ganz K ist, haben wir einen Widerspruch zum Maximumprinzip für subharmonische Funktionen gewonnen. Damit ist Satz D bewiesen.

Es ergibt sich nun sofort aus Satz A und Satz D:

Satz D′. *Ist* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *ein unverzweigtes pseudokonvexes* RIEMANNsches *Gebiet über dem* C^n, *so ist* $\mathfrak{G}_K = (G_K, \Phi)$, $G_K = \{x \in G,\ \delta(x) > K\}$, $K > 0$, *eine Schar von pseudokonvexen* RIEMANNschen *Gebieten, die* G *ausschöpft, wenn* K *gegen* 0 *strebt.*

Dieser Satz ist in folgendem Sinne umkehrbar:

Satz D″. *Es sei* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *ein* RIEMANNsches *Gebiet über dem* C^n; *es sei* G_ν, $G_{\nu+1} \supset G_\nu$, *eine Ausschöpfungsfolge von* G, *in der jedes Gebiet* $\mathfrak{G}_\nu = (G_\nu, \Phi)$ *pseudokonvex ist. Dann ist auch* $\mathfrak{G}$ *pseudokonvex.*

Beweis: Angenommen, $\mathfrak{G}$ wäre nicht pseudokonvex. Dann gibt es in $\mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Schar $S = \{\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, t)\}$ von eindimensionalen analytischen Mengen, bei der $S \cap \partial G$ nicht leer ist. Da

$$N = \{\sigma^{(1)}(e^{i\vartheta}, t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad -\pi \leqslant \vartheta \leqslant +\pi\} \cup \{\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, 0)\}$$

eine kompakte Teilmenge von G ist, folgt, daß für ein ν_0 gilt: $N \subset G_{\nu_0}$. Man kann nun ein größtes t_1 finden, so daß für $0 \leqslant t < t_1$, $\mathfrak{w} \in K$, die Punkte $\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, t)$ aus G_{ν_0} sind. Die Schar $\{\sigma^{(1)}(\mathfrak{w}, t), 0 \leqslant t < t_1\}$ läßt sich zu einer in $\mathfrak{G}_{\nu_0}$ ausgezeichneten Schar $\breve{S} = \{\breve{\sigma}^{(1)}(\mathfrak{w}, t), 0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ fortsetzen. Offenbar ist $\breve{S} \cap \partial G_{\nu_0}$ nicht leer. Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}_{\nu_0}$ pseudokonvex ist.

4. Der Begriff der Pseudokonvexität ist entscheidend für die Charakterisierung der Holomorphiegebiete über dem C^n. Zur Definition dieser speziellen RIEMANNschen Gebiete ist es zweckmäßig, die folgenden Redeweisen zu verwenden:

Ein RIEMANNsches *Gebiet* $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ *ist in einem umfassenden* RIEMANNschen *Gebiet* $\tilde{\mathfrak{G}} = (\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ *enthalten, wenn es eine spurpunkttreue, stetige Abbil-*

dung τ von G in $\tilde{G}$ gibt. Eine in $\tilde{G}$ holomorphe Funktion $\tilde{f}$ ist eine holomorphe Fortsetzung einer in G holomorphen Funktion f, wenn $f \equiv \tilde{f} \circ \tau$ ist.

Ein RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G}$ heißt nun ein *Holomorphiegebiet*, wenn es eine in $\mathfrak{G}$ holomorphe Funktion f gibt, die sich in kein $\mathfrak{G}$ umfassendes Gebiet $\breve{\mathfrak{G}} \neq \mathfrak{G}$ holomorph fortsetzen läßt. Zur Charakterisierung dieser Holomorphiegebiete hat K. OKA den folgenden fundamentalen Satz bewiesen [25]:

Satz E. *Ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ist genau dann ein Holomorphiegebiet, wenn $\mathfrak{G}$ pseudokonvex ist* [9]).

Dieser Satz gibt eine weitere Möglichkeit, die Pseudokonvexität zu definieren. Es folgt nämlich unter Verwendung von Satz E:

Satz F. *Ein unverzweigtes Riemannsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ist genau dann pseudokonvex, wenn es zu jedem Randpunkt $r \in \partial G$ eine Umgebung $U(r)$ gibt, so daß $(U(r) \cap G, \Phi)$ ein Holomorphiegebiet ist.*

Diese Eigenschaft wurde von H. CARTAN zur Definition der Pseudokonvexität verwendet (vgl. [7]).

Bereits H. CARTAN und P. THULLEN haben den Begriff der Holomorphiekonvexität eingeführt [9]. Wir definieren zunächst den Begriff der holomorphkonvexen Hülle $\hat{K}$ einer Teilmenge $K \subset G$. $\hat{K}$ ist die Menge aller Punkte $x \in G$, für die gilt: $|f(x)| \leqslant \sup |f(K)|$, wobei f alle in G holomorphen Funktionen durchläuft.

Ein RIEMANNsches Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n heißt holomorphkonvex, wenn die holomorphkonvexe Hülle $\hat{K}$ jeder relativ-kompakten Menge $K \subset G$ kompakt ist. – Ein grundlegender Satz ist [25]:

Satz G. *Jedes unverzweigte Holomorphiegebiet ist holomorphkonvex.*

Wir werden später in einem Beispiel zeigen, daß die Aussage von Satz G für verzweigte RIEMANNsche Gebiete falsch ist. Es gibt (sogar zweiblättrige) Holomorphiegebiete, die nicht holomorphkonvex sind. *Jedoch ist jedes holomorphkonvexe RIEMANNsche Gebiet ein Holomorphiegebiet* ([2] sowie [10]).

Ein bekannter Satz über die holomorphkonvexen Gebiete läßt sich unter Verwendung von Definition 7 wie folgt formulieren: *Jedes holomorphkonvexe RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ über dem C^n besitzt einen dünnen Rand.*

In der Tat! Nach H. CARTAN und P. THULLEN [9] gibt es eine in G holomorphe, nicht identisch verschwindende Funktion f, deren Nullstellen sich

---

[9]) Aus Satz E und Satz D″ ergibt sich sofort ein bekannter Satz von H. BEHNKE und K. STEIN über konvergente Folgen von Holomorphiegebieten: *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n, es sei G_ν, $G_{\nu+1} \supset G_\nu$, eine Ausschöpfungsfolge von G, derart, daß jeweils $\mathfrak{G}_\nu = (G_\nu, \Phi)$ ein Holomorphiegebiet ist. Dann ist auch $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein Holomorphiegebiet.* Vgl. hierzu H. BEHNKE und K. STEIN, Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität, Math. Ann. 116, 204–216 (1939).

gegen jeden Randpunkt von $\mathfrak{G}$ häufen. Es gibt dann zu jedem Randpunkt $r \in \partial G$ eine gegen r konvergierende Folge von Punkten $x_\nu \in G$, derart, daß $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = f(x_\nu) = 0$ ist.

5. In Anlehnung an eine klassische Definition von F. HARTOGS [17] führen wir in unverzweigten RIEMANNschen Gebieten den Begriff der euklidischen Distanzfunktion bezüglich einer beliebig vorgegebenen komplexen Richtung ein. Es sei etwa E^k eine k-dimensionale analytische Ebene im C^n, $1 \leqslant k \leqslant n$. Durch jeden Punkt $\mathfrak{z} \in C^n$ gibt es dann genau eine k-dimensionale Ebene $E^k(\mathfrak{z})$, die zu E^k parallel ist. Ist nun $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n und ist $x \in G$ ein Punkt über $\mathfrak{z}$, so gibt es in $\Phi^{-1}(E^k(\mathfrak{z}))$ eine größte k-dimensionale Hyperkugel $H(x, E^k)$ um x. Ihr Radius sei mit $\delta(x, E^k)$ bezeichnet. Offenbar ist $\delta(x, E^k)$ eine nach unten halbstetige Funktion in G. Es gilt $\delta(x, E^n) = \delta_{\mathfrak{G}}(x)$, wenn E^n der ganze n-dimensionale komplexe Zahlenraum ist.

Definition 9. *Die Funktion $\delta(x, E^k)$ heißt die euklidische Distanzfunktion bezüglich E^k in G.*

Ist $\mathfrak{G}$ das Existenzgebiet der holomorphen Funktion $f(x)$, so nennen wir $\delta(x, E^k)$ auch den *Holomorphieradius* von $f(x)$ in x bezüglich E^k. Es gilt nun der folgende

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n. Ist dann $\mathfrak{G}$ in allen Punkten von $\partial G - M$, $M = \breve{\Phi}^{-1}(E^k(\mathfrak{z}_0))$, $\mathfrak{z}_0 \in C^n$, pseudokonvex, so ist $-\ln \delta(x, E^k)$ stets eine in $G - M$ plurisubharmonische Funktion.*

Beweis: Es sei $E = \{E^1\}$ die Menge der eindimensionalen analytischen Ebenen, die in E^k enthalten sind. Offenbar ist

$$\delta(x, E^k) = \inf_{E^1 \in E} \delta(x, E^1) \ .$$

Nun ist bekannt [5], daß alle Funktionen $-\ln \delta(x, E^1)$ unter unseren Voraussetzungen in $G - M$ plurisubharmonisch sind. Folglich ist $-\ln \delta(x, E^k)$ obere Einhüllende der plurisubharmonischen Funktionen $-\ln \delta(x, E^1)$, $E^1 \in E$, und somit nach § 1.2) in $G - M$ wieder selbst plurisubharmonisch, w. z. b. w.

Anmerkung. Es sei betont, daß die Umkehrung von Satz 3 nicht richtig ist. Es gibt zum Beispiel schlichte HARTOGSsche Gebiete

$$\{\mathfrak{z} \in C^n, (z_2, \ldots, z_n) \in G \subset C^{n-1}, |z_1| < R(z_2, \ldots, z_n)\} \ , \quad n \geqslant 3 \ ,$$

die nicht pseudokonvex sind, obgleich

$$-\ln \delta(\mathfrak{z}, E^1) = -\ln (R(z_2, \ldots, z_n) - |z_1|) ,$$
$$E^1 = \{\mathfrak{z}, z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0\} ,$$

eine plurisubharmonische Funktion ist. Man braucht für G nur ein Nichtholomorphiegebiet zu wählen.

§ 3. Verallgemeinerung eines Satzes von K. OKA.

