Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Über die Einführung des Kongruenzbegriffes in der Theorie der linearen Räume.

Autor: Senft, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23902

Über die Einführung des Kongruenzbegriffes in der Theorie der linearen Räume

von Walter Senft, Zürich

Einleitung

Wenn wir von einem linearen Raum sagen, er sei mit einer Metrik versehen, so meinen wir damit, daß dem Raum neben der linearen Grundstruktur eine weitere Struktur aufgeprägt sei, welche zum mindesten eine Einteilung der Raumelemente in disjunkte Klassen von Elementen „gleicher Länge" enthält. Dieser Einteilung entspricht eine Äquivalenzrelation, welche wir in Anlehnung an die Elementargeometrie Kongruenz nennen. In der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur Analyse des Metrikbegriffes in der Theorie der linearen Räume gegeben werden, und zwar eine von der erwähnten Kongruenzbeziehung ausgehende geometrische Analyse unterhalb des Niveaus einer Längenmessung durch Zahlen (Norme).

Ein erstes Studium gilt den *Hilbert*schen Kongruenzaxiomen der Geometrie[1]), deren Inhalte als mögliche Relationseigenschaften im reellen Raum beliebiger Dimension motiviert und diskutiert werden. Die bekannte Tatsache, daß die vom Kongruenzbegriff freie affine Geometrie endlicher Dimension bereits ein monomorphes (logisch vollständiges) System darstellt, legt nämlich den Standpunkt nahe, daß die Kongruenz nicht als neue, axiomatisch zu beschreibende Grundrelation aufgefaßt werden soll, sondern daß sie innerhalb des affinen Systems zu definieren oder konstruieren sei[2]). Die charakteristischen Eigenschaften sind dann als Postulate zu werten, und es stellt sich die Frage, was für Festlegungen der Kongruenz die Gültigkeit dieser Postulate gewährleisten.

Die weiteren Betrachtungen unserer Arbeit gelten vor allem dem Problem, jene Metriken durch einfache Kongruenzeigenschaften geometrisch zu charakterisieren, welche sich durch eine beliebige symmetrische Bilinearform als sogenannte metrische Fundamentalform beschreiben oder

---

[1]) *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. 1930.

[2]) Vgl. *R. Nevanlinna*, Über metrische lineare Räume I, Ann. Acad. sci. Fenn., Serie A, I 108, 1952.

definieren lassen. Wir zeigen, daß eine einfache Orthogonalstruktur im zweidimensionalen Raum über einem allgemeinen Koeffizientenkörper auf den Begriff der Fundamentalform führt und geben schließlich ein knappes System von Postulaten, welches die erwähnte Klasse von Kongruenzen in dieser Dimension eindeutig bestimmt. Der letzte Paragraph ist der Übertragung der Ergebnisse auf höhere Dimensionen gewidmet, wobei diese Erweiterung in speziellen Fällen vollständig durchgeführt wird.

Meinem verehrten Lehrer, Mitglied der Finnischen Akademie, Herrn Professor Dr. *R. Nevanlinna*, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen für die Anregung der Arbeit und das rege Interesse, durch das er ihre Entstehung stets förderte.

§ 1. Die Hilbertschen Postulate der Streckenkongruenz

1. Der klassische axiomatische Aufbau der affinen Geometrie entwickelt aus einem geometrischen Grundsystem (System mit Inzidenz- und Anordnungsstruktur) eine lineare Algebra, deren Elemente, die sogenannten Vektoren, durch Klassenbildung an Hand der Parallelverschiebung von gerichteten Strecken (geordneten Punktepaaren) gewonnen werden. Diese Operation der Parallelverschiebung stellt die natürliche Streckenvergleichung der affinen Geometrie dar; sie zu erweitern ist die Absicht, welche der Einführung des Kongruenzbegriffes zugrunde liegt. Es ist daher vernünftig, die Parallelverschiebung dadurch in die Kongruenzrelation einzubeziehen, daß diese als Relation zwischen den Vektoren beschrieben wird. Der Übergang zur Streckenkongruenz im *Hilbert*schen Sinne wird dadurch ermöglicht, daß jeder Vektor x seinem inversen Element $-x$ kongruent erklärt wird. Verlangt man zudem die Gültigkeit des transitiven Gesetzes in der Form des *Hilbert*schen Axioms III.2, so ist der Äquivalenzcharakter der Kongruenz und damit eine eindeutige Einteilung aller Elemente in disjunkte Kongruenzklassen gegeben. Wir werden die hier motivierten Eigenschaften in den Untersuchungen dieser Arbeit stets voraussetzen und deshalb als Grundpostulat festlegen.

2. *Sei L ein linearer Raum von Elementen $a, b, \ldots$ über dem Körper der reellen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ $x \cong y$ symbolisiere die Beziehung der Kongruenz zwischen x und y*, genauer gesagt die Tatsache, daß das Element x dem Element y als kongruent zugeordnet ist. Gemäß den Bemerkungen der Einleitung wollen wir diese Relation durch Postulate charakterisieren und dann nach den zulässigen Definitionsmöglichkeiten fragen. Als

Mindestforderung verlangen wir dabei nach Abschnitt 1 das *Grundpostulat:*

Aus $x \cong z$, $y \cong z$ folgt $x \cong y$ und für jedes x gilt $x \cong -x$. (I)

Als weitere Postulate sollen in diesem Paragraphen jene Eigenschaften studiert werden, welche *Hilbert* zur axiomatischen Festlegung der Streckenkongruenz benutzt hat, und zwar sollen sie schrittweise eingeführt und in ihrer Wirkung diskutiert werden.

3. Postulat (I) ist offenbar erfüllt, wenn wir die Kongruenz in L dadurch definieren, daß wir $x \cong y$ mit $x = \pm y$ gleichsetzen. Diese der natürlichen Streckenvergleichung (Parallelverschiebung) in der affinen Geometrie entsprechende Kongruenz soll als *affine Kongruenz in L* bezeichnet werden. Sie erfüllt auch folgendes weitere Postulat, welches dem *Hilbert*schen Axiom III.3 der „Addierbarkeit von Strecken" entspricht und welches den linearen Zusammenhang zwischen den Kongruenzklassen der affinen Kongruenz als allgemeingültig erklärt:

Für jeden Koeffizienten λ folgt aus $x \cong y$ stets $\lambda x \cong \lambda y$. (2)

Zusammen mit (I) liefert (2) aus $x \cong y$ für $|\lambda| = |\mu|$ stets $\lambda x \cong \mu y$, wie dies in *Nevanlinnas* Mitteilung[3]) postuliert ist. Die diese Eigenschaft erfüllenden Äquivalenzrelationen werden dort folgendermaßen umschrieben. Man kann von der affinen Kongruenz ausgehend die Menge der Kongruenzklassen einschränken, indem man unter Berücksichtigung von (2), sonst aber willkürlich, gewisse elementenfremde Mengen von Kongruenzklassen zu neuen, weiteren Kongruenzklassen zusammenfaßt. Es wird so offenbar, daß die Postulate (I) und (2) noch eine unübersichtliche Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten der Kongruenzdefinition zulassen[4]).

4. In Verallgemeinerung der affinen Strecken- bzw. Vektorvergleichung (Parallelität) definieren wir zwei Elemente x und y bezüglich einer bestimmten Kongruenz in L als vergleichbar, in Zeichen $x \simeq y$, wenn eine Zahl $\lambda \neq 0$ derart existiert, daß $x \cong \lambda y$. Unter Voraussetzung von (I) und (2) ist diese *Relation der Vergleichbarkeit* eine Äquivalenz. Sie erzeugt also dann eine Einteilung der Elemente in disjunkte *Vergleichs-*

---

[3]) Siehe Anmerkung 2, S. 73. Diese Arbeit wird im folgenden immer kurz als Mitteilung von *Nevanlinna* zitiert.

[4]) Man ersieht dies schon in einer Dimension. Zum Beispiel sind die Postulate im Raum $L(e)$, $e \neq o$, erfüllt, wenn wir mit einer beliebigen festen Zahl $\delta > 0$ festsetzen, daß $\alpha e \cong \beta e$ genau dann besteht, wenn $|\alpha| = \delta^{\nu} |\beta|$, wo ν irgendeine ganze Zahl sein kann.

klassen. Eine dieser Klassen besteht aus allen zu o kongruenten Elementen, die übrigen enthalten mit einem Element x auch alle von o verschiedenen Elemente des von x erzeugten linearen Raumes $L(x)$. In der affinen Kongruenz stimmen die Vergleichsklassen bis auf die mit $L(o)$ identische direkt mit den um o verminderten eindimensionalen Unterräumen überein. Wir wollen diese *affinen Vergleichsklassen* mit $V(x)$ bezeichnen, wobei in x zugleich ein Klassenelement als Erzeugendes ausgezeichnet sei.

5. Die in Abschnitt 3 gemachte Andeutung über die allgemeine Festsetzung einer die Postulate (I) und (2) erfüllenden Kongruenz kann nun in folgender präziseren Form gegeben werden. Man teile die affinen Vergleichsklassen $V(x)$ willkürlich in elementenfremde Mengen ein und vereinige sie innerhalb jeder dieser Mengen zu je einer neuen, weiteren Vergleichsklasse, indem man ihre – auch willkürlich ausgezeichneten – Erzeugenden je als kongruent erklärt. In der das Nullelement enthaltenden Vergleichsklasse ist dann die Kongruenz eindeutig festgelegt; dasselbe gilt für jede andere der neuen Klassen, sobald wir in einer der hierin vereinigten affinen Vergleichsklassen die Kongruenz festgelegt haben. Es bleibt uns also noch, zu jeder neuen Vergleichsklasse, welche o nicht enthält, eine in ihr enthaltene affine Klasse auszusondern und darin nach Belieben eine (I) und (2) erfüllende Kongruenz festzulegen [5].

6. Die oben eingeführte Vergleichbarkeitsrelation enthält noch keinen Anhaltspunkt für Vergleichbarkeit im Sinne einer Größenanordnung, sofern sie auf einer Kongruenz aufgebaut ist, die lediglich durch die Eigenschaften (I) und (2) charakterisiert wird. Will man die Kongruenz in dieser Richtung präzisieren, das heißt in der Richtung, daß die Kongruenzklassen innerhalb einer Vergleichsklasse sinnvoll linear angeordnet werden, so wird man naheliegenderweise verlangen, daß die natürliche affine Vergleichbarkeit in einer Dimension erhalten bleibt, das heißt daß die Kongruenz in jedem eindimensionalen Unterraum eine affine Kongruenz induziert. Dies ist die *Hilbert*sche Forderung der „Eindeutigkeit der Streckenabtragung“ [6]. Man kann sie auch etwas schwächer fassen, ohne die gegebene Motivierung zu zerstören, nämlich indem man sie nur auf nicht zu o kongruente Elemente anwendet. Das bedeutet, daß man neben den eindimensionalen Unterräumen mit affiner Kongruenz noch

[5]) Hier kommen noch die verschiedenen Möglichkeiten in einer Dimension zur Geltung; vgl. Anmerkung 4, S. 75.

