

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 30 (1956)

**Artikel:** Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. I.  
**Autor:** Huber, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23900>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. I.\*)

VON HEINZ HUBER, Zürich

## Einleitung und Übersicht

1. In der analytischen Zahlentheorie sind schon die verschiedensten Gitterpunktprobleme der euklidischen Ebene behandelt worden. Diesen Betrachtungen liegt jeweils eine diskontinuierliche Translationsgruppe der euklidischen Ebene mit kompaktem Fundamentalbereich zugrunde. Man kann nun analoge Gitterpunktprobleme auch für Translationsgruppen der hyperbolischen Ebene mit kompaktem Fundamentalbereich stellen. Als erschwerendes Moment kommt hier allerdings hinzu, daß die Mannigfaltigkeit dieser hyperbolischen Translationsgruppen bedeutend größer ist, und daß diese Gruppen nicht kommutativ sind. Ein weiterer, sehr ins Gewicht fallender Unterschied gegenüber den euklidischen Translationsgruppen besteht darin, daß bei einer hyperbolischen Translation  $T$  die Distanz der Punkte  $z$  und  $T(z)$  nicht unabhängig ist von der Lage des Punktes  $z$ .

Diese hyperbolischen Gitterpunktprobleme scheinen sehr reizvoll zu sein, besonders auch deshalb, weil zu ihrer Bewältigung offenbar neue Ansätze und Methoden gefunden werden müssen. Der so skizzierte Problemkreis ist meines Wissens bisher noch nicht angegriffen worden; die vorliegende Arbeit möchte nun einen Beitrag dazu liefern. Um das hier zu behandelnde Gitterpunktproblem und die darüber erzielten Ergebnisse präzise formulieren zu können, müssen wir erst kurz einige Erläuterungen vorausschicken.

2. Es sei  $\mathfrak{H}$  die hyperbolische Ebene. Wir denken uns die Längenmessung in  $\mathfrak{H}$  etwa so normiert, daß der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich seinem Defekt wird.  $\mathfrak{H}$  besitzt dann überall die konstante Gaußsche

---

\*) Von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich als Habilitationsschrift angenommen.



Krümmung  $-1$ . Es sei  $\varrho(z_1, z_2)$  die hyperbolische Distanz der Punkte  $z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$ . Ist nun  $T$  eine Bewegung<sup>1)</sup> von  $\mathfrak{H}$ , so heiße die nichtnegative Zahl

$$\mu(T) = \inf_{z \in \mathfrak{H}} \varrho(z, T(z))$$

die Verschiebungslänge von  $T$ . Fur zwei beliebige Bewegungen  $T, V$  von  $\mathfrak{H}$  gilt stets

$$\mu(V^{-1}TV) = \mu(T) . \quad (1)$$

Eine Bewegung  $T$  von  $\mathfrak{H}$  heiße Translation, wenn  $\mu(T) > 0$ . Zu den Translationen wollen wir außerdem auch noch die Identität  $E$  zählen, welche jeden Punkt von  $\mathfrak{H}$  in Ruhe läßt. Unter den Bewegungen von  $\mathfrak{H}$  gibt es außer den Translationen bekanntlich nur noch die Drehungen und Grenzdrehungen; sie haben die Verschiebungslänge 0.

Wir betrachten nun eine diskontinuierliche Gruppe  $\Gamma$  von Translationen von  $\mathfrak{H}$ . Identifiziert man die bezuglich  $\Gamma$  quivalenten Punkte von  $\mathfrak{H}$ , so erhält man eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Krimmung  $-1$ : die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ . Ist insbesondere  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  kompakt<sup>2)</sup>, so verstehen wir unter dem Geschlecht  $p$  der Gruppe  $\Gamma$  das (topologische) Geschlecht der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ .

Wir nennen ein Element  $P \in \Gamma - E$  ein primitives Element von  $\Gamma$ , wenn es keine Darstellung  $P = Q^n$  mit  $Q \in \Gamma$  und  $n > 1$  zuläßt. Jedes Element  $T \in \Gamma - E$  besitzt dann eine „Normaldarstellung“  $T = P^r$ , wobei  $P$  ein primitives Element von  $\Gamma$  ist. Dabei ist die Zahl  $\nu(T) = |r|$  durch  $T$  eindeutig bestimmt; sie heiße die Vielfachheit von  $T$ . Diese Vielfachheit  $\nu(T)$  ist eine Klassenfunktion auf  $\Gamma - E$ . Ist nun  $\mathfrak{K} \neq \{E\}$  eine Klasse konjugierter Elemente von  $\Gamma$ , so können wir daher definieren

$$\nu(\mathfrak{K}) = \nu(T) , \quad T \in \mathfrak{K} .$$

Ebenso ist wegen (1) auch  $\mu(T)$  eine Klassenfunktion auf  $\Gamma$ ; wir können daher die Verschiebungslänge  $\mu(\mathfrak{K})$  der Klasse  $\mathfrak{K}$  definieren durch

$$\mu(\mathfrak{K}) = \mu(T) , \quad T \in \mathfrak{K} .$$

3. Das in dieser Arbeit zu behandelnde Gitterpunktproblem kann nun folgendermaßen formuliert werden: Es sei  $\Gamma$  eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$ ;  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  sei kompakt und besitze

<sup>1)</sup> d. h. eine isometrische Abbildung von  $\mathfrak{H}$  auf sich selbst, welche die Indikatrix erhält.

<sup>2)</sup> dies ist quivalent mit der Forderung, daß  $\Gamma$  einen kompakten Fundamentalbereich besitzen soll.

das Geschlecht  $p$ . Es sei  $\mathfrak{K} \neq \{E\}$  eine Klasse konjugierter Elemente von  $\Gamma^3$ ). Nun betrachten wir einen hyperbolischen Kreis mit dem Zentrum  $z$  und dem Radius  $t$  und fragen nach der Anzahl  $N_{\mathfrak{K}}(z, t)$  der in diesem Kreise liegenden Gitterpunkte  $T(z)$ , wenn  $T$  alle Elemente von  $\mathfrak{K}$  durchläuft; mit anderen Worten: wir fragen nach der Anzahl  $N_{\mathfrak{K}}(z, t)$  der Elemente der Menge  $\{T \mid T \in \mathfrak{K}, \varrho(z, Tz) \leq t\}$ . Unser Ziel ist, asymptotische Aussagen über diese Gitterpunkts-Anzahl  $N_{\mathfrak{K}}(z, t)$  zu machen.

Zu diesem Zwecke führen wir die Dirichletreihe

$$G_{\mathfrak{K}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{K}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \quad (2)$$

ein und zeigen zunächst, daß  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  für jedes feste  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma > 1$  eine in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige Funktion von  $z$  ist, welche daselbst stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den Koordinaten des Punktes  $z$  besitzt. Dies zu zeigen ist zwar nicht ganz einfach, aber der Beweis läßt sich doch mit elementaren Mitteln durchführen. Wir zeigen ferner, daß  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  für  $\sigma > 1$  die Funktionalgleichung

$$\Delta_z G_{\mathfrak{K}}(z, s) + 2s(1 - 2s) G_{\mathfrak{K}}(z, s) + 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{K}) - 1) G_{\mathfrak{K}}(z, s + 1) = 0 \quad (3)$$

erfüllt; dabei ist  $\Delta$  der zur hyperbolischen Metrik gehörige Laplace-Beltrami-Operator.

Aus der Definition (2) geht fast unmittelbar hervor, daß  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  eine bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion von  $z$  ist.  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  kann daher als eindeutige Funktion auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  aufgefaßt werden. Dies und das Bestehen der Funktionalgleichung (3) legt es nun einigermaßen nahe, die Funktion  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  in Verbindung zu bringen mit dem Eigenwertproblem

$$\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 \quad (4)$$

auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ . Wir nennen  $\varphi$  eine zum Eigenwert  $\lambda$  gehörige Eigenfunktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a)  $\varphi$  ist eine eindeutige und stetige Funktion auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ ; d. h.  $\varphi(z)$  ist eine in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige und bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion.

b)  $\varphi(z)$  besitzt in  $\mathfrak{H}$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den Koordinaten des Punktes  $z$ .

---

<sup>3)</sup>  $\mathfrak{K}$  enthält unendlich viele Elemente.

c)  $\varphi(z)$  ist eine nicht identisch verschwindende Lösung der partiellen Differentialgleichung  $\Delta\varphi(z) + \lambda\varphi(z) = 0$ .

Das in dieser Weise präzierte Eigenwertproblem (4) läßt sich im Rahmen der Theorie linearer Integralgleichungen mit symmetrischem Kern behandeln<sup>4)</sup>. Es stellt sich dann heraus, daß es unendlich viele, im Endlichen sich nirgends häufende reelle Eigenwerte gibt, die alle nicht-negativ sind und eine endliche Vielfachheit besitzen. Insbesondere ist  $\lambda = 0$  ein einfacher Eigenwert. Wir ordnen nun diese Eigenwerte ihrer Größe nach; in der so entstehenden Folge soll aber jeder Eigenwert genau seiner Vielfachheit entsprechend oft auftreten. Das Eigenwertspektrum  $\Lambda$  sieht dann folgendermaßen aus:

$$\Lambda = \{\lambda_n\}; \quad \lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (5)$$

Es sei  $\{\varphi_n(z)\}$  ein zu (5) gehöriges normiertes Orthogonalsystem reeller Eigenfunktionen; es gilt dann also

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n(z) + \lambda_n\varphi_n(z) &= 0 \quad \text{für alle } n \geq 0, \\ \iint_{\mathfrak{H} \bmod \Gamma} \varphi_m(z) \varphi_n(z) d\omega &= \delta_{m,n}, \quad n, m \geq 0. \end{aligned}$$

Die Integralgleichungstheorie liefert nun bekanntlich folgenden Entwicklungssatz: Ist  $f(z)$  eine bezüglich  $\Gamma$  automorphe und in ganz  $\mathfrak{H}$  zweimal stetig nach den Koordinaten von  $z$  differenzierbare Funktion, so konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \quad c_n = \iint_{\mathfrak{H} \bmod \Gamma} f(z) \varphi_n(z) d\omega$$

absolut und gleichmäßig und stellt die Funktion  $f(z)$  dar. Diesen Satz wenden wir nun speziell auf unsere Funktion  $G_{\mathfrak{K}}(z, s)$  an, welche ja für jedes feste  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma > 1$  alle Voraussetzungen des Entwicklungssatzes erfüllt. Wir erhalten so die zunächst für  $\sigma > 1$  gültige Darstellung

$$G_{\mathfrak{K}}(z, s) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s) \varphi_n(z), \quad F_n(s) = \iint_{\mathfrak{H} \bmod \Gamma} G_{\mathfrak{K}}(z, s) \varphi_n(z) d\omega.$$

Für den Erfolg unserer Untersuchungen ist es nun von ganz ausschlaggebender Bedeutung, daß es gelingt, die Fourierkoeffizienten  $F_n(s)$  in sehr expliziter Weise zu bestimmen und dadurch vollständigen Aufschluß über ihre Natur zu erhalten. Diese Erscheinung wurzelt natürlich letzten Endes im Bestehen der Funktionalgleichung (3), bleibt aber trotzdem

---

<sup>4)</sup> [4], [6].

sehr überraschend. Auf Grund dieser genauen Kenntnis der Natur der Funktionen  $F_n(s)$  können wir dann schließlich das folgende Hauptergebnis beweisen :

**Satz A.** *Es sei*

$$s_n^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n}, \quad s_n^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n}, \quad n \geq 1.$$

*Die Dirichletreihe*

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}, \quad s = \sigma + it,$$

besitzt für jedes  $z \in \mathfrak{H}$  die Konvergenzabszisse  $\sigma_K = \frac{1}{2}$  und stellt daher in der Halbebene  $\sigma > \frac{1}{2}$  eine regulär-analytische Funktion von  $s$  dar. Diese Funktion  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  läßt sich für jedes feste  $z \in \mathfrak{H}$  über die Gerade  $\sigma = \frac{1}{2}$  hinaus analytisch fortsetzen und erweist sich als eine in der ganzen  $s$ -Ebene meromorphe Funktion. Es gilt nämlich die folgende Darstellung :

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \frac{1}{\nu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \left( \frac{\mu(\mathfrak{R})}{4\pi(p-1)} \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Gamma(s)} L_{\mathfrak{R}}(z, s) \right)$$

mit

$$L_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z),$$

wobei die Konstante  $\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R})$  das geodätische Integral<sup>5)</sup> bezüglich  $\mathfrak{R}$  der Eigenfunktion  $\varphi_n(z)$  ist.

Ist  $\mathfrak{S}$  ein beliebiges Kompaktum der  $s$ -Ebene, so konvergiert die Reihe  $L_{\mathfrak{R}}(z, s)$  nach Weglassung der höchstens endlich vielen in  $\mathfrak{S}$  singulären Reihenglieder absolut und gleichmäßig für alle  $s \in \mathfrak{S}$  und  $z \in \mathfrak{H}$ ;  $L_{\mathfrak{R}}(z, s)$  ist daher für jedes feste  $z \in \mathfrak{H}$  eine in der ganzen  $s$ -Ebene meromorphe Funktion, welche nur in den Punkten

$$s_n^+ - m, \quad s_n^- - m, \quad n \geq 1, \quad m \geq 0$$

Pole besitzt und sonst überall regulär ist.

Aus Satz A folgern wir dann endlich mit Hilfe eines Tauberschen Theorems von Ikehara-Wiener<sup>2)</sup> den

**Satz B.** *Es ist*

$$N_{\mathfrak{R}}(z, t) \sim \frac{1}{4\pi(p-1)} \cdot \frac{1}{\nu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{\mu(\mathfrak{R})}{\sin \frac{\mu(\mathfrak{R})}{2}} \cdot e^{t/2}$$

für  $t \rightarrow +\infty$ .

<sup>5)</sup> Siehe die Definition in § 1.7.

<sup>6)</sup> [8] pag. 44.

Damit ist unser Gitterpunktproblem gelöst. Es ist noch bemerkenswert, daß in dieser asymptotischen Aussage der Punkt  $z$  nicht mehr auftritt.