1. Wir wollen im folgenden zeigen, daß RIEMANNsche Gebiete oft dann schon pseudokonvex sind, wenn sie es nur in genügend vielen Randpunkten sind. Als Hauptresultat dieses Paragraphen werden wir erhalten:

Satz 4. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n; $A \subset \partial G$ sei eine dünne Menge von nicht-hebbaren Randpunkten. Ist dann $\mathfrak{G}$ pseudokonvex in allen Punkten aus $\partial G - A$, so ist $\mathfrak{G}$ pseudokonvex schlechthin.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, seien einige interessante Folgerungen gezogen. In Verbindung mit Satz E ergibt sich sofort:

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n; $A \subset \partial G$ sei eine dünne Menge von nicht-hebbaren Randpunkten. Gibt es dann zu jedem Punkt $r \in \partial G - A$ eine Umgebung $U(r) \subset \breve{G}$, so daß $(U(r) \cap G, \Phi)$ ein Holomorphiegebiet ist, so ist $\mathfrak{G}$ selbst ein Holomorphiegebiet.*

Für wahr! Da $(U \cap G, \Phi)$ nach Satz E pseudokonvex ist, ist $\mathfrak{G}$ in jedem Randpunkt $r \in \partial G - A$ pseudokonvex und damit pseudokonvex schlechthin. Daraus folgt nach K. OKA (Satz E), daß $\mathfrak{G}$ ein Holomorphiegebiet ist, w. z. b. w.

Die Bedingung, daß A aus lauter nicht-hebbaren Randpunkten besteht, ist wesentlich, wenn ∂G Bestandteile von kleinerer reeller Dimension als $2n - 1$ enthält. Ist etwa G^* ein Holomorphiegebiet des $z_1, \ldots, z_n$-Raumes und ist der Nullpunkt O ein Punkt von G^*, so ist auch $G^* - M$, $M = \{z_1 = 0\}$, ein Holomorphiegebiet. Sicherlich ist aber – wie man aus Definition 8 entnimmt – $G = G^* - M \cup K$ nicht pseudokonvex, wenn $K \subset\subset M \cap G^*$ eine (komplex) $(n-1)$-dimensionale Kugel um O bezeichnet. Also ist G kein Holomorphiegebiet, obgleich $A = \partial G \cap M$ dünn und G in $\partial G - A$ pseudokonvex ist.

Offenbar ist jede diskrete Menge $A \subset \partial G$ eine dünne Randpunktmenge. Dieselbe besitzt aber im allgemeinen hebbare Randpunkte, auch wenn alle Punkte aus A nicht isoliert in ∂G liegen. Dennoch ergibt sich aus Satz 5 der bereits im Spezialfall in [13], p. 287, angegebene

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n. Es sei A eine diskrete Menge von nichtisolierten Randpunkten. Ist dann $\mathfrak{G}$ pseudokonvex in jedem Punkt $r \in \partial G - A$, so ist $\mathfrak{G}$ ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: Wenn man zeigt, daß $\mathfrak{G}$ in allen hebbaren Randpunkten von A pseudokonvex ist, so ergibt sich die Behauptung direkt aus Satz 5. Sei also $r_0 \in A$ ein hebbarer Randpunkt. Es gibt dann eine Umgebung $U(r_0) \subset \breve{G}$, derart, daß $(U, \breve{\Phi})$ ein schlichtes RIEMANNsches Gebiet ist. Hat man U hinreichend klein gewählt, so enthält U keine weiteren Punkte von A, und es gibt eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge M in U, die $\partial G \cap U$ enthält. M kann man wieder so klein machen, daß für jede irreduzible Komponente $M_i \subset M$, $i \in I$, die Menge $(M_i - \bigcup_{j \in I, j \neq i} M_j) \cap \partial G$ nicht leer ist. Man braucht dazu nur alle überflüssigen irreduziblen Komponenten aus M fortzulassen. Da ferner nach Voraussetzung r_0 nicht isoliert in ∂G liegt, ist auch

$$\mathring{M}_i \cap \partial G \quad \text{mit} \quad \mathring{M}_i = (M_i - \bigcup_{j \neq i} M_j - r_0)\,, \quad i \in I\,,$$

nicht leer. Nun ist – ebenfalls nach Voraussetzung – das RIEMANNsche Gebiet $(\mathring{U}_i = U_i \cap G, \Phi)$, wo $U_i = U - \bigcup_{j \neq i} M_j - r_0$, $i \in I$ in allen Punkten von $U_i \cap \partial G \subset \mathring{M}_i \cap U_i$ pseudokonvex. U_i kann als ein schlichtes Gebiet des C^n aufgefaßt werden, das $\mathring{M}_i$ als irreduzible analytische Menge enthält. Daher folgt nach bekannten Sätzen[10]), daß $\mathring{U}_i = U_i - \mathring{M}_i$, das heißt $U_i \cap \partial G = \mathring{M}_i$ ist. Dann gilt aber auch, weil $\mathring{M}_i$ dicht in M_i liegt, $M_i \subset \partial G \cap U$ und somit $M = \partial G \cap U$. Ein Rand, der eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge ist, ist aber in allen Punkten pseudokonvex[10]). Also ist a fortiori $\mathfrak{G}$ in r_0 pseudokonvex, q. e. d.

2. Eine weitere Folgerung aus Satz 4 ist:

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n; $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = (\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ sei die unverzweigte Holomorphiehülle*[11]) *von $\mathfrak{G}$. Es bezeichne τ die spurpunkttreue holomorphe Abbildung von G in $\tilde{G}$. Ist dann $\tilde{M}$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in $\tilde{G}$ und bezeichnet M die in G analytische Menge $\tau^{-1}(\tilde{M})$, so ist auch $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ ein Holomorphiegebiet, und*

---

[10]) Es gilt bekanntlich folgender Satz: *Es sei G ein Gebiet im C^n und M eine in G irreduzible $(n-1)$-dimensionale analytische Menge; es sei D eine nichtleere Teilmenge von M. Dann ist $G - D$ genau dann pseudokonvex in allen Randpunkten $r \in D$, wenn gilt $D = M$.* Ein Beweis ergibt sich leicht aus Satz 19 in [5], p. 51.

[11]) Ist $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ irgendein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet, so kann man den Durchschnitt $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ aller $\mathfrak{G}$ umfassenden Holomorphiegebiete definieren, vgl. [5], p. 70. $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ ist ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet, welches $\mathfrak{G}$ enthält; man nennt $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ die *Holomorphiehülle* von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ endlich-blättrig, so folgt aus Untersuchungen von P. THULLEN [32], daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ ein Holomorphiegebiet ist. $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ ist sogar stets ein Holomorphiegebiet, wie sich aus den Resultaten von K. OKA [25] ergibt.

es gilt:

$$\mathfrak{H}(G - M, \Phi) = (\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})^{12)} .$$

Beweis: a) Wir zeigen zunächst, daß $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ ein Holomorphiegebiet ist. Da $(\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ als Holomorphiehülle ein Holomorphiegebiet ist, folgt aus Satz E, daß $(\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ ein pseudokonvexes RIEMANNsches Gebiet ist. Daher kann eine ausgezeichnete Schar $\sigma^1(\mathfrak{w}, t)$ in $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ auf $\partial(\tilde{G} - \tilde{M})$ höchstens solche Punkte besitzen, die zu $\tilde{M}$ gehören. Trifft das aber zu, so ist die Schnittzahl von $\sigma^1(\mathfrak{w}, 1)$ mit $\tilde{M}$ von null verschieden[13]). Das gilt dann auch noch für die Schnittzahl von $\sigma^1(\mathfrak{w}, t_0)$, $0 \leqq t_0 < 1$ mit $\tilde{M}$. Da aber $\sigma^1(\mathfrak{w}, t)$ eine ausgezeichnete Schar in $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ ist, so ist $\sigma^1(\mathfrak{w}, t_0) \cap \tilde{M}$ leer. Widerspruch! Also ist auch $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ pseudokonvex und mithin nach Satz E ein Holomorphiegebiet, q. e. d.

b) Wir setzen nun $\mathfrak{H}(G - M, \Phi) = \mathfrak{G}' = (G', \Phi')$. Da $\mathfrak{G}'$ als Durchschnitt aller das RIEMANNsche Gebiet $(G - M, \Phi)$ umfassenden Holomorphiegebiete definiert ist und $(G - M, \Phi)$ in $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ enthalten ist, folgt aus dem unter a) Bewiesenen, daß $\mathfrak{G}'$ in $(\tilde{G} - \tilde{M}, \tilde{\Phi})$ enthalten ist. Es bezeichne etwa σ die spurpunkttreue holomorphe Abbildung von G' in $\tilde{G} - \tilde{M}$. Die Aussage von Satz 7 bedeutet offenbar, daß σ eine eineindeutige Abbildung von G' auf $\tilde{G} - \tilde{M}$ ist. Um das zu beweisen, adjungieren wir zu G' alle Randpunkte $r' \in \partial G'$, zu denen es eine schlichte Umgebung $U(r') \subset \breve{G}'$ gibt, so daß $\breve{\sigma}(U(r') \cap \partial G')$ in $\tilde{M}$ enthalten ist. Wir erhalten auf diese Weise eine Menge G^*; die Abbildung Φ' kann zu einer Abbildung Φ^* von G^* in den C^n fortgesetzt werden. Offenbar ist $\mathfrak{G}^* = (G^*, \Phi^*)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n; die Abbildung σ: $G' \to \tilde{G} - \tilde{M}$ läßt sich spurpunkttreu zu einer stetigen Abbildung σ^* von G^* in $\tilde{G}$ fortsetzen. Es gilt $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^* \subset \mathfrak{H}(\mathfrak{G})$.

Wäre σ keine eineindeutige Abbildung von G' auf $\tilde{G} - \tilde{M}$, so wäre $\mathfrak{G}^*$ echt

---

[12]) Für Gebiete im Raum zweier komplexen Veränderlichen wurden Aussagen von ähnlichem Typus bereits von W. ROTHSTEIN gewonnen; vgl. [30], p. 222.

