

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1956)

Artikel: Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques.
Autor: Hersch, Joseph
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23899>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques

par JOSEPH HERSCH, Zurich

1. Fonctions pseudo-analytiques et transformations pseudo-conformes

1.1. Une *transformation intérieure* (Stoïlow [16], p. 107) d'une variété topologique V à deux dimensions dans une autre W , est une application jouissant des trois propriétés suivantes :

A) Elle est continue.

B) Elle transforme tout ensemble ouvert de V en un ensemble ouvert de W .

C) Elle ne transforme aucun continu de V en un point unique de W .

On voit que toute transformation topologique est une transformation intérieure biunivoque, et réciproquement.

Stoïlow a démontré que la notion de transformation intérieure d'une variété V dans la sphère de Riemann S exprime exactement le contenu topologique de la notion de fonction analytique. En d'autres termes : a) Toute fonction analytique est une transformation intérieure. b) Toute transformation intérieure $I : V \rightarrow S$ est de la forme

$$I = AT, \quad (1)$$

où T est une transformation topologique de V dans une *surface de Riemann*, et A est une fonction analytique. — On peut par exemple transposer localement la structure conforme (w) de S sur V , c'est-à-dire on construit une surface de Riemann $V^{(w)}$ homéomorphe à V ; c'est la *surface de recouvrement* de S induite par I ; A est la „projection“ $V^{(w)} \rightarrow S$.

Tout point $p \in V$ a un voisinage $U(p)$ topologiquement équivalent soit à $I(U(p))$ (alors p est un „point ordinaire“ pour I), soit à un *élément de recouvrement* sur $I(U(p))$, ramifié sur $I(p)$ ($p =$ „point de ramification“). Dans les deux cas, je désignerai par $U'(I(p))$ ce voisinage, image topologique de $U(p)$.

1.2. Soit maintenant $R^{(z)}$ une surface de Riemann, avec sa structure topologique R (variété) et sa structure conforme (z).

Avec Pfluger [13, 14], j'appellerai une fonction complexe $w(p)$ *fonction*

(ou application) *D-pseudo-analytique* dans un domaine $G^{(z)}$ de $R^{(z)}$ si c'est une transformation intérieure de G dans S satisfaisant à la condition suivante :

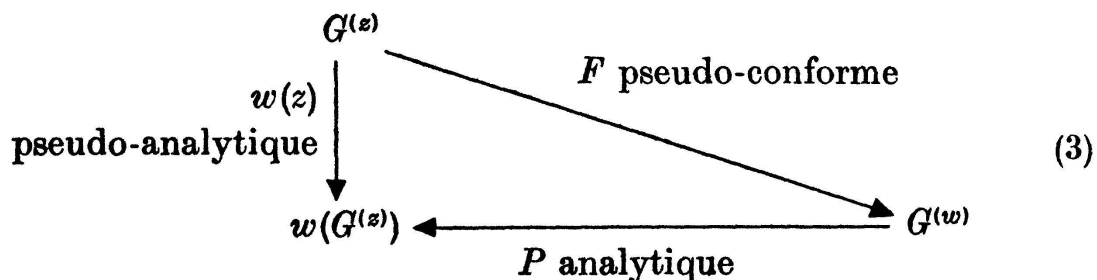
D) Tout point p de $G^{(z)}$ a un voisinage $U(p)$ tel que, pour tout quadrilatère¹⁾ $Q \subset U(p)$, un module $\mu = \mu(Q)$ et le module correspondant $\mu' = \mu(Q')$ ($Q' \subset U'(w(p))$) satisfont aux inégalités²⁾

$$D^{-1} \mu \leq \mu' \leq D \mu \quad (D \geq 1). \tag{2}$$

J'appellerai *transformation D-pseudo-conforme*³⁾ une application topologique satisfaisant à la condition D).

1.3. Soit $w(p)$ une application *D-pseudo-analytique* de $G^{(z)} \subset R^{(z)}$ dans S ($G^{(z)} \rightarrow w(G) \subset S$). L'application $G \rightarrow S$ (G étant seulement *variété*) est une transformation intérieure ; on peut (cf. Stoilow) définir dans G une structure conforme (w) (différente de (z)), obtenue par inversion locale de $w(p)$; $G^{(w)}$ est une surface de Riemann, et $P : G^{(w)} \rightarrow w(G) \subset S$ une application analytique (la „projection“ de $G^{(w)}$ dans S).

Occupons-nous maintenant de la transformation $F : G^{(z)} \rightarrow G^{(w)}$; elle est topologique (identité!), car les surfaces de Riemann $G^{(z)}$ et $G^{(w)}$ sont définies sur la même variété topologique G ; elle satisfait à la condition D) ; F est donc *D-pseudo-conforme*.



Théorème 1. *Toute fonction D-pseudo-analytique $w(p)$ peut être mise sous la forme*

$$w = PF, \tag{1'}$$

où F est une transformation *D-pseudo-conforme* et P est une fonction analytique. (La réciproque est triviale.)