[6]) Bei *Hilbert* mittels der Axiome der Winkelkongruenz indirekt eingeführt.

solche mit totaler Kongruenz zuläßt, bei der alle Elemente zueinander kongruent sind. Diese Abschwächung kann so postuliert werden:

$$\text{Aus } x \cong \lambda x \text{ folgt mit } \lambda \neq \pm 1 \text{ stets } x \cong o. \tag{3}$$

Die zuerst genannte stärkere Fassung würde hier $x = o$ verlangen, was mit folgendem Zusatzpostulat erreicht wird:

$$\text{Aus } x \cong o \text{ folgt } x = o. \tag{4}$$

Durch (3) werden die Möglichkeiten der Kongruenzdefinition dahin eingeschränkt, daß bei der Erzeugungsmethode von Abschnitt 5 durch die Vereinigung affiner Vergleichsklassen $V(x)$ zu weiteren Klassen einerseits und durch die Auswahl der Erzeugenden aller $V(x)$ andererseits schon alles eindeutig festgelegt ist. Nimmt man noch (4) dazu, so muß $V(o)$ bei der Vereinigung gesondert belassen werden.

7. Sei V eine von $V(o)$ verschiedene Vergleichsklasse der durch die gegebenen Postulate charakterisierten Kongruenz in L, das heißt die Menge aller mit einem Element $e \neq o$ vergleichbaren x. Zu jedem solchen x existiert ein $\lambda \neq 0$, so daß $x \cong \lambda e$ und damit auch $x \cong -\lambda e$. Also gibt es spezieller ein $\xi > 0$ mit $x \cong \xi e$, und zwar ist dieses ξ eindeutig bestimmt. *Indem wir* $|x| = \xi$ *setzen, haben wir in* V *eine Metrik eingeführt in dem Sinne, daß jedem* x *eine positive Norm* $|x|$ *zugeordnet ist.* Diese Metrik spiegelt die Kongruenz dadurch wider, daß $x \cong y$ in V mit $|x| = |y|$ gleichwertig ist. Jede von $V(o)$ verschiedene Klasse V kann in dieser Weise unter Auszeichnung je eines Eichelementes e mit einer die Kongruenz beschreibenden Metrik (Norm) versehen werden. Setzen wir schließlich noch zusätzlich $|o| = 0$ fest, so haben wir den ganzen Raum L metrisiert, und zwar implizieren die zugrunde gelegten Kongruenzeigenschaften folgende Normeigenschaften:

$$\text{Für } x \neq o \text{ gilt } |x| > 0. \tag{a}$$

$$\text{Für jedes } x \text{ und jede Zahl } \lambda \text{ gilt } |\lambda x| = |\lambda|\,|x|\,. \tag{b}$$

Der Zusammenhang mit der Kongruenz ist der, daß allgemein $x \cong y$ genau dann gilt, wenn sowohl $x \simeq y$ als auch $|x| = |y|$ erfüllt sind, das heißt *die Normgleichheit ist notwendig und auch hinreichend, sofern die Elemente überhaupt vergleichbar sind.* Diese Betrachtungen lassen sich auch auf Kongruenzen übertragen, bei denen (4) nicht erfüllt ist. Man hat dann aber alle $x \cong o$ mit der Norm $|x| = 0$ auszustatten, wodurch (a) hinfällig wird.

8. Wir betrachten jetzt umgekehrt eine Metrik mit den Eigenschaften (a) und (b) im kongruenzfreien L gegeben und denken uns weiter die affinen Vergleichsklassen $V(x)$ irgendwie, aber unter Isolierung von $V(o)$, in disjunkte Mengen eingeteilt und innerhalb dieser Mengen je zu einer Vergleichsklasse zusammengefaßt. Die Kongruenz, die wir dann dadurch definieren, daß $x \cong y$ sowohl $x \simeq y$ als auch $|x| = |y|$ bedeutet, erfüllt alle bisher gegebenen Postulate. Also ist dies wiederum eine allgemeine Definitionsmöglichkeit der durch diese Eigenschaften charakterisierten Kongruenz. Wird wiederum (4) nicht verlangt, so haben wir nur das Normpostulat (b) vorauszusetzen. Weiter muß dann aber $V(o)$ – statt isoliert zu bleiben – derart mit andern affinen Klassen vereinigt werden, daß $|x| = 0$ und $x \simeq o$ stets gemeinsam auftreten.

9. Wir können bei obiger Erzeugung der Kongruenz durch eine Metrik speziell auch $x \cong y$ nur mit $|x| = |y|$ gleichsetzen, was bedeutet, daß wir alle von o verschiedenen Elemente als vergleichbar betrachten wollen. Diese *Forderung der vollständigen Vergleichbarkeit* entspricht der Einführung des *Hilbert*schen Axioms III.1 von der „Möglichkeit der Streckenabtragung". Wir wollen sie in folgender Abschwächung postulieren, wobei die volle Form durch (4) sofort wieder gewährleistet wird:

Ist e nicht $\cong o$, so existiert zu jedem x eine Zahl ξ, so daß $x \cong \xi e$. (5)

Die Kongruenzen mit den Eigenschaften (I), (2), (3), (4) und (5) entsprechen den Metriken mit den Eigenschaften (a) und (b) in der angegebenen Weise eineindeutig: Wir haben Übereinstimmung des Kongruenzbegriffes mit demjenigen der Normgleichheit in ganz L. Bei Ausschaltung der Forderung (5) tritt die Möglichkeit der Unterteilung des Raumes in mehr als zwei Vergleichsklassen hinzu, während mit (4) die Normeigenschaft (a) wegfällt. Diese Verallgemeinerungen werden in den späteren Untersuchungen auftreten, indem dann nämlich bei andersartigen Voraussetzungen die Eigenschaften (2) und (3) bewiesen werden, während die Zusätze (4) und (5) nicht erfüllt zu sein brauchen [7].

10. Ist man einmal zur Normzuordnung mit den Eigenschaften (a) und (b) gelangt, so liegt die Frage nahe, welche zusätzliche Kongruenzeigenschaft der Spezialisierung zu einer *Banach*schen Metrik, das heißt einer Metrik mit Gültigkeit der Dreiecksungleichung $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, entspreche. Man kann diese Forderung wie leicht ersichtlich so fassen, daß die Eichfläche (Einheitskugel) der Metrik konvex sein muß, das heißt

---

[7]) Vgl. zum Beispiel die Abschnitte 14 und 22.

daß mit $|x| = |y| = \pi$ für jedes λ im Intervall $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ gilt $|\lambda x + (1-\lambda)y| \leqslant \pi$. Diese Bedingung ist notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Dreiecksungleichung, und zwar auch ohne (a), also ohne (4). Auf die Kongruenz übertragen ergibt sich so folgendes „Postulat für die *Banach*-Struktur“:

Gilt $x \cong y$ und ist $0 \leqslant \delta \leqslant 1$, so existiert eine Zahl α mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ derart, daß $\delta x + (1-\delta)y \cong \alpha x$ ist. (6)

§ 2. Zur Einführung der Winkelkongruenz

11. Die Winkelkongruenz, welche bei *Hilbert* wiederum axiomatisch beschrieben wird, kann bekanntlich mittels einer Definition auf der Strecken- oder Vektorkongruenz aufgebaut werden, sofern diese mit geeigneten Eigenschaften versehen ist [8]). Wir wollen jetzt nach solchen Eigenschaften fragen, und zwar *ausgehend von einer Kongruenz, welche lediglich das Grundpostulat (I) des letzten Paragraphen aufweisen soll.* Während diese allgemeine Kongruenz vorher in der Richtung spezialisiert wurde, daß eine Vergleichbarkeit im Sinne einer Metrik zustande kam, wird jetzt also die sinnvolle Einführung der Winkelkongruenz angestrebt. Entsprechend der elementargeometrischen Definition berufen wir uns dabei auf folgenden *Winkelbegriff*. Wir sagen, daß zwei von o verschiedene Elemente x und y einen Winkel $[x, y]$ bilden, und zwar sollen zwei Winkel $[x, y]$ und $[x', y']$ genau dann als gleich betrachtet werden, wenn mit zwei positiven Zahlen λ und μ gilt $x' = \lambda x$, $y' = \mu y$ [9]). Weiter wollen wir unter Bezugnahme auf die zugrunde gelegte Kongruenz zwei Winkel $[x, y]$ und $[x', y']$ *vergleichbar* nennen, in Zeichen $[x, y] \simeq [x', y']$, wenn sowohl $x \simeq x'$ als auch $y \simeq y'$ gilt, was sinnvoll ist, da mit $[x, y] = [x', y']$ sicher auch $[x, y] \simeq [x', y']$ richtig ist.

12. Wie bei der Kongruenz der Raumelemente soll für die *Kongruenz der Winkel* die Vergleichbarkeit notwendige Bedingung sein. Um noch festzusetzen, wann mit $[x, y] \simeq [x', y']$ stärker $[x, y] \cong [x', y']$ gilt, lassen wir uns von der üblichen Methode leiten, daß wir anschaulich ausgedrückt entsprechende Winkel in Dreiecken mit paarweise kongruenten Seiten als kongruent erklären; nämlich mit $x \cong \alpha x'$, $y \cong \beta y'$ $(\alpha > o, \beta > o)$ soll $[x, y] \cong [x', y']$ genau $x - y \cong \alpha x' - \beta y'$ bedeu-

---

[8]) Ein von *R. L. Moore* stammendes System von Kongruenzaxiomen, welches die Streckenkongruenz allein als Grundrelation betrachtet, findet sich in den Grundlagen der Mathematik von *Hilbert-Bernays*, Bd. II, S. 38.