[13]) Zum Begriff der Schnittzahl vgl. etwa [1], p. 410 ff. In einer orientierten Mannigfaltigkeit ist die Schnittzahl $S(F_1, F_2)$ zweier abgeschlossener orientierter Flächen F_1 und F_2 von komplementärer Dimension genau dann definiert, wenn gilt:

$$\partial F_1 \cap F_2 = F_1 \cap \partial F_2 = \text{leer} \qquad \text{(Schnittzahlbedingung).}$$

Ist die Fläche F_1 zu einer Fläche F_1' vermöge einer stetigen Schar $\{F'(t), 0 \leq t \leq 1\}$ von Flächen homotop und ist für alle Flächenpaare $F'(t)$, F_2 die Schnittzahlbedingung erfüllt, so gilt

$$S(F_1, F_2) = S(F_1', F_2) .$$

Nach OSGOOD [27], p. 320 ff. folgt, daß die Schnittzahl zweier analytischer Flächen in bezug auf die durch die komplex-analytische Struktur induzierte Orientierung stets positiv ist, sofern $F_1 \cap F_2$ nicht leer ist; vgl. auch [18], p. 79.

in $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ enthalten. Da $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ das kleinste $\mathfrak{G}$ umfassende Holomorphiegebiet ist, wäre alsdann $\mathfrak{G}^*$ kein Holomorphiegebiet und also auch nach Satz E nicht pseudokonvex. Unter Benutzung von Satz 4 sowie eines weiteren Satzes aus der komplexen Analysis läßt sich nun aber zeigen, daß $\mathfrak{G}^*$ pseudokonvex ist.

c) Wir betrachten in G^* die analytische Menge $M^* = \sigma^{*-1}(\tilde{M})$ und setzen: $A = \bar{M}^* \cap \partial G^*$. Offenbar ist $\mathfrak{G}^*$ in jedem Randpunkt, der nicht zu A gehört, pseudokonvex, da in der Nähe eines solchen Punktes der Rand von $\mathfrak{G}^*$ dieselbe Struktur wie der Rand des Holomorphiegebietes $\mathfrak{G}'$ hat. Um die Menge $A \subset \partial G^*$ näher charakterisieren zu können, ziehen wir die CARTANsche Idealtheorie heran. Aus einem tiefliegenden Satz dieser Idealtheorie ergibt sich, daß die im Holomorphiegebiet $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$ analytische Menge $\tilde{M}$ im Nullstellengebilde einer in $\tilde{G}$ holomorphen, nicht identisch verschwindenden Funktion $\tilde{f}$ enthalten ist[14]). Setzen wir $f^* = \tilde{f} \circ \sigma^*$, so ist M^* im Nullstellengebilde von f^* enthalten. Daraus folgt, daß A eine dünne Menge in ∂G^* ist.

Mit A_1 sei nun die Menge der hebbaren Randpunkte von $\partial G^* \cap A$ bezeichnet. Wir wollen beweisen, daß $\mathfrak{G}^*$ in jedem Punkt $r^* \in A_1$ pseudokonvex ist. Nach Definition 5 gibt es eine Umgebung $U = U(r^*) \subset \breve{G}^*$, so daß $(U, \breve{\Phi}^*)$ ein schlichtes RIEMANNsches Gebiet und $\partial G^* \cap U$ in einer in U rein $(n-1)$-dimensionalen analytischen Menge N enthalten ist. Die Menge N zerfällt, falls U hinreichend klein gewählt ist, in U in endlich viele irreduzible Komponenten N_σ, $\sigma = 1, \ldots, s$. Wir dürfen annehmen, daß N so beschaffen ist, daß

$$(N_\sigma - \bigcup_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \sigma}}^{s} N_\nu) \cap \partial G^*$$

für kein σ leer ist. Wir behaupten nun: $\partial G^* \cap U$ ist stets eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U. Daraus ergibt sich dann in Verbindung mit dem in Fußnote 10 zitierten Satz unmittelbar die Pseudokonvexität von $\mathfrak{G}^*$ in r^*.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) Der Punkt r^* liegt über einem inneren Punkt von $\tilde{G}$ (bezüglich der Abbildung σ^*).

β) Der Punkt r^* liegt über einem Randpunkt $\tilde{r} \in \partial \tilde{G}$ (bezüglich der Abbildung σ^*).

ad α): In diesem Falle läßt sich, falls U hinreichend klein gewählt ist, die in

[14]) Nach [25] sind unverzweigte Holomorphiegebiete sogenannte holomorph-vollständige komplexe Mannigfaltigkeiten (zu diesem Begriff vgl. etwa [10]). In solchen Mannigfaltigkeiten der Dimension n ist aber jede analytische Menge das simultane Nullstellengebilde von höchstens $(n+1)$ holomorphen Funktionen. Vgl. hierzu [8] sowie [11], Satz 1.

$U - \partial G^*$ analytische Menge $M^* \cap (U - \partial G^*)$ zu der in U analytischen Menge $M^{**} = \breve{\sigma}^{*-1}(\tilde{M}) \cap U$ fortsetzen. Die Menge $U - (\partial G^* \cup M^{**})$ ist eine offene Menge in G'; da $\partial G^* \cup M^{**}$ in U als Randpunktmenge von $\mathfrak{G}'$ aufgefaßt werden kann und $\mathfrak{G}'$ ein Holomorphiegebiet ist, so folgt, daß $U - (\partial G^* \cup M^{**})$ in allen Punkten von $\partial G^* \cup M^{**}$ pseudokonvex ist. Dann aber ergibt sich analog wie im Beweise von Satz 6, daß $U \cap (\partial G^* \cup M^{**})$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U ist. Da M^{**} selbst in U eine analytische, rein $(n-1)$-dimensionale Menge ist, folgt, daß $\partial G^* \cap U$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U ist.

ad β): In diesem Falle betrachten wir die Menge $U' = U \cap \sigma^{*-1}(\tilde{G})$. Diese Menge umfaßt $U - \partial G^*$ und ist in allen Randpunkten, die innere Punkte von U sind, pseudokonvex, da $\mathfrak{H}(\mathfrak{G}) = (\tilde{G}, \tilde{\Phi})$ ein Holomorphiegebiet ist. Es folgt weiter, daß $U - U'$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U ist. $\partial G^* \cap U$ umfaßt $U - U'$ und ist andererseits in der rein $(n-1)$-dimensionalen analytischen Menge N enthalten. Sei nun N_j eine irreduzible Komponente von N in U, die nicht in $U - U'$ enthalten ist. Nach Voraussetzung gibt es einen Randpunkt von $\mathfrak{G}^*$, der zu

$$N_j - \bigcup_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq j}}^{s} N_\nu$$

gehört. Dieser Punkt liegt aber notwendig über einem inneren Punkt von $\tilde{G}$. Da in α) gezeigt wurde, daß $\mathfrak{G}^*$ in allen diesen Punkten pseudokonvex ist, folgt[15]), daß $U \cap \partial G^*$ die Menge N_j umfaßt. Daher gilt $U \cap \partial G^* = N$, das heißt aber, daß $\partial G^* \cap U$ eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge in U ist.

Aus dem bisher bewiesenen ergibt sich, daß das RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{G}^* = (G^*, \Phi^*)$ in allen Randpunkten außer den Punkten der Menge $A - A_1$ pseudokonvex ist. Nun besteht aber $A - A_1$ nach Definition von A_1 aus lauter nicht-hebbaren Randpunkten. Da überdies $A - A_1$ als Teilmenge von A eine dünne Randpunktmenge ist, folgt aus Satz 4, daß $\mathfrak{G}^*$ pseudokonvex schlechthin ist. – Satz 7 ist bewiesen.

3. Dem Beweise von Satz 4 schicken wir einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein unverzweigtes RIEMANNsches Gebiet über dem C^n, das über einem Gebiet $G^* \subset C^n$ liegt (das heißt $\Phi(G) \subset G^*$); M^* sei eine rein k-dimensionale, in G^* singularitätenfrei liegende analytische Menge; ferner sei A eine Menge von nichthebbaren Randpunkten in ∂G mit*

$$\breve{\Phi}(A) \cap G^* \subset M^* .$$

[15]) Vgl. Fußnote 10.

Ist dann $r \in A$ ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, der über M^* liegt, und ist U eine Umgebung von r, so daß $\mathfrak{G}$ in allen Punkten von $(\partial G \cap U) - A$ pseudokonvex ist, so ist auch ∂G in r pseudokonvex.

Beweis: Offenbar ist die Aussage des Hilfssatzes lokaler Natur. Schlagen wir um $\mathfrak{z} = \breve{\Phi}(r)$ eine Hyperkugel $K^* \subset\subset G^*$, so brauchen wir deshalb den Hilfssatz nur für das RIEMANNsche Gebiet $(\Phi^{-1}(K^*) \cap U, \Phi)$ zu beweisen. Ist K^* hinreichend klein, so ist $M^* \cap K^*$ im Nullstellengebilde N einer in K^* holomorphen Funktion

$$f(z_1, \ldots, z_n), \; df = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu \not\equiv 0,$$

enthalten. Da der Begriff der Pseudokonvexität unabhängig von der Wahl der Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ ist, darf man noch auf die $z_1, \ldots, z_n$ eine beliebige Koordinatentransformation anwenden. Durch eine solche Koordinatentransformation in K^* kann man nun erreichen, daß N in bezug auf die neuen Koordinaten in K^* genau die Punkte der Ebene $E^{n-1}: \{\mathfrak{z}, z_1 = 0\}$ ausmacht. Man kann K^* als Gebiet des Raumes der neuen Variablen auffassen. Da wir höchstens mehr beweisen, wenn wir M^* und G^* vergrößern, dürfen wir sogar beim Beweis unseres Hilfssatzes voraussetzen, daß gilt: $G^* = C^n$, $M^* = E^{n-1}$, $G = \Phi^{-1}(K^*) \cap U$. K^* sei so klein gewählt, daß $\breve{\Phi}^{-1}(K^*) \cap U \subset\subset U(r)$ und G somit in $\partial G - A$ pseudokonvex ist.

Wir beweisen nun Hilfssatz 1 in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir:

1. *Die euklidische Distanzfunktion $-\ln \delta(x, E^{n-1})$ bezüglich E^{n-1} ist plurisubharmonisch in G.*

Aus Satz 3 folgt, daß die Beschränkung von $-\ln \delta(x, E^{n-1})$ auf $G - M$, $M = \Phi^{-1}(E^{n-1})$, eine plurisubharmonische Funktion $p(x)$ ist. Offenbar ist $p(x)$ in der Umgebung jedes Punktes von M nach oben beschränkt. Daher ist $p(x)$ nach Satz 1 eindeutig zu einer in ganz G plurisubharmonischen Funktion $\breve{p}(x)$ fortsetzbar. Wir behaupten, daß in ganz G gilt: $\breve{p}(x) \equiv -\ln \delta(x, E^{n-1})$.