¹⁾ Domaine de Jordan avec quatre points désignés sur la frontière. – Le module $\mu_{\beta'\beta''}$ d'un rectangle dont les côtés β' et β'' ont la longueur b et les côtés α' et α'' la longueur a , est a/b ; la représentation conforme étend cette définition du module à tout quadrilatère.

²⁾ Nous montrerons (§ 2.1) que le comportement *métrique* au voisinage des points de ramification n'est pas essentiel : il suffit d'imposer D) aux points ordinaires. – *Caccioppoli* a indiqué dans un récent travail [2] que, sous des hypothèses de dérivabilité, on peut se passer de postuler B) et C).

³⁾ Ce terme est employé dans un sens différent en théorie des fonctions de plusieurs variables complexes ; aucune confusion n'est possible ici.

Ce théorème permet de séparer les deux actions d'une fonction pseudo-analytique : F respecte la topologie, P la métrique locale.

2. Variation du module d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe

Théorème 2. Soient Q un quadrilatère quelconque, Q' son image par une transformation D -pseudo-conforme $z' = f(z)$, topologique aussi sur le contour de Q . Alors les inégalités (2) sont aussi satisfaites par les modules $\mu = \mu(Q)$ et $\mu' = \mu(Q')$.

Démonstration. D'une propriété locale, il s'agit de déduire la propriété globale analogue.

Soient $Q(\beta_0 \alpha_0 \beta_1 \alpha_1)$ et $\mu = \mu_{\beta_0 \beta_1 Q}$. Appelons u la fonction harmonique dans Q , solution du problème de Dirichlet-Neumann suivant : $u = 0$ sur β_0 , $u = 1$ sur β_1 , $\partial u / \partial n = 0$ sur α_0 et α_1 . Soient

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$$

des nombres réels partageant l'intervalle $0 \leq \lambda \leq 1$ en n parties. Le domaine $Q_i : \lambda_i < u < \lambda_{i+1}$ est un quadrilatère : sa frontière est formée par les lignes de niveau $\theta_i (u = \lambda_i)$, $\theta_{i+1} (u = \lambda_{i+1})$ et des portions des arcs α_0 et α_1 ($\theta_0 = \beta_0$, $\theta_n = \beta_1$) ; $\mu_i = \mu_{\theta_i \theta_{i+1} Q_i}$.

Posons $\int_{\beta_1} (\partial u / \partial n) ds = e$ (\vec{n} = normale extérieure) ; alors

$$e = \iint_Q \text{grad}^2 u d\tau = 1/\mu. \text{ } ^4$$

Considérons maintenant Q_i au lieu de Q ; au lieu de u , on a ici

$$u_i = (u - \lambda_i) / (\lambda_{i+1} - \lambda_i) ,$$

donc

$$1/\mu_i = \iint_{Q_i} \text{grad}^2 u_i d\tau = (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{-2} \iint_{Q_i} \text{grad}^2 u d\tau ;$$

d'où

$$\mu_i = (\lambda_{i+1} - \lambda_i) / e .$$

Donc $\sum_i \mu_i = \mu$. (Nous avons ici l'additivité des modules au lieu de la suradditivité.)

Appliquons toute cette figure dans le plan (z') par $z' = f(z)$. En vertu de la suradditivité des modules, $\mu' = \mu_{\beta'_0 \beta'_1 Q'} \geq \sum_i \mu'_i$. Je désigne maintenant par ω'_i la fonction harmonique dans Q'_i telle que $\omega'_i = 0$ sur α'_0 ,

⁴) ds est l'élément linéaire, $d\tau$ l'élément de surface.

$\omega'_i = 1$ sur α'_1 , $\partial\omega'_i/\partial n = 0$ sur θ'_i et θ'_{i+1} . Puis je procède avec ω'_i dans Q'_i exactement comme j'ai procédé avec u dans Q . Je coupe Q'_i par des lignes de niveau η'_k : $\omega'_i = \sigma_k$ ($0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m = 1$) en de petits quadrilatères Q'_{ik} ($\sigma_k < \omega'_i < \sigma_{k+1}$); $\mu'_{ik} = \mu_{\eta'_k \eta'_{k+1}} Q'_{ik}$. Grâce aux propriétés des représentations topologiques, on peut rendre les images réciproques Q_{ik} *arbitrairement petites*. On obtient $1/\mu'_i = \sum_k \mu'_{ik}$ (additivité), et $1/\mu_i \geq \sum_k \mu_{ik}$ (suradditivité); d'où $\mu = \sum_i \mu_i \leq \sum_i (\sum_k \mu_{ik})^{-1}$ et $\mu' \geq \sum_i \mu'_i = \sum_i (\sum_k \mu'_{ik})^{-1}$. Supposons que l'on ait construit les Q_{ik} assez petits pour que $\mu'_{ik} \leq D \cdot \mu_{ik}$. Alors il s'ensuit que $\mu' \geq \mu/D$, et (par une démonstration analogue) $\mu \geq \mu'/D$, ce qu'on voulait démontrer.