[9]) Es handelt sich also um orientierte Winkel.

ten. Hierbei ist nun aber zu beachten, daß α, β auf Grund von (I) nicht eindeutig bestimmt sind. Damit die gegebene Definition die Winkelkongruenz eindeutig festlegt, müssen wir mindestens verlangen, daß $x - y \cong \alpha x' - \beta y'$, falls dies für ein Paar von positiven Größen α, β mit $x \cong \alpha x'$, $y \cong \beta y'$ gilt, für alle solche Paare richtig ist. Insbesondere bedeutet dies die Gültigkeit des folgenden Postulates:

Aus $x \cong \lambda x$, $y \cong \mu y$ folgt für $\lambda\mu > 0$ stets $x - y \cong \lambda x - \mu y$. (A)

Dies liefert aber auch sofort die erwähnte allgemeinere Bedingung: Sei α', β' ein Zahlenpaar derselben Eigenschaften wie das oben betrachtete Paar α, β; dann gilt $\alpha' x' \cong \alpha x'$ und $\beta' y' \cong \beta y'$ und es folgt daraus nach (A) – mit $\alpha = \lambda \alpha'$, $\beta = \mu \beta'$ gesetzt und auf die Elemente $\alpha' x'$ und $\beta' y'$ angewandt – $\alpha' x' - \beta' y' \cong \alpha x' - \beta y'$. Bei Gültigkeit von (A) ist also das Kriterium $x - y \cong \alpha x' - \beta y'$ von der Auswahl des Paares α, β unabhängig.

13. Eine weitere Schwierigkeit für die gegebene Definition der Winkelkongruenz stellt die Gleichheit $[\lambda x, \mu y] = [x, y]$ für beliebige positive Zahlen λ, μ dar. Unsere Definition ist auch erst dann sinnvoll, wenn mit $[x, y] \cong [x', y']$ stets $[\lambda x, \mu y] \cong [x', y']$ gilt. Insbesondere bedeutet dies die Gültigkeit des folgenden spezielleren Postulates, aus dem aber wieder die allgemeine Forderung als erfüllt nachgewiesen werden kann:

Aus $x \cong x'$, $y \cong y'$ und $x - y \cong x' - y'$ folgt für beliebige positive Zahlen λ stets $\lambda x - y \cong \lambda x' - y'$. (B)

Diese Eigenschaft der Vektor- bzw. Streckenkongruenz entspricht dem Axiom, welches bei *R. L. Moore*[10]) im wesentlichen die *Hilbert*schen Axiome III.4 und III.5 der Winkelkongruenz ersetzt.

14. Indem wir das Nullelement bei der Erzeugung von Winkeln ausgeschlossen haben, benötigen wir Postulat (B) bei der obigen Motivierung eigentlich nur für von o verschiedene Elemente. Daß wir o auch zulassen, liefert gerade die Gültigkeit des Postulates (2) im letzten Paragraphen, das wir so auch wiederum anerkennen wollen. Wegen (I) läßt sich (B) dahin verallgemeinern, daß aus $x \cong x'$, $y \cong y'$ und $x - y \cong x' - y'$ stets $\lambda x - \mu y \cong \lambda x' - \mu y'$ folgt. Mit $x' = y$ und $y' = x$ gesetzt zeigt sich, daß $x \cong y$ wiederum für beliebige Koeffizienten α, β stets $\alpha x + \beta y \cong \beta x + \alpha y$ induziert. Damit läßt sich leicht das frühere Postulat (3) nachweisen, welches aus $x \cong \lambda x$ mit $\lambda \neq \pm 1$ auf $x \cong o$ schließt: $x \cong \lambda x$ liefert nach dem gegebenen Theorem

[10]) Siehe Anmerkung 8, S. 79.

$(\alpha + \beta\lambda)x \cong (\beta + \alpha\lambda)x$, das heißt mit $\alpha = -\beta\lambda$ und $\beta \neq 0$ gewählt $\beta(1-\lambda^2)x \cong o$, was wegen $\lambda \neq \pm 1$ auch $x \cong o$ bedeutet. Das „Winkelkongruenzpostulat“ (B) liefert also seinerseits eine Vergleichbarkeit der Elemente, wie sie im Abschnitt 6 gefordert wurde.

15. Auf Grund von (I), (A) und (B) stellt die definierte Winkelkongruenz eine eindeutig festgelegte Äquivalenzrelation zwischen den als Winkel eingeführten Objekten dar. Weiter bemerkt man, daß (A) bei Voraussetzung der Eigenschaften (3) und (4) des letzten Paragraphen sichergestellt ist, wobei (3) nach oben aus (B) folgt. *Die Postulate (I), (B),* (4) *und* (5) *sind also mit den Hilbertschen Forderungen III.*1–5 *gleichwertig*[11]) *und können deshalb als System der Hilbertschen Kongruenzeigenschaften bezeichnet werden.* Dieses System gewährleistet neben der eindeutigen und vollständigen Vergleichbarkeit im Sinne des letzten Paragraphen die hier vorgezeichnete Einführung der Winkelkongruenz, und zwar ist es durch diese beiden Gesichtspunkte vollständig motiviert. Läßt man die Forderung (4) fallen, so braucht (A) nicht erfüllt zu sein, womit die Winkelkongruenz nicht in der gegebenen Weise festgelegt werden kann. Diese Schwierigkeit wird dadurch umgangen, daß man alle zu o kongruenten Elemente bei der Erzeugung von Winkeln ausschließt (verallgemeinerte Winkeldefinition); für nicht zu o kongruente x, y folgt (A) aus (3) und damit aus (B).

§ 3. Orthogonalität

16. Ein Winkel $[x, y]$ heißt gemäß der elementargeometrischen Definition recht, wenn $[x, y] \cong [x, -y]$, also $x - y \cong x + y$. Die beiden den Winkel erzeugenden Elemente werden dann orthogonal zueinander genannt. Bei der Spezialisierung der allgemeinen Kongruenzen in Richtung der Einführung einer Winkelkongruenz kann man auch vorerst nur die Orthogonalität ins Auge fassen und eine spezielle Orthogonalstruktur der Kongruenz verlangen. Dazu legen wir folgende von der Winkelkongruenz unabhängige *Definition der Orthogonalität* zugrunde: *x heißt zu y orthogonal, in Zeichen $x \perp y$, wenn $x - y \cong x + y$.* Damit ist diese Relation auch unabhängig von jedem Kongruenzpostulat erklärt. Unter Voraussetzung von (I) ist sie symmetrisch, was die Ausdrucksweise „orthogonal zueinander“ gestattet.

17. Als spezielle Orthogonalstruktur wird man naheliegenderweise und der Winkeldefinition entsprechend die Übertragbarkeit des Orthogona-

[11]) (I) entspricht III.2, (4) und (5) entsprechen III.1, (B) ersetzt III.4 und III.5 und liefert (3), welches III.3 entspricht.

litätsbegriffes auf die Geraden (eindimensionalen Unterräume) anstreben in dem Sinne, daß mit $x \perp y$ auch $L(x) \perp L(y)$ definiert werden kann. Dazu muß wegen $L(x) = L(\lambda x)$ für jedes $\lambda \neq 0$ mindestens verlangt werden, daß mit $x \perp y$ auch $\lambda x \perp y$ erfüllt ist. Indem wir (I) sowieso als gegeben betrachten, brauchen wir $\lambda = 0$ nicht auszuschließen, wodurch folgendes *Postulat der Orthogonalität* gegeben ist:

Aus $x \perp y$ folgt für beliebige Koeffizienten λ stets $\lambda x \perp y$. (II)

Wegen der Symmetrie der Relation gilt mit $x \perp y$ sofort allgemeiner $\lambda x \perp \mu y$, was für die oben erwähnte Übertragbarkeit der Orthogonalität auf Geraden auch hinreichend ist.

18. *Nevanlinna* verweist in seiner Mitteilung darauf, daß man „in der Richtung der euklidischen Geometrie" schon sehr weit kommt, wenn man an Stelle der Forderung (B) des letzten Paragraphen das „bedeutend weniger einschränkende" Postulat zugrunde legt, welches in Abschnitt 14 von (B) abgeleitet wurde und aus $x \cong y$ für beliebige Zahlen α, β auf $\alpha x + \beta y \cong \beta x + \alpha y$ schließt[12]). Hierin ist insbesondere das Postulat (2) des ersten Paragraphen sowie nach Abschnitt 14 auch Postulat (3) enthalten. Weiter läßt sich auf dieser Grundlage leicht die Gültigkeit von (II) nachweisen: $x \perp y$ bedeutet $x - y \cong x + y$, woraus $(\alpha + \beta)x - (\alpha - \beta)y \cong (\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y$ folgt, das heißt mit $\lambda = \alpha + \beta$, $\mu = \alpha - \beta$ gesetzt $\lambda x \perp \mu y$. Umgekehrt ist das Postulat von *Nevanlinna* aber auch eine Folge von (I) und (II): $x \cong y$ liefert $\frac{1}{2}(x + y) \perp \frac{1}{2}(x - y)$, und daraus folgt $\lambda(x + y) \perp \mu(x - y)$, was mit $\alpha = \lambda - \mu$, $\beta = \lambda + \mu$ gesetzt $\alpha x + \beta y \cong \beta x + \alpha y$ bedeutet. Die von *Nevanlinna* ins Auge gefaßte Abschwächung der Forderung (B) entspricht also – unter ständiger Voraussetzung von (I) – genau unserer Ersetzung des „Winkelkongruenzpostulates" durch das „Orthogonalitätspostulat". *Also sind mit (I) und (II) auch* (2) *und* (3) *erfüllt.*

19. Die Forderungen (I) und (II) sind auch sinnvoll, wenn wir die bisherige Beschränkung auf die reellen Zahlen als Koeffizientenbereich des linearen Raumes L aufheben. In diesem Sinn wollen wir denn unseren Betrachtungen jetzt einen weiteren Rahmen geben. Jedoch verlangen wir stets, daß die skalaren Größen, welche zur Multiplikation mit den Raumelementen zugelassen werden, einen *Koeffizientenkörper K mit von* 2 *verschiedener Charakteristik bilden.* Dann läßt sich Eigenschaft (3) in der gezeigten Art aus (I) und (II) folgern, was bedeutet, daß in einem eindimen-

[12]) Die einschränkende Wirkung von (B) gegenüber diesem Postulat ist allerdings sehr geringfügig, was im folgenden gezeigt wird. Vgl. die Abschnitte 20 und 35.

sionalen Raum die Kongruenz entweder affin oder total sein muß. Umgekehrt sind bei diesen beiden Definitionen – $x \cong y$ genau für $y = \pm x$ bzw. $x \cong y$ für alle Elemente – die Forderungen (I) und (II) erfüllt, und zwar gilt dies für beliebige Dimensionen. Bei den höheren Dimensionen läßt sich das Beispiel der affinen Kongruenz dahin variieren, daß man ein beliebiges $a \neq o$ auszeichnet und zusätzlich verlangt, daß im Unterraum $L(a)$ die induzierte Kongruenz total sei. Man hat dann also $x \cong y$ für $y = \pm x$ stets erfüllt und zusätzlich auch stets dann und nur noch dann, wenn x und y in $L(a)$ liegen. Bei dieser affinen Kongruenz mit Ausartung in $L(a)$ sind die Postulate (I) und (II) wiederum erfüllt.