Da nach Konstruktion von $\breve{p}(x)$ (vgl. Satz 1) für jeden Punkt $x' \in M$ gilt

$$\breve{p}(x') = \overline{\lim_{x \to x', x \in G - M}} (-\ln \delta(x, E^{n-1}))$$

und ferner $\breve{p}(x)$ und $-\ln \delta(x, E^{n-1})$ in ganz G halbstetig nach oben sind, so ist sicher stets $\breve{p}(x) \leqslant -\ln \delta(x, E^{n-1})$. Um einen Widerspruch zu bekommen, werde nun angenommen, es gäbe einen Punkt

$$x_0 \in M \quad \text{mit} \quad \breve{p}(x_0) < m_1 < -\ln \delta(x_0, E^{n-1}) .$$

Dann kann man eine n-dimensionale Hyperkugel $K \subset\subset G$ um x_0 finden, derart, daß für $x \in K - M$ gilt: $-\ln \delta(x, E^{n-1}) < m_1$. Aus diesen beiden Unglei-

chungen folgt:

$$\delta(x, E^{n-1}) > e^{-m_1} > \delta(x_0, E^{n-1}) \ , \qquad x \in K - M \ .$$

Es habe nun $H(x, E^{n-1}) = H_x$ dieselbe Bedeutung wie in § 2.4; dann ist $\bigcup_{x \in K-M} H_x = B$ ein Teilgebiet von G, das durch Φ eineindeutig auf ein Gebiet $B^* \subset C^n$ abgebildet wird. Es ist $B^* = \bigcup_{\mathfrak{z} \in \Phi(K) - E^{n-1}} H^{n-1}(\mathfrak{z}, \delta(x, E^{n-1}))$; dabei bezeichnet $H^{n-1}(\mathfrak{z}, \delta(x, E^{n-1}))$ die $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel um $\mathfrak{z} = \Phi(x)$ in der Ebene $E^{n-1}(\mathfrak{z})$ mit dem Radius $\delta(x, E^{n-1})$. Wir setzen nun

$$\tilde{B}^* = B^* \cup H^{n-1}(\mathfrak{z}_0, e^{-m_1}) \ , \qquad \mathfrak{z}_0 = \Phi(x_0) \ ,$$

und bezeichnen dann mit $\tilde{B}$ die Menge $\breve{\Phi}^{-1}(\tilde{B}^*) \cap \bar{B}$, wobei $\bar{B}$ die abgeschlossene Hülle von B in $\breve{G}$ sei. Da die Kugel H_{x_0} einen Radius $\delta < e^{-m_1}$ hat, dagegen alle Kugeln H_x mit $x \in K - M$ einen Radius $\delta(x, E^{n-1}) > e^{-m_1}$ haben, ist $\tilde{B}^*$ ein Gebiet. Ferner liegt jeder Punkt $r_1 \in \partial H_{x_0} \cap \partial G$ auch in $\tilde{B}$.

Können wir nun zeigen, daß die fortgesetzte Abbildung $\breve{\Phi}$ die Menge $\tilde{B}$ topologisch auf $\tilde{B}^*$ abbildet, so folgt offensichtlich, daß jeder Randpunkt $r_1 \in \partial G \cap \tilde{B}$ hebbar ist; denn dann ist $\mathfrak{B} = (\tilde{B}, \breve{\Phi})$ ein schlichtes RIEMANNsches Gebiet und $\tilde{B} \cap \partial G \subset \breve{\Phi}^{-1}(E^{n-1})$ eine dünne Menge 1. Ordnung.

Zunächst beweist man leicht, daß jeder Punkt $\mathfrak{z} \in \tilde{B}^*$ als Bildpunkt vorkommt. Die Abbildung ist aber auch umkehrbar. Gäbe es etwa zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in \tilde{B}$ mit $\breve{\Phi}(x_1) = \breve{\Phi}(x_2) = \mathfrak{z}_1 \in \tilde{B}^*$, so müßte es nach Definition von $\tilde{B}$ und der Randpunkte von $\mathfrak{G}$ eine zusammenhängende Umgebung $V^*(\mathfrak{z}_1) \subset \tilde{B}^*$ geben, deren Urbild $V = \Phi^{-1}(V^*)$ in zwei Teilbereiche V_1, V_2 zerlegt werden kann, die einen nichtleeren Durchschnitt mit B haben. Da Φ das Gebiet B topologisch auf B^* abbildet, ist dann $V^* - E^{n-1}$ Vereinigung der punktfremden offenen Mengen $\Phi(V_1 \cap B)$ und $\Phi(V_2 \cap B)$. Andererseits ist $V - E^{n-1}$ zusammenhängend. Widerspruch!

Es ist also bewiesen, daß $r_1 \in \partial H_{x_0} \cap \partial G$ ein hebbarer Randpunkt ist. Nach Voraussetzung ergibt sich daher: $r_1 \in \partial G - A$. $\mathfrak{G}$ soll in diesen Punkten aber pseudokonvex sein. Das ist jedoch in r_1 nicht der Fall. Denn ist $\{x(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ mit $x(1) = r_1$, $x(t) \in H(x_0, E^{n-1})$ für $0 \leqslant t < 1$, eine Kurve und bezeichnet $E(t)$ das 1-dimensionale Ebenenstück in $\tilde{B}$ senkrecht zu $H(x, E^{n-1})$, $x \in K$, so ist $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, eine ausgezeichnete Schar 1-dimensionaler analytischer Mengen, die nicht der in Definition 8 gestellten Forderung genügt.

Damit ist bewiesen, daß ein x_0 der bezeichneten Art nicht existiert. Es gilt

also: $-\ln \delta(x, E^{n-1}) \equiv \breve{p}(x)$, das heißt $-\ln \delta(x, E^{n-1})$ ist in G plurisubharmonisch.

Wir betrachten nun die Folge von RIEMANNschen Gebieten $\mathfrak{G}_\nu = (G_\nu, \Phi)$ mit $G_\nu = \{x \in G, -\ln \delta(x, E^{n-1}) < \nu\}$. $\mathfrak{G}_\nu$ ist auf Grund des unter 1) bewiesenen nach Satz D in allen Punkten $\tilde{r} \in \partial G_\nu$ pseudokonvex, die über einem inneren Punkt von G liegen, für die also gilt: $\breve{\iota}_\nu(\tilde{r}) \in G$ ($\iota_\nu : G_\nu \to G$ bezeichne wieder die Injektion). Wir behaupten:

2. $\mathfrak{G}_\nu$ *ist pseudokonvex schlechthin.*

Ist das nicht der Fall, so gibt es eine ausgezeichnete Schar $\sigma_\varepsilon^1(w,t)$, $\varepsilon = \frac{1}{2}e^{-\nu}$, eindimensionaler analytischer Mengen in $\breve{G}_\nu$, so daß $T = \{\sigma_\varepsilon^1(w,1)\} \cap \partial G_\nu$ nicht leer ist[16]).

T enthält notwendig Punkte über ∂G. Anderenfalls wäre nämlich $\mathfrak{G}_\nu$ in jedem Punkt von T pseudokonvex, und die in bezug auf $\mathfrak{G}_\nu$ gebildete Distanzfunktion $-\ln \delta_{\mathfrak{G}_\nu}(x)$ müßte nach Satz C in der Nähe von T plurisubharmonisch in G_ν sein. Dann aber wäre $-\ln \delta(\sigma_\varepsilon^1(w,t))$ für hinreichend großes $t < 1$ jeweils in einer Umgebung W der in der komplexen w-Ebene gelegenen Menge $\{w, \sigma_\varepsilon^1(w, 1) \in \partial G_\nu\}$ subharmonisch und müßte überdies für $t \to 1$ einmal auf ∂W kleiner als in W werden. Das aber ist ein Widerspruch zum Maximumprinzip.

Sei etwa $\tilde{r}_1 = \sigma_\varepsilon^1(\tilde{w}, 1) \in \partial G_\nu$ ein Punkt über ∂G; es gebe also ein $r_1 \in \partial G$ mit $\breve{\iota}_\nu(\tilde{r}_1) = r_1$. Der Punkt $\tilde{r}_1$ ist durch die Kurve $x(t) = \sigma_\varepsilon^1(\tilde{w}, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, mit dem inneren Punkt $x_0 = \sigma_\varepsilon^1(\tilde{w}, 0) \in G_\nu$ verbunden. Wir legen durch die Punkte $x(t)$, $0 \leqslant t < 1$, jeweils die $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel $H(x(t), E^{n-1}) \subset G$. Die Radien derselben sind sämtlich größer als $e^{-\nu}$. Bezeichnet nun $H(t)$ die in $H(x(t), E^{n-1})$ enthaltene, konzentrisch um $x(t)$ liegende $(n-1)$-dimensionale Hyperkugel vom Radius $e^{-\nu}$, so ist $\{H(t)\}$ für $0 \leqslant t < 1$ eine Schar $(n-1)$-dimensionaler analytischer Mengen in G, die durch eine Schar holomorpher Abbildungen $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$, $0 \leqslant t < 1$, der Hyperkugel H_0: $\{|\mathfrak{w}| = (|w_2|^2 + \cdots + |w_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{-\nu}\}$ des $w_2, \ldots, w_n$-Raumes in G gegeben werden kann. Bezeichnen $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ die Koordinaten von $\Phi \circ x(t)$, so kann man $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$ insbesondere so vorgeben, daß gilt:

$$\Phi \circ \sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t) = (z_1(t), z_2(t) + w_2, \ldots, z_n(t) + w_n) .$$

Daraus ersieht man aber (vgl. die Bemerkung § 2, 1), daß die Schar $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$ stetig zu einer in $\breve{G}$ ausgezeichneten Schar $\breve{\sigma}^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, von $(n-1)$-dimensionalen analytischen Mengen fortgesetzt werden kann.

---

[16]) Vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz C.