Il reste à montrer qu'il est possible de construire les Q_{ik} assez petits: c'est possible si toute la *fermeture* de Q est intérieure au domaine de pseudo-conformité (on peut alors, selon Heine-Borel, recouvrir Q par un nombre fini de voisinages $U(p)$, etc.); si tel n'est pas le cas, on procédera par exhaustion de Q au moyen de quadrilatères intérieurs. c. q. f. d.

Les bornes (2) sont exactes (cas extrémal: Q et Q' sont des rectangles).

2.1. La démonstration ci-dessus reste valable si l'on admet que des points isolés désobéissent à D): il suffit de faire passer une ligne θ_i par chacun de ces points.

Corollaire. *Toute transformation intérieure pour laquelle chaque point ordinaire satisfait D), est D-pseudo-analytique.*

En effet, elle est (cf. (1)) le produit d'une transformation D -pseudo-conforme (car les points de ramification sont isolés) et d'une fonction analytique. — On voit que ces points ne jouent qu'un rôle topologique, mais pas de rôle métrique.

2.2. **Théorème 2'.** *Soient D un domaine doublement connexe, de module ⁵⁾ μ , et D' (de module μ') son image par une transformation D -pseudo-conforme. Alors μ et μ' satisfont les inégalités (2).*

La démonstration serait calquée sur celle du théorème 2.

2.3. Les théorèmes 2 et 2' permettent de généraliser immédiatement aux fonctions pseudo-analytiques plusieurs propriétés des fonctions analytiques: cf. [9] (I. 3. D).

⁵⁾ J'appelle *module* de la couronne circulaire $1 < |z| < R$ la grandeur $\mu = (1/2\pi)\ln R$; cette définition s'étend par représentation conforme à tout domaine doublement connexe.

3. La fonction $\nu(r)$ et ses principales propriétés

Nous allons avoir besoin de la fonction $\nu(r)$ définie dans ma thèse ([9], Chap. II, § 1); je rappelle ici ses principales propriétés (pour les démonstrations, voir ce travail).

Définition. $\nu(r)$ ($0 \leq r < 1$) est le module du domaine doublement connexe dont les contours sont le cercle-unité $|z| = 1$ et le segment réel $0 \leq x \leq r$.

Propriétés.

(a) ν est une fonction monotone décroissante (non-négative).

(b) $\nu(r) = (1/4) K'(r)/K(r)$, où $K(r) = \int_0^1 dx/\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}$
et $K'(r) = K(\sqrt{1-r^2})$.

(c) $\nu(r) \nu(\sqrt{1-r^2}) \equiv 1/16$.

(d) $2\nu(r) = \nu((1 - \sqrt{1-r^2})^2/r^2)$; $\nu(r)/2 = \nu(2\sqrt{r}/(1+r))$.

(e) $\nu(r) \nu((1-r)/(1+r)) \equiv 1/8$.

(f) Cas limite $r \rightarrow 0$: $\nu(r) = (1/2\pi) \ln(4/r) + O(r^2)$.

(g) Cas limite $r \rightarrow 1$: $\pi/\nu(r) = 4 \ln(8/(1-r)) + O(1-r)$.

(h) $\ln((1 + \sqrt{1-r})^2/r) \leq 2\pi\nu(r) \leq \ln(4/r)$;

d'autres évaluations s'obtiennent à partir de (h) à l'aide de (d) et (e).

(i) Valeurs particulières: $\nu(1/\sqrt{2}) = 1/4$; $\nu(\sqrt{2}-1) = 1/(2\sqrt{2})$; on peut dès lors résoudre élémentairement toute équation en r de la forme $\nu(r) = 2^{n/2}$ (n entier), par application itérée d'une des formules (d).

Exemple: $1/2 = 2\nu(1/\sqrt{2}) = \nu((\sqrt{2}-1)^2) = \nu(3-2\sqrt{2})$.

4. Variation de la mesure harmonique

4.1. Soit G un domaine de Jordan de frontière Γ , sur lequel on a désigné un point intérieur p et un arc-frontière connexe α ; soit $z' = f(z)$ une transformation D -pseudo-conforme appliquant G sur un autre domaine de Jordan G' ; $\omega = \omega_{p\alpha G}$ et $\omega' = \omega_{p'\alpha' G'}$; alors

$$\frac{1}{D} \nu\left(\sin \frac{\pi \omega}{2}\right) \leq \nu\left(\sin \frac{\pi \omega'}{2}\right) \leq D \nu\left(\sin \frac{\pi \omega}{2}\right) \quad (4)$$

Démonstration. — Comme représentants des configurations de $G^{p\alpha}$ et $G'^{p'\alpha'}$, je choisis les cercles-unités $|z| < 1$ et $|z'| < 1$, avec $p = 0$,

⁶⁾ Ce résultat a été brièvement annoncé dans la Note [10].