In einer späteren Arbeit sollen die hier bewiesenen Sätze speziell auf arithmetisch definierte hyperbolische Translationsgruppen angewendet werden, insbesondere auf diejenigen, welche den indefiniten ternären quadratischen Formen mit ganzrationalen Koeffizienten zugeordnet sind<sup>7)</sup>. Es werden sich auf diese Weise Beziehungen der hier entwickelten Sätze zur analytischen Zahlentheorie in reell-quadratischen Zahlkörpern ergeben.

## § 1. Hyperbolische Translationen und diskontinuierliche Translationsgruppen

Dieser Paragraph enthält eine Zusammenstellung einiger einfacher und vorwiegend bekannter Begriffe und Tatsachen aus der Theorie der hyperbolischen Bewegungsgruppen in einer für die folgenden Untersuchungen zweckmäßigen Form.

**1. Die hyperbolische Ebene  $\mathfrak{H}$ .** Es sei  $\mathfrak{H}$  die komplexe Halbebene  $\Im(z) > 0$ ,  $z = x + iy$ . Durch die Metrik

$$dS^2 = y^{-2}(dx^2 + dy^2) \quad (1)$$

wird in  $\mathfrak{H}$  eine nichteuklidische Geometrie mit konstanter Krümmung  $-1$  erklärt. Ihre Geodätischen sind die zur reellen Achse  $y = 0$  orthogonalen (euklidischen) Kreise und Geraden. Die mit dieser Metrik (1) behaftete Halbebene  $\mathfrak{H}$  ist isometrisches Bild der hyperbolischen Ebene. (Poincarésches Modell.) Es sei  $\varrho(z_1, z_2)$  die hyperbolische Distanz zweier Punkte  $z_1, z_2 \in \mathfrak{H}$ ; bekanntlich gilt

$$\varrho(z_1, z_2) = \log \frac{1 + D(z_1, z_2)}{1 - D(z_1, z_2)}, \quad D(z_1, z_2) = \left| \frac{z_1 - z_2}{\bar{z}_1 - z_2} \right| \quad (2)$$

**2. Nichteuklidische Bewegungen<sup>8)</sup>.** Unter einer (nichteuklidischen) Bewegung von  $\mathfrak{H}$  verstehen wir eine umkehrbar eindeutige und bezüglich der Metrik (1) isometrische Abbildung von  $\mathfrak{H}$  auf sich, welche die Indikatrix erhält. Ist  $T$  eine solche Bewegung, so gilt für alle Punkte

$$z_1, z_2 \in \mathfrak{H} : \varrho(Tz_1, Tz_2) = \varrho(z_1, z_2) .$$

---

<sup>7)</sup> vgl. [3] pag. 500–565.

<sup>8)</sup> vgl. hierzu etwa [2].

Jede Bewegung  $T$  von  $\mathfrak{H}$  läßt sich darstellen in der Gestalt

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad a, b, c, d \text{ reell}; \quad ad - bc > 0, \quad (3)$$

und jede solche lineare Abbildung stellt eine Bewegung von  $\mathfrak{H}$  dar.

**Definition 1:** Ist  $T$  eine Bewegung von  $\mathfrak{H}$ , so heiße die nichtnegative Zahl  $\mu(T) = \inf_{z \in \mathfrak{H}} \varrho(z, T(z))$  die *Verschiebungslänge* von  $T$ .

Aus dieser Definition folgt fast unmittelbar das

**Lemma 1:** Sind  $T$  und  $V$  Bewegungen von  $\mathfrak{H}$ , so ist  $\mu(V^{-1}TV) = \mu(T)$ .

**Definition 2:** Eine Bewegung  $T$  von  $\mathfrak{H}$  heiße (nichteuclidische) Translation, wenn entweder  $T = E$  oder  $\mu(T) > 0$ .

Unter den Bewegungen von  $\mathfrak{H}$  gibt es außer den Translationen nur noch die Drehungen und Grenzdrehungen; sie haben die Verschiebungslänge 0.

Die Translationen können auch noch auf eine andere Weise charakterisiert werden: Eine Bewegung  $T \neq E$  von  $\mathfrak{H}$  ist dann und nur dann eine Translation, wenn sie auf der reellen Achse  $y = 0$  genau zwei (voneinander verschiedene) Fixpunkte besitzt. Wir werden sagen, eine Translation gehöre zum Fixpunktpaar

$$(x_1, x_2), \quad -\infty < x_1 < x_2 \leq +\infty,$$

wenn sie die Fixpunkte  $x_1$  und  $x_2$  besitzt. Offenbar gehört die Identität  $E$  zu jedem Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$ . Man beweist leicht das

**Lemma 2:** Es sei  $T \neq E$  eine zum Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$  gehörige Translation. Dann ist jede Bewegung  $V$  von  $\mathfrak{H}$ , für welche  $V^{-1}TV = T$  gilt, ebenfalls eine zum Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$  gehörige Translation.

**Definition 3:** Es sei  $T \neq E$  eine zum Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$  gehörige Translation. Dann verstehen wir unter der Achse  $\mathfrak{a}(T)$  der Translation  $T$  die (eindeutig bestimmte) Geodätische durch die Fixpunkte  $x_1, x_2$ .

Offenbar wird die Achse  $\mathfrak{a}(T)$  durch die Translation  $T$  in sich übergeführt. Ist  $V$  eine beliebige Bewegung von  $\mathfrak{H}$ , so ist stets

$$\mathfrak{a}(V^{-1}TV) = V^{-1}(\mathfrak{a}(T)) \quad (4)$$

Wir beweisen nun ein einfaches Lemma, das sich aber im folgenden bald als grundlegend erweisen wird.

**Lemma 3:** Die Translation  $\Theta$  von  $\mathfrak{H}$  habe die Gestalt

$$\Theta(w) = \vartheta \cdot w, \quad \vartheta > 0,$$

und es sei  $w = r e^{i\psi}$ ,  $r > 0$ ,  $0 < \psi < \pi$ . Dann gilt

$$(a) \quad \mu(\Theta) = |\log \vartheta|$$

$$(b) \quad \cos \varrho(w, \Theta w) - 1 = (\cos \mu(\Theta) - 1) \sin^{-2} \psi$$

*Beweis:* Nach Formel (2) gilt

$$\varrho(w, \Theta w) = \log \frac{1 + D}{1 - D}, \quad D = \left| \frac{w - \vartheta w}{\bar{w} - \vartheta w} \right| = \frac{|\vartheta - 1|}{|1 - \vartheta e^{2i\psi}|}.$$

somit wird

$$D^2 = \frac{(\vartheta - 1)^2}{1 + \vartheta^2 - 2\vartheta \cos 2\psi},$$

$$\begin{aligned} \cos \varrho(w, \Theta w) - 1 &= \frac{1}{2}(e^e + e^{-e}) - 1 = \frac{2D^2}{1 - D^2} = \frac{(\vartheta - 1)^2}{\vartheta(1 - \cos 2\psi)} \\ &= \left( \frac{\vartheta + \vartheta^{-1}}{2} - 1 \right) \sin^{-2} \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Hieraus schließt man zunächst

$$\inf_{w \in \mathfrak{H}} \cos \varrho(w, \Theta w) = \frac{\vartheta + \vartheta^{-1}}{2}.$$

Daraus und aus Definition 1 folgt offenbar  $\mu(\Theta) = |\log \vartheta|$ , womit die Behauptung (a) bewiesen ist. Aus (a) und (5) folgt nun auch die Behauptung (b).

**Lemma 4:** Es sei  $T \neq E$  eine Translation von  $\mathfrak{H}$ . Dann ist stets  $\varrho(z, Tz) \geq \mu(T)$  und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn  $z \in \mathfrak{a}(T)$ .

*Beweis:*  $T$  gehöre zum Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$ . Dann gibt es eine solche Bewegung  $V$  von  $\mathfrak{H}$ , daß  $V(0) = x_1$ ,  $V(\infty) = x_2$ . Die Translation

$$\Theta = V^{-1}TV \quad (6)$$

gehört dann zum Fixpunktpaar  $(0, \infty)$  und hat daher die Gestalt

$$\Theta(w) = \vartheta \cdot w, \quad \vartheta > 0. \quad (7)$$

Nach Lemma 1 und nach (4) gilt

$$\mu(\Theta) = \mu(T) \quad (8)$$

$$\alpha(\Theta) = V^{-1}(\alpha(T)) . \quad (9)$$

Wir setzen nun

$$V^{-1}(z) = w = r e^{i\psi} , \quad r > 0 , \quad 0 < \psi < \pi . \quad (10)$$

Dann ist wegen (6)

$$\varrho(z, Tz) = \varrho(z, V\Theta V^{-1}z) = \varrho(V^{-1}z, \Theta V^{-1}z) = \varrho(w, \Theta w) .$$

Daraus und aus (7), (8), (10) folgt nach Lemma 3 :

$$\cos \varrho(z, Tz) - 1 = (\cos \mu(T) - 1) \sin^{-2} \psi .$$

Hieraus ergibt sich aber sofort  $\varrho(z, Tz) \geq \mu(T)$ , und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn  $\psi = \pi/2$ . Dann ist aber wegen (7) und (10)  $V^{-1}(z) \in \alpha(\Theta)$ , also wegen (9):  $z \in \alpha(T)$ .

**3. Diskontinuierliche Translationsgruppen von  $\mathfrak{H}$ . Fundamentalbereiche<sup>9)</sup>.** Eine Gruppe  $\Gamma$  von Translationen von  $\mathfrak{H}$  heiße diskontinuierlich, wenn die Punktmenge  $\{T(z) \mid T \in \Gamma\}$  für kein  $z \in \mathfrak{H}$  einen Häufungspunkt in  $\mathfrak{H}$  besitzt. Aus dieser Definition folgt leicht das

**Lemma 5:**  $\Gamma$  sei eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$  und es seien  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  in  $\mathfrak{H}$  kompakte Punkt Mengen. Dann gibt es höchstens endlich viele Elemente  $T \in \Gamma$ , für welche der Durchschnitt  $T(\mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{M}_2$  nicht leer ist.

Identifiziert man bezüglich  $\Gamma$  quivalente Punkte von  $\mathfrak{H}$ , so erhält man wegen Lemma 5 offenbar eine orientierbare zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ .

**Definition 4:** Eine Punktmenge  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$  heiße Fundamentalbereich der diskontinuierlichen Translationsgruppe  $\Gamma$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind :

- (a)  $\mathfrak{F}$  ist relativ  $\mathfrak{H}$  abgeschlossen.
- (b) Zu jedem  $z \in \mathfrak{H}$  gibt es ein solches  $T \in \Gamma$ , daß  $T(z) \in \mathfrak{F}$ .
- (c) Aus  $z \in \mathfrak{F}$ ,  $T(z) \in \mathfrak{F}$ ,  $T \in \Gamma - E$  folgt:  $z$  und  $T(z)$  sind Randpunkte von  $\mathfrak{F}$ .
- (d) Der Rand von  $\mathfrak{F}$  hat das (zweidimensionale) Maß 0.

---

<sup>9)</sup> Vgl. hierzu etwa [7] § 20–21.



Bekanntlich gilt das

**Lemma 6:** Die Punktmenge

$$\mathfrak{F}(z_o) = \{z \mid \varrho(z_o, z) \leq \inf_{T \in \Gamma - E} \varrho(Tz_o, z)\} \quad , \quad z_o \in \mathfrak{H}$$

ist ein Fundamentalbereich der diskontinuierlichen Translationsgruppe  $\Gamma$ .  $\mathfrak{F}(z_o)$  ist ein einfach-zusammenhängendes, endlich- oder unendlichseitiges konvexes Polygon der hyperbolischen Ebene  $\mathfrak{H}$ , dessen Eckpunkte sich im Innern von  $\mathfrak{H}$  nirgends häufen.

$\mathfrak{F}(z_o)$  heiße *Normalpolygon von  $\Gamma$  zum Zentrum  $z_o$* . Ist  $\mathfrak{H}$  mod  $\Gamma$  kompakt, so ist jedes Normalpolygon  $\mathfrak{F}(z_o)$  von  $\Gamma$  in  $\mathfrak{H}$  kompakt und besitzt nur endlich viele Seiten.

**4. Primitive Elemente. Vielfachheit.** Es sei  $\Gamma$  eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$ .  $(x_1, x_2)$  heiße *Fixpunktepaar* von  $\Gamma$ , wenn es mindestens ein Element  $T \in \Gamma - E$  gibt, das zu  $(x_1, x_2)$  gehört.

**Definition 5:** Ein Element  $P \in \Gamma - E$  heiße *primitives Element* von  $\Gamma$ , wenn aus  $P = R^m$ ,  $R \in \Gamma$  folgt:  $|m| = 1$ .

Ist  $P$  ein primitives Element von  $\Gamma$  und  $T \in \Gamma$ , so ist offenbar auch  $T^{-1}PT$  primitiv. Die Primitivität ist daher eine *Klasseneigenschaft*.

**Lemma 7:** Es sei  $(x_1, x_2)$  ein Fixpunktepaar von  $\Gamma$  und  $\mathfrak{Z}$  die Gruppe aller Elemente von  $\Gamma$ , welche zu  $(x_1, x_2)$  gehören. Dann gilt:

- (a)  $\mathfrak{Z}$  ist eine zyklische Gruppe unendlicher Ordnung.
- (b)  $\mathfrak{Z}$  enthält genau zwei primitive Elemente von  $\Gamma$ : Ist  $P$  eine Erzeugende der zyklischen Gruppe  $\mathfrak{Z}$ , so sind  $P$  und  $P^{-1}$  diese primitiven Elemente.

*Beweis von (a):* Es gibt eine solche Bewegung  $V$  von  $\mathfrak{H}$ , daß

$$V(0) = x_1, \quad V(\infty) = x_2 \quad .$$

Für jedes  $T \in \mathfrak{Z}$  gehört dann

$$T^* = V^{-1}TV \tag{11}$$

zum Fixpunktepaar  $(0, \infty)$  und hat daher die Gestalt

$$T^*(z) = \vartheta_T \cdot z \quad , \quad \vartheta_T > 0 \quad . \tag{12}$$

Die durch (11) und (12) für alle  $T \in \mathfrak{Z}$  erklärte Zuordnung  $T \rightarrow \vartheta_T$  ist offenbar eine isomorphe Abbildung von  $\mathfrak{Z}$  in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen. Da  $\mathfrak{Z}$  als Untergruppe von  $\Gamma$  diskontinuierlich

ist, so folgt aus (11), (12), daß die Zahlenmenge  $\{\vartheta_T \mid T \in \mathfrak{Z}\}$  im offenen Intervall  $0 < \vartheta < \infty$  keinen Häufungspunkt besitzen kann. Dann müssen aber diese Zahlen  $\vartheta_T$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 1 oder  $\infty$  bilden. Folglich ist auch  $\mathfrak{Z}$  eine zyklische Gruppe der Ordnung 1 oder  $\infty$ . Da aber  $\mathfrak{Z}$  nach Voraussetzung mindestens ein Element von  $\Gamma - E$  enthält, so muß die Ordnung von  $\mathfrak{Z}$  unendlich sein.