Wir benötigen als Zwischenresultat:

a) *Die Menge* $\{\breve{\sigma}^{n-1}(\mathfrak{w}, 1)\}$ *ist in* ∂G *enthalten.*

Wäre das nicht der Fall, so gäbe es einen Punkt $\mathfrak{w}_0 \in H_0$, so daß der Punkt $x_0 = \breve{\sigma}^{n-1}(\mathfrak{w}_0, 1)$ in G liegt und überdies gilt:

$$-\ln \delta(x_0, E^{n-1}) > -\ln (e^{-\nu} - |\mathfrak{w}_0|) .$$

Andererseits gilt aber: $\overline{\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in \{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t);\ 0 \leqslant t < 1\}}} -\ln \delta(x, E^{n-1}) \leqslant -\ln (e^{-\nu} - |\mathfrak{w}_0|)$,

da für alle Punkte $x_0(t) = \sigma^{n-1}(\mathfrak{w}_0, t)$, $0 \leqslant t < 1$, die Ungleichung

$$\delta(x_0(t), E^{n-1}) \geqslant e^{-\nu} - |\mathfrak{w}_0|$$

besteht. Der folgende, weiter unten zu beweisende Hilfssatz gibt nun einen Widerspruch:

Hilfssatz 2. *Ist* $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$ *eine Schar von singularitätenfrei in einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit* X *eingebetteten* $(n-1)$*-dimensionalen analytischen Mengen, und ist* $p(x)$ *eine plurisubharmonische Funktion in* X, *so gilt in jedem Punkt* $x_0 \in \{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, 1)\}$ *die Gleichung:*

$$\overline{\lim_{x \to x_0,\ x \in S}}\ p(x) = p(x_0) , \quad \textit{wobei} \quad S = \{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t) , \quad 0 \leqslant t < 1\} .$$

Wir benötigen ferner:

b) *Es gibt ein* t_0, $0 \leqslant t_0 < 1$, *so daß für alle* t, t' *mit* $t_0 \leqslant t$, $t' < 1$ *die Schnittzahl* $S(t, t')$ *von* $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t)\}$ *mit* $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ *in bezug auf die natürliche Orientierung wohldefiniert ist.*

Zum Beweise haben wir zu zeigen (vgl. Fußnote 12), daß ein t_0, $0 \leqslant t_0 < 1$, so gewählt werden kann, daß gilt:

α) Die Menge $\{\sigma_\varepsilon^1(e^{i\vartheta}, t\}$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, hat keinen Punkt mit der Menge $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ gemeinsam, falls $t_0 \leqslant t$, $t' < 1$.

β) Die Menge $\{\sigma^{n-1}(\partial H_0, t')\}$ hat keinen Punkt mit der Menge $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t)\}$ gemeinsam, falls $t_0 \leqslant t$, $t' < 1$.

Da $\sigma_\varepsilon^1(w, t)$ eine ausgezeichnete Schar ist, hat die Menge $\{\sigma_\varepsilon^1(e^{i\vartheta}, t)\}$ einen Abstand $d > 0$ von ∂G. Da nach 2. die Menge $\breve{\sigma}^{n-1}(\mathfrak{w}, 1)$ in ∂G enthalten ist, kann man t_0 so groß wählen, daß jeder Punkt von $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')$ für $t_0 \leqslant t' < 1$ von ∂G höchstens den Abstand $\frac{d}{2}$ hat. Bei Wahl dieses t_0 hat dann $\{\sigma_\varepsilon^1(e^{i\vartheta}, t)\}$ keinen Punkt mit $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ für $t_0 \leqslant t, t' < 1$ gemeinsam; α) ist also bewiesen.

Die Behauptung β) ergibt sich ebenso einfach. Die Kugeln $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)\}$ haben sämtlich den Radius $e^{-\nu}$. Da aber $\varepsilon = \frac{1}{2} e^{-\nu}$, so ist klar, daß t_0 auch noch so gewählt werden kann, daß β) erfüllt ist.

Nunmehr ergibt sich leicht, daß $\mathfrak{G}_\nu$ pseudokonvex schlechthin ist. Die Schnittzahl $S(t, t')$ von $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t)\}$ mit $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ ist nach bekannten Sätzen über Schnittzahlen (vgl. Fußnote 12) für alle t, t' mit $t_0 \leqslant t, t' < 1$ stets dieselbe. Ist $t = t' = t_1$, so haben $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t_1)\}$ und $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t_1)\}$ den Punkt $x(t_1)$ gemeinsam. Da sich analytische Flächen nur positiv schneiden können (vgl. Fußnote 12), ist $S(t_1, t_1)$ also positiv. Andererseits können wir aber bei vorgegebenen t, $t_0 \leqslant t < 1$, stets ein t' in hinreichender Nähe bei 1 finden, daß $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ keinen Punkt mit $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t)\}$ gemeinsam hat; ist nämlich $d_1 > 0$ die Randdistanz von $\{\sigma_\varepsilon^1(w, t)\}$ zu ∂G, so braucht man t' nur so nahe bei 1 zu wählen, daß kein Punkt von $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t')\}$ von ∂G eine größere Entfernung als $d_1/2$ hat. (Das ist wegen a) möglich.) Für die so bestimmten Zahlen t, t' ergibt sich dann: $S(t, t') = 0$. Dieser Widerspruch zu $S(t, t') = S(t_1, t_1)$ löst sich nur so, daß $\mathfrak{G}_\nu$ in allen Randpunkten pseudokonvex ist.

Da die G_ν das Gebiet G ausschöpfen, muß nach Satz D'' auch $\mathfrak{G}$ selbst pseudokonvex sein. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Wir holen nun den Beweis von Hilfssatz 2 nach. Wir wählen eine hinreichend kleine Umgebung $U(x_0)$ und eine in U singularitätenfrei eingebettete RIEMANNsche Fläche F, die $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, 1)\}$ nur in x_0 schneidet und nicht berührt. Es gibt dann ein t_0, $0 \leqslant t_0 < 1$, so daß alle Flächen $\{\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)\}$, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$, ebenfalls F in genau einem Punkt schneiden, wie man sofort einsieht, wenn man F als Nullstellengebilde von $(n-1)$ holomorphen Funktionen darstellt und diese auf $\sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$ beschränkt.

Es sei nun $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant 1$, die Kurve $F \cap \sigma^{n-1}(\mathfrak{w}, t)$. Die Beschränkung von $p(x)$ auf F ist subharmonisch. Nach § 1, 2. d) gilt daher

$$p(x_0) = \overline{\lim_{t \to 1}}\, p(x(t)) \ .$$

Daraus folgt a fortiori die Behauptung des Hilfssatzes.

4. Unter Benutzung von Hilfssatz 1 läuft nun der Beweis von Satz 4 wie folgt: Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ in allen Punkten aus A pseudokonvex ist. Um einen Widerspruch zu gewinnen, werde angenommen, das sei nicht der Fall. Die Teilmenge $A' \subset A$ derjenigen Randpunkte von $\mathfrak{G}$, in denen $\mathfrak{G}$ nicht pseudokonvex ist, ist dann nicht leer. Sei $r_0 \in A'$ irgendein Punkt! Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung $U(r_0) \subset \breve{G}$ und in $U(r_0) \cap G$ eine nirgends identisch verschwindende holomorphe Funktion f mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punkt $r \in U \cap A'$ eine Folge $x_\nu \in U \cap G$ mit $\lim_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = 0$ existiert, die gegen r konvergiert.

Wir betrachten nun das RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{U} = (U \frown G, \Phi)$. $(U \breve{\frown} G)$ ist durch die Injektion $\breve{\iota}$ in $\breve{G}$ abgebildet. $\breve{\iota}$ ist eine topologische Abbildung von $U^* = \breve{\iota}^{-1}(U)$ auf U. Offenbar ist auch $\tilde{A} = \breve{\iota}^{-1}(U \frown A') \subset U^*$ eine in bezug auf f dünne Menge. Das RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{U}$ ist in keinem Punkt von $\tilde{A}$ pseudokonvex, dagegen aber in allen Punkten von $(\partial(U \frown G) \frown U^*) - \tilde{A}$.

Das Holomorphiegebiet $\mathfrak{G}^* = (G^*, \Phi^*)$ der Funktion $f(x)$ enthält nach Definition das Gebiet $\mathfrak{U}$. Es gibt daher eine spurpunkttreue stetige Abbildung τ von $U \frown G$ in G^*, die sich zu einer stetigen Abbildung $\breve{\tau}$ von $(G \breve{\frown} U)$ in $\breve{G}^*$ fortsetzen läßt. Wir behaupten, daß kein Punkt von $\tilde{A}$ über einem inneren Punkt von G^* liegt.

Dazu sei die Fortsetzung $f^*(x)$ von $f(x)$ in G^* gebildet; M sei das Nullstellengebilde von $f^*(x)$. Es gilt $(\breve{\tau}(\tilde{A}) \frown G^*) \subset M$. Wir bezeichnen mit M_1 die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von M, mit M_2 die Menge der nicht gewöhnlichen Punkte von M_1 usw. Nach einem bekannten Satz über die Verteilung der nicht gewöhnlichen Punkte in einer analytischen Menge sind alle Mengen M_k, $k = 1, \ldots, n-1$, analytische Mengen, deren Dimension höchstens gleich $n - k - 1$ ist (vgl. hierzu auch [29], p. 286 sowie [8], Exposé IX). Aus Hilfssatz 1 folgt sofort, daß kein Punkt von $\tilde{A}$ über einem Punkt von $M - M_1$ liegen kann; denn dort ist sicher $\mathfrak{U}$ pseudokonvex. Nochmalige Anwendung desselben Hilfssatzes ergibt, daß $\breve{\tau}^{-1}(M_1 - M_2) \frown \tilde{A}$ leer ist. So fortfahrend folgt nach höchstens n Schritten, daß $\breve{\tau}^{-1}(M) \frown \tilde{A}$ selbst leer ist.

Zeigen wir nun noch, daß $\breve{\tau}(\tilde{A}) \frown M$ nicht leer sein kann, so ist ein Widerspruch gewonnen und Satz 4 bewiesen. Da $\mathfrak{U}$ in den Punkten von $\tilde{A}$ nicht pseudokonvex ist, gibt es in $\mathfrak{U}$ eine ausgezeichnete Schar 1-dimensionaler analytischer Mengen $\sigma^1(\mathfrak{w}, t)$, so daß $\{\sigma^1(\mathfrak{w}, 1)\} \frown \partial(G \frown U)$ nicht leer und in $\breve{\iota}^{-1}(\partial G) \frown U^*$ enthalten ist. $\{\sigma^1(\mathfrak{w}, 1)\}$ enthält dann aber auch sicher wenigstens einen Punkt $r_1 \in \tilde{A}$. Denn da $\mathfrak{U}$ in $\partial(G \frown U) \frown \breve{\iota}^{-1}(U) - \tilde{A}$ pseudokonvex ist, ist die Funktion $-\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ in der Nähe dieser Punkte plurisubharmonisch (Satz C). Die Funktionen $s(\mathfrak{w}) = -\ln \delta_{\mathfrak{G}}(\sigma^1(\mathfrak{w}, t))$ sind dann für hinreichend großes t in einer Umgebung W der Menge $S = \sigma^{-1}(\partial(G \frown U), 1)$ subharmonisch. Da dieselbe aber für $t \to 1$ einmal auf dem Rande ∂W kleinere Werte als im Innern von W annehmen muß, steht das im Widerspruch zum Maximumprinzip.

Aus einem bekannten Kontinuitätssatz[17]) folgt nun, daß $f(x)$ in r_1 holomorph ist. Es gilt also $\breve{\tau}(r_1) \in G^*$. Daher ist $\breve{\tau}(\tilde{A}) \frown G^*$ nicht leer, q. e. d.