$p' = 0$, les arcs α et α' ayant pour milieu le point d'affixe 1. J'appelle η le segment réel $-1 \leq x \leq 0$; η' est alors un arc joignant 0 à $\Gamma' - \alpha'$; soit $Q(\omega)$ le quadrilatère de côtés opposés η et α (dans $|z| < 1$). On calcule facilement (cf. [9], Chap. II, § 2) que $\mu_{\alpha\eta} = 2\nu(\sin \pi\omega/2)$; en vertu de [9] (III. 2. C), $\mu_{\alpha'\eta'} \leq 2\nu(\sin \pi\omega'/2)$. Selon le théorème 2, $\mu_{\alpha'\eta'} \geq \mu_{\alpha\eta}/D$, d'où l'inégalité de gauche dans (4). On démontrerait de même l'inégalité de droite. c. q. f. d.

La démonstration montre aussi que les évaluations (4) sont exactes, car les inégalités (2) pour les modules le sont : on peut construire une transformation extrémale, en appliquant d'abord $Q(\omega)$ sur un rectangle, et η' sera de nouveau le segment réel $-1 \leq x' \leq 0$.

Cas limite $\omega \rightarrow 0$:

$$(\pi/8)^{D-1} \omega^D (1 + O(\omega^{2D})) \leq \omega' \leq (8/\pi)^{1-1/D} \omega^{1/D} (1 + O(\omega^{2/D})) . \quad (4')$$

Cas $D = 2$: (d), § 3 donne

$$\sin \frac{\pi \omega'}{2} \geq \operatorname{tg}^2 \frac{\pi \omega}{4} , \quad (4'')$$

et naturellement l'inégalité obtenue en permutant ω et ω' .

En itérant (d), on peut de même obtenir pour le cas $D = 2^n$ (n entier) des évaluations où n'interviennent que des fonctions élémentaires.

4.2. Le théorème 1 et l'inégalité de droite dans (4) permettent, compte tenu du principe de Nevanlinna sur l'augmentation de la mesure harmonique par une application analytique, d'arriver au théorème suivant :

Soient $G^{p\alpha}$ une figure du type considéré; $z' = f(z)$ une fonction D -pseudo-analytique dans G ; alors

$$\nu \left(\sin \frac{\pi \omega'}{2} \right) \leq D \nu \left(\sin \frac{\pi \omega}{2} \right) \quad (4''')$$

quels que soient $G' = f(G)$ et $\alpha' = f(\alpha)$. — Si $D = 2$, cette inégalité devient (4'').

5. Variation de la distance hyperbolique (et de la fonction de Green).

Lemme de Schwarz généralisé

5.1. Soient G un domaine simplement connexe, dans lequel on a désigné deux points p, q ; $z' = f(z)$ une transformation D -pseudo-conforme : $f(G) = G'$; $h = h_{pqG}$, $h' = h_{p'q'G'}$, $g = g_{pqG}$, $g' = g_{p'q'G'}$. Alors

$$\left. \begin{aligned} D^{-1} \nu(e^{-2h}) &\leq \nu(e^{-2h'}) \leq D \nu(e^{-2h}) \\ D^{-1} \nu(e^{-g}) &\leq \nu(e^{-g'}) \leq D \nu(e^{-g}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Démonstration. — Il suffit de nouveau de considérer le cas où G et G' sont des cercles-unités, avec $p = 0$, $p' = 0$ et q, q' réels positifs : $q = \text{Th } h = e^{-g}$, $q' = \text{Th } h' = e^{-g'}$. (Th désigne la tangente hyperbolique.) Soit η le segment réel $0 \leq x \leq q$; le domaine doublement connexe D de contours Γ ($|z| = 1$) et η a un module $\mu = \nu(q) = 1/8\nu(e^{-2h})$; $\eta' = f(\eta)$ est un arc de Jordan joignant $p' = 0$ à q' ; en vertu de [9] (III. 1. C), $\mu' = \mu(D') \leq 1/8\nu(e^{-2h'}) = \nu(e^{-g'})$. Le théorème 2' dit que $\mu' \geq \mu/D$, d'où la moitié des inégalités (5); les autres s'obtiennent en permutant les rôles de z et z' . c. q. f. d.

Les évaluations (5) sont *les meilleures possibles*, car les inégalités pour les modules μ, μ' le sont, ce qui permet de construire une transformation extrémale (η' sera alors le segment réel $0 \leq x' \leq q'$). — *Elles restent valables pour des domaines multiples connexes* (h étant définie à l'aide de la surface universelle de recouvrement); mais elles sont alors très „inexactes“.

Cas limite $g \rightarrow \infty$:

$$D^{-1}g - (1 - D^{-1}) \ln 4 + O(e^{-2g/D}) \leq g' \leq Dg + (D - 1) \ln 4 + O(e^{-2Dg}) \quad (5')$$

Cas limite $h \rightarrow \infty$

$$D^{-1}h - (1 - D^{-1}) \ln 2 + O(e^{-4h/D}) \leq h' \leq Dh + (D - 1) \ln 2 + O(e^{-4Dh}) \quad (5'')$$

$$\text{Cas } D = 2 : \text{Ch } h' \leq e^{2h} ; e^{g'} \geq \text{Ch}(g/2) , \quad (5''')$$

et les inégalités en sens contraire, obtenues en permutant h et h' , g et g' . De nouveau : simplification pour $D = 2^n$ (n entier), par itération de (d), § 3.