20. Eine Kongruenz mit den charakteristischen Eigenschaften (I) und (II) induziert in jedem Unterraum des betrachteten Raumes L eine ebensolche Kongruenz. Wir können also zuerst die Definitionsmöglichkeiten in Räumen kleiner Dimension studieren und daraus gewisse Schlüsse auf den allgemeinen Fall ziehen. In der Dimension 1 beschränken sich die Definitionsmöglichkeiten wie gezeigt auf die affine und die totale Kongruenz, welche im 0-dimensionalen Fall in trivialer Weise zusammenfallen. Für einen zweidimensionalen Raum L_2 haben wir als weitere Möglichkeiten die affinen Kongruenzen mit Ausartung gefunden.

Um hier zu neuen Beispielen zu kommen, muß man annehmen, daß zwei linear unabhängige Elemente a und b kongruent sind, daß also eine kongruente Basis a, b des L_2 existiert. Jedes Element x von L_2 kann eindeutig dargestellt werden in Form $x = \alpha a + \beta b$ und das Element $x' = \beta a + \alpha b$ ist ihm dann als kongruent zugeordnet. Setzt man als Definition fest, daß $x \cong y$ genau dann besteht, wenn entweder $y = \pm x$ oder aber $y = \pm x'$, so lassen sich die zur Diskussion stehenden zwei Postulate wiederum verifizieren. Das trifft auch dann zu, wenn man diese Definition dahin abändert, daß man zusätzlich in einem der beiden Unterräume $L(a \pm b)$ – wo x' mit $\pm x$ zusammenfällt – die induzierte Kongruenz als total erklärt, also zum Beispiel $x \cong y$ außerhalb $L(a - b)$ mit dem Bestehen einer der Relationen $y = \pm x$, $y = \pm x'$ gleichsetzt, in $L(a - b)$ aber stets als richtig betrachtet. Dieses letzterwähnte Beispiel ist insofern von besonderem Interesse, als hier zum erstenmal nur (II) und nicht auch (B) gültig ist. Aus $a \cong b$ und $a - b \cong o$ folgt nämlich bei Anwendung von (B) $(\lambda - 1)a + b \cong \lambda b$, mit $\lambda = 2$ also $a + b \cong 2b$ im Widerspruch zu unseren Festsetzungen. (B) ist also tatsächlich eine Einschränkung gegenüber (II).

21. Wollen wir die Aufzählung der Kongruenzen mit den Eigenschaften (I) und (II) in einem Raum L_2 fortsetzen, so tritt als neue Möglichkeit

diejenige auf, bei der eine kongruente Basis a, b derart existiert, daß es zudem ein von $\pm a$ sowie von $\pm b$ verschiedenes Element derselben Kongruenzklasse gibt. Mit dieser Existenzforderung schließen wir die im letzten Abschnitt beschriebenen singulären Fälle aus; wir wollen sie denn auch beim weiteren Studium im nächsten Paragraphen direkt zum Postulat erheben. Es zeigt sich dann nämlich bald, daß damit die Struktur der Kongruenz schon wesentlich präzisiert wird in Richtung auf die *Euklid*sche Geometrie hin. Dies gilt allerdings nur für den zweidimensionalen Raum, auf den die Zusatzforderung ja auch zugeschnitten ist, und es stellt sich die Frage, wie eine entsprechende Einschränkung in höheren Dimensionen vorzunehmen ist, wo die Mannigfaltigkeit der singulären Fälle noch weit umfangreicher sein wird. Im Zusammenhang mit dieser Frage wird es wünschenswert sein, das erwähnte Existenzpostulat zu einer dimensionsunabhängigen Forderung umzuformulieren derart, daß im allgemeinen Fall für die in einem zweidimensionalen Unterraum induzierte Kongruenz die Gültigkeit der gegebenen Existenzaussage zutrifft.

§ 4. Analyse des Orthogonalitätspostulates im L_2

22. Wie in den Abschnitten 20 und 21, betrachten wir in diesem Paragraphen einen *zweidimensionalen Raum L_2 über einem allgemeinen Koeffizientenkörper K mit von 2 verschiedener Charakteristik. In diesem Raum soll eine Kongruenz mit zugehöriger Orthogonalität analysiert werden, welche die Grundeigenschaft (I) und die Orthogonalstruktur (II) aufweise.* Um die bereits diskutierten singulären Fälle auszuschließen, fordern wir als für den zweidimensionalen Raum zugeschnittenes *Zusatzpostulat:*

Es existiert eine Kongruenzbasis des L_2. $\quad$ (III_2)

Darunter verstehen wir die geordnete Menge (a, b, c) dreier kongruenter Elemente von der Art, daß a, b eine lineare Basis des L_2 bilden und c von $\pm a$ sowie von $\pm b$ verschieden ist. Durch das triviale Beispiel der totalen Kongruenz in L_2 wird die Widerspruchslosigkeit der Forderungen (I), (II), (III_2) belegt. Auf Grund unserer bisherigen Ausführungen erkennt man auch, daß jede der drei Aussagen von den übrigen unabhängig ist. Weiter ist das Postulat (II) gemäß Abschnitt 18 gleichwertig damit, daß aus $x \simeq y$ stets $\lambda x + \mu y \simeq \mu x + \lambda y$ folgt; in dieser Form, welche wir den *Vertauschungssatz* nennen wollen, wird es im folgenden zumeist angewandt. Schließlich erinnern wir daran, daß durch (I) und (II) auch die früheren Postulate (2) und (3) impliziert sind.

23. Sei (a, b, c) eine *ausgeartete Kongruenzbasis*, was bedeute, daß ihre Elemente nicht paarweise linear unabhängig sind. Wegen (2) und (3) gilt dann $a \cong b \cong o$, also auch stets $\lambda a \cong b$, und der Vertau-

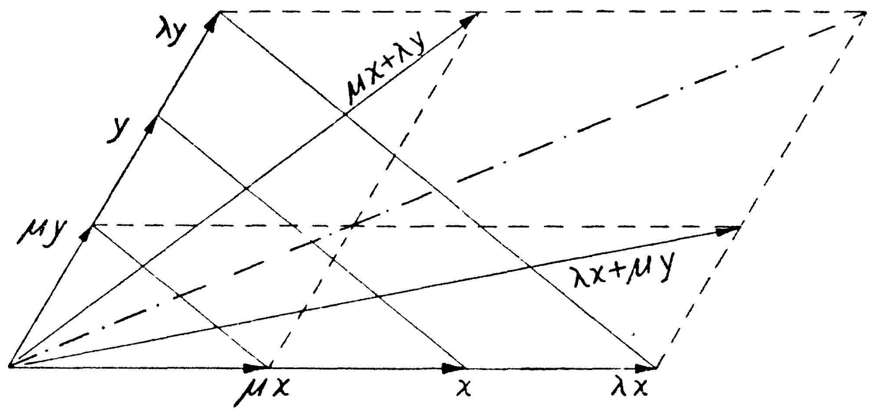

Abbildung: Der Vertauschungssatz $(x \cong y) \rightarrow (\lambda x + \mu y \cong \mu x + \lambda y)$.

schungssatz liefert daraus $\delta \lambda a + \beta b \cong \beta \lambda a + \delta b$. Das zeigt, daß mit $\alpha\beta = \gamma\delta$ stets $\alpha a + \beta b \cong \gamma a + \delta b$ gilt, ein Resultat, auf das wir später zurückgreifen. Hier schließen wir noch die Feststellung an, daß die mit einem $\lambda \neq 0$ gebildeten Elemente

$$a' = a + b \ , \qquad b' = \lambda a + \frac{1}{\lambda} b \ , \qquad c' = \frac{1}{\lambda} a + \lambda b$$

nach dem Gezeigten kongruent sind. Unter Voraussetzung von $\lambda^2 \neq \pm 1$ sind sie auch paarweise linear unabhängig, womit gezeigt ist: Enthält K eine Zahl $\lambda \neq 0$ mit $\lambda^2 \neq \pm 1$, so existiert stets eine nichtausgeartete Kongruenzbasis des L_2.

24. Wir betrachten jetzt eine *nichtausgeartete Kongruenzbasis* (a, b, c) des L_2 gegeben, das heißt je zwei der kongruenten Elemente a, b, c sollen den L_2 aufspannen. Jedes Element x läßt sich dann eindeutig zerlegen in die Linearkombinationen $x = \alpha a + \beta b = \beta' b + \gamma c = \gamma' c + \alpha' a$. Durch den Vertauschungssatz werden diesem allgemeinen Element x die drei Elemente $x_1 = \beta a + \alpha b$, $x_2 = \gamma b + \beta' c$, $x_3 = \alpha' c + \gamma' a$ als kongruent zugeordnet. Speziell sind dann auch wieder jedem Element x_i drei Elemente $x_{ik} = (x_i)_k$ als kongruent zugeordnet. Definieren wir induktiv $x_{i_1 \cdots i_n} = (x_{i_1 \cdots i_{n-1}})_{i_n}$, wobei die Indizes i_ν immer Zahlen aus der Menge $1, 2, 3$ bedeuten, so gilt wegen dem Äquivalenzcharakter der Kongruenz $x_{i_1 \cdots i_n} \cong x$. Wir haben so ein Verfahren entwickelt, das einem beliebig vorgegebenen Element x eine Folge $x_{i_1 \cdots i_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ von Elementen zuordnet, die sämtliche der Kongruenzklasse von x angehören. In den Folgen $a_{i_1 \cdots i_n}$, $b_{i_1 \cdots i_n}$, $c_{i_1 \cdots i_n}$ haben wir insbesondere Elemente, welche alle zu denjenigen der vor-

gegebenen Kongruenzbasis kongruent sind. Auf die Folge aller dieser Elemente verweist *Nevanlinna* in seiner Mitteilung, und zwar insbesondere auf die Tatsache, daß sie als Ortsvektoren in der reellen Geometrie gedeutet Punkte auf einem Kegelschnitt mit Mittelpunkt bestimmen. Unter Annahme, daß die so erhaltene Folge von Punkten auf der Kegelschnittkurve überall dicht liegt (im Sinne der affinen Topologie in L_2), legt die zusätzliche Forderung einer stetigen Eichkurve den Kegelschnitt und damit eine quadratische Form als metrische Fundamentalform fest. Wie wir sehen werden, ist diese Einführung zusätzlicher Annahmen topologischer Natur überflüssig, das heißt es läßt sich mit unseren Postulaten allein darauf schließen, daß alle Punkte des erwähnten Kegelschnittes zueinander kongruente Ortsvektoren bestimmen.