---

[17]) Vgl. [3], p. 357.

§ 4. Verzweigte Holomorphiegebiete

1. Bei der Untersuchung der Existenzgebiete holomorpher Funktionen hat man bisher die Verzweigungspunkte und allgemein die Stellen algebroiden Verhaltens unberücksichtigt gelassen (vgl. [5], [2]). Dieses an sich unnatürliche Vorgehen findet seinen Grund in dem anfangs noch unzureichenden Zustand der Topologie, der eine Definition des verzweigten RIEMANNschen Gebietes ausschloß. Es zeigt sich nun, daß die zu entwickelnde Funktionentheorie in verzweigten RIEMANNschen Gebieten wesentlich von der bekannten Theorie in unverzweigten Gebieten verschieden ist. Wie schon in § 2 angeführt (Satz E), zeigte K. OKA die Äquivalenz der unverzweigten Holomorphiegebiete und der unverzweigten holomorphkonvexen RIEMANNschen Gebiete. Wir werden jedoch nun ein Beispiel eines verzweigten Holomorphiegebietes angeben, das weder holomorphkonvex noch pseudokonvex ist (vgl. auch [16]).

Es seien zunächst $C^2_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, k Exemplare $(k \geqslant 2)$ des 2-dimensionalen komplexen Zahlenraumes der Veränderlichen $z_\varkappa$, $w_\varkappa$. Im kartesischen Produkt $C^{2k} = \mathop{\times}\limits_{\varkappa=1}^{k} C^2_\varkappa$ werde die rein $(k+1)$-dimensionale analytische Menge

$$X^{k+1} = \left\{ \frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \ldots = \frac{z_k}{w_k} \right\}$$

betrachtet. Wie bereits in [13] gezeigt wurde, ist X^{k+1} lokal irreduzibel eingebettet und bildet somit – versehen mit der induzierten komplexen Struktur – einen komplexen Raum. Alle Punkte von $X^{k+1} - O$ (O = Nullpunkt des C^{2k}) sind gewöhnliche Punkte und deshalb uniformisierbar. O selbst besitzt keine uniformisierbare Umgebung.

X^{k+1} wird durch die k-dimensionalen analytischen Ebenen der Schar

$$E(s) = \left\{ \frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \ldots = \frac{z_k}{w_k} = s \right\}$$

überdeckt, wenn s die Zahlen einer Riemannschen Zahlenkugel durchläuft. Zwei Ebenen $E(s_1)$, $E(s_2)$, $s_1 \neq s_2$ schneiden sich genau im Punkte O.

2. *Durch die lineare holomorphe Abbildung*

$$\Phi: \begin{cases} v_0 = z_1 + \cdots + z_k \,, & \\ v_1 = w_1 + \alpha_1 z_1 \,, & \\ \vdots & \alpha_\nu \neq \alpha_\mu \quad \text{für} \quad \nu \neq \mu; \quad |\alpha_\nu| = 1 \,, \\ v_k = w_k + \alpha_k z_k \,, & \nu, \mu = 1, \ldots, k \,, \end{cases}$$

wird X^{k+1} nirgends entartet auf den Raum C^n, $n = k+1$, der Veränderlichen $v_0, v_1, \ldots, v_k$ abgebildet.

Jede Ebene $E(s)$ wird nämlich durch Φ eineindeutig linear auf die $(n-1)$-dimensionale analytische Ebene

$$v_0 \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k}(1+\alpha_\varkappa s) - s \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa \cdot \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varkappa}}^{k}(1+\alpha_\nu s) = 0$$

im C^n bezogen. Daraus folgt, daß jeder Punkt $\mathfrak{v} = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k) \in C^n$ in jeder Ebene $E(s)$ höchstens einen Urbildpunkt besitzt. Die Parameter s der Ebenen $E(s)$, in denen ein solcher Urbildpunkt liegt, müssen notwendig das Polynom

$$P(s) = v_0 \prod_{\varkappa=1}^{k}(1+\alpha_\varkappa s) - s \sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa \cdot \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\varkappa}}^{k}(1+\alpha_\nu s)$$

annullieren, oder es muß $s = \infty$ sein. Da $P(s)$ nur für $\mathfrak{v} = O$ identisch verschwindet und im übrigen höchstens vom Grade k ist, besitzt jeder Punkt $\mathfrak{v} \neq O$ höchstens k verschiedene Urbilder in X^{k+1}. Über $\mathfrak{v} = O$ liegt aber nur der Punkt $O \in X^{k+1}$. Somit liegen alle Urbildpunkte jedes Punktes $\mathfrak{v} \in C^n$ isoliert in X^{k+1}, q. e. d.

Es sei nun K ein beliebiger Kreis $\{|s| < d < 1\}$ der s-Ebene. Die Menge $G = \{\bigcup_{s \in K} E(s)\} - O$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge von $X^{k+1} - O$. Da Φ eine nirgends entartete Abbildung ist, folgt aus [10], Satz 13, daß $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein RIEMANNsches Gebiet über dem C^n ist, das nur aus uniformisierbaren Punkten besteht. Wir notieren einige Eigenschaften von $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$.

(1) *G ist analytisch isomorph dem kartesischen Produkt $Y = K \times \{C^k - O\}$.*

Beweis: Die Abbildung

$$\pi : s = \frac{z_1}{w_1} = \frac{z_2}{w_2} = \ldots = \frac{z_k}{w_k}, \quad v_1 = w_1, \ldots, v_k = w_k$$

bildet G eineindeutig auf Y ab.

Wir zeigen weiter:

(2) *Es gibt einen Punkt $\mathfrak{v}_0 = (v_0^{(0)}, v_1^{(0)}, \ldots, v_k^{(0)}) \in C^n$, über dem genau ein Nichtverzweigungspunkt und keine weiteren Punkte von G liegen.*

Beweis: Wir wählen $\mathfrak{v}_0$ so, daß $v_\varkappa^{(0)} \neq 0$, $\varkappa = 0, \ldots, k$ und $P(s)$ mit diesen Werten genau eine einfache Nullstelle in einem Punkte $s_0 \in K$ besitzt. Das ist möglich, da bei beliebigen $v_\varkappa$ auch die Koeffizienten von $P(s)$ beliebig sind. Zu s_0 gehört genau ein Punkt $x_0 \in X^{k+1}$, der über $\mathfrak{v}_0$ liegt. Dieser ist in $E(s_0)$ enthalten. Also gilt $x_0 \in G$. Die anderen Punkte über $\mathfrak{v}_0$, die zu einem s, $P(s) = 0$, $s \neq s_0$, gehören, liegen in einer Ebene $E(s)$, $s \notin K$, und daher nicht in G, q. e. d.

Wir fügen jetzt zu $\mathfrak{G}$ alle erreichbaren Randpunkte r hinzu. Da G ein Teilgebiet von $X^{k+1}-O$ mit glattem Rande ist, kann man ∂G außerhalb O durch die Häufungsmenge von G in $X^{k+1}-O-G$ repräsentieren. Die oben angegebene Abbildung π läßt sich in diese Menge fortsetzen: Zu jedem Punkt $r \in \partial G$, der nicht über O liegt, gibt es in $X^{k+1}-O$ eine Umgebung $U(r)$, die vermöge π umkehrbar holomorph auf eine Umgebung

$$U^*(r^*) \subset C^n \ , \qquad r^* = \pi(r) \in \partial K \times \{C^k - O\}$$

abgebildet ist. ∂G hat in der Nähe von r die gleiche (analytische) Struktur wie ∂Y in der Nähe von r^*. Daraus ergibt sich:

(3) *Ist $\tilde{f}$ eine in Y holomorphe Funktion, die in*

$$r^* = \pi(r) \in \partial Y \ , \qquad r \in \partial G - \breve{\Phi}^{-1}(O)$$

eine Singularität hat, so läßt sich $\tilde{f} = f \circ \pi$ nicht über $r \in \partial G$ hinaus holomorph fortsetzen.

Wir beweisen ferner:

(4) *Über $O \in C^n$ liegt genau ein Randpunkt $r_0 \in \partial G$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß das Urbild $\Phi^{-1}(U)$ jeder Hyperkugel $U(O) \subset C^n$ eine nichtleere zusammenhängende Menge in G ist. Das aber ist klar, da $\pi \circ \Phi^{-1}(U) = \{(s(v_1 + \cdots + v_k),\ v_1(1+\alpha_1 s), \ldots, v_k(1+\alpha_k s)) \in U\}$ immer eine zusammenhängende Menge um $K \times O$ in Y ist.

Dem Kontinuum der Randpunkte $K \times O$ von Y entspricht also genau ein Randpunkt von G, während die Punkte von $\partial K \times \{C^k - O\}$ und $\partial G - \Phi^{-1}(O)$ eineindeutig einander zugeordnet sind. Man kann π^{-1} zu einer stetigen Abbildung $\breve{\pi}^{-1}$ von $\overline{Y}$ in $\breve{G}$ fortsetzen.

3. Wir zeigen nun:

(5) *$\mathfrak{G}$ ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis: $K \times C^k$ ist als Polyzylinder ein Holomorphiegebiet ([5], p. 77). Es gibt also eine holomorphe Funktion $^*f(\mathfrak{z})$, die $K \times C^k$ zum Existenzgebiet hat. Nach (3) ist $f(x) = {}^*f \circ \pi(x)$ eine holomorphe Funktion in G, die in allen Randpunkten $r \in \partial G - r_0$, $r_0 = \breve{\Phi}^{-1}(O)$, singulär ist. r_0 selbst ist aber Häufungspunkt dieser Randpunkte; denn $\breve{\pi}^{-1}$ bildet $\overline{Y}$ stetig auf $\breve{G}$ ab, wobei jede Umgebung $U \subset \overline{Y}$ von $\overline{K} \times O$ in eine Umgebung von r_0 übergeht. Diese Umgebung enthält stets Bildpunkte von $\partial K \times (C^k - O)$. Es folgt also, daß $f(x)$ auch in r_0 wesentlich singulär wird.