5.2. En vertu du théorème 1, de (5) et du principe de *Nevanlinna* sur la distance hyperbolique, on a la propriété :

Si $z' = f(z)$ est une fonction D -pseudo-analytique dans un domaine

$$G \ni p, q, \quad \nu(e^{-2h'}) \leq D \nu(e^{-2h}), \text{ soit } \nu(e^{-g'}) \geq D^{-1} \nu(e^{-g}) . \quad (5^{\text{IV}})$$

Si $D = 2$, ces inégalités deviennent équivalentes à (5''').

5.3. *Généralisation du lemme de Schwarz.*

Soit $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique définie dans $G : |z| < 1$, telle que $w(0) = 0$ et $|w(z)| < 1$ dans G . Alors

$$\nu(|w(z)|) \geq D^{-1} \nu(|z|) . \quad (6)$$

Ou bien, ce qui revient au même,

$$|w(z)| \leq f_D^+(|z|), \quad (6')$$

la fonction $f_D^+(r)$ ($0 \leq r < 1$) étant définie par

$$\nu(f_D^+(r)) = D^{-1}\nu(r). \quad (7)$$

Je définis en même temps la fonction inverse $f_D^-(r)$ par

$$\nu(f_D^-(r)) = D\nu(r). \quad (7')$$

Démonstration par ce qui précède : (6) est une conséquence immédiate de (5^{IV}).

Démonstration n'utilisant pas le principe de Nevanlinna : Soient de nouveau (cf. § 5.1) η le segment rectiligne joignant 0 à z ; D le domaine doublement connexe de contours Γ et η ; $\mu_D = \nu(|z|)$; $w(z) = PF(z)$ (F est D -pseudo-conforme, P est analytique); j'applique à P la propriété [9] (I. 3. D. f) : soient Γ_1 le „contour extérieur“ de $w(G)$ et η_1 celui de $w(\eta)$; $\mu_{F(D)} \leq \mu_{\Gamma_1\eta_1} \leq \nu(|w(z)|)$; mais $\mu_{F(D)} \geq D^{-1}\mu_D$ (théorème 2'), d'où (6). c. q. f. d.

Remarque. — Si $D = 1$, (6) exprime le *lemme de Schwarz* $|w(z)| \leq |z|$, et l'extrémale ($w = e^{i\alpha}z$) est indépendante de z ; si $D > 1$, (6) reste *exacte*, mais l'application extrémale dépend alors de z .

$$\text{Cas limite } |z| \rightarrow 0 : |w(z)| \leq 4^{1-1/D} |z|^{1/D} (1 + O(|z|^{2/D})) \quad (6'')$$

$$\text{Cas limite } |z| \rightarrow 1 : 1 - |w(z)| \geq 8^{1-D} (1 - |z|)^D + O((1 - |z|)^{2D}) \quad (6''')$$

$$\text{Cas } D = 2 : |w(z)| \leq 2 \sqrt{|z|} / (1 + |z|) \quad (6^{IV})$$

$$\text{Cas } D = 4 : |w(z)| \leq 2^{3/2} \sqrt{1 + |z|} \sqrt[4]{|z|} / (1 + \sqrt{|z|})^2 \quad (6^V)$$

6. Généralisation du théorème de Schottky

6.1. Soit $\{w(z)\}$ la classe des fonctions D -pseudo-analytiques dans le cercle-unité G , telles que $w(0) = c$ (c donné), et qui ne prennent nulle part dans G les $p \geq 3$ valeurs a_1, \dots, a_p . Alors la distance sphérique $\delta_{w(z), a_p}$ du point $w(z)$ et du point a_p possède une borne inférieure

$$d_D[|z|, c; a_1, \dots, a_p] > 0.$$

La démonstration est analogue à celle du cas analytique $D = 1$: C'est une conséquence de la quasi-invariance de h_{0zG} par la transformation pseudo-conforme $F(z)$ qui applique G dans la surface universelle de recouvrement relative à a_1, \dots, a_p en sorte que $w = PF$ (§ 5.1).