25. Sei $c = \varphi a + \psi b$ die eindeutige Darstellung des Elementes c der Kongruenzbasis (a, b, c) durch die lineare Basis a, b. Ist (a, b, c) nichtausgeartet, so gilt $\varphi \cdot \psi \neq 0$, und wir können der Kongruenzbasis durch die Festsetzung $2\Omega\varphi\psi = 1 - \varphi^2 - \psi^2$ eindeutig eine *charakteristische Zahl* Ω zuordnen. Bei der Berechnung der im letzten Abschnitt konstruierten Elemente $x_{i_1 \dots i_n}$ als Linearkombinationen von a und b erhält man dann speziell $x_{23} = -\beta a + (2\Omega\beta + \alpha)b$ und $x_{32} = (2\Omega\alpha + \beta)a - \alpha b$.

26. Aus $x_{23} \cong x_{32}$ liefert der Vertauschungssatz $\lambda x_{23} + \mu x_{32} \cong \mu x_{23} + \lambda x_{32}$. Für $\Omega = 0$ ist dies trivial, da dann $x_{23} = -x_{32}$. Wir schließen diesen Fall vorläufig aus und nehmen für einen Moment auch $\alpha \neq 0$ an. Dann können λ und μ so gewählt werden, daß $\lambda \neq 0$ und $\lambda(2\Omega\beta + \alpha) = \mu\alpha$. Beim Einsetzen der oben gegebenen Darstellungen von x_{23} und x_{32} erhält man dann $(\alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega\alpha\beta)a \cong (\alpha^2 - \beta^2)a + 2\beta(\alpha + \Omega\beta)b$. Dies ist aber auch für $\alpha = 0$ richtig, bedeutet es doch dann $\beta^2 a \cong \beta^2 b_{23}$. Schließlich haben wir noch den Fall $\Omega = 0$ zu erledigen, was durch Anwendung des Vertauschungssatzes auf $x \cong x_{32}$ möglich ist. Mit $\Omega = 0$ gilt $x_{32} = \beta a - \alpha b$, und also bedeutet $\lambda x + \mu x_{32} \cong \mu x + \lambda x_{32}$, wenn wir $\beta \neq 0$ annehmen und λ, μ nach den Bedingungen $\lambda \neq 0$, $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$ wählen, $(\alpha^2 + \beta^2)b \cong (\beta^2 - \alpha^2)a - 2\alpha\beta b$, was auch $(\alpha^2 + \beta^2)a \cong (\alpha^2 - \beta^2)a + 2\alpha\beta b$ nach sich zieht. In dieser letzten Beziehung darf offenbar auch $\beta = 0$ zugelassen werden und weiter stellt sie gerade den Fall $\Omega = 0$ in der oben hergeleiteten Relation dar. Somit ist diese ohne Einschränkung gültig, und zwar – da $x = \alpha a + \beta b$ beliebig gewählt wurde – für irgendwelche Koeffizienten α und β.

27. Mit $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega\alpha\beta$ gesetzt, läßt sich die eben bewiesene Formel durch $\Phi(\alpha, \beta)a \cong (\alpha^2 - \beta^2)a + 2\beta(\alpha + \Omega\beta)b$ wieder-

geben. Ordnen wir weiter die hier rechtsstehende Linearkombination von a und b dem Element $x = \alpha a + \beta b$ als Bildelement

$$z(x) = (\alpha^2 - \beta^2)\, a + 2\beta(\alpha + \Omega\beta) b$$

zu, so können wir kurz $z(x) \cong \Phi(x) a$ schreiben, wobei für $\Phi(\alpha, \beta)$ noch $\Phi(x) = \Phi(\alpha a + \beta b)$ eingeführt ist. Aus den Definitionen von $\Phi(x)$ und $z(x)$ berechnen sich die Hilfsformeln $\Phi(z(x)) = (\Phi(x))^2$ und $z(x) + \Phi(x) a = 2(\alpha + \Omega\beta) x$. Betrachten wir speziell ein Element x mit $\Phi(x) = 0$. Dann gilt $z(x) \cong o$ und aus den Hilfsformeln folgt $(\alpha + \Omega\beta) x \cong o$. Mit $\alpha + \Omega\beta \neq 0$ läßt sich daraus auf $x \cong o$ schließen. Dies gilt trivialerweise für $x = o$; mit $x \neq o$ kann $\alpha + \Omega\beta = 0$ neben $\Phi(x) = 0$ höchstens für $\Omega = \pm 1$ auftreten. Damit ist gezeigt: Ist $\Omega \neq \pm 1$, so folgt aus $\Phi(x) = 0$ stets $x \cong o$.

28. Wenden wir uns jetzt dem Falle $\Phi(x) \neq 0$ zu. Hier können wir weiter durch $z(x) = \Phi(x) e(x)$ eine Abbildung $e(x)$ einführen, für die sich die Eigenschaften $e(x) \cong a$, $\Phi(e(x)) = 1$ und $e(e(x) + a) = e(x)$ ergeben.

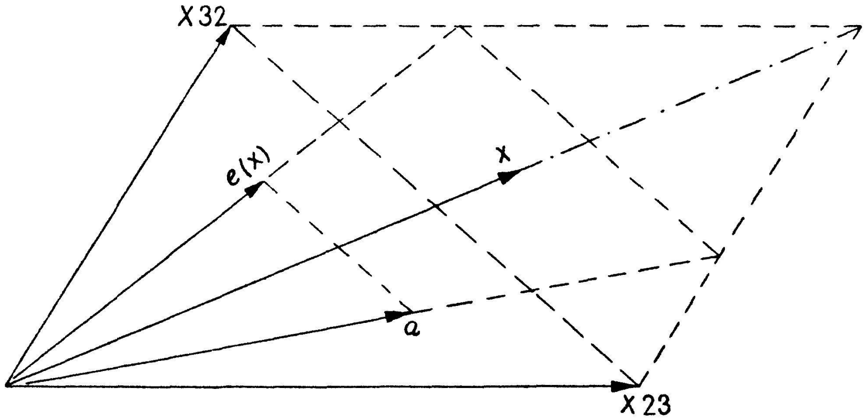

Abb.: Konstruktion von $e(x)$ aus a, x_{23} und x_{32} $(\Omega \neq 0)$

Sei $y = \varrho a + \sigma b$ ein Element mit $\Phi(y) = 1$. Hieraus berechnet sich $\Phi(y + a) = 2(1 + \varrho + \Omega\sigma)$, darnach $\varrho\Phi(y + a) = (\varrho + 1)^2 - \sigma^2$ und $\sigma\Phi(y + a) = 2\sigma(\varrho + 1 + \Omega\sigma)$. Das bedeutet $z(y + a) = \Phi(y + a) y$. Setzen wir $\Phi(y + a) \neq 0$ voraus, so können wir $e(y + a)$ bilden und erhalten $e(y + a) = y$, was $y \cong a$ induziert. Ist $\Phi(y + a) = 0$, so gilt notwendigerweise $\Phi(-y + a) \neq 0$ und es ergibt sich nach obiger Beweisführung $-y \cong a$, also auch wiederum $y \cong a$. Aus $\Phi(y) = 1$ folgt somit stets $y \cong a$, allgemeiner nach den Äquivalenzgesetzen aus $\Phi(x) = \Phi(y) = 1$ stets $x \cong y$. Das ist die in Abschnitt 24 aufgestellte Behauptung.

29. Für die in Abschnitt 24 gegebene Folge $x_{i_1 \cdots i_n}$ von zu $x = \alpha a + \beta b$ kongruenten Elementen berechnet sich $\Phi(x_{i_1 \cdots i_n}) = \Phi(x)$.

Weiter erkennt man leicht, daß mit $\Phi(x) \neq 0$ diese Folge zwei Elemente $\bar{x}$ und $\bar{\bar{x}}$ enthält, so daß $(x, \bar{x}, \bar{\bar{x}})$ eine nichtausgeartete Kongruenzbasis darstellt. Ist also $\Phi(x) = \Phi(y) = \pi \neq 0$ gegeben, so gibt es eine nichtausgeartete Kongruenzbasis (u, v, w) mit $\Phi(u) = \Phi(v) = \Phi(w) = \pi$. Ordnet man dieser Kongruenzbasis in gleicher Weise, wie

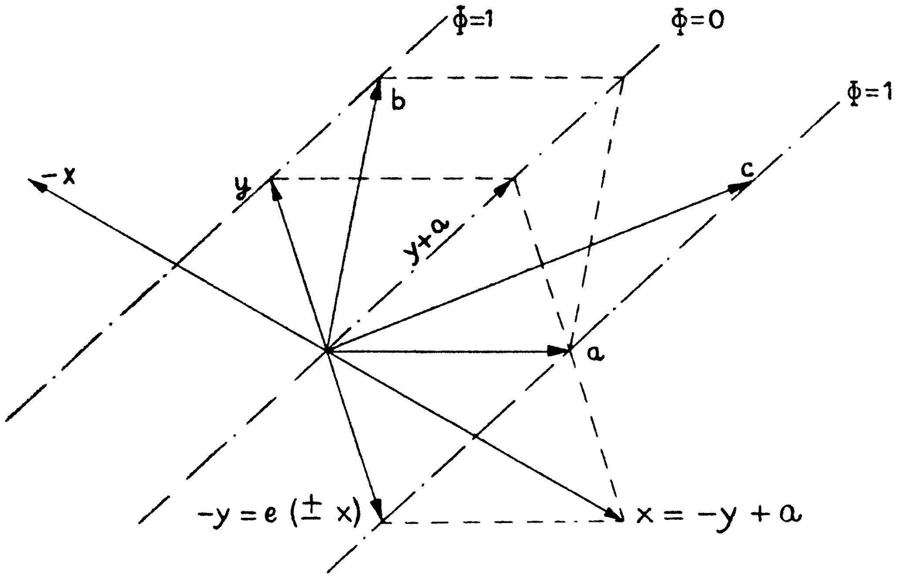

Abbildung: Veranschaulichung des Falles $\Omega = -1$.

wir das für (a, b, c) getan haben, eine Funktion $\Phi'(x)$ in L_2 zu, so gilt $\Phi = \pi\Phi'$ und damit $\Phi'(x) = \Phi'(y) = 1$, was nach den Überlegungen des letzten Abschnittes $x \cong y$ impliziert. In Verallgemeinerung des Resultates von Abschnitt 28 können wir also sagen: Aus $\Phi(x) = \Phi(y) \neq 0$ folgt stets $x \cong y$.