Es sei nun $\mathfrak{G}^* = (G^*, \Phi^*)$ das Existenzgebiet von $f(x)$. $\mathfrak{G}$ ist in $\mathfrak{G}^*$ enthalten, $f(x)$ ist in G^* hinein fortsetzbar. Die Abbildung $\breve{\tau} : \breve{G} \to \breve{G}^*$ (vgl. § 2, 4) bildet keinen Punkt von ∂G in das Innere von G^* ab, da $f(x)$ überall in ∂G singulär ist. Folglich ist $\mathfrak{A} = (G, \tau, G^*)$ eine unbegrenzte Überlagerung von G^*. Da τ außerdem spurpunkttreu abbildet und nach (2) über einem gewissen $\mathfrak{v}_0 \in C^n$ genau ein Punkt von G liegt, muß $\mathfrak{A}$ einblättrig sein: τ bildet mithin G umkehrbar eindeutig auf G^* ab. G und G^* sind identisch, das heißt $\mathfrak{G}$ ist selbst das Existenzgebiet von $f(x)$ und damit ein Holomorphiegebiet.

Weiter gilt:

(6) *$\mathfrak{G}$ ist in allen Randpunkten $r \neq r_0$ pseudokonvex, jedoch in r_0 nicht, also auch nicht pseudokonvex schlechthin.*

Beweis: Zunächst ist $\mathfrak{G}$ pseudokonvex in jedem Randpunkt $r \neq r_0$, da in der Nähe eines solchen Punktes ∂G die gleiche Struktur hat wie ∂Y in der Nähe von $\pi(r)$. ∂Y ist aber dort der Rand eines Polyzylinders.

Nun ist $C^k - O$ in O nicht pseudokonvex. Es gibt vielmehr zu jedem ε eine in $C^k - O$ ausgezeichnete Schar ${}^*\sigma_\varepsilon^1(\mathfrak{w}, t)$, die O enthält. Für festes $s_0 \in K$ ist dann $(s_0, {}^*\sigma_\varepsilon^1(\mathfrak{w}, t))$ eine ausgezeichnete Schar in $Y = K \times (C^k - O)$, deren Durchschnitt mit $K \times O$ nicht leer ist. Die ausgezeichnete Schar

$$\sigma_\delta^1(\mathfrak{w}, t) = \breve{\pi}^{-1}(s_0, {}^*\sigma_\varepsilon^1(\mathfrak{w}, t))$$

in $\mathfrak{G}$ enthält dann den Punkt r_0. Da δ beliebig klein wird, wenn ε gegen 0 geht, haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{G}$ in r_0 nicht pseudokonvex ist.

Die Holomorphiehülle von Y ist $K \times C^k \neq Y$. Daher ist Y sicher nicht holomorphkonvex (vgl. [5], p. 73). Da ferner G und Y analytisch isomorph sind und die Holomorphiekonvexität gegenüber eineindeutigen holomorphen Abbildungen invariant ist, folgt:

(7) *G ist nicht holomorphkonvex.*

Zusammenfassend ist also bewiesen:

Satz 8. *Es gibt über dem C^n, $n \geqq 3$, endlich-blättrige, verzweigte Holomorphiegebiete, die weder holomorphkonvex noch pseudokonvex sind.*

Dagegen ist natürlich jedes Holomorphiegebiet pseudokonvex im Sinne von H. CARTAN. – Es bleibt offen, ob Satz 8 auch für $n = 2$ richtig ist.

4. Das konstruierte RIEMANNsche Gebiet $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ kann auch benutzt werden, um zu zeigen, daß Satz 4 für verzweigte RIEMANNsche Gebiete nicht mehr gültig ist. Daß r_0 eine dünne Randmenge ist, versteht sich von selbst. Wie wir im Beweise von (5) gesehen hatten, ist r_0 Häufungspunkt von $\partial G - r_0$.

Da ∂G in allen Punkten dieser Menge $(2n-1)$-dimensional ist, folgt auch, daß r_0 ein nicht-hebbarer Randpunkt ist. – *$\mathfrak{G}$ ist also ein Gebiet über dem C^n, das außerhalb einer dünnen Menge nicht-hebbarer Randpunkte pseudokonvex und doch nicht pseudokonvex schlechthin ist.*

Zum Beweise, daß r_0 nicht-hebbar ist, hätte man auch folgenden Hilfssatz heranziehen können:

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{R}' = (R', \varphi, H')$ eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung einer Hyperkugel $H' \subset C^n$. H sei eine Hyperkugel, die relativ-kompakt in H' enthalten ist; $\mathfrak{R} = (R, \varphi, H)$ sei die Beschränkung der Überlagerung $\mathfrak{R}'$ auf H. Ist dann π eine holomorphe Abbildung von R' in den C^n, die genau in einer dünnen (auch leeren) Menge $M' \subset R'$ der Ordnung 1 entartet ist*[18]*, so ist $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$, $G = R - M'$, ein* Riemannsches *Gebiet, das nur nicht-hebbare Randpunkte besitzt. Dabei bezeichnet Φ die Beschränkung von π auf $G = R - M'$.*

Beweis: Nach [10], Satz 13, ist $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$ ein Riemannsches Gebiet, das Teilgebiet des Riemannschen Gebietes $\mathfrak{G}' = (R' - M', \pi)$ ist. Es sei r ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, der über einem inneren Punkt x aus $R' - M'$ liegt. r läßt sich auch als ein Randpunkt von (R, φ) über $x \in (R' - M') \cap \varphi^{-1}(\partial H)$ auffassen. Es gilt darum in der Nähe von x: $\partial G = \partial R$. Da aber ∂R rein $(2n-1)$-dimensional ist, hat auch ∂G in einer Umgebung von x die Dimension $2n-1$. Dann ist r jedoch sicher kein hebbarer Randpunkt.

Sei nun r_0 ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, der über einem Punkt des Randes von $\mathfrak{G}'$ liegt. Wenn wir zeigen, daß es in beliebiger Nähe von r_0 noch Punkte $r \in \partial G$ gibt, die über einem inneren Punkt von $R' - M'$ gelegen sind, so ist auch r_0 kein hebbarer Randpunkt; denn die Menge der nicht-hebbaren Randpunkte ist abgeschlossen.

r_0 ist als Filter von offenen, zusammenhängenden Mengen in $G = R - M'$ definiert. Da die abgeschlossene Hülle $\overline{R}$ der Menge R in R' kompakt ist (zum Beweise beachte man, daß $\mathfrak{R}'$ endlich-blättrig ist), so besitzt der Filter r_0 mindestens einen Berührungspunkt $x_0 \in \overline{R}$. Da r_0 nicht über einem Punkt aus $R' - M'$ liegt, gilt sicher nicht $x_0 \in \overline{R} - M$. Es gilt also: $x_0 \in \overline{R} \cap M'$. Ferner ist $\pi(x_0) = \Phi(r_0) = \mathfrak{z}_0 \in \dot{C}^n$; die analytische Menge $M^* = \pi^{-1}(\mathfrak{z}_0)$ enthält somit x_0. Weil π in der Menge M entartet ist, ist dieselbe in x_0 sicher mindestens 1-dimensional. Es sei M_1 die zusammenhängende Komponente von M^*[19], die

[18]) Es braucht nur gefordert zu werden, daß π nicht überall entartet ist. Nach einem in [28] bewiesenen Satz folgt daraus, daß dann die Entartungsmenge von π eine dünne Menge erster Ordnung ist.

[19]) Eine analytische Menge ist stets lokal zusammenhängend und zerfällt deshalb in eindeutiger Weise in zusammenhängende Komponenten.

x_0 enthält. M_1 ist überall mindestens 1-dimensional; und man sieht unmittelbar, daß jeder Punkt von M_1 Häufungspunkt des Filters r_0 ist. Ferner ist M_1 sicher nicht kompakt, da sonst wegen des Maximumprinzips [20]) für holomorphe Funktionen jede der Funktionen $z_\nu \circ \varphi$, $\nu = 1, \ldots, n$, auf M_1 konstant sein müßte und M_1 dann nur über einem Punkt des C^n läge. Es ist also $M_1 \cap (\bar{R} - R)$ nicht leer.

Sei nun $U(r_0)$ eine beliebig kleine Umgebung von r_0. Nach Definition ist $U \cap G$ eine zusammenhängende Komponente einer Menge

$$\Phi^{-1}(V) = \pi^{-1}(V) \cap (R - M') ,$$

wobei $V = V(\mathfrak{z}_0)$ eine Umgebung von $\mathfrak{z}_0 = \Phi(r_0)$ ist. Es bezeichne V_1' die zusammenhängende Komponente von $\pi^{-1}(V)$, die $U \cap G$ enthält. Offenbar umschließt V_1' unsere Menge M_1. Ebenso enthält die zusammenhängende Komponente V_1, $V_1 \supset U \cap G$, von $V_1' \cap R$ die Menge $M_1 \cap R$; denn $M_1 \cap R$ ist Häufungsmenge von $U \cap G$. $U \cap G$ ist Komponente von $V_1 - M'$, da M' den komplexen Raum R' nirgends zerlegt. Es folgt: $U \cap G = V_1 - M'$. Ferner gibt es – wie man leicht sieht – in hinreichender Nähe der Punkte $M_1 \cap (\bar{R} - R)$ Punkte $\tilde{x}_1 \in \bar{R} - R - M'$ und Umgebungen $W(\tilde{x}_1)$, so daß $W \cap R \subset V_1$. Ist dann x_1 ein Punkt aus $\breve{\iota}^{-1}(\tilde{x}_1) \in \partial R$, so läßt sich, weil ∂G und ∂R in der Nähe von x_1 übereinstimmen, der Punkt x_1 auch als Randpunkt von $\mathfrak{G}$ auffassen. Offenbar gilt $x_1 \in U$. Damit ist gezeigt, daß in beliebiger Nähe von r_0 noch Punkte $x_1 \in \partial R - M'$ liegen. Unser Hilfssatz ist bewiesen.

5. Satz 4 (und Satz 2) gestatten eine weitere interessante Anwendung auf die Abbildungstheorie. Man kann nämlich zeigen (vgl. auch [13], Fußnote 17):

Satz 9. *Es sei X^n ein n-dimensionaler komplexer Raum; D sei eine in X^n dünne Menge 2. Ordnung; K sei die Menge der nichtuniformisierbaren Punkte von X^n. Ist dann π eine holomorphe Abbildung von X in den C^n, deren Funktionaldeterminante außerhalb $D \cup K$ nicht verschwindet, so ist X^n eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Funktionaldeterminante von π verschwindet nirgends.*

Beweis: Zunächst sei bemerkt, daß die Funktionaldeterminante Δ von π außerhalb K nirgends verschwindet. Wäre das nämlich nicht der Fall, so würde sie eine rein $(n-1)$-dimensionale Nullstellenmenge in $X - K$ besitzen. Diese könnte aber nicht in D enthalten sein, da D dünn von 2. Ordnung ist. In $X - K$ ist π also lokal-topologisch.