Supposons connue la borne exacte du théorème classique de Schottky ($D = 1$), c'est-à-dire la fonction $d_1[|z|, c; a_1, \dots, a_p]$; je veux alors déterminer $d_D[\dots]$. Il est clair que d_1 et d_D sont des fonctions décroissantes de $|z|$. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $w(z)$ du type considéré et telle que $\delta_{w(z_0), a_p} < d_D[|z_0|, \dots] + \varepsilon$ pour un $z_0 \in G$ donné; $w = PF$ (F étant D -pseudo-conforme, P analytique); appliquons conformément $F(G)$ sur G par une transformation T telle que $T(F(0)) = 0$. On a alors dans le cercle-unité G deux structures conformes différentes, et l'application TF fait passer de l'une à l'autre; elle est D -pseudo-conforme et satisfait les hypothèses du lemme de Schwarz généralisé (§ 5.3). Donc $|TF(z_0)| \leq f_D^+(|z_0|)$.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{F} & TF(G) \\
 \downarrow w & & \uparrow T \\
 w(G) & \xleftarrow{P} & F(G)
 \end{array} \quad (8)$$

PT^{-1} est une fonction analytique; $PT^{-1}(0) = PT^{-1}TF(0) = PF(0) = w(0) = c$; on voit que PT^{-1} est du type considéré; donc

$$\begin{aligned}
 d_D[|z_0|, \dots] + \varepsilon > \delta_{w(z_0), a_p} &= \delta_{PT^{-1}(TF(z_0)), a_p} \geq d_1[|TF(z_0)|, \dots] \\
 &\geq d_1[f_D^+(|z_0|), \dots]
 \end{aligned}$$

L'inégalité entre les membres extrêmes ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $d_D[|z_0|, c; a_1, \dots, a_p] \geq d_1[f_D^+(|z_0|), c; a_1, \dots, a_p]$.

Inversement, soit $\psi(z)$ une transformation D -pseudo-conforme de G sur lui-même extrémale du lemme de Schwarz: $\psi(0) = 0$, $|\psi(z_0)| = f_D^+(|z_0|)$ pour un point z_0 particulier. Il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction analytique φ dans G telle que $\varphi(0) = c$, $\varphi \neq a_1, \dots, a_p$ et $\delta_{\varphi(\psi(z_0)), a_p} < d_1[f_D^+(|z_0|), \dots] + \varepsilon$; $w(z) = \varphi(\psi(z))$ est une fonction D -pseudo-analytique du type considéré;

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\psi} & \psi(G) = G \\
 \downarrow w & & \swarrow \varphi \\
 w(G) & &
 \end{array} \quad (9)$$

donc $d_D[|z_0|, \dots] < d_1[f_D^+(|z_0|), \dots] + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $d_D[|z_0|, \dots] \leq d_1[f_D^+(|z_0|), \dots]$; on obtient ainsi finalement

$$d_D[|z|, c; a_1, \dots, a_p] = d_1[f_D^+(|z|), c; a_1, \dots, a_p] . \quad (10)$$

Remarque. — Il est tout à fait indifférent, pour notre raisonnement, que δ et d se rapportent à la distance sphérique ou à une autre métrique. — La méthode de démonstration caractérisée par les schémas (8) et (9) est adéquate pour généraliser au cas $D > 1$ des propriétés connues pour $D = 1$ (fonctions analytiques).

6.2. Cas particulier $p = 3$; $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$; $M_D(r, c) = \text{Sup}_{|z| \leq r} |w(z)|$, où sont admises à concurrence toutes les fonctions D -pseudo-analytiques $w(z) \in \{w(z)\}$. *W. K. Hayman* [6] a obtenu pour $M_1(r, c)$ les évaluations suivantes :

$$M_1(r, c) \leq (\text{Max} [1, |c|] e^\pi)^{(1+r)/(1-r)} ; \quad (11)$$

si $|c| = e^{-\gamma} < 1$, alors $M_1(r, c) \leq e^{\pi^2/\gamma \cdot (1+r)/(1-r)}$.

Pour les fonctions D -pseudo-analytiques, on obtient des évaluations correspondantes en remplaçant dans (11) $M_1(r, c)$ par $M_D(r, c)$ et, dans les membres de droite, r par $f_D^+(r)$; en vertu de (e), § 3, cela équivaut à remplacer $(1-r)/(1+r)$ par $f_D^-((1-r)/(1+r))$. — Le cas limite intéressant ici est celui où $r \rightarrow 1$: Il faut alors remplacer, dans (11), $(1+r)/(1-r)$ par $4^{D-1}(1+r)^D/(1-r)^D(1+O((1-r)^{2D}))$.

Cas $D = 2$: Il faut remplacer, dans (11),

$$\frac{1+r}{1-r} \text{ par } \left(\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \right)^2 .$$

Les recettes indiquées ci-dessus permettent aussi de généraliser les évaluations obtenues par *R. M. Robinson* [15] pour le cas $p = 3$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$ (ce cas se ramène immédiatement au précédent: il suffit de considérer, au lieu de w , la fonction $(w+1)/2$): il obtenait

$$8M_1 - 10 < (8|c| + 10)^{(1+r)/(1-r)} \text{ et } 8M_1 + 10 > (8|c| - 10)^{(1+r)/(1-r)} ;$$

ces deux évaluations lui fournissaient la formule asymptotique

$$8M_1 \sim (8|c|)^{(1+r)/(1-r)} \text{ lorsque } c \rightarrow \infty \text{ (} A \sim B \text{ signifie : } A = B(1 + o(1)) \text{)} .$$