*Beweis von (b):* Es ist klar, daß höchstens  $P$  und  $P^{-1}$  in  $\mathfrak{Z} = [P]$  enthaltene primitive Elemente von  $\Gamma$  sein können. Diese beiden sind aber auch wirklich primitiv; denn aus

$$P = R^m, \quad R \in \Gamma \quad (13)$$

folgt zunächst, daß  $P$  und  $R$  zum selben Fixpunktpaar  $(x_1, x_2)$  von  $\Gamma$  gehören. Nach der eben bewiesenen Behauptung (a) ist daher  $R = P^l$  und somit wegen (13):  $P = P^{lm}$ . Da aber  $\mathfrak{Z} = [P]$  die Ordnung  $\infty$  besitzt, so muß  $lm = 1$ , also  $|m| = 1$  sein. Damit ist Lemma 7 vollständig bewiesen.

Aus Lemma 7 folgt sofort

**Lemma 8:** Zu jedem Element  $T \in \Gamma - E$  gibt es eine „Normaldarstellung“  $T = P^n$ , wobei  $P$  ein primitives Element von  $\Gamma$  ist.

Ferner folgt offenbar aus Lemma 7: Sind  $P$  und  $Q$  primitive Elemente von  $\Gamma$  und ist  $P^n = Q^m$ , so ist  $|m| = |n|$ . Daher wird die folgende Definition sinnvoll:

**Definition 6:** Es sei  $T \in \Gamma - E$  und  $T = P^n$  eine Normaldarstellung von  $T$  mit primitivem  $P \in \Gamma$ . Dann verstehen wir unter der Vielfachheit von  $T$  die natürliche Zahl  $\nu(T) = |n|$ .

Da die Primitivität eine Klasseneigenschaft ist, so ist offenbar  $\nu(T)$  eine *Klassenfunktion* auf  $\Gamma - E$ . Ist nun  $\mathfrak{K} \neq \{E\}$  eine Klasse konjugierter Elemente von  $\Gamma$ , so können wir daher definieren:

$$\nu(\mathfrak{K}) = \nu(T), \quad T \in \mathfrak{K}. \quad (14)$$

**5. Invariante Integration.** Das zur Metrik (1) gehörige Flächenelement

$$d\omega_z = y^{-2} dx dy, \quad z = x + iy \quad (15)$$

ist invariant gegenüber allen Bewegungen  $T$  von  $\mathfrak{H}$ . Ist  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{H}$  eine meßbare Punktmenge und  $f(z)$  eine über  $T(\mathfrak{G})$  integrierbare<sup>10)</sup> Funktion, so gilt daher

$$\iint_{\mathfrak{G}} f(Tz) d\omega_z = \iint_{T(\mathfrak{G})} f(z) d\omega_z. \quad (16)$$

---

<sup>10)</sup> d. h.  $f(z)$  meßbar in  $T(\mathfrak{G})$  und  $\iint_{T(\mathfrak{G})} |f| d\omega < \infty$ .

Unter einer hyperbolischen *Kreisscheibe* mit dem Zentrum  $z_0$  und dem Radius  $r$  verstehen wir die Punktmenge

$$K[z_0, r] = \{z \mid \varrho(z_0, z) < r\} \quad (17)$$

Für den hyperbolischen Flächeninhalt  $A(r)$  von  $K[z_0, r]$  gilt die Formel

$$A(r) = \iint_{K[z_0, r]} d\omega = 4\pi \operatorname{Sin}^2 \frac{r}{2} = 2\pi (\operatorname{Cos} r - 1). \quad (18)$$

Man beweist leicht das wichtige

**Lemma 9:** Es sei  $\Gamma$  eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$  und  $f(z)$  eine in  $\mathfrak{H}$  meßbare und bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion.  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  seien zwei Fundamentalbereiche von  $\Gamma$  im Sinne von Definition 4, und es sei  $f(z)$  über  $\mathfrak{F}_1$  integrierbar<sup>11)</sup>. Dann ist  $f(z)$  auch über  $\mathfrak{F}_2$  integrierbar und es gilt

$$\iint_{\mathfrak{F}_1} f(z) d\omega_z = \iint_{\mathfrak{F}_2} f(z) d\omega_z.$$

**6. Das Geschlecht  $p$  einer Gruppe.** Es sei  $\Gamma$  eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$ , und es sei  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  kompakt. Unter dem *Geschlecht  $p$*  der Gruppe  $\Gamma$  verstehen wir dann das (topologische) Geschlecht der geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ . Da diese geschlossene Fläche die konstante Krümmung  $-1$  besitzt, so folgt aus dem Gauß-Bonnetschen Integralsatz, daß

$$\iint_{\mathfrak{F}} d\omega = 4\pi(p - 1) \quad (19)$$

für jeden Fundamentalbereich  $\mathfrak{F}$  von  $\Gamma$ , und daß  $p > 1$ . Übrigens läßt sich das Geschlecht  $p$  von  $\Gamma$  auch rein gruppentheoretisch definieren: Ist  $C$  die Kommutatoruntergruppe von  $\Gamma$ , so ist  $2p = \operatorname{Rang}(\Gamma/C)$ .

**7. Geodätische Integrale.** Es sei  $\Gamma$  eine diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$  und  $\varphi(z)$  eine in  $\mathfrak{H}$  stetige und bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion. Wir setzen noch fest, daß im folgenden Kurvenintegrale der Gestalt  $\int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) dS_z$  stets längs der geodätischen Strecke  $[z_1, z_2]$  in  $\mathfrak{H}$  zu erstrecken sind. Solche *geodätische Integrale* besitzen natürlich keinen ausgezeichneten Durchlaufungssinn; es ist also  $\int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) dS_z = \int_{z_2}^{z_1} \varphi(z) dS_z$  zu setzen.

---

<sup>11)</sup> d. h.  $\iint_{\mathfrak{F}_1} |f| d\omega < \infty$ .

Sei nun  $T \in \Gamma - E$ . Die zyklische Gruppe  $\mathfrak{Z} = [T]$  ist offensichtlich eine Gruppe umkehrbar eindeutiger Abbildungen von  $\mathfrak{a}(T)$  auf sich, und

$$dS_z = y^{-1}(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}, \quad z = x + iy \in \mathfrak{a}(T)$$

ist ein bezüglich  $\mathfrak{Z}$  invariantes Maß auf  $\mathfrak{a}(T)$ . Für jedes  $z_0 \in \mathfrak{a}(T)$  ist die geodätische Strecke  $[z_0, T(z_0)] \subset \mathfrak{a}(T)$  offenbar ein Fundamentalbereich bezüglich  $\mathfrak{Z}$  auf  $\mathfrak{a}(T)$ . Da ferner  $\varphi(z)$  nach Voraussetzung insbesondere bezüglich  $\mathfrak{Z}$  automorph ist, so ist daher das geodätische Integral

$$\int_{z_0 \in \mathfrak{a}(T)}^{T(z_0)} \varphi(z) dS_z$$

unabhängig von der speziellen Wahl des Punktes  $z_0 \in \mathfrak{a}(T)$ . Wir definieren nun für jede Translation  $T \in \Gamma - E$

$$\hat{\varphi}(T) = \int_{z_0 \in \mathfrak{a}(T)}^{T(z_0)} \varphi(z) dS_z. \quad (20)$$

Für die spezielle automorphe Funktion  $\varepsilon(z) = 1$  gilt dann nach Lemma 4 :

$$\hat{\varepsilon}(T) = \int_{z_0 \in \mathfrak{a}(T)}^{T(z_0)} \varepsilon(z) dS_z = \int_{z_0 \in \mathfrak{a}(T)}^{T(z_0)} dS_z = \varrho(z_0, Tz_0) = \mu(T).$$

Man überlegt sich sofort, daß allgemein

$$\hat{\varphi}(T^n) = |n| \cdot \hat{\varphi}(T). \quad (21)$$

Wir zeigen noch, daß

$$\hat{\varphi}(V^{-1}TV) = \hat{\varphi}(T) \quad \text{für alle} \quad T \in \Gamma - E, \quad V \in \Gamma. \quad (22)$$

In der Tat : Sei  $z_0 \in \mathfrak{a}(V^{-1}TV)$ . Wir setzen  $w = V(z)$  und  $w_0 = V(z_0)$ . Dann ist nach (4)  $w_0 \in \mathfrak{a}(T)$ . Daher folgt nach Definition (20) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $\varphi(z)$  bezüglich  $\Gamma$  automorph ist :

$$\hat{\varphi}(V^{-1}TV) = \int_{z_0}^{V^{-1}TV(z_0)} \varphi(z) dS_z = \int_{V(z_0)}^{TV(z_0)} \varphi(V^{-1}w) dS_w = \int_{w_0}^{T(w_0)} \varphi(w) dS_w = \hat{\varphi}(T)$$

Wegen (22) ist  $\hat{\varphi}(T)$  eine *Klassenfunktion* auf  $\Gamma - E$ . Ist nun  $\mathfrak{K} \neq \{E\}$  eine Klasse konjugierter Elemente von  $\Gamma$ , so können wir daher definieren :

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{K}) = \hat{\varphi}(T), \quad T \in \mathfrak{K}. \quad (23)$$

**8. Beltramische Differentialoperatoren.** Die Funktion  $f(z)$ ,  $z=x+iy$ , sei in  $\mathfrak{H}$  definiert und besitze dort stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $x, y$ . Die zur Metrik (1) gehörigen Beltramischen

Differentialoperatoren erster und zweiter Ordnung werden dann folgendermaßen definiert :

$$\nabla f(z) = \nabla_z f(z) = y^2 \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (24)$$

$$\Delta f(z) = \Delta_z f(z) = y^2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) . \quad (25)$$

Bekanntlich sind diese Beltramioperatoren invariant gegenüber allen Bewegungen von  $\mathfrak{H}$  ; d. h. es gilt

**Lemma 10:** Es sei  $T$  eine Bewegung von  $\mathfrak{H}$ ,  $w = u + iv = T(z)$ ,  $f(z) = f(T^{-1}w) = g(w)$ . Dann ist  $\nabla_z f(z) = \nabla_w g(w)$ ,  $\Delta_z f(z) = \Delta_w g(w)$ .

## § 2. Hilfssätze

In diesem Paragraphen beweisen wir einige Hilfssätze. Die für die folgenden Paragraphen wichtigen Ergebnisse sind Lemma 1 (a) und Lemma 4. Die übrigen Lemmata sind lediglich Zwischenstationen auf dem Wege zu Lemma 4.

**Lemma 1:** Es sei  $T \neq E$  eine Translation von  $\mathfrak{H}$  und  $s$  eine komplexe Zahl. Dann gilt :

- (a)  $\Delta_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} = 2s(2s - 1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} - 4s^2 (\cos \mu(T) - 1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1}$
- (b)  $\Delta_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1) = 2 (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \left( 3 - 2 \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right) > 0$
- (c)  $\nabla_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1) = 4 (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^2 \left( 1 - \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right)$
- (d) Es ist  $\nabla_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1) = 0$  dann und nur dann, wenn  $z \in \mathfrak{a}(T)$ .
- (e)  $\nabla_z^2 (\cos \varrho(z, Tz) - 1) = 8^2 (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^4 \left( 1 - \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right) \left( 2 - \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right)^2$ .

*Beweis:*  $T$  läßt sich darstellen in der Form

$$T = V^{-1} \Theta V \quad (1)$$

wobei  $\Theta$  die Gestalt

$$\Theta(w) = \vartheta w, \quad \vartheta > 0 \quad (2)$$

besitzt und

$$\mu(\Theta) = \mu(T) > 0. \quad (3)$$

Wir setzen nun

$$V(z) = w = u + iv = re^{i\psi} \quad (4)$$

Dann ist  $\varrho(z, Tz) = \varrho(z, V^{-1}\Theta Vz) = \varrho(Vz, \Theta Vz) = \varrho(w, \Theta w)$ . Daraus und aus (2), (3) und Lemma 3, § 1 folgt

$$\cos \varrho(z, Tz) - 1 = \cos \varrho(w, \Theta w) - 1 = (\cos \mu(T) - 1) \sin^{-2} \psi.$$

Hieraus und aus der Invarianz des Operators  $\Delta$  gegenüber der Transformation (4) folgt nun :

$$\begin{aligned} \Delta_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} &= \Delta_w (\cos \varrho(w, \Theta w) - 1)^{-s} \\ &= v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) (\cos \varrho(w, \Theta w) - 1)^{-s} \\ &= r^2 \sin^2 \psi \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) ((\cos \mu(T) - 1)^{-s} \sin^{2s} \psi) \\ &= (\cos \mu(T) - 1)^{-s} \sin^2 \psi \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} (\sin^{2s} \psi) \\ &= (\cos \mu(T) - 1)^{-s} (2s(2s-1) \sin^{2s} \psi - 4s^2 \sin^{2(s+1)} \psi). \end{aligned} \quad (6)$$

Nach (5) ist aber

$$\sin^2 \psi = (\cos \mu(T) - 1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-1} \quad (7)$$

Setzt man dieses in (6) ein, so ergibt sich gerade die Formel (a). Formel (b) folgt aus (a) für den speziellen Wert  $s = -1$ . Daß schließlich  $\Delta (\cos \varrho(z, Tz) - 1) > 0$ , ergibt sich sofort aus der Formel (b) und Lemma 4, § 1.

Aus (5) und aus der Invarianz des Operators  $\nabla$  gegenüber der Transformation (4) folgt<sup>12)</sup> :

$$\begin{aligned} \nabla_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1) &= \nabla_w (\cos \varrho(w, \Theta w) - 1) \\ &= v^2 \left[ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 \right] (\cos \varrho(w, \Theta w) - 1) \\ &= r^2 \sin^2 \psi \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \right)^2 \right] ((\cos \mu(T) - 1) \sin^{-2} \psi) \\ &= (\cos \mu(T) - 1)^2 \sin^2 \psi \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \sin^{-2} \psi \right)^2. \end{aligned}$$

---

<sup>12)</sup> Die im folgenden angewandte symbolische Schreibweise dürfte kaum zu Mißverständnissen Anlaß geben.