Es bezeichne nun M die Entartungsmenge der Abbildung π. M ist abge-

[20]) Für holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen gilt bekanntlich das Maximumprinzip; vgl. etwa [30], [31], [29].

schlossen und in K enthalten. Da K eine dünne Menge 2. Ordnung ist (vgl. [15]), ist auch M dünn von 2. Ordnung.

Offenbar ist die Aussage von Satz 9 lokaler Natur. Wir dürfen daher annehmen, daß es eine holomorphe Abbildung φ von X in eine Hyperkugel H' gibt, so daß $\mathfrak{R}' = (X, \varphi, H')$ eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung von H' ist. Wir können dabei voraussetzen, daß M im Nullstellengebilde einer in X holomorphen, nicht identisch verschwindenden Funktion $f(x)$ enthalten ist. Ferner brauchen wir den Satz nur für jeden komplexen Raum $R \subset\subset X$ zu beweisen, der zu einer analytisch-verzweigten Überlagerung $\mathfrak{R} = (R, \varphi, H)$ gehört, die die Beschränkung von $\mathfrak{R}'$ auf eine Hyperkugel $H \subset\subset H'$ ist.

Aus Hilfssatz 3 folgt nun, wenn wir dort $R = X$ setzen, daß $\mathfrak{G} = (G, \Phi)$, $G = R - M$, ein RIEMANNsches Gebiet ist, welches nur nicht-hebbare Randpunkte besitzt. Dabei bezeichnet wieder Φ die Beschränkung von π auf G. Wir zeigen, daß $\mathfrak{G}$ unverzweigt ist. Angenommen, es gäbe einen Verzweigungspunkt $x \in G$! Nach Definition des RIEMANNschen Gebietes ist $\mathfrak{G}$ lokal stets eine endlich-blättrige, analytisch-verzweigte Überlagerung eines Gebietes $U \subset C^n$. Solche Überlagerungen besitzen aber, wenn sie überhaupt verzweigt sind, stets sogenannte Windungspunkte (vgl. [15]). Diese sind uniformisierbar. Daher gibt es auch einen Verzweigungspunkt $x_0 \in G - K$. Das aber ist unmöglich, da in einer Umgebung von x_0 die Funktionaldeterminante von $\Phi = \pi$ nicht verschwindet und somit die Abbildung Φ dort lokal-topologisch ist.

Es ist also $\mathfrak{G}$ unverzweigt und mithin $R - M$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Zum Beweise von Satz 9 braucht nur noch gezeigt zu werden, daß M leer ist.

Zunächst ist klar, daß der Rand ∂R von (R, φ) pseudokonvex ist; denn wäre $\sigma^1(\mathfrak{w}, t)$ eine ausgezeichnete Schar in $\mathfrak{R} = (R, \varphi)$ mit nichtleerer Menge $\partial R \cap \{\sigma^1(\mathfrak{w}, 1)\}$, so wäre $\varphi \circ \sigma^1(\mathfrak{w}, t)$ eine ausgezeichnete Schar in $\overline{H}$, und es könnte $\partial H \cap \{\varphi \circ \sigma^1(\mathfrak{w}, 1)\}$ nicht leer sein. Das aber ist unmöglich, da Hyperkugeln stets pseudokonvex sind. Nun kann man $\mathfrak{G}$ als Teilgebiet des RIEMANNschen Gebietes $\mathfrak{G}' = (R' - M, \Phi)$ auffassen. In der Nähe eines Randpunktes r, der über einem inneren Punkt von $R' - M$ liegt, hat ∂G die gleiche Struktur wie ∂R in der Nähe des entsprechenden Randpunktes und ist darum dort pseudokonvex. Die übrigen Randpunkte r von $\mathfrak{G}$ bilden aber eine dünne Randmenge; denn ist $x_\nu \in G$ eine Folge, die gegen r konvergiert, so strebt in R' die Folge x_ν gegen M, und wegen $M \subset \{x, f(x) = 0\}$ gilt $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = 0$.

Da überdies – wie vorne gezeigt – alle Randpunkte von $\mathfrak{G}$ nicht hebbar sind, folgt aus Satz 4, daß $\mathfrak{G}$ pseudokonvex schlechthin ist. Nach Satz E ist deshalb $p(x) = -\ln \delta_{\mathfrak{G}}(x)$ eine in $G = R - M$ plurisubharmonische Funktion.

Diese strebt bei Annäherung an den Rand von $\mathfrak{G}$ gegen $+\infty$. Betrachtet man $p(x)$ in $R - M$, so ist jeder Punkt $x_0 \in M \cap R$ positive Unendlichkeitsstelle von $p(x)$, da zu x_0 ein Punkt $r_0 \in \partial G$ gehört. $p(x)$ ist deshalb sicher nicht in M hinein plurisubharmonisch fortsetzbar. Weil aber M eine dünne Menge 2. Ordnung ist, steht das im Widerspruch zu Satz 2. Satz 9 ist bewiesen.

Als Korollar zu Satz 9 ergibt sich:

Ist π eine holomorphe Abbildung von X^n in den C^n, die $X - D$ eineindeutig abbildet, so ist π eine umkehrbar holomorphe Abbildung von X^n auf ein Gebiet des C^n.

In der Tat! Nach einem Satz von W. F. OSGOOD (vgl. [26], p. 117, Satz 5) verschwindet die Funktionaldeterminante von π nirgends in $X^n - (D \cup K)$. Satz 9 ergibt also, daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist und daß die Funktionaldeterminante von π in X nirgends verschwindet. Daher bildet π lokal-topologisch ab. Gäbe es nun zwei verschiedene Punkte $x_1 \in D$, $x_2 \in X^n$ mit $\pi(x_1) = \pi(x_2) = \mathfrak{z}_0 \in C^n$, so gäbe es eine Umgebung $U(\mathfrak{z}_0)$ und um x_1, x_2 punktfremde Umgebungen V_1, V_2, derart, daß π eine eineindeutige, umkehrbar holomorphe Abbildung sowohl von V_1 als auch von V_2 auf U ist. Ist dann D^* die dünne Menge $\pi(D \cap V_1) \cup \pi(D \cap V_2)$ in U, so besitzt jeder Punkt $\mathfrak{z} \in U - D^*$ wenigstens zwei verschiedene Urbilder in $X - D$. Das widerspricht der Voraussetzung.

Wie in [13] gezeigt wurde, ist das Korollar zu Satz 9 in der Theorie der Modifikationen von Bedeutung. Es wurde in [13] mit Hilfe dieses Korollars bewiesen, daß eine stetige wesentliche Modifikation einer n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit immer eine Ersetzung einer dünnen Menge durch eine rein $(n-1)$-dimensionale analytische Menge ist.

LITERATUR

[1] P. ALEXANDROFF UND H. HOPF, *Topologie I.* Springer-Verlag, Berlin 1935.

[2] H. BEHNKE, *Die analytischen Gebilde von holomorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen.* Arch. Math. 6, 353–368 (1955).

[3] H. BEHNKE UND F. SOMMER, *Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Über die Voraussetzungen des Kontinuitätssatzes.* Math. Ann. 121, 356–378 (1950).

[4] H. BEHNKE UND K. STEIN, *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen.* Mitt. Math. Ges. Hamburg, Festschrift, Bd. 8, T. 2, 34–81 (1940).

[5] H. BEHNKE UND P. THULLEN, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergeb. Math. 3. Springer-Verlag, Berlin 1934.

[6] H. BREMERMANN, *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen.* Math. Ann. 128, 63–91 (1954).

[7] H. CARTAN, *Sur les domaines d'existence des fonctions de plusieurs variables complexes.* Bull. Soc. Math. France 59, 46–69 (1931).

[8] H. CARTAN, Séminaire E. N. S., Paris 1953/54 (hektographiert).

[9] H. CARTAN UND P. THULLEN, *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche.* Math. Ann. 106, 617–647 (1932).

[10] H. GRAUERT, *Charakterisierung der holomorph-vollständigen komplexen Räume.* Math. Ann. 129, 233–259 (1955).

[11] H. GRAUERT, *Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die* KÄHLER*sche Metrik.* Math. Ann. 131, 38–75 (1956).

[12] H. GRAUERT UND R. REMMERT, *Fonctions plurisousharmoniques dans des espaces analytiques. Généralisation d'un théorème d'*OKA. C. R. Acad. Sci. Paris 241, 1371–1373 (1955).

[13] H. GRAUERT UND R. REMMERT, *Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume.* Math. Ann. 129, 274–296 (1955).

[14] H. GRAUERT UND R. REMMERT, *Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen.* Math. Zeitschr. 65, 175–194 (1956).

[15] H. GRAUERT UND R. REMMERT, *Analytisch-verzweigte Überlagerungen und komplexe Räume.* Erscheint in den Math. Ann.

[16] H. GRAUERT UND R. REMMERT, *Singularitäten komplexer Mannigfaltigkeiten und* RIEMANN*scher Gebiete.* Math. Zeitschr. (1957).

[17] F. HARTOGS, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten.* Math. Ann. 62, 1–88 (1906).

[18] F. HIRZEBRUCH, *Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann. 124, 77–86 (1951).

[19] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques; Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles,* 21–40 (1953).

[20] E. E. LEVI, *Studii sui puncti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o piu variabili complesse.* Ann. Mat. 3, 17, 61–87 (1910).

[21] K. MENGER, *Dimensionstheorie.* Teubner-Verlag, Leipzig 1928.

[22] F. NORGUET, *Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (Passage du local au global).* Bull. Soc. Math. France 82, 137–159 (1954).

[23] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. II. – Domaines d'holomorphie.* J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A, 7, Nr. 2, 115–130 (1937).

[24] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. – Domaines pseudoconvexes.* Tôhoku Math. J. II, Ser. 49, 19–52 (1942).

[25] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. – Domaines finis sans point critique intérieur.* Jap. J. Math. 23, 97–155 (1953).

[26] W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie II,* 1. Teubner-Verlag, Leipzig 1929.

[27] W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie II,* 2. Teubner-Verlag, Leipzig 1932.

[28] R. REMMERT, *Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume.* Math. Ann. 1957.

[29] R. REMMERT UND K. STEIN, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen.* Math. Ann. 126, 263–306 (1953).

[30] W. ROTHSTEIN, *Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen.* Math. Ann. 126, 221–238 (1953).

[31] W. ROTHSTEIN, *Zur Theorie der analytischen Mannigfaltigkeiten im Raume von n komplexen Veränderlichen.* Math. Ann. 129, 96–138 (1955).

[32] P. THULLEN, *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Regularitätshüllen.* Math. Ann. 106, 64–76 (1932).

(Eingegangen den 17. März 1956)