On généralise ces évaluations en posant de nouveau

$$M_D(r, \dots) = M_1(f_D^+(r), \dots), \text{ c'est-à-dire que } f_D^-((1-r)/(1+r)) \text{ remplace } (1-r)/(1+r).$$

7. Généralisation de l'inégalité de Jensen et du théorème de Blaschke

7.1. La multiplicité n d'un point a pour une transformation intérieure $z' = f(z)$ est le nombre de tours que décrit z' autour de a' lorsque

z tourne une fois autour de a (dans un voisinage $U(a)$ sans point de ramification différent de a) („degré de l'application“). — Si $f(z)$ est topologique, $n = 1$ en tout point.

Si $f(z)$ est une fonction D -pseudo-analytique, on montre facilement à l'aide de (6'') et du théorème 1 qu'il existe un voisinage de a et une constante $K > 0$ tels que

$$K^{-1} |z - a|^{Dn} \leq |z' - a'| \leq K |z - a|^{n/D} \quad (12)$$

dans ce voisinage.

7.2. *Inégalité de Jensen.* — Soit $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique dans $|z| < 1$, satisfaisant $|w(z)| < 1$, et dont les points a_i (en nombre fini ou dénombrable) sont des zéros de multiplicités n_i . Alors

$$|w(0)| \leq \prod_i [f_D^+(|a_i|)]^{n_i}, \quad (13)$$

où f_D^+ est définie par (7).

Démonstration. — $w(z) = PF(z)$ (F est D -pseudo-conforme, P analytique); je construis encore l'application conforme T en sorte de compléter le schéma (8). $w(z) = PT^{-1}TF(z)$; TF satisfait le lemme de Schwarz généralisé (§ 5.3), donc $|TF(a_i)| \leq f_D^+(|a_i|)$; la fonction analytique PT^{-1} satisfait l'inégalité classique de Jensen ($TF(a_i)$ est un zéro de multiplicité n_i), donc

$$|w(0)| \leq \prod_i |TF(a_i)|^{n_i} \leq \prod_i [f_D^+(|a_i|)]^{n_i}.$$

c. q. f. d.

Remarque. — La borne donnée par (13) n'est pas la meilleure possible („pas exacte“); en effet (cf. la remarque au § 5.3), si $D > 1$, la fonction extrémale du lemme de Schwarz généralisé dépend du point z ; aucune fonction TF ne réalise simultanément $|TF(a_i)| = f_D^+(|a_i|)$ pour tous les a_i .

7.3. L'inégalité (13) peut aussi être interprétée sous la forme suivante :

Soit $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique dans $|z| < 1$, telle que $w(0) = 0$ et $|w(z)| < 1$; et soient a_1, a_2, \dots les points où elle prend la valeur a (avec les multiplicités n_1, n_2, \dots); alors

$$|a| \leq \prod_i [f_D^+(|a_i|)]^{n_i}. \quad (14)$$

Démonstration. — (14) s'obtient à partir de (13) par un mouvement hyperbolique (dans le cercle-unité) amenant $w(0)$ à l'origine, et l'origine en a . c. q. f. d.

Cette façon particulièrement élégante de formuler l'inégalité de Jensen est due (pour $D = 1$; alors $|a| \leq \prod_i |a_i|^{n_i}$) à *Lehto* ([12], p. 8). Sous cette forme, l'inégalité de Jensen apparaît comme un *renforcement du lemme de Schwarz*.

7.4. Dans le cas limite $|a_i| \rightarrow 1$,

$$1 - f_D^+(|a_i|) = 8^{1-D}(1 - |a_i|)^D (1 + o(1))$$

(cf. (6''')), ce qui permet de généraliser au cas $D > 1$, par une formule simple, le *théorème de Blaschke* :

Soient $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique bornée dans $|z| < 1$ et a_1, a_2, a_3, \dots ses zéros (de multiplicités n_1, n_2, n_3, \dots). Alors la somme $\sum_{i=1}^{\infty} n_i (1 - |a_i|)^D$ converge. ⁶⁾

Démonstration. — $w(z) = PT^{-1}TF(z)$ comme au § 7.2. En vertu du théorème classique de Blaschke (conséquence immédiate de l'inégalité de Jensen), appliqué à la fonction analytique (*non constante*) PT^{-1} , le produit $\prod_i |TF(a_i)|^{n_i}$ converge (> 0), c'est-à-dire $\sum_i n_i (1 - |TF(a_i)|)$ converge, donc *a fortiori* $\sum_i n_i (1 - |a_i|)^D$. c. q. f. d.

8. Généralisation du théorème de Phragmén-Lindelöf

8.1. *Forme générale* (cf. [8], [9] (III. 3. C)).