30. Um die gewonnenen Resultate in einer übersichtlicheren Form auszusprechen, ordnen wir jetzt jeder Kongruenzbasis (a, b, c) in L_2 eindeutig eine *symmetrische Bilinearform* Φ zu, das heißt eine Funktion $\Phi(x, y)$ in L_2 mit Funktionswerten in K und mit folgenden charakteristischen Eigenschaften: $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$, $\Phi(\lambda x, y) = \lambda\Phi(x, y)$, $\Phi(x + x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$. Falls (a, b, c) ausgeartet ist, soll Φ durch die Festsetzungen $\Phi(a, a) = \Phi(b, b) = 0$ und $\Phi(a, b) = \frac{1}{2}$ bestimmt sein; falls (a, b, c) nichtausgeartet ist durch $\Phi(a, a) = \Phi(b, b) = 1$ und $\Phi(a, b) = \Omega$ mit der charakteristischen Zahl Ω der Kongruenzbasis. $x = \alpha a + \beta b$, $y = \gamma a + \delta b$ gesetzt, liefert im ersten Fall $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}(\alpha\delta + \beta\gamma)$, insbesondere $\Phi(x, x) = \alpha\beta$, so daß nach Abschnitt 23 aus $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ stets $x \cong y$ folgt. Im zweiten Fall wird $\Phi(x, y) = \alpha\gamma + \beta\delta + \Omega(\alpha\delta + \beta\gamma)$, insbesondere $\Phi(x, x) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\Omega\alpha\beta$, also gleich unserer bisherigen Funktion $\Phi(x)$, so daß

hier die Resultate der Abschnitte 27 und 29 das Theorem ergeben: Aus $\Phi(x, x) = \Phi(y, y) \neq 0$ folgt $x \cong y$, und dasselbe gilt für $\Phi(x, x) = \Phi(y, y) = 0$, falls $\Phi(a, b) \neq \pm 1$.

31. Das Ergebnis unserer Analyse besteht also in folgendem *Hauptsatz: Ist Φ die einer Kongruenzbasis (a, b, c) zugeordnete Bilinearform und gilt $\Phi(a, b) \neq \pm 1$, so folgt aus $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ stets $x \cong y$. Im Falle $\Phi(a, b) = \pm 1$ gilt $x \cong y$ mit $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ sicher stets dann, wenn zusätzlich $\Phi(x, x) \neq 0$ erfüllt ist.*

Es stellt sich natürlich sofort die Frage, ob die Sonderstellung des Falles $\Phi(a, b) = \pm 1$ hier notwendig ist. Wie wir in Abschnitt 36 sehen werden, trifft dies tatsächlich zu. Nach den Bilinearitätsgesetzen folgt aus $\Phi(x, y) = 0$ sofort $\Phi(x+y, x+y) = \Phi(x-y, x-y)$, was folgenden Zusatz zum genannten Ergebnis liefert: Ist Φ die einer Kongruenzbasis (a, b, c) zugeordnete Bilinearform und gilt $\Phi(a, b) \neq \pm 1$, so folgt aus $\Phi(x, y) = 0$ stets $x \perp y$. Im Falle $\Phi(a, b) = \pm 1$ gilt $x \perp y$ mit $\Phi(x, y) = 0$ sicher stets dann, wenn zusätzlich $\Phi(x, x) + \Phi(y, y) \neq 0$ erfüllt ist.

§ 5. Diskussion im reellen L_2

32. Wir beschränken uns hier wieder auf den *reellen Koeffizientenkörper* und betrachten vorerst neben den Postulaten (I), (II), (III_2) auch die frühere Forderung (4) erfüllt, wonach $x \cong o$ nur für $x = o$ gilt. Dann ist jede Kongruenzbasis (a, b, c) nichtausgeartet und die zugeordnete Bilinearform Φ notwendig nicht indefinit, was $\Phi(x, x)\Phi(y, y) \geqslant 0$ impliziert. Mit $\Phi(x, x) \neq 0$ gibt es dann ein $\lambda \geqslant 0$, so daß $\Phi(y, y) = \lambda^2 \Phi(x, x) = \Phi(\lambda x, \lambda x)$ und damit $y \cong \lambda x$. Setzen wir noch $x \cong y$ voraus, so folgt $x \cong \lambda x$, das heißt wegen (4) $\lambda = 1$. Aus $\Phi(x, x) \neq 0$ und $x \cong y$ folgt also $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$. Ist die Form definit ($|\Phi(a, b)| < 1$), so ist $x \cong y$ demnach genau dann erfüllt, wenn $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$.

33. Wir bezeichnen eine symmetrische Bilinearform Φ von der Eigenschaft, daß $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ mit $x \cong y$ äquivalent ist, als *Fundamentalform der zugrunde gelegten Kongruenz.* Ist eine solche gegeben, so ist auch $\lambda\Phi$ eine Fundamentalform, sofern $\lambda \neq 0$. Ist u nicht $\cong o$, so existiert also eine Fundamentalform Φ' mit $\Phi'(u, u) = 1$, nämlich gemäß $\Phi = \Phi(u, u)\Phi'$. Wir nennen diesen Übergang von Φ zu Φ' die *Normierung der Fundamentalform* Φ auf die Einheit u und können also sagen: Ist u nicht $\cong o$, so läßt sich jede Fundamentalform der Kongruenz auf die Einheit u normieren. Damit ergibt sich leicht, daß die Fundamentalform einer Kongruenz bis auf die Normierung eindeutig bestimmt ist.

34. Ist einer Kongruenzbasis (a, b, c) der durch (I), (II), (III_2) und (4) charakterisierten Kongruenz eine definite Bilinearform zugeordnet, so stellt diese nach Abschnitt 32 die bis auf die Normierung eindeutig bestimmte Fundamentalform der Kongruenz dar. Ist die zugeordnete Bilinearform dagegen semidefinit ($|\Phi(a, b)| = 1$), so gilt die Äquivalenz von $x \cong y$ mit $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ nur außerhalb der Geraden L_1, in der $\Phi = 0$; innerhalb L_1 muß die Kongruenz wegen (4) gesondert affin sein, das heißt jedes z mit $\Phi(z, z) = 0$ kann nur zu $\pm z$ kongruent sein. Die den verschiedenen Kongruenzbasen zugeordneten Bilinearformen stellen auch hier eine bis auf Normierung eindeutig bestimmte „Fundamentalform" dar, doch ist diese in dem erwähnten Sinne ausgeartet. Zusammenfassend können wir als Ergebnis dieser Analyse festhalten: *Eine den Postulaten (I), (II), (III_2) und (4) genügende Kongruenz im reellen L_2 besitzt entweder eine definite Fundamentalform oder eine semidefinite ausgeartete Fundamentalform.*

35. Eine Kongruenz mit definiter Fundamentalform genügt auch dem früheren Postulat (5) der vollständigen Vergleichbarkeit. Umgekehrt implizieren (I), (II) und (5) die Existenzforderung (III_2) und zusammen mit (4) ergibt sich dann, daß die Kongruenz eine definite Fundamentalform besitzt. Damit gelten auch die Postulate (A) und (B) der Winkelkongruenzstruktur, das heißt es sind hier sämtliche *Hilbert*schen Kongruenzeigenschaften erfüllt. Wir haben gezeigt: *Durch die Postulate (I), (II), (4) und (5) werden die Hilbertschen Kongruenzen charakterisiert.* Das bedeutet, daß in dem in Abschnitt 15 gegebenen System der die *Hilbert*schen Kongruenzen bestimmenden Postulate (I), (B), (4) und (5) die *Moore*sche Forderung (B) durch das schwächere Orthogonalitätspostulat (II) ersetzt werden kann. Weiter können (4) und (5) durch folgende Verschärfung von (III_2) ersetzt werden:

Es existiert eine orthonormierte Basis des L_2. (III^*_2)

Darunter verstehen wir eine lineare Basis nicht zu o kongruenter Elemente a, b mit $a \cong b$ und $a \perp b$. Es ist trivial, daß (III^*_2) in einer Kongruenz mit definiter Fundamentalform gilt. Umgekehrt liefern (I), (II), (III^*_2) die Gültigkeit von (III_2) sowie das Bestehen einer definiten Fundamentalform.

36. Geben wir in einem Raum L_2 eine definite Bilinearform Φ vor und erklären wir sie zur Fundamentalform einer Kongruenz, das heißt definieren wir $x \cong y$ durch $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$, so ist dadurch eine *Hilbert*sche Kongruenz in L_2 bestimmt. Damit ist der gewünschte Überblick über

diese Kongruenzen gewonnen: *Jede Hilbertsche Kongruenz im reellen L_2 besitzt eine definite Fundamentalform, und jede definite Bilinearform in L_2 bestimmt eine Hilbertsche Kongruenz, deren Fundamentalform sie ist.* Wird eine semidefinite Bilinearform im L_2 als ausgeartete Fundamentalform im Sinne von Abschnitt 34 vorgegeben, so erfüllt auch die hier zugehörige Kongruenz die Postulate (I), (II), (III_2) und (4). Das bedeutet, daß die Sonderstellung des Falles $\Phi(a, b) = \pm 1$ im Hauptsatz des letzten Paragraphen wirklich notwendig ist.