Nach einer kleinen Rechnung folgt daraus

$$\nabla_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1) = 4 (\cos \mu(T) - 1)^2 (\sin^{-4} \psi - \sin^{-2} \psi) \quad (8)$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung wieder (7) ein, so ergibt sich die Formel (c). Die Behauptung (d) folgt sofort aus der eben bewiesenen Formel (c) und Lemma 4, § 1.

Aus (8) und aus der Invarianz des Operators  $\nabla$  gegenüber der Transformation (4) folgt nun weiter

$$\begin{aligned} \nabla_z^2 (\cos \varrho(z, Tz) - 1) &= \nabla_z (\nabla_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1)) \\ &= \nabla_z (4 (\cos \mu(T) - 1)^2 (\sin^{-4} \psi - \sin^{-2} \psi)) \\ &= \nabla_w (4 (\cos \mu(T) - 1)^2 (\sin^{-4} \psi - \sin^{-2} \psi)) \\ &= r^2 \sin^2 \psi \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \right)^2 \right] (4 (\cos \mu(T) - 1)^2 (\sin^{-4} \psi - \sin^{-2} \psi)) \\ &= 4^2 (\cos \mu(T) - 1)^4 \sin^2 \psi \left( \frac{\partial}{\partial \psi} (\sin^{-4} \psi - \sin^{-2} \psi) \right)^2 \\ &= 8^2 (\cos \mu(T) - 1)^4 \sin^{-8} \psi (1 - \sin^2 \psi) (2 - \sin^2 \psi)^2. \end{aligned}$$

Setzt man hier wieder (7) ein, so ergibt sich die Formel (e). Damit ist Lemma 1 vollständig bewiesen.

**Lemma 2:** Die reelle Funktion  $f(x_1, x_2)$  sei in der Halbebene  $x_2 > 0$  definiert und besitze dort stetige erste und zweite partielle Ableitungen. Dann gilt für  $k, l = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \leq \frac{\sqrt{\nabla} f}{x_2} \\ \text{(b)} \quad & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right| \leq \frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla} f \cdot |\Delta f|}{x_2^2 \sqrt{\nabla} f} \text{ in allen Punkten } (x_1, x_2), \end{aligned}$$

wo  $\nabla f \neq 0$ .

*Beweis:* Während des Beweises schreiben wir  $x, y$  statt  $x_1, x_2$ . Nach der Definition in § 1.8 ist  $\nabla f = y^2(f_x^2 + f_y^2)$ . Da  $f$  nach Voraussetzung reell ist, folgt hieraus offenbar

$$|f_x|, \quad |f_y| \leq \frac{\sqrt{\nabla} f}{y} \quad (9)$$

Damit ist die Behauptung (a) schon bewiesen. – Setzen wir nun

$$F(x, y) = \nabla f = y^2(f_x^2 + f_y^2) \quad (10)$$

so gilt

$$\nabla^2 f = \nabla F = y^2 (F_x^2 + F_y^2) .$$

Da  $F$  reell ist, folgt hieraus

$$|F_x| , \quad |F_y| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f}}{y} . \quad (11)$$

Andererseits berechnet man aber aus (10) sofort

$$F_x = 2y^2(f_x f_{xx} + f_y f_{xy}) , \quad F_y = \frac{2}{y} \nabla f + 2y^2(f_x f_{xy} + f_y f_{yy})$$

Daraus und aus (11) schließt man leicht

$$|f_x f_{xx} + f_y f_{xy}| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f}}{2y^3} \quad (12)$$

$$|f_x f_{xy} + f_y f_{yy}| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2 \nabla f}{2y^3} \quad (13)$$

Nach der Definition des Operators  $\Delta$  in § 1.8 gilt

$$f_{xx} = \frac{\Delta f}{y^2} - f_{yy} \quad (14)$$

$$f_{yy} = \frac{\Delta f}{y^2} - f_{xx} \quad (15)$$

Aus (13) und (15) folgt

$$\left| f_x f_{xy} + f_y \frac{\Delta f}{y^2} - f_y f_{xx} \right| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2 \Delta f}{2y^3} ,$$

also, wenn wir noch (9) berücksichtigen :

$$|-f_y f_{xx} + f_x f_{xy}| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2 \nabla f}{2y^3} + \frac{|f_y|}{y^2} |\Delta f| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2 \nabla f + 2 \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{2y^3} \quad (16)$$

Auf dieselbe Weise folgt aus (12) und (14) unter Berücksichtigung von (9)

$$|f_y f_{xy} - f_x f_{yy}| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2 \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{2y^3} \quad (17)$$

Wir setzen jetzt

$$\begin{aligned} f_x f_{xx} + f_y f_{xy} &= a \\ -f_y f_{xx} + f_x f_{xy} &= b \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} f_y f_{xy} - f_x f_{yy} &= \alpha \\ f_x f_{xy} + f_y f_{yy} &= \beta \end{aligned} \quad (19)$$



Dann besagen die Ungleichungen (12), (13), (16), (17)

$$|a| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f}}{2y^3}, \quad |b| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2\nabla f + 2\sqrt{\nabla f} |\Delta f|}{2y^3}$$

$$|\alpha| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2\sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{2y^3}, \quad |\beta| \leq \frac{\sqrt{\nabla^2 f} + 2\nabla f}{2y^3} \quad (20)$$

Nun fassen wir (18) bzw. (19) als lineares inhomogenes Gleichungssystem für die Unbekannten  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$  bzw.  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$  auf. Beide Systeme haben die Determinante  $f_x^2 + f_y^2 = \frac{\nabla f}{y^2}$ . Ist  $\nabla f \neq 0$ , so gelten daher die folgenden Auflösungsformeln:

$$f_{xx} = \frac{y^2}{\nabla f} (af_x - bf_y)$$

$$f_{xy} = \frac{y^2}{\nabla f} (bf_x + af_y) = \frac{y^2}{\nabla f} (\beta f_x + \alpha f_y)$$

$$f_{yy} = \frac{y^2}{\nabla f} (-\alpha f_x + \beta f_y)$$

Hieraus und aus (20) folgt nun unter Berücksichtigung von (9):

$$|f_{xx}| \leq \frac{y^2}{\nabla f} (|a| \cdot |f_x| + |b| \cdot |f_y|) \leq \frac{y}{\sqrt{\nabla f}} (|a| + |b|) \leq \frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{y^2 \sqrt{\nabla f}}$$

$$|f_{xy}| \leq \frac{y^2}{\nabla f} (|b| \cdot |f_x| + |a| \cdot |f_y|) \leq \frac{y}{\sqrt{\nabla f}} (|a| + |b|) \leq \frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{y^2 \sqrt{\nabla f}}$$

$$|f_{yy}| \leq \frac{y^2}{\nabla f} (|\alpha| \cdot |f_x| + |\beta| \cdot |f_y|) \leq \frac{y}{\sqrt{\nabla f}} (|\alpha| + |\beta|) \leq \frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{y^2 \sqrt{\nabla f}}$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

**Lemma 3:** Es sei  $T \neq E$  eine Translation von  $\mathfrak{H}$  und  $z = x_1 + ix_2$ ,  $x_2 > 0$ . Dann gilt für  $k, l = 1, 2$  und alle  $z \in \mathfrak{H}$

$$(a) \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \leq 2x_2^{-1} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)$$

$$(b) \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \leq 16x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1).$$

*Beweis:* Wir setzen

$$f(x_1, x_2) = \cos \varrho(z, Tz) - 1$$

Dann folgt aus Lemma 1 (c) und Lemma 4, § 1 sofort

$$0 \leq \nabla f < 4 (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^2 .$$

Da  $f$  eine reelle Funktion ist, so folgt hieraus nach Lemma 2 (a) :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| < 2 x_2^{-1} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) , \quad k = 1, 2 ,$$

Damit ist die Behauptung (a) schon bewiesen.

Nach Lemma 1 (d) gilt :

$$\nabla f \neq 0 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathfrak{H} - \mathfrak{a}(T) . \quad (21)$$

Aus den Formeln (b), (c), (e) von Lemma 1 ergibt sich sofort für

$$z \in \mathfrak{H} - \mathfrak{a}(T) :$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{x_2^2 \sqrt{\nabla f}} \\ &= 2 x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \left\{ \left( 1 - \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} + 7 - 4 \frac{\cos \mu(T) - 1}{\cos \varrho(z, Tz) - 1} \right\} . \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen Lemma 4, § 1

$$\frac{\nabla f + \sqrt{\nabla^2 f} + \sqrt{\nabla f} \cdot |\Delta f|}{x_2^2 \sqrt{\nabla f}} < 16 x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \quad \text{für} \quad z \in \mathfrak{H} - \mathfrak{a}(T) .$$

Hieraus und aus (21) folgt nun nach Lemma 2 (b)

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right| < 16 x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathfrak{H} - \mathfrak{a}(T) .$$

Da aber beide Seiten dieser Ungleichung offenbar in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige Funktionen sind, so folgt sofort, daß

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \right| \leq 16 x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathfrak{H} .$$

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

**Lemma 4:** Es sei  $T \neq E$  eine Translation von  $\mathfrak{H}$  und  $z = x_1 + i x_2$ ,  $x_2 > 0$ ;  $s = \sigma + i t$ . Dann gilt für  $k, l = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \right| \leq 2 |s| x_2^{-1} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} \\ & \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \right| \leq 4 |s| (4 + |s + 1|) x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} . \end{aligned}$$

*Beweis:* Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} = -s (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} &= -s (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \\ &+ s(s+1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \end{aligned}$$

Daraus und aus Lemma 3 folgt nun :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \right| &= |s| (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1} \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \\ &\leq 2 |s| x_2^{-1} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \right| &\leq |s| (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \\ &+ |s| \cdot |s+1| (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-2} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_l} (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \right| \\ &\leq 16 |s| x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} + 4 |s| |s+1| x_2^{-2} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} . \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 4 offenbar bewiesen.

### § 3. Die Funktion $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$ und ihre Funktionalgleichung

Von nun an sei  $\Gamma$  stets eine *diskontinuierliche Translationsgruppe von  $\mathfrak{H}$  mit kompaktem Fundamentalbereich* und  $\mathfrak{R} \neq \{E\}$  eine Klasse konjugierter Elemente von  $\Gamma$ .

Aus der Voraussetzung, daß  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  kompakt sei und aus Lemma 4, § 1 schließt man leicht, daß  $\mu_0 = \inf_{T \in \Gamma - E} \mu(T) > 0$ . Es gilt dann also

$$\varrho(z, Tz) \geq \mu_0 > 0 \text{ für alle } z \in \mathfrak{H} \text{ und } T \in \Gamma - E . \quad (1)$$

Wir beweisen nun das

**Lemma 1:** Es sei  $n \geq 0$ , ganz;  $r \geq \mu_0$ ;  $\sigma \geq 1$ .

$$\mathfrak{T}_n(z, r) = \{T \mid T \in \mathfrak{R}, \quad r + n\mu_0 \leq \varrho(z, Tz) < r + (n+1)\mu_0\}$$

$$S_n(z, \sigma; r) = \sum_{T \in \mathfrak{T}_n(z, r)} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma}.$$

Es gibt eine für  $\sigma \geq 1$  stetige Funktion  $m(\sigma) > 0$  derart, daß gilt :

$$S_n(z, \sigma; r) \leq m(\sigma) e^{-(\sigma-1)r} e^{-(\sigma-1)\mu_0 n}$$

für alle  $z \in \mathfrak{H}$ ,  $\sigma \geq 1$ ,  $n \geq 0$ ,  $r \geq \mu_0$ .

*Beweis:* Es sei  $N_n(z, r)$  die Anzahl<sup>13)</sup> der Elemente  $T \in \mathfrak{T}_n(z, r)$ . Dann gilt offenbar

$$S_n(z, \sigma; r) \leq N_n(z, r) \cdot (\cos(r + n\mu_0) - 1)^{-\sigma} \quad \text{für } \sigma \geq 1. \quad (2)$$

Wir denken uns nun (bei festen  $z \in \mathfrak{H}$ ,  $r \geq \mu_0$ ,  $n \geq 0$ ) die Elemente  $T$  von  $\mathfrak{T}_n(z, r)$  numeriert :

$$\mathfrak{T}_n(z, r) = \{T_i\}, \quad 1 \leq i \leq N_n(z, r).$$

Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{N_n(z, r)} K[T_i(z), \tfrac{1}{2}\mu_0] \subset K[z, r + n\mu_0 + \tfrac{3}{2}\mu_0] - K[z, r + n\mu_0 - \tfrac{1}{2}\mu_0]. \quad (3)$$

Ferner folgt aus (1) :

$$K[T_i(z), \tfrac{1}{2}\mu_0] \cap K[T_j(z), \tfrac{1}{2}\mu_0] = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (4)$$

Es sei nun  $A(t)$  der hyperbolische Flächeninhalt der hyperbolischen Kreisscheibe  $K[z, t]$ . Dann folgt aus (3) und (4) :

$$A\left(\frac{\mu_0}{2}\right) \cdot N_n(z, r) \leq A(r + n\mu_0 + \tfrac{3}{2}\mu_0) - A(r + n\mu_0 - \tfrac{1}{2}\mu_0),$$

also nach Formel (18) § 1.5 :

$$\left(\cos \frac{\mu_0}{2} - 1\right) N_n(z, r) \leq \cos(r + n\mu_0 + \tfrac{3}{2}\mu_0) - \cos(r + n\mu_0 - \tfrac{1}{2}\mu_0). \quad (5)$$

Eine leichte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \cos(r + n\mu_0 + \tfrac{3}{2}\mu_0) - \cos(r + n\mu_0 - \tfrac{1}{2}\mu_0) &= e^{\frac{\mu_0}{2}} \sin \mu_0 e^{r+n\mu_0} (1 - e^{-2r-2n\mu_0-\mu_0}) \\ &< e^{\frac{\mu_0}{2}} \sin \mu_0 e^{r+n\mu_0}. \end{aligned}$$

Daraus und aus (5) folgt

$$N_n(z, r) \leq \frac{e^{\frac{\mu_0}{2}} \sin \mu_0}{\cos \frac{\mu_0}{2} - 1} e^{r+n\mu_0}. \quad (6)$$

---

<sup>13)</sup> Wegen der Diskontinuität von  $\Gamma$  ist diese Anzahl offenbar stets endlich.