J'appelle *coupure* d'un domaine un arc de Jordan à extrémités sur la frontière. — Soient G un domaine de Jordan (de frontière Γ), qu'une coupure θ_0 partage en deux domaines G_0 et G'_0 ; p un point de G_0 ; $\{\theta_\lambda\}$ ($0 < \lambda < \infty$, $\lambda =$ paramètre continu ou discret) des coupures emboîtées intérieures à G'_0 (θ_λ sépare p de tous les $\theta_{\lambda'}$, où $\lambda' > \lambda$) telles que $\mu_{0\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} \rightarrow \infty$ quand $\lambda \rightarrow \infty$. Les θ_λ convergent vers un point E de Γ .

Soit $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique dans G , telle que $\limsup_{z \rightarrow \zeta} |w(z)| \leq 1$ pour chaque $\zeta \in \Gamma - E$. Je pose $M_\lambda = \max_{z \in \theta_\lambda} |w(z)|$,

$$\sigma_x^{(D)} = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{-\pi\mu_{x\lambda}/D} \ln M_\lambda) \text{ et } \tau_x^{(D)} = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{-D\pi\mu_{x\lambda}} \ln M_\lambda). \quad (15)$$

$$\text{Si } \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} M_\lambda \geq 1, \text{ alors } \ln |w(p)| \leq (8/\pi) \sigma_0^{(D)} e^{-(2\pi/D)\nu(\sin(\pi\omega_p\theta_0/2))}. \quad (16)$$

Démonstration. — $w = PF$ (F est D -pseudo-conforme, P analytique). J'écris ω_λ pour $\omega_{p\theta_\lambda G_\lambda}$, ω_λ^F pour $\omega_{F(p), F(\theta_\lambda), F(G_\lambda)}$, et $\mu_{x\lambda}^F$ pour $\mu_{F(\theta_\lambda), F(\theta_\lambda)}$. L'évaluation ([9], formule (III. 8)); soit [8] (6)) est valable pour la fonc-

tion $u(t) = \ln |P(t)|$, sous-harmonique dans $F(G)$; donc

$$\ln |w(p)| = \ln |PF(p)| \leq (8/\pi) \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{-\pi \mu_0^F \lambda} \ln M_\lambda) \cdot e^{-2\pi \nu(\sin \pi \omega_0^F/2)};$$

comme $\mu_{0\lambda}^F \geq \mu_{0\lambda}/D$ et, selon (4), $\nu(\sin \pi \omega_0^F/2) \geq (1/D) \nu(\sin \pi \omega_0/2)$, on en déduit (16). c. q. f. d.

Comme le montre [9] (I. 3. C), $\mu_{0\lambda} = \mu_{\kappa\lambda} + O(1)$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ κ restant fixe; donc les $\sigma_\kappa^{(D)}$ sont soit tous nuls, soit tous différents de zéro. $\sigma_0^{(D)} = 0$ entraîne $\sigma_\kappa^{(D)} = 0$ pour tous les κ , donc, en vertu de (16) (où l'on peut remplacer l'indice 0 par κ) $\ln |w(z)| \leq 0$ dans $\cup_{\kappa} G_\kappa = G$.

Théorème. — Si $\sigma_0^{(D)} \leq 0$, alors $|w(z)| \leq 1$ dans tout G .

Une transformation intérieure conservant les ensembles ouverts, le principe du maximum est valable ici: le théorème est banal dans le cas $\sigma_0^{(D)} < 0$.

Théorème. — Pour tout κ , $\tau_\kappa^{(D)} > -\infty$.

Démonstration. — Supposons $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} M_\lambda < 1$ (sinon le théorème est trivial). $w(z) = PF(z)$ comme plus haut. Le théorème 2 de [9] (III. 3. C), appliqué à la fonction sous-harmonique $u(t) = \ln |P(t)|$ dans $F(G)$, montre que

$$-\infty < \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{-\pi \mu_{\kappa\lambda}^F} \ln M_\lambda) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{-D\pi \mu_{\kappa\lambda}} \ln M_\lambda) = \tau_\kappa^{(D)}.$$

c. q. f. d.

Dans les applications (cf. par exemple [9] (III. 3. A)), on ne connaît souvent pour $\mu_{\kappa\lambda}$ qu'une évaluation par défaut; le second théorème est alors inutilisable.

8.2. *Pour un domaine angulaire:* $0 < \arg z < \alpha$; $\theta_R =$ arc du cercle $|z| = R$; $G_R =$ secteur de $|z| < R$.

Soit $w(z)$ une fonction D -pseudo-analytique dans ce domaine angulaire G , telle que $\limsup_{z \rightarrow \zeta} |w(z)| \leq 1$ pour $\zeta = 0$ et pour $\arg \zeta = 0$ ou α . Soit M_R le maximum de $|w(z)|$ sur l'arc θ_R .

$$\sigma_1^{(D)} = \liminf_{R \rightarrow \infty} (R^{-\pi/D\alpha} \ln M_R); \quad \tau_1^{(D)} = \liminf_{R \rightarrow \infty} (R^{-D\pi/\alpha} \ln M_R). \quad (15')$$

On a de nouveau les deux théorèmes