37. Die Einführung einer semidefiniten Bilinearform als nichtausgeartete Fundamentalform ergibt eine Kongruenz mit den Eigenschaften (I), (II) und (III_2) unter Wegfall von (4). Dasselbe gilt bei der Zugrundelegung einer indefiniten Fundamentalform. Anderseits stellt man fest, daß jede Kongruenz, welche den Forderungen (I), (II), (III_2) gehorcht ohne (4) zu erfüllen, eine Fundamentalform besitzen muß. Für solche Kongruenzen folgt nach Abschnitt 32 für die einer Kongruenzbasis zugeordnete Bilinearform Φ aus $\Phi(x, x)\Phi(y, y) \geqslant 0$ und $x \cong y$ entweder $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ oder $x \cong o$. Mit $\Phi(x, x) \neq 0$ und $x \cong o$ ergibt sich sofort, daß die Kongruenz total ist und damit die konstante Fundamentalform $\Phi^* = 0$ besitzt. Schließen wir diesen Fall aus, so ist die Äquivalenz von $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ mit $x \cong y$ für $\Phi(x, x)\Phi(y, y) \geqslant 0$ gesichert. Für eine semidefinite Form Φ ist daraus die gegebene Behauptung ersichtlich. Es bleiben noch die indefiniten Formen Φ, bei denen man die Kongruenzbasis speziell als ausgeartet annehmen kann. Hier muß man noch zeigen, daß $x \cong y$ mit $\Phi(x, x)\Phi(y, y) < 0$ unverträglich ist. Da der Beweis hierfür in späteren Betrachtungen enthalten sein wird, soll er hier nicht aufgeführt werden.

38. Zusammengefaßt hat die Diskussion dieses Paragraphen gezeigt: *Eine den Postulaten (I), (II) und (III_2) genügende Kongruenz im reellen L_2 besitzt entweder eine Fundamentalform oder eine semidefinite ausgeartete Fundamentalform. Umgekehrt bestimmt jede symmetrische Bilinearform in L_2 eine Kongruenz mit den Eigenschaften (I), (II) und (III_2), deren Fundamentalform sie ist.* Semidefinite Formen dürfen dabei auch als ausgeartete Fundamentalformen angesetzt werden.

Der indefinite Fall, welcher die sogenannte *Lorentz*sche Metrik in L_2 darstellt, kann dadurch ausgesondert werden, daß man (III_2) ersetzt durch die Forderung:

Es existiert eine zu o kongruente lineare Basis des L_2. (III^{**}_2)

Hierbei ist als Ausartung auch die konstante Fundamentalform zugelassen.

§ 6. Normalprojektion

39. Um den Sonderfall der Kongruenzen mit ausgearteter Fundamentalform im reellen L_2 auszuschließen, kann man nach einer das Postulat (III_2) ersetzenden Eigenschaft fragen, die bei nichtausgearteten Fundamentalformen gilt, im erwähnten Sonderfall aber verletzt wird. Eine Ersetzung von (III_2) ist auch wie schon früher erörtert im Hinblick auf den Übergang zu höheren Dimensionen wünschenswert; nämlich die Ersetzung durch ein dimensionsunabhängiges Postulat. Schließlich gestattet eine solche Abänderung der zugrunde gelegten charakteristischen Eigenschaften vielleicht auch eine einfache Weiterführung der Analyse des Paragraphen 4 bei allgemeinen Koeffizientenkörpern. Eine die drei genannten Gesichtspunkte befriedigende Eigenschaft wird durch die *Einführung des Begriffes der Normalprojektion* geliefert, wobei wir folgende Definition zugrunde legen: *Eine Darstellung* $x = \lambda u + h$ *heiße Normalprojektion von* x *auf* u, *sofern* $h \perp u$. Existiert eine solche Normalprojektion, so sagen wir kurz, x läßt sich auf u normalprojizieren. Das bedeutet also die Existenz einer Zahl λ, so daß $x - \lambda u \perp u$ oder nach Definition der Orthogonalität $x - (\lambda + 1)u \cong x - (\lambda - 1)u$. Trifft dies aber auch nur für einen bestimmten Koeffizienten λ zu, so reden wir von einer eindeutigen Normalprojektion von x auf u.

40. Um zu der erwähnten Ersatzforderung für (III_2) zu gelangen, betrachten wir wieder den zweidimensionalen Raum L_2 über einem allgemeinen Koeffizientenkörper K und darin eine Kongruenz mit den Eigenschaften (I), (II), (III_2). In (a, b, c) sei eine Kongruenzbasis ausgewählt, und Φ sei wieder die ihr zugeordnete Bilinearform. Nehmen wir vorerst $\Phi(a, b) \neq \pm 1$ an, so folgt nach dem Hauptsatz des Paragraphen 4 aus $\Phi(x,x) = \Phi(y,y)$ stets $x \cong y$ und aus $\Phi(x,y) = 0$ stets $x \perp y$. Zu u nicht $\cong o$ gibt es dann für jedes x eine Zahl δ, so daß $\Phi(x, u) = \delta\Phi(u, u)$, und man verifiziert sofort $x - \delta u \perp u$, das heißt jedes x läßt sich auf u normalprojizieren. Im Falle $\Phi(a, b) = \pm 1$ erkennt man leicht, daß überhaupt jedes Element x sich auf jedes Element u normalprojizieren läßt. Also können wir in der in Paragraph 4 geführten Analyse den Satz aussprechen: Ist u nicht $\cong o$, so läßt sich jedes x auf u normalprojizieren.

41. Es liegt nun nahe, zu fragen, ob der obige Satz – an Stelle von Postulat (III_2) gesetzt – umgekehrt die Existenz einer Kongruenzbasis des L_2 garantiert. Seien u, v zwei linear unabhängige Elemente des L_2. Mit $u \cong v \cong o$ ist (u, v, o) eine Kongruenzbasis. Wir können demnach für das weitere u nicht $\cong o$ voraussetzen. Dann läßt sich v auf u normal-

projizieren, das heißt es gibt ein λ, so daß $v-(\lambda+1)u \cong v-(\lambda-1)u$. Dabei sind $a=v-(\lambda+1)u$ und $b=v-(\lambda-1)u$ wieder linear unabhängig. Gehören sie zur Kongruenzklasse von o, so haben wir in (a, b, o) eine Kongruenzbasis. Andernfalls gibt es eine Normalprojektion $b=\mu a+h$ von b auf a, was $b-2\mu a \cong b$ impliziert. Mit $\mu \neq 0$ stellt dann $(a, b, b-2\mu a)$ eine Kongruenzbasis dar. Schließlich haben wir noch den Fall $\mu=0$, das heißt $a \perp b$, zu betrachten. Hier ist $(\delta a-b, \delta a+b, a+\delta b)$ eine Kongruenzbasis, sobald $\delta \neq 0$ und $\delta \neq \pm 1$. Setzen wir die Existenz einer solchen Zahl δ voraus, so kann also die eingangs dieses Abschnittes gestellte Frage in positivem Sinne beantwortet werden.

42. Die oben gemachte Zusatzbedingung über K, daß eine von 0 und ± 1 verschiedene Zahl existiere, ist auch tatsächlich notwendig für die dort bewiesene Behauptung. Sie soll fortan als erfüllt betrachtet werden, und zwar wollen wir stärker *annehmen, daß der Koeffizientenkörper eine von* 0 *verschiedene Zahl enthalte, deren Quadrat nicht gleich* ± 1 *sei.* Dann läßt sich (III_2) also ersetzen durch das dimensionsunabhängig formulierte Postulat:

Ist u nicht $\cong o$, so läßt sich jedes Element auf u normalprojizieren. (III.)

Weiter gibt es dann nach Abschnitt 23 sogar immer eine nichtausgeartete Kongruenzbasis.

43. Innerhalb des Systems (I), (II), (III) kann das Postulat (I) in folgender Abschwächung genommen werden:

$$\text{Aus } x \cong z,\ y \cong z \text{ folgt } x \cong y\,. \qquad \text{(I.)}$$

Der andere Teil, die Forderung $x \cong -x$ für jedes x, wird nämlich hier logisch abhängig. Beweis: Ist $-x$ nicht $\cong o$, so folgt durch Normalprojektion $(\lambda-1)x \perp -x$ von $-x$ auf sich $o \perp -x$, was gerade $x \cong -x$ bedeutet. Mit obigem (I) erhalten wir weiter $x \cong x$. Dies ist auch richtig, falls $-x \cong o$, da dann $-x \cong -x$, damit $-x \perp o$, weiter $x \perp o$, somit $x \cong x$. Wir haben so die Reflexivität der Kongruenz verifiziert, und damit folgt aus obiger Transitivität ihr Äquivalenzcharakter. Das bedeutet wiederum, daß mit $x \cong y$ stets $\frac{1}{2}(x+y) \perp \frac{1}{2}(x-y)$ und damit $-\frac{1}{2}(x+y) \perp \frac{1}{2}(x+y)$, was $-x \cong -y$ liefert. Hieraus ergibt sich $x \cong -x$ auch für den Fall $-x \cong o$.

44. Betrachten wir wieder speziell den reellen L_2 und darin eine den Postulaten (I), (II), (III) genügende Kongruenz. Unter Voraussetzung einer Fundamentalform Φ ist nach den Bilinearitätsgesetzen jede Nor-

malprojektion auf ein nicht zu o kongruentes u eindeutig bestimmt. Im Falle einer semidefiniten Form Φ haben wir mit $\Phi(u,u) = 0$ und $\Phi(x,x) \neq 0$ stets $\Phi(x - \lambda u, u) = \Phi(x,u) = 0$ und $\Phi(x - \lambda u, x - \lambda u) = \Phi(x,x) \neq 0$, also $x - \lambda u \perp u$ für beliebiges λ, so daß die Normalprojektion von x auf u dann mehrdeutig ist. Die Forderung der Eindeutigkeit jeder Normalprojektion auf ein nicht zu o kongruentes u würde hier also $u \cong o$ verlangen und somit die ausgearteten Fundamentalformen verunmöglichen. Allgemeiner fällt mit dieser Forderung nach dem hier gegebenen Beweis die Sonderstellung des Falles $\Phi(a,b) = \pm 1$ im Hauptsatz des Paragraphen 4 weg. Verlangen wir also neben (I), (II) und (III) auch die Eindeutigkeit der Normalprojektion, so sind dadurch im reellen L_2 genau jene Kongruenzen charakterisiert, welche sich durch eine beliebige Fundamentalform beschreiben lassen. Dasselbe gilt, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, für einen allgemeinen L_2, das heißt für einen beliebigen Koeffizientenkörper K mit den von uns verlangten Eigenschaften.

§ 7. Normale Kongruenzen

45. Entsprechend den Betrachtungen im vorangehenden Paragraphen definieren wir: *Eine Kongruenz (mit zugehöriger Orthogonalität und Normalprojektion) heißt normal, wenn sie folgende vier Postulate erfüllt:*

(I.) Aus $x \cong z$, $y \cong z$ folgt $x \cong y$.

(II.) Aus $x \perp y$ folgt stets $\lambda x \perp y$.

(III.) Ist u nicht $\cong o$, so läßt sich jedes x auf u normalprojizieren.