Da nach Voraussetzung  $r + n\mu_0 \geq r \geq \mu_0$ , so folgt

$$\begin{aligned}\cos(r + n\mu_0) - 1 &= \frac{1}{2}e^{r+n\mu_0}(1 - e^{-(r+n\mu_0)})^2 \geq \frac{1}{2}e^{r+n\mu_0}(1 - e^{-\mu_0})^2 \\ &= e^{-\mu_0}(\cos \mu_0 - 1) e^{r+n\mu_0}.\end{aligned}$$

Daher wird für  $\sigma \geq 1$

$$(\cos(r + n\mu_0) - 1)^{-\sigma} \leq e^{\mu_0\sigma}(\cos \mu_0 - 1)^{-\sigma} e^{-\sigma(r+n\mu_0)}.$$

Daraus und aus (2), (6) folgt aber

$$S_n(z, \sigma; r) \leq \frac{e^{\frac{\mu_0}{2}} \sin \mu_0}{\cos \frac{\mu_0}{2} - 1} e^{\mu_0\sigma} (\cos \mu_0 - 1)^{-\sigma} e^{-(\sigma-1)r} e^{-(\sigma-1)\mu_0 n}.$$

Damit ist aber Lemma 1 bewiesen mit

$$m(\sigma) = \frac{e^{\frac{\mu_0}{2}} \sin \mu_0}{\cos \frac{\mu_0}{2} - 1} e^{\mu_0\sigma} (\cos \mu_0 - 1)^{-\sigma} \quad \text{für} \quad \sigma \geq 1.$$

**Lemma 2:** Es sei  $\mathfrak{R} = \{T_n\}$ ,  $n \geq 1$ , eine beliebige Anordnung der Elemente der Klasse  $\mathfrak{R}$ . Dann gilt: Für jedes feste  $\sigma > 1$  konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-\sigma}$$

gleichmäßig in  $z$  auf jeder in  $\mathfrak{H}$  kompakten Punktmenge  $\mathfrak{M}$ .

*Beweis:* Da  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{H}$  kompakt ist, gibt es eine solche endliche Zahl  $R > 0$ , daß  $\mathfrak{M} \subset K[i, R]$ . Es genügt daher, die gleichmäßige Konvergenz für alle  $z \in K[i, R]$  zu beweisen. Sei nun

$$r \geq \mu_0 \tag{7}$$

Nach Lemma 5 § 1.3 gibt es höchstens endlich viele Elemente  $T_n \in \mathfrak{R}$ , für welche der Durchschnitt  $T_n(K[i, R]) \cap K[i, R + r]$  nicht leer ist. Daher gibt es zu jedem  $r$  einen solchen Index  $n_0 = n_0(r)$ , daß

$$\varrho(i, T_n(z)) > R + r \quad \text{für alle} \quad z \in K[i, R] \quad \text{und alle} \quad n > n_0(r). \tag{8}$$

Offenbar gilt für alle  $z \in K[i, R]$ :

$$\varrho(i, T_n(z)) \leq \varrho(i, z) + \varrho(z, T_n(z)) \leq R + \varrho(z, T_n(z)).$$

Daraus und aus (8) folgt

$$\varrho(z, T_n(z)) > r \quad \text{für alle} \quad z \in K[i, R] \quad \text{und alle} \quad n > n_0(r). \tag{9}$$

Aus (7), (9) und der Definition von  $S_n(z, \sigma; r)$  in Lemma 1 folgt offenbar: Ist  $p, q > n_0(r)$ ,  $z \in K[i, R]$ , so gibt es eine solche ganze Zahl  $l = l(p, q, z)$ , daß

$$\sum_{n=p}^q (\cos \varrho(z, T_n(z)) - 1)^{-\sigma} \leq \sum_{n=0}^l S_n(z, \sigma; r). \quad (10)$$

Sei nun  $\sigma > 1$ . Dann folgt aus (10) und Lemma 1:

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^q (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-\sigma} &\leq m(\sigma) e^{-(\sigma-1)r} \sum_{n=0}^l e^{-(\sigma-1)\mu_0 n} \\ &< m(\sigma) e^{-(\sigma-1)r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\sigma-1)\mu_0 n} = \frac{m(\sigma)}{1 - e^{-(\sigma-1)\mu_0}} e^{-(\sigma-1)r}. \end{aligned}$$

Wir haben also für  $\sigma > 1$ :

$$\sum_{n=p}^q (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-\sigma} < C(\sigma) e^{-(\sigma-1)r} \text{ für alle } z \in K[i, R]; p, q > n_0(r).$$

Bei festem  $\sigma > 1$  kann aber die rechte Seite dieser Ungleichung durch Wahl eines genügend großen  $r \geq \mu_0$  beliebig klein gemacht werden. Damit ist die behauptete gleichmäßige Konvergenz bewiesen.

Aus Lemma 2 und Lemma 4, § 2 folgt nun unmittelbar der

**Satz I:**  $\mathfrak{K} = \{T_n\}$ ,  $n \geq 1$ , sei eine beliebige Anordnung der Elemente der Klasse  $\mathfrak{K}$ , und es sei  $z = x_1 + ix_2$ ,  $x_2 > 0$ ;  $s = \sigma + it$ . Dann gilt: Für jedes feste  $s$  mit  $\sigma > 1$  konvergieren die Reihen

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{K}}(z, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s} \end{aligned}$$

absolut und gleichmäßig in  $z$  auf jeder in  $\mathfrak{H}$  kompakten Punktmenge.

Da offenbar die Glieder der in Satz I auftretenden Reihen in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige Funktionen von  $z$  sind, so folgt aus Satz I und elementaren Reihensätzen sofort der

**Satz II:** Für jedes feste  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma > 1$  ist

$$G_{\mathfrak{K}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s}$$

eine in  $\mathfrak{H}$  stetige Funktion von  $z = x_1 + ix_2$  und besitzt dort stetige erste und zweite partielle Ableitungen nach den  $x_k$ ; es gilt für  $k, l = 1, 2$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s}$$

und daher insbesondere

$$\Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_z (\cos \varrho(z, T_n z) - 1)^{-s}.$$

**Bemerkung zu Satz II:** Da die in Satz II auftretenden Reihen für  $\sigma > 1$  und alle  $z \in \mathfrak{H}$  nach Satz I absolut konvergieren, so ist ihre Summe invariant gegenüber beliebigen Umordnungen der Glieder. Wir brauchen daher – solange es sich nicht gerade um Gleichmäßigkeitsfragen handelt – die Anordnung der Elemente der Klasse  $\mathfrak{R}$  nicht zu präzisieren und dürfen kurz schreiben

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}.$$

usw.

**Satz III:** Für jedes feste  $s$  mit  $\sigma > 1$  ist

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}$$

eine bezüglich der Gruppe  $\Gamma$  automorphe Funktion von  $z$ .

**Beweis:** Sei  $U \in \Gamma$ . Aus der Tatsache, daß mit  $T$  auch  $U^{-1}TU$  genau einmal sämtliche Elemente der Klasse  $\mathfrak{R}$  durchläuft und aus der Bemerkung zu Satz II folgt:

$$G_{\mathfrak{R}}(U(z), s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(Uz, T Uz) - 1)^{-s} = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, U^{-1} T Uz) - 1)^{-s} \\ = G_{\mathfrak{R}}(z, s).$$

**Satz IV:** Die Funktion  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  erfüllt für  $\sigma > 1$  die Funktionalgleichung

$$\Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) + 2s(1 - 2s) G_{\mathfrak{R}}(z, s) + 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) G_{\mathfrak{R}}(z, s + 1) = 0$$

**Beweis:** Aus Satz II und Lemma 1 (a), § 2 folgt für  $\sigma > 1$ :

$$\Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} \Delta_z (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \quad (11)$$

$$= \sum_{T \in \mathfrak{R}} \{ 2s(2s-1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} - 4s^2 (\cos \mu(T) - 1) (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s-1} \}.$$

Nach Lemma 1, § 1.2 ist aber  $\mu(T) = \mu(\mathfrak{R})$  für alle  $T \in \mathfrak{R}$ . Daher folgt aus (11) weiter

$$\begin{aligned} \Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) &= 2s(2s-1) \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s} \\ &\quad - 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-(s+1)} \\ &= 2s(2s-1) G_{\mathfrak{R}}(z, s) - 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) G_{\mathfrak{R}}(z, s+1). \end{aligned}$$

Damit ist Satz IV bewiesen.

Nun beweisen wir noch einen Hilfssatz, den wir erst in § 5 anwenden werden :

**Lemma 3:** Für alle  $z \in \mathfrak{H}$  und alle  $s = \sigma + it$  mit

$$1 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < \infty$$

gilt :  $|G_{\mathfrak{R}}(z, s)| \leq M(\sigma_1, \sigma_2) < \infty$ .

*Beweis:* Sei  $\sigma > 1$ . Dann ist

$$|G_{\mathfrak{R}}(z, s)| \leq \sum_{T \in \mathfrak{R}} |(\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}| = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma}. \quad (12)$$

Für alle  $z \in \mathfrak{H}$  und  $T \in \mathfrak{R}$  gilt aber nach (1):  $\varrho(z, Tz) \geq \mu_0$ . Daraus und aus Lemma 1 folgt :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\sigma} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(z, \sigma; \mu_0) \leq m(\sigma) e^{-(\sigma-1)\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\sigma-1)\mu_0 n} \\ &= m(\sigma) e^{-(\sigma-1)\mu_0} (1 - e^{-(\sigma-1)\mu_0})^{-1} \end{aligned}$$

Daraus und aus (12) ergibt sich nun

$$|G_{\mathfrak{R}}(z, s)| \leq m(\sigma) e^{-(\sigma-1)\mu_0} (1 - e^{-(\sigma-1)\mu_0})^{-1} \text{ für alle } z \in \mathfrak{H} \text{ und } \sigma > 1. \quad (13)$$

Da  $m(\sigma)$  nach Lemma 1 eine für  $\sigma \geq 1$  stetige Funktion ist, so ist offenbar

$$M(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2} m(\sigma) e^{-(\sigma-1)\mu_0} (1 - e^{-(\sigma-1)\mu_0})^{-1} < \infty \text{ für } 1 < \sigma_1 \leq \sigma_2 < \infty.$$

Daraus und aus (13) folgt aber die zu beweisende Behauptung.

#### § 4. Bemerkungen über das Eigenwertproblem $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$

Zunächst wollen wir ein für allemal einen festen Fundamentalbereich von  $\Gamma$  wählen, etwa das Normalpolygon zum Zentrum  $i$ , (vgl. § 1.3) :

$$\mathfrak{F} = \{z \mid \varrho(i, z) \leq \inf_{T \in \Gamma-E} \varrho(T(i), z)\} \quad (1)$$



Da nach Voraussetzung  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$  kompakt ist, so ist nach Lemma 6, § 1.3  $\mathfrak{F}$  kompakt in  $\mathfrak{H}$ .

Nun betrachten wir das Eigenwertproblem

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \quad (2)$$

auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ . Dabei sei  $\Delta$  der zur hyperbolischen Metrik gehörige Laplace-Beltrami-Operator (§ 1.8).  $\varphi(z)$  heiße Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind :

(a)  $\varphi$  ist eine eindeutige und stetige Funktion auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$ , d. h.  $\varphi(z)$  ist eine in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige und bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion.

(b)  $\varphi(z)$ ,  $z = x_1 + ix_2$ , besitzt in  $\mathfrak{H}$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den  $x_i$ .

(c)  $\Delta_z\varphi(z) + \lambda\varphi(z) = 0$ .

(d)  $\varphi(z)$  verschwindet nicht identisch.

Das Eigenwertproblem (2) läßt sich im Rahmen der Theorie linearer Integralgleichungen mit symmetrischem Kern behandeln<sup>14)</sup>. Es ergeben sich dann folgende bekannte Tatsachen (Lemma 1–4).

**Lemma 1:** Es gibt unendlich viele Eigenwerte, die sich aber im Endlichen nirgends häufen. Jeder Eigenwert ist reell, nichtnegativ und besitzt eine endliche Vielfachheit.

Offensichtlich ist insbesondere  $\lambda = 0$  ein Eigenwert und jede Funktion  $\varphi(z) = \text{const} \neq 0$  ist eine zugehörige Eigenfunktion. Umgekehrt ist jede Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda = 0$  offenbar *harmonisch auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{H} \bmod \Gamma$*  und somit konstant. Daher gilt

**Lemma 2:**  $\lambda_0 = 0$  ist ein einfacher Eigenwert und die zugehörigen Eigenfunktionen sind konstant.

Wir ordnen nun die sich im Endlichen nirgends häufenden Eigenwerte ihrer Größe nach ; in der so entstehenden Folge soll aber *jeder Eigenwert genau seiner Vielfachheit entsprechend oft auftreten*. Wegen Lemma 1 und Lemma 2 sieht dann das Eigenwertspektrum  $\Lambda$  offenbar folgendermaßen aus :

$$\Lambda = \{\lambda_n\}, n \geq 0; \lambda_0 = 0 < \lambda_1, \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \text{ für } n \geq 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty. \quad (3)$$

---

<sup>14)</sup> [4], [6].

Es sei nun  $\{\varphi_n(z)\}$ ,  $n \geq 0$ , ein zu (3) gehöriges, normiert orthogonales System von Eigenfunktionen. Da die  $\lambda_n$  reell sind, können offenbar auch die Eigenfunktionen  $\varphi_n(z)$  reell gewählt werden. Es gilt dann also

$$\Delta_z \varphi_n(z) + \lambda_n \varphi_n(z) = 0 \quad \text{für alle } n \geq 0 \quad (4)$$

$$\iint_{\mathfrak{F}} \varphi_n(z) \varphi_m(z) d\omega = \delta_{n,m} \quad \text{für alle } n, m \geq 0. \quad (5)$$

Aus (5) und Lemma 2 folgt insbesondere, daß

$$\varphi_0(z) = \left( \iint_{\mathfrak{F}} d\omega \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Daher ist nach Formel (19) § 1.5

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(p-1)}}, \quad (6)$$

wobei  $p$  das Geschlecht von  $\Gamma$  ist.

Die Theorie der linearen Integralgleichungen liefert nun bekanntlich den folgenden Entwicklungssatz:

**Lemma 3:** Es sei  $f(z)$ ,  $z = x_1 + ix_2$ , eine in  $\mathfrak{H}$  stetige und bezüglich  $\Gamma$  automorphe (reelle oder komplexe) Funktion.  $f(z)$  besitze in ganz  $\mathfrak{H}$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $x_1, x_2$ . Dann konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(z), \quad c_n = \iint_{\mathfrak{F}} f(z) \varphi_n(z) d\omega$$

absolut und gleichmäßig für alle  $z \in \mathfrak{H}$  und stellt die Funktion  $f(z)$  dar.

Ferner gilt das wichtige

**Lemma 4:** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(z)|^2}{\lambda_n^2}$  konvergiert gleichmäßig für alle  $z \in \mathfrak{H}$ .

Da die Eigenfunktion  $\varphi_n(z)$  eine in ganz  $\mathfrak{H}$  zweimal stetig differenzierbare Lösung der linearen elliptischen Differentialgleichung (4) ist, so gilt

**Lemma 5:** Die Eigenfunktionen  $\varphi_n(z)$ ,  $z = x_1 + ix_2$ , sind in ganz  $\mathfrak{H}$  analytisch in den Variablen  $x_1, x_2$ .

## § 5. Die Fourierkoeffizienten $F_l(s)$

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Fourierkoeffizienten der Funktion  $G_{\mathfrak{F}}(z, s)$  bezüglich des normierten Orthogonalsystems  $\{\varphi_l(z)\}$ :

$$F_l(s) = \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{F}}(z, s) \varphi_l(z) d\omega, \quad l \geq 0, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \quad (1)$$

Da  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{S}$  kompakt und  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  nach Satz II eine für  $\sigma > 1$  in ganz  $\mathfrak{S}$  stetige Funktion von  $z$  ist, so sind die  $F_l(s)$  für alle  $s$  mit  $\sigma > 1$  definiert.

Wir wählen nun ein beliebiges, aber im folgenden fest zu haltendes Element

$$T^* \in \mathfrak{R} \neq \{E\} \quad (2)$$

$T^*$  besitzt nach Lemma 8, § 1.4 eine Normaldarstellung

$$T^* = P^k, \quad P \in \Gamma, \quad P \text{ primitiv}; \quad (3)$$

dabei ist

$$|k| = \nu(T^*) = \nu(\mathfrak{R}). \quad (4)$$

Es sei  $\mathfrak{Z} = [P]$  die von  $P$  erzeugte zyklische Gruppe unendlicher Ordnung. Wir zerlegen nun die Gruppe  $\Gamma$  in Rechts-Restklassen mod  $\mathfrak{Z}$  und wählen aus jeder solchen einen festen Repräsentanten  $A_n, n \geq 1$ . Dann gilt:

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Z} A_n \quad (5)$$

$$\text{Aus } A_n A_m^{-1} \in \mathfrak{Z} = [P] \text{ folgt: } m = n. \quad (6)$$

Nun beweisen wir ein sehr einfaches Lemma, das aber für den Erfolg der nachstehenden Untersuchungen in nicht geringem Maße verantwortlich ist.

**Lemma 1:** Durchläuft  $n$  alle ganzen Zahlen  $\geq 1$ , so durchläuft  $T_n = A_n^{-1} P^k A_n$  genau einmal alle Elemente von  $\mathfrak{R}$ ; d. h. es gilt

(a) Es ist  $A_n^{-1} P^k A_n \in \mathfrak{R}$  für alle  $n \geq 1$ , und zu jedem  $T \in \mathfrak{R}$  gibt es ein solches  $n$ , daß  $T = A_n^{-1} P^k A_n$ .

(b) Aus  $A_n^{-1} P^k A_n = A_m^{-1} P^k A_m$  folgt:  $m = n$ .

*Beweis:* Die Behauptung (a) folgt offenbar sofort aus (2), (3) und (5). Nicht trivial ist hingegen die Behauptung (b). Aus  $A_n^{-1} P^k A_n = A_m^{-1} P^k A_m$  folgt zunächst

$$C^{-1} P^k C = P^k \quad (7)$$

mit

$$C = A_n A_m^{-1} \in \Gamma. \quad (8)$$

Aus (7) folgt nach Lemma 2, § 1.2, daß  $C$  und  $P^k$  zum gleichen Fixpunktpaar gehören. Folglich gehören auch  $C \in \Gamma$  und  $P \in \Gamma$  zum gleichen Fixpunktpaar von  $\Gamma$ . Da aber  $P$  primitiv ist, so gibt es nach Lemma 7, § 1.4 eine solche ganze Zahl  $q$ , daß  $C = P^q$ . Daraus und aus (8) folgt aber nach (6), daß  $m = n$ . Damit ist Lemma 1 bewiesen.

Da  $\mathfrak{F}$  in  $\mathfrak{S}$  kompakt ist, folgt jetzt aus Lemma 1 und Satz I, daß für jedes feste  $s$  mit  $\sigma > 1$

$$G_{\mathfrak{F}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos \varrho(z, A_n^{-1} P^k A_n z) - 1)^{-s}$$

auf  $\mathfrak{F}$  gleichmäßig konvergiert. Daher gilt für  $\sigma > 1$ :

$$\begin{aligned} F_l(s) &= \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{F}}(z, s) \varphi_l(z) d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{\mathfrak{F}} (\cos \varrho(z, A_n^{-1} P^k A_n z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{\mathfrak{F}} (\cos \varrho(A_n z, P^k A_n z) - 1)^{-s} \varphi_l(A_n(z)) d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n(\mathfrak{F})} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega . \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß  $\varphi_l(z)$  bezüglich  $\Gamma$  automorph ist. In derselben Weise ergibt sich für  $\sigma > 1$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{F}}(z, \sigma) |\varphi_l(z)| d\omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n(\mathfrak{F})} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-\sigma} |\varphi_l(z)| d\omega \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n(\mathfrak{F})} |(\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z)| d\omega . \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n(\mathfrak{F})} |(\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z)| d\omega < \infty \quad \text{für } \sigma > 1 . \quad (10)$$

Wir definieren nun

$$\mathfrak{F}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(\mathfrak{F}) \quad (11)$$

$\mathfrak{F}^*$  ist als Vereinigungsmenge der abzählbar vielen Normalpolygone  $A_n(\mathfrak{F})$  meßbar. Die in  $\mathfrak{S}$  kompakten Normalpolygone  $A_n(\mathfrak{F})$  und  $A_m(\mathfrak{F})$  überlappen offenbar nicht, wenn  $n \neq m$ . Daher folgt aus (10) und (11), daß das Integral  $\iint_{\mathfrak{F}^*} |(\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z)| d\omega$  und somit auch das Integral  $\iint_{\mathfrak{F}^*} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega$  für  $\sigma > 1$  existiert, und daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{A_n(\mathfrak{F})} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega = \iint_{\mathfrak{F}^*} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega . \quad (12)$$

Aus (9) und (12) ergibt sich jetzt

$$F_l(s) = \iint_{\mathfrak{F}^*} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega , \quad \sigma > 1 . \quad (13)$$

Da  $\mathfrak{F}$  ein Normalpolygon von  $\Gamma$  ist, so folgt aus (5), (6) und (11) leicht, daß  $\mathfrak{F}^*$  ein Fundamentalbereich der zyklischen Gruppe  $\mathfrak{Z} = [P]$  im Sinne von Definition 4, § 1.3 ist. Nun ist aber offensichtlich die Funktion  $(\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z)$  automorph bezüglich der zyklischen Gruppe  $\mathfrak{Z} = [P]$ . Daher ändert sich nach Lemma 9, § 1.5 der Wert des Integrals (13) nicht, wenn wir darin  $\mathfrak{F}^*$  durch einen anderen Fundamentalbereich von  $\mathfrak{Z}$  im Sinne von Definition 4, § 1.3 ersetzen. Wir werden nun einen für unsere Zwecke besonders günstigen konstruieren. Es gibt offenbar eine solche Bewegung  $V$  von  $\mathfrak{H}$ , daß

$$\Theta = V P V^{-1} \quad (14)$$

die Gestalt

$$\Theta(w) = \vartheta \cdot w, \quad \vartheta > 1 \quad (15)$$

erhält. Aus (2), (3), (14) und Lemma 1, § 1.2 folgt dann

$$\mu(\Theta^k) = \mu(P^k) = \mu(\mathfrak{R}). \quad (16)$$

Ferner ist

$$V^{-1}(\mathfrak{a}(\Theta)) = \mathfrak{a}(P) \quad (17)$$

Wir setzen noch

$$V(z) = w = u + iv = r e^{i\psi}, \quad r > 0, \quad 0 < \psi < \pi \quad (18)$$

Nun ist wegen (15) die Punktmenge

$$\mathfrak{G} = \{w = r e^{i\psi} \mid 1 \leq r \leq \vartheta, \quad 0 < \psi < \pi\} \quad (19)$$

ein Fundamentalbereich der zyklischen Gruppe  $[\Theta]$  im Sinne von Definition 4, § 1.3. Wegen (14) ist daher  $V^{-1}(\mathfrak{G})$  ein Fundamentalbereich von  $\mathfrak{Z} = [P]$ . Folglich kann nun  $\mathfrak{F}^*$  in (13) durch  $V^{-1}(\mathfrak{G})$  ersetzt werden. Es folgt dann aus (13) unter Berücksichtigung von (14), (18):

$$\begin{aligned} F_l(s) &= \iint_{V^{-1}(\mathfrak{G})} (\cos \varrho(z, P^k z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega_z \\ &= \iint_{V^{-1}(\mathfrak{G})} (\cos \varrho(z, V^{-1} \Theta^k V z) - 1)^{-s} \varphi_l(z) d\omega_z \\ &= \iint_{V^{-1}(\mathfrak{G})} (\cos \varrho(V z, \Theta^k V z) - 1)^{-s} \varphi_l(V^{-1} V z) d\omega_z \\ &= \iint_{\mathfrak{G}} (\cos \varrho(w, \Theta^k w) - 1)^{-s} \varphi_l(V^{-1} w) d\omega_w. \end{aligned}$$

Definieren wir noch

$$\overline{\varphi}_l(w) = \varphi_l(V^{-1} w), \quad (20)$$

so wird daher

$$F_l(s) = \iint_{\mathfrak{G}} (\cos \varrho(w, \Theta^k w) - 1)^{-s} \overline{\varphi}_l(w) d\omega_w, \quad \sigma > 1. \quad (21)$$

Aus (15), (16), (18) folgt nach Lemma 3, § 1.2

$$(\text{Cos } \varrho(w, \Theta^k w) - 1)^{-s} = (\text{Cos } \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \sin^{2s} \psi \quad (22)$$

Ferner ist

$$d\omega_w = v^{-2} du dv = r^{-1} \sin^{-2} \psi dr d\psi \quad (23)$$

Aus (19), (21), (22) und (23) folgt nun

$$F_l(s) = (\text{Cos } \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \int_{\psi=0}^{\pi} \sin^{2s-2} \psi \left( \int_{r=1}^{\vartheta} \bar{\varphi}_l(re^{i\psi}) \frac{dr}{r} \right) d\psi, \quad \sigma > 1. \quad (24)$$

Führen wir die neue Variable

$$x = \log r \quad (25)$$

ein und definieren

$$\varphi_l^*(x, \psi) = \bar{\varphi}_l(re^{i\psi}), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < \psi < \pi, \quad (26)$$

so wird

$$\int_1^{\vartheta} \bar{\varphi}_l(re^{i\psi}) \frac{dr}{r} = \int_0^{\log \vartheta} \varphi_l^*(x, \psi) dx. \quad (27)$$

Wir setzen nun noch

$$\Phi_l(\psi) = \int_0^{\log \vartheta} \varphi_l^*(x, \psi) dx, \quad 0 < \psi < \pi \quad (28)$$

Dann folgt aus (24), (27), (28)

$$F_l(s) = (\text{Cos } \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \int_0^{\pi} \sin^{2s-2} \psi \Phi_l(\psi) d\psi, \quad \sigma > 1. \quad (29)$$

Nun zeigen wir zunächst

**Lemma 2:** Die Funktion  $\varphi_l^*(x, \psi)$  besitzt im Parallelstreifen

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < \psi < \pi$$

stetige partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach  $x, \psi$  und ist periodisch in  $x$  mit der Periode  $\log \vartheta$ .

*Beweis:* Nach (26), (25), (20), (18) gilt

$$\varphi_l^*(x, \psi) = \varphi_l(z) \quad (30)$$

$$e^{x+i\psi} = V(z) \quad (31)$$

Durch (31) wird der Parallelstreifen

$$\mathfrak{P} : -\infty < x < +\infty, \quad 0 < \psi < \pi$$

der komplexen  $(x + i\psi)$ -Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf die Halbebene  $\mathfrak{H}$  abgebildet. Nach Lemma 5, § 4 ist aber

$$\varphi_l(z) \ , \quad z = x_1 + i x_2 \ ,$$

in ganz  $\mathfrak{H}$  analytisch in den Variablen  $x_1, x_2$ . Daher ist wegen (30), (31) die Funktion  $\varphi_l^*(x, \psi)$  in  $\mathfrak{P}$  analytisch in den Variablen  $x, \psi$  und besitzt somit daselbst stetige partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach  $x, \psi$ .

Aus (26), (25), (20), (18) und (14), (15) folgt

$$\begin{aligned} \varphi_l^*(x + \log \vartheta, \psi) &= \bar{\varphi}_l(\vartheta r e^{i\psi}) = \bar{\varphi}_l(\Theta(w)) = \varphi_l(V^{-1} \Theta w) \\ &= \varphi_l(V^{-1} \Theta Vz) = \varphi_l(P(z)) = \varphi_l(z) = \varphi_l(V^{-1}w) \\ &= \bar{\varphi}_l(w) = \bar{\varphi}_l(r e^{i\psi}) = \varphi_l^*(x, \psi) \ . \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

**Lemma 3:** Die Funktion  $\Phi_l(\psi)$  genügt im Intervall  $0 < \psi < \pi$  der linearen Differentialgleichung  $\Phi_l''(\psi) + \lambda_l \sin^{-2} \psi \Phi_l(\psi) = 0$ .

*Beweis:* Es ist

$$\Delta_w \bar{\varphi}_l(w) = v^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \bar{\varphi}_l(w) = r^2 \sin^2 \psi \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) \bar{\varphi}_l(r e^{i\psi}) \quad (32)$$

Wegen (25) ist aber  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x}$  und somit

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \right) . \quad (33)$$

Aus (26), (32), (33) folgt nun

$$\Delta_w \bar{\varphi}_l(w) = \sin^2 \psi \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_l^*(x, \psi) + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \varphi_l^*(x, \psi) \right) . \quad (34)$$

Nach (18), (20) ist

$$\bar{\varphi}_l(w) = \varphi_l(z) \ , \quad w = V(z) . \quad (35)$$

Daraus folgt wegen der Invarianzeigenschaft des Operators  $\Delta$  (Lemma 10, § 1.8)

$$\Delta_w \bar{\varphi}_l(w) = \Delta_z \varphi_l(z) . \quad (36)$$

Nun ist aber

$$\Delta_z \varphi_l(z) + \lambda_l \varphi_l(z) = 0 . \quad (37)$$

Aus (35), (36), (37) ergibt sich jetzt :

$$\Delta_w \bar{\varphi}_l(w) = -\lambda_l \bar{\varphi}_l(w) = -\lambda_l \bar{\varphi}_l(re^{i\psi}) ,$$

also, wenn wir noch (26) berücksichtigen:  $\Delta_w \bar{\varphi}_l(w) = -\lambda_l \varphi_l^*(x, \psi)$ .  
Daraus und aus (34) folgt endlich

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_l^*(x, \psi) + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \varphi_l^*(x, \psi) + \lambda_l \sin^{-2} \psi \varphi_l^*(x, \psi) = 0$$

und daher

$$\int_0^{\log \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi_l^*(x, \psi) dx + \int_0^{\log \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \varphi_l^*(x, \psi) dx + \lambda_l \sin^{-2} \psi \int_0^{\log \vartheta} \varphi_l^*(x, \psi) dx = 0 .$$

Daraus und aus Lemma 2 folgt offenbar

$$\frac{d^2}{d\psi^2} \left( \int_0^{\log \vartheta} \varphi_l^*(x, \psi) dx \right) + \lambda_l \sin^{-2} \psi \int_0^{\log \vartheta} \varphi_l^*(x, \psi) dx = 0 ,$$

also wegen (28):  $\Phi_l''(\psi) + \lambda_l \sin^{-2} \psi \Phi_l(\psi) = 0$ . Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Für den weiteren Verlauf unserer Untersuchungen wird die Tatsache ausschlaggebend sein, daß dem Funktionswert  $\Phi_l(\pi/2)$  eine invariante Bedeutung zukommt; wir zeigen

**Lemma 4:** Für  $l \geq 0$  gilt  $\Phi_l(\pi/2) = \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{v(\mathfrak{R})}$ .

*Beweis:* Nach (27), (28) und wegen (15) gilt offenbar

$$\Phi_l(\pi/2) = \int_1^{\vartheta} \bar{\varphi}_l(re^{i\pi/2}) \frac{dr}{r} = \int_i^{\Theta(i)} \bar{\varphi}_l(w) dS_w ,$$

wobei das letzte Integral ein geodätisches Integral im Sinne von § 1.7 ist. Hieraus folgt wegen (20) und (18) weiter

$$\Phi_l(\pi/2) = \int_i^{\Theta(i)} \varphi_l(V^{-1}w) dS_w = \int_{V^{-1}(i)}^{V^{-1}\Theta(i)} \varphi_l(z) dS_z \quad (38)$$

Wegen (15) ist offenbar  $i \in \mathfrak{a}(\Theta)$  und daher wegen (17)

$$z_0 = V^{-1}(i) \in \mathfrak{a}(P) \quad (39)$$

Berücksichtigen wir noch (14), so folgt aus (38), (39):

$$\Phi_l(\pi/2) = \int_{z_0}^{P(z_0)} \varphi_l(z) dS_z , \quad z_0 \in \mathfrak{a}(P) .$$



Daraus folgt nun nach § 1.7:  $\Phi_l(\pi/2) = \hat{\varphi}_l(P) = \frac{1}{|k|} \hat{\varphi}_l(P^k)$ , also, wenn wir noch (2), (3) und (4) berücksichtigen:

$$\Phi_l(\pi/2) = \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}.$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

Jetzt kehren wir wieder zu unserem Integral (29) zurück. Wir zerlegen dieses in ein Integral über das Intervall  $(0, \pi/2)$  und in ein Integral über das Intervall  $(\pi/2, \pi)$ . Alsdann machen wir im ersten Teilintegral die Substitution  $\psi = \pi/2 - y$  und im zweiten Teilintegral die Substitution  $\psi = \pi/2 + y$ . Dann folgt aus (29)

$$F_l(s) = (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \int_0^{\pi/2} \cos^{2s-2} y \cdot \xi_l(y) dy, \quad \sigma > 1 \quad (40)$$

mit

$$\xi_l(y) = \Phi_l(\pi/2 - y) + \Phi_l(\pi/2 + y), \quad 0 \leq y < \pi/2. \quad (41)$$

Aus (41) folgt insbesondere:  $\xi_l(0) = 2\Phi_l(\pi/2)$ ,  $\xi'_l(0) = 0$ , also nach Lemma 4:

$$\xi_l(0) = 2 \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}, \quad \xi'_l(0) = 0 \quad (42)$$

Ferner folgt aus (41) und Lemma 3 sofort

$$\xi''_l(y) + \lambda_l \cos^{-2} y \xi_l(y) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq y < \pi/2. \quad (43)$$

Durch (42) und (43) wird die Funktion  $\xi_l(y)$  offenbar eindeutig bestimmt. Wir führen nun noch die Variabelntransformation  $\eta = \operatorname{tg} y$  aus; dann folgt aus (40), (42), (43) sofort das

**Lemma 5:** Für alle  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma > 1$  gilt

$$F_l(s) = (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} I_l(s) \quad (44)$$

mit

$$I_l(s) = \int_0^\infty \frac{B_l(\eta)}{(1 + \eta^2)^s} d\eta. \quad (45)$$

Dabei ist  $B_l(\eta)$  diejenige für  $0 \leq \eta < \infty$  reguläre Lösung der linearen Differentialgleichung

$$B''_l(\eta) + \frac{2\eta}{1 + \eta^2} B'_l(\eta) + \frac{\lambda_l}{1 + \eta^2} B_l(\eta) = 0, \quad (46)$$

welche durch die Anfangsbedingungen

$$B_l(0) = 2 \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}, \quad B'_l(0) = 0 \quad (47)$$

eindeutig bestimmt ist.

Ausgehend von (46), (47) wäre es nun nicht schwierig, die Funktion  $B_l(\eta)$  mit Hilfe einer geeigneten hypergeometrischen Funktion explizite darzustellen. Wir verzichten aber darauf und wenden uns gleich der näheren Untersuchung von  $I_l(s)$  zu. Wir beweisen zunächst das

**Lemma 6:**  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^{\frac{1}{2}} I_l(\sigma) = \Gamma(\frac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})} .$

*Beweis:* Machen wir im Integral (45) die Substitution  $1 + \eta^2 = e^\tau$ , so wird

$$I_l(s) = \int_0^\infty f_l(\tau) e^{-s\tau} d\tau , \quad \sigma > 1 \quad (48)$$

mit

$$f_l(\tau) = \frac{e^\tau}{2 \sqrt{e^\tau - 1}} B_l(\sqrt{e^\tau - 1}) , \quad 0 < \tau < \infty . \quad (49)$$

Damit ist  $I_l(s)$  als ein (mindestens) in der Halbebene  $\sigma > 1$  konvergentes Laplace-Integral dargestellt. Nach Lemma 5 ist  $B_l(0) = 2 \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}$ . Daraus und aus (49) folgt

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{\frac{1}{2}} f_l(\tau) = \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})} . \quad (50)$$

Aus (48) und (50) folgt aber nach einem bekannten Satz Abelscher Art für Laplace-Integrale<sup>15)</sup>:

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \sigma^{\frac{1}{2}} I_l(\sigma) = \Gamma(\frac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})} .$$

Damit ist Lemma 6 bewiesen.

**Lemma 7:** Es sei

$$s_l^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_l} , \quad s_l^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_l} , \quad l \geq 0 \quad (51)$$

$$H_l(s) = \frac{\Gamma^2(s)}{\Gamma(s - s_l^+) \Gamma(s - s_l^-)} I_l(s) , \quad \sigma > 1 . \quad (52)$$

Dann gilt: Die durch (52) zunächst nur in der Halbebene  $\sigma > 1$  definierte Funktion  $H_l(s)$  ist sogar eine *ganze Funktion* von  $s$  und genügt der Funktionalgleichung  $H_l(s+1) = H_l(s)$ .

*Beweis:* Aus der Funktionalgleichung für  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  (Satz IV, § 3) folgt sofort:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathfrak{F}} \varphi_l(z) \Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) d\omega + 2s(1-2s) \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{R}}(z, s) \varphi_l(z) d\omega \\ & + 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{R}}(z, s+1) \varphi_l(z) d\omega = 0 . \end{aligned}$$

---

<sup>15)</sup> [1] Satz 12 pag. 200.

also wegen (1)

$$\iint_{\mathfrak{F}} \varphi_l(z) \Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) d\omega + 2s(1-2s) F_l(s) + 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) F_l(s+1) = 0. \quad (53)$$

Da  $\varphi_l(z)$  und  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktionen von

$$z = x_1 + i x_2$$

sind und stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach den  $x_k$  besitzen, weil ferner die Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{F}$  mod  $\Gamma$  geschlossen ist, so gilt die Greensche Formel

$$\iint_{\mathfrak{F}} \varphi_l(z) \Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) d\omega = \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{R}}(z, s) \Delta_z \varphi_l(z) d\omega \quad (54)$$

Nun ist aber  $\Delta_z \varphi_l(z) + \lambda_l \varphi_l(z) = 0$ . Daraus und aus (54) ergibt sich

$$\iint_{\mathfrak{F}} \varphi_l(z) \Delta_z G_{\mathfrak{R}}(z, s) d\omega = -\lambda_l \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{R}}(z, s) \varphi_l(z) d\omega = -\lambda_l F_l(s).$$

Hieraus und aus (53) folgt endlich

$$(2s(1-2s) - \lambda_l) F_l(s) + 4s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) F_l(s+1) = 0.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (51)

$$(s - s_l^+) (s - s_l^-) F_l(s) = s^2 (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1) F_l(s+1)$$

Setzen wir hier (44) ein, so ergibt sich für  $I_l(s)$  folgende Funktionalgleichung:

$$(s - s_l^+) (s - s_l^-) I_l(s) = s^2 I_l(s+1), \quad \sigma > 1. \quad (55)$$

Nach Definition (52) gilt

$$I_l(s) = \frac{\Gamma(s - s_l^+) \Gamma(s - s_l^-)}{\Gamma^2(s)} H_l(s), \quad \sigma > 1. \quad (56)$$

Setzen wir nun (56) in (55) ein und berücksichtigen, daß

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),$$

so ergibt sich für  $H_l(s)$  die Funktionalgleichung

$$H_l(s+1) = H_l(s), \quad \sigma > 1. \quad (57)$$

Aus (48) und (52) folgt sofort, daß  $H_l(s)$  mindestens in der Halbebene  $\sigma > 1$  regulär analytisch ist. Daraus und aus (57) folgt aber, daß  $H_l(s)$  sogar eine ganze Funktion ist. Damit ist Lemma 7 bewiesen.

Nun sind wir in der Lage, das Hauptresultat dieses Paragraphen zu beweisen:

**Satz V:** *Es sei*

$$F_l(s) = \iint_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{R}}(z, s) \varphi_l(z) d\omega, \quad \sigma > 1$$

$$s_l^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_l}, \quad s_l^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_l}, \quad l \geq 0$$

*Dann ist*

$$F_l(s) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \frac{\Gamma(s - s_l^+) \Gamma(s - s_l^-)}{\Gamma^2(s)}.$$

*Beweis:* Aus der Stirlingschen asymptotischen Darstellung von  $\Gamma(s)$  gewinnt man leicht

$$\frac{\Gamma^2(\sigma)}{\Gamma(\sigma - s_l^+) \Gamma(\sigma - s_l^-)} \sim \sigma^{s_l^+ + s_l^-} \quad \text{für} \quad \sigma \rightarrow +\infty.$$

Nach (51) ist aber  $s_l^+ + s_l^- = 1/2$ ; somit wird

$$\frac{\Gamma^2(\sigma)}{\Gamma(\sigma - s_l^+) \Gamma(\sigma - s_l^-)} \sim \sigma^{\frac{1}{2}} \quad \text{für} \quad \sigma \rightarrow +\infty \quad (58)$$

Aus (52), (58) und Lemma 6 folgt nun

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} H_l(\sigma) = \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}.$$

Daraus und aus Lemma 7 folgt offenbar

$$H_l(s) \equiv \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_l(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})}.$$

Hieraus und aus (52) und Lemma 5 ergibt sich aber die zu beweisende Behauptung.

Im Anschluß an Satz V beweisen wir noch einen Hilfssatz, der in § 6 eine entscheidende Rolle spielen wird.

**Lemma 8:** Für alle  $s = \sigma + it$  mit  $1 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < \infty$  gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) |^2 \leq M^*(\sigma_1, \sigma_2) < \infty.$$

*Beweis:* Da  $\{\varphi_n(z)\}$ ,  $n \geq 1$ , ein normiertes Orthogonalsystem ist, gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} | F_n(s) |^2 \leq \iint_{\mathfrak{F}} | G_{\mathfrak{R}}(z, s) |^2 d\omega \quad \text{für} \quad \sigma > 1.$$

Daraus und aus Satz V und Lemma 3, § 3 ergibt sich für

$$\begin{aligned} & 1 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < \infty : \\ & \sum_{n=1}^{\infty} | \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) |^2 \\ & \leq \frac{\nu^2(\mathfrak{R})}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{2\sigma} \Gamma^4(\sigma) M^2(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \iint_{\mathfrak{F}} d\omega , \end{aligned}$$

also wegen Formel (19), § 1.6

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} | \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) |^2 \\ & \leq 4\pi(p-1) \frac{\nu^2(\mathfrak{R})}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} M^2(\sigma_1, \sigma_2) (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{2\sigma} \Gamma^4(\sigma) . \end{aligned}$$

Hieraus folgt offenbar die zu beweisende Behauptung mit

$$M^*(\sigma_1, \sigma_2) = 4\pi(p-1) \frac{\nu^2(\mathfrak{R})}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} M^2(\sigma_1, \sigma_2) \cdot \max_{1 < \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 < \infty} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{2\sigma} \Gamma^4(\sigma) < \infty .$$

## § 6. Analytische Fortsetzung von $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$

Es sei  $s = \sigma + it$  fest und  $\sigma > 1$ . Dann ist  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  nach Satz II und Satz III, § 3 eine in  $\mathfrak{H}$  stetige und bezüglich  $\Gamma$  automorphe Funktion von  $z = x_1 + ix_2$ , welche in  $\mathfrak{H}$  stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach  $x_1, x_2$  besitzt. Nach Lemma 3, § 4 konvergiert daher die Fourierentwicklung von  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  nach dem Orthogonalsystem  $\{\varphi_n(z)\}$  absolut und gleichmäßig für alle  $z \in \mathfrak{H}$  und stellt die Funktion  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  dar. Daraus und aus Satz V, § 5 folgt nun für  $\sigma > 1$ :

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{R}}(z, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(s) \varphi_n(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\tfrac{1}{2}) \frac{\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R})}{\nu(\mathfrak{R})} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \frac{\Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-)}{\Gamma^2(s)} \varphi_n(z) . \end{aligned} \quad (1)$$

Nach § 4 ist  $\lambda_0 = 0$ ; daraus und aus der Definition der Größen  $s_n^{\pm}$  in Satz V folgt

$$s_0^+ = \tfrac{1}{2} , \quad s_0^- = 0 \quad (2)$$

Nach § 4 ist ferner

$$\varphi_0(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi(p-1)}} . \quad (3)$$

Daraus folgt nach § 1.7 sofort

$$\hat{\varphi}_0(\mathfrak{R}) = \frac{\mu(\mathfrak{R})}{V4\pi(p-1)} . \quad (4)$$

Aus (1), (2), (3) und (4) ergibt sich nun offenbar der

**Satz VI:** Für  $\sigma > 1$  gilt

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\nu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} (\cos \mu(\mathfrak{R}) - 1)^{-s} \left( \frac{\mu(\mathfrak{R})}{4\pi(p-1)} \frac{\Gamma(s + \frac{1}{2})}{s - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\Gamma(s)} L_{\mathfrak{R}}(z, s) \right)$$

mit

$$L_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z) .$$

Für jedes feste  $s = \sigma + it$  mit  $\sigma > 1$  konvergiert die Reihe  $L_{\mathfrak{R}}(z, s)$  absolut und gleichmäßig für alle  $z \in \mathfrak{H}$ .

Jetzt beweisen wir den für die analytische Fortsetzung von  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  entscheidenden

**Satz VII:** Es sei  $g \geq 1$  eine beliebige ganze Zahl,

$$Q_g = \{s = \sigma + it \mid |\sigma| \leq g, \quad |t| \leq g\} .$$

$n_0 = n_0(g)$  werde so gewählt<sup>16)</sup>, daß

$$\lambda_n \geq 16g^2 + \frac{1}{4} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0(g) .$$

Dann ist  $\Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-)$  in  $Q_g$  regulär für alle  $n \geq n_0(g)$  und die Reihe

$$\sum_{n=n_0(g)}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z)$$

konvergiert absolut und gleichmäßig für alle  $s \in Q_g$  und  $z \in \mathfrak{H}$ .

*Beweis:* Nach der Definition in Satz V, § 5 ist

$$s_n^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n}, \quad s_n^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n} . \quad (5)$$

Daher ist

$$4s_n^+ s_n^- = \lambda_n . \quad (6)$$

Nach Voraussetzung ist

$$\lambda_n \geq 16g^2 + \frac{1}{4} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0(g); \quad g \geq 1 .$$

---

<sup>16)</sup> Dies ist offenbar für jedes  $g \geq 1$  möglich, da ja nach § 4  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ .

Daraus und aus (5) folgt offenbar

$$s_n^+ = \frac{1}{4} + it_n, \quad s_n^- = \frac{1}{4} - it_n, \quad t_n = \frac{1}{4} \sqrt{4\lambda_n - 1} \geq 2g \quad \text{für alle } n \geq n_0(g). \quad (7)$$

Ist nun  $k$  eine beliebige ganze Zahl, so folgt aus (7)

$$|s + k - s_n^\pm| \geq t_n - g \geq g \quad \text{für alle } s \in Q_g \quad \text{und } n \geq n_0(g). \quad (8)$$

Ferner folgt aus (7) für  $s \in Q_g$ :  $\frac{|s|}{|s_n^\pm|} \leq \frac{\sqrt{2}g}{t_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , also  $1 - \left| \frac{s}{s_n^\pm} \right| \geq \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ ; daher  $\left| \frac{s}{s_n^+} - 1 \right| \cdot \left| \frac{s}{s_n^-} - 1 \right| \geq \left( 1 - \left| \frac{s}{s_n^+} \right| \right) \left( 1 - \left| \frac{s}{s_n^-} \right| \right) \geq \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4}$ , also sicher

$$\left| \frac{s}{s_n^+} - 1 \right| \cdot \left| \frac{s}{s_n^-} - 1 \right| > \frac{1}{20} \quad \text{für alle } s \in Q_g \quad \text{und } n \geq n_0(g). \quad (9)$$

Aus (7) folgt außerdem, daß  $\Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-)$  für  $n \geq n_0(g)$  in ganz  $Q_g$  regulär analytisch ist.

Aus der Funktionalgleichung  $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$  ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} & \Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-) \\ &= \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) (s - s_n^+) (s - s_n^-) \prod_{k=1}^{g+1} (s + k - s_n^+) (s + k - s_n^-). \end{aligned}$$

Hieraus und aus (6) folgt weiter

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\lambda_n} \Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-) \\ &= \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \left( \frac{s}{s_n^+} - 1 \right) \left( \frac{s}{s_n^-} - 1 \right) \prod_{k=1}^{g+1} (s + k - s_n^+) (s + k - s_n^-). \end{aligned}$$

Daraus und aus (8), (9) ergibt sich nun:

$$|\Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-)| \leq 80 g^{-2(g+1)} \cdot \frac{1}{\lambda_n} |\Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-)|$$

für alle  $s \in Q_g$  und  $n \geq n_0(g)$ .

Daher gilt für alle  $l, m \geq n_0(g)$ ,  $s \in Q_g$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=l}^m |\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z)| \\ & \leq 80 g^{-2(g+1)} \sum_{n=l}^m |\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-)| \frac{|\varphi_n(z)|}{\lambda_n} \quad (10) \\ & \leq 80 g^{-2(g+1)} \left( \sum_{n=l}^m |\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{n=l}^m \frac{|\varphi_n(z)|^2}{\lambda_n^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für alle  $s \in Q_g$  ist offenbar  $2 \leq \Re(s + g + 2) \leq 2g + 2$ . Daher ist nach Lemma 8, § 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s + g + 2 - s_n^+) \Gamma(s + g + 2 - s_n^-)|^2 \leq M^*(2, 2g + 2) < \infty \text{ für } s \in Q_g.$$

Daraus und aus (10) ergibt sich endlich

$$\sum_{n=l}^m |\hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z)| \leq 80 g^{-2(g+1)} \sqrt{M^*(2, 2g + 2)} \left( \sum_{n=l}^m \frac{|\varphi_n(z)|^2}{\lambda_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

für alle  $s \in Q_g$  und alle  $m, l \geq n_0(g)$ .

Da aber die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(z)|^2}{\lambda_n^2}$  nach Lemma 4, § 4 gleichmäßig für alle  $z \in \mathfrak{H}$  konvergiert, so folgt aus (11) offenbar die zu beweisende Behauptung.

Da die meromorphe Funktion  $\Gamma(s)$  genau in den Punkten  $s = -m$ ,  $m \geq 0$  ganz, Pole besitzt, so folgt aus Satz VII sofort

**Satz VIII:** *Die Reihe*

$$L_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n(\mathfrak{R}) \Gamma(s - s_n^+) \Gamma(s - s_n^-) \varphi_n(z)$$

konvergiert absolut für alle  $z \in \mathfrak{H}$  und  $s \neq s_n^{\pm} - m$ , ( $n \geq 1$ ,  $m \geq 0$ ), und stellt für jedes feste  $z \in \mathfrak{H}$  eine in der ganzen  $s$ -Ebene meromorphe Funktion dar, welche nur in den Punkten

$$s_n^+ - m, \quad s_n^- - m, \quad (n \geq 1, m \geq 0)$$

Pole besitzt und sonst überall regulär ist.

Nach § 4 gilt

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

und nach Satz V, § 5 ist

$$s_n^+ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n}, \quad s_n^- = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_n}, \quad n \geq 1.$$

Daraus folgt offenbar:

(a) Ist  $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ , so liegen alle Punkte  $s_n^+, s_n^-$  für  $n \geq 1$  auf der Geraden  $\sigma = \frac{1}{4}$ .

(b) Ist  $0 < \lambda_1 < \frac{1}{4}$ , so gibt es einen solchen Index  $n_0$ , daß

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_n < \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad 1 \leq n \leq n_0, \quad \text{und} \quad \lambda_n \geq \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad n > n_0.$$



Dann liegen die Punkte  $s_n^+, s_n^-$  für  $1 \leq n \leq n_0$  im reellen Intervall  $\frac{1}{4} < \sigma \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_1} < \frac{1}{2}$ , und für  $n > n_0$  auf der Geraden  $\sigma = \frac{1}{4}$ .

Aus (a), (b) und Satz VIII folgt nun der

**Satz IX:** *Es gibt eine solche reelle Zahl  $\sigma_0 < \frac{1}{2}$ , daß gilt: Für jedes feste  $z \in \mathfrak{H}$  ist die Funktion  $L_{\mathfrak{R}}(z, s)$  regulär analytisch in der Halbebene  $\sigma > \sigma_0$ . Es ist  $\sigma_0 = \frac{1}{4}$  falls  $\lambda_1 \geq \frac{1}{4}$ ; ist hingegen  $0 < \lambda_1 < \frac{1}{4}$ , so ist  $\frac{1}{4} < \sigma_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 4\lambda_1} < \frac{1}{2}$ .*

Es sei nun  $z \in \mathfrak{H}$  fest und  $\sigma_K$  die Konvergenzabszisse der Dirichletreihe

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}.$$

Nach Satz I, § 3 wissen wir, daß jedenfalls  $\sigma_K \leq 1$ . Da die Dirichletreihe  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$  lauter positive Koeffizienten besitzt, so folgt aus einem bekannten Satz von Landau<sup>17)</sup>: Der Punkt  $s = \sigma_K$  ist eine singuläre Stelle der in der Halbebene  $\sigma > \sigma_K$  regulär analytischen Funktion  $G_{\mathfrak{R}}(z, s)$ . Daraus und aus Satz VI und Satz IX folgt nun offenbar, daß  $\sigma_K = \frac{1}{2}$  sein muß. Wir haben also

**Satz X:** *Die Dirichletreihe*

$$G_{\mathfrak{R}}(z, s) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-s}$$

*besitzt für jedes  $z \in \mathfrak{H}$  die Konvergenzabszisse  $\sigma_K = \frac{1}{2}$ .*

Fassen wir nun die in den Sätzen VI, VII, VIII, X enthaltenen Resultate zusammen, so ergibt sich offenbar gerade der in der Einleitung ausgesprochene Satz A.

Aus Satz A und Satz IX folgt für jedes feste  $z \in \mathfrak{H}$ :

(a) *Die Dirichletreihe mit positiven Koeffizienten*

$$G_{\mathfrak{R}}\left(z, \frac{s}{2}\right) = \sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\frac{s}{2}}$$

*konvergiert in der Halbebene  $\sigma > 1$ .*

(b) *In der Halbebene  $\sigma > 1$  gilt die Darstellung*

$$\sum_{T \in \mathfrak{R}} (\cos \varrho(z, Tz) - 1)^{-\frac{s}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi(p-1)} \cdot \frac{1}{\nu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{\mu(\mathfrak{R})}{\sin \frac{1}{2}\mu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{1}{s-1} + g(z, s),$$

*wobei  $g(z, s)$  sogar in der größeren Halbebene*

$$\sigma > 2\sigma_0, \quad 2\sigma_0 < 1$$

*regulär analytisch ist.*

---

<sup>17)</sup> [5] pag. 880.

Es sei nun  $N\{T \mid T \in \mathfrak{R}, \frac{1}{2} \log (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \leq \tau\}$  die Anzahl der Elemente der Menge  $\{T \mid T \in \mathfrak{R}, \frac{1}{2} \log (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \leq \tau\}$ . Dann folgt aus (a) und (b) nach dem Tauberschen Theorem von Wiener-Ikehara<sup>18)</sup>:

$$N\{T \mid T \in \mathfrak{R}, \frac{1}{2} \log (\cos \varrho(z, Tz) - 1) \leq \tau\} \sim \frac{1}{2\sqrt{2\pi(p-1)}} \cdot \frac{1}{\nu(\mathfrak{R})} \cdot \frac{\mu(\mathfrak{R})}{\sin \frac{\mu(\mathfrak{R})}{2}} \cdot e^\tau$$

für  $\tau \rightarrow +\infty$ . Daraus ergibt sich aber sofort der in der Einleitung ausgesprochene Satz B.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *G. Doetsch*: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. (Springer, Berlin 1937.)
- [2] *W. Fenchel and J. Nielsen*: On Discontinuous Groups of Isometric Transformations of the Non Euclidean Plane. Courant-Anniversary Volume 1948. (Interscience Publishers, New York.)
- [3] *R. Fricke und F. Klein*: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Band 1. (Teubner, Leipzig 1897.)
- [4] *D. Hilbert*: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. (Teubner, Leipzig und Berlin 1912.)
- [5] *E. Landau*: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. (Teubner, Leipzig und Berlin 1909.)
- [6] *S. Minakshisundaram and A. Pleijel*: Some Properties of the Eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian Manifolds. Canadian Journ. of Math. I (1949).
- [7] *H. Weyl*: Die Idee der Riemannschen Fläche. (Teubner, Leipzig 1913.)
- [8] *N. Wiener*: Tauberian Theorems, Ann. of Math. vol. 33 (1932).

Eingegangen den 15. Juni 1954.

---

<sup>18)</sup> [8] pag. 44.