(IV.) Die Normalprojektion von x auf ein nicht zu o kongruentes u ist eindeutig bestimmt.

Durch das triviale Beispiel der totalen Kongruenz wird die Widerspruchslosigkeit dieser Aussagen belegt, und auf Grund unserer Untersuchungen ist auch klar, daß die Postulate lauter voneinander unabhängige Forderungen darstellen.

46. *Nach unseren Abmachungen setzen wir vom Koeffizientenkörper K voraus, daß seine Charakteristik von 2 verschieden sei und daß er eine Zahl $\lambda \neq 0$ mit $\lambda^2 \neq \pm 1$ enthalte.* Dann gilt das Theorem, daß eine normale Kongruenz in einem zweidimensionalen Raum L_2 eine nichtausgeartete Kongruenzbasis im Sinne des Paragraphen 4 besitzt, und also gilt der dortige Hauptsatz, und zwar in der Verschärfung: Ist Φ die einer Kon-

gruenzbasis des L_2 zugeordnete Bilinearform, so folgt aus $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ stets $x \cong y$ und damit aus $\Phi(x, x) = 0$ stets $x \perp y$. Diese Schlüsse lassen sich jetzt für nichttotale Kongruenzen auch leicht umkehren, so daß der Begriff der Fundamentalform, wie er in Paragraph 5 bei reellen Koeffizienten verwendet wurde, allgemein eingeführt werden kann.

47. Sei (a, b, c) eine nichtausgeartete Kongruenzbasis einer normalen Kongruenz in L_2 und Φ die ihr zugeordnete Bilinearform. In u und z nehmen wir zwei kongruente Elemente als gegeben an, für die $\Phi(u, u) \neq \Phi(z, z)$. Wir behaupten, daß die Kongruenz dann total sein muß, also umgekehrt, daß bei nichttotaler Kongruenz mit $x \cong y$ auch $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ gelten muß. Ohne Einschränkung kann $\Phi(u, u) = \pi \neq 0$ vorausgesetzt werden, so daß nach Abschnitt 29 eine nichtausgeartete Kongruenzbasis (u, v, w) mit $\Phi(u, u) = \Phi(v, v) = \Phi(w, w) = \pi$ existiert. Dieser ist die Bilinearform $\Phi' = \Phi/\pi$ zugeordnet. (u, v, z) ist wieder eine Kongruenzbasis mit zugeordneter Bilinearform Ψ. Nehmen wir (u, v, z) nichtausgeartet an, so gilt für beliebiges x:

$$
\begin{aligned}
x - \Phi'(x, u)u \perp u \quad &, \quad x - \Psi(x, u)u \perp u \ , \\
x - \Phi'(x, v)v \perp v \quad &, \quad x - \Psi(x, v)v \perp v \ .
\end{aligned}
$$

Unter Voraussetzung, daß u nicht $\cong o$ ist, muß damit sowohl $\Phi'(x, u) = \Psi(x, u)$ als auch $\Phi'(x, v) = \Psi(x, v)$ gelten, woraus $\Psi = \Phi'$ ersichtlich ist. Insbesondere erhalten wir so $\Phi(z, z) = \pi\Psi(z, z) = \pi = \Phi(u, u)$ im Widerspruch zu unseren Grundvoraussetzungen. Die Zusatzannahmen u nicht $\cong o$ und (u, v, z) nichtausgeartet vertragen sich also nicht, was $u \cong o$ besagt. Also stellt (u, v, o) eine Kongruenzbasis dar, welcher die Bilinearform χ zugeordnet sei. Zu einem nicht zu o kongruenten r läßt sich dann ein s finden, so daß $\chi(r, r) = \chi(s, s)$, also $r \cong s$, aber $\Phi(r, r) \neq \Phi(s, s)$. Nach dem Schluß von oben folgt dann der Widerspruch $r \cong o$. Also gibt es kein solches r: die Kongruenz ist total.

48. Das gewonnene Ergebnis läßt sich so deuten, daß eine bis auf Normierung eindeutig bestimmte Fundamentalform existiert. Umgekehrt bestimmt auch im allgemeinen L_2 jede symmetrische Bilinearform Φ durch die Definition von $x \cong y$ mittels $\Phi(x, x) = \Phi(y, y)$ eine normale Kongruenz, so daß wir folgenden *Hauptsatz für zweidimensionale Räume* aussprechen können: *Jede normale Kongruenz im (allgemeinen) L_2 besitzt eine Fundamentalform, und umgekehrt bestimmt jede symmetrische Bilinearform in L_2 eine normale Kongruenz, deren Fundamentalform sie ist.* Unsere normalen Kongruenzen stimmen also hier überein mit dem

allgemeinen Metrikbegriff, wie er in der Theorie der linearen Räume mittels einer symmetrischen Bilinearform Φ analytisch eingeführt wird durch die Erklärung des skalaren Produktes $xy = \Phi(x, y)$. Sie stellen gewissermaßen eine geometrische Motivierung dieser analytischen Definition dar, eine Motivierung, wie sie *Nevanlinna* in seiner Mitteilung angeregt hat.

49. Der obige Hauptsatz gilt auch für die Dimensionen 0 und 1. Andererseits induziert eine normale Kongruenz in einem L beliebiger Dimension in jedem Unterraum wieder eine normale Kongruenz. Für den Übergang zu höheren Dimensionen können wir also sagen: *Eine normale Kongruenz im (allgemeinen) L läßt sich in jedem Unterraum L' mit dim $(L') \leqq 2$ durch eine bis auf Normierung eindeutig bestimmte („lokale") Fundamentalform beschreiben.* Es stellt sich dann im Falle dim $(L) > 2$ die Frage, ob auch eine („globale") Fundamentalform für den ganzen Raum L gefunden werden kann. Sicher erfüllt auch hier eine durch Vorgabe einer symmetrischen Bilinearform als Fundamentalform in L erzeugte Kongruenz die Postulate (I), (II), (III) und (IV), denn diese sind ja rein zweidimensionaler Natur.

§ 8. Vollständige normale Kongruenzen

50. Der Übergang zu höheren Dimensionen soll hier noch kurz für eine spezielle Klasse von normalen Kongruenzen weiterdiskutiert werden; nämlich für die *vollständigen Kongruenzen*, welche durch die Zusatzforderung (5) ausgezeichnet werden, daß alle nicht zu o kongruenten Elemente miteinander vergleichbar sind. Mit u nicht $\cong o$ gibt es dann zu jedem x ein λ, so daß $x \cong \lambda u$. Ist weiter $y \cong \mu u$, so besteht $x \cong y$ genau dann, wenn $\lambda^2 = \mu^2$. Wir zeigen, daß hier die „lokalen Fundamentalformen" mit geeigneter Normierung zu einer „globalen Fundamentalform" zusammengesetzt werden können. Da der Fall der totalen Kongruenz evident ist, denken wir uns eine nichttotale, vollständige normale Kongruenz in L gegeben. u sei ein fest ausgezeichnetes, nicht zu o kongruentes Element und $L(u, x)$ der durch u und x aufgespannte Unterraum, in dem die Kongruenz sich durch eine Fundamentalform Φ_x mit $\Phi_x(u, u) = 1$ beschreiben läßt. Die Funktion $\varphi(x) = \Phi_x(x, x)$ in L besitzt dann die Eigenschaft $\varphi(\lambda x) = \lambda^2 \varphi(x)$ und gemäß $\varphi(x) = \varphi(\lambda u) = \lambda^2$ für $x \cong \lambda u$ ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ äquivalent mit $x \cong y$; und zwar stimmt dann die Funktion $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x + y) - \varphi(x) - \varphi(y)\}$ in jedem zweidimensionalen Unterraum notwendig mit der dort gegebenen und geeignet normierten Fundamentalform überein. Φ ist also in jedem zwei-

dimensionalen Unterraum bilinear und damit besitzt φ die weiteren Eigenschaften $\varphi(x) + \varphi(y) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \varphi(x-y)\}$ und

$$\varphi(x+2y) - \varphi(x-2y) = 2\{\varphi(x+y) - \varphi(x-y)\}.$$

Diese implizieren für Φ das noch offene Bilinearitätsgesetz

$$\Phi(x+x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y),$$

nämlich gemäß der Berechnung

$$\begin{gathered} 4\{\Phi(x+x', y) - \Phi(x, y)\} = \\ \varphi(x+x'+y) + \varphi(x-y) - \{\varphi(x+x'-y) + \varphi(x+y)\} = \\ \tfrac{1}{2}\{\varphi(x'+2y) - \varphi(x'-2y)\} = \varphi(x'+y) - \varphi(x'-y) = 4\Phi(x', y)\ . \end{gathered}$$

Φ ist also Fundamentalform der Kongruenz in L, das heißt es ist gezeigt: *Jede vollständige normale Kongruenz in einem (allgemeinen) linearen Raum L besitzt eine Fundamentalform.*

51. Für die Gültigkeit der Vollständigkeitseigenschaft kommt dem zugrunde gelegten Koeffizientenkörper K wesentliche Bedeutung zu. Bei den *reellen Zahlen* ist sie genau dann erfüllt, wenn alle zweidimensionalen Fundamentalformen nicht indefinit sind. Speziell gilt sie hier für die *Hilbert*schen Kongruenzen, welche unter den normalen Kongruenzen durch die Zusatzforderung (4) ausgezeichnet sind, daß $x \cong o$ nur für $x = o$. Dieser Forderung ist die Verschärfung der Postulate (III) und (IV) gleichwertig, daß sich jedes Element auf ein $u \neq o$ eindeutig normalprojizieren läßt. Hier haben wir das Endergebnis: *Jede Hilbertsche Kongruenz in einem reellen Raum L besitzt eine definite Fundamentalform, und umgekehrt bestimmt jede definite Bilinearform in L eine Hilbertsche Kongruenz, deren Fundamentalform sie ist.* Die Einführung einer *Hilbert*schen Kongruenz in unserem Sinne ist also mit der üblichen *Metrikeinführung in der Theorie der reellen Hilbertschen Räume* beliebiger (endlicher oder unendlicher) Dimension gleichwertig. Diese kann geometrisch motiviert und charakterisiert werden durch unsere Postulate, welche hier nochmals zusammengestellt seien:

(I) Aus $x \cong z$, $y \cong z$ folgt $x \cong y$.

(II) Aus $x \perp y$ folgt stets $\lambda x \perp y$.

(III*) Ist $u \neq o$, so läßt sich jedes x eindeutig auf u normalprojizieren.

(Eingegangen den 29. Juli 1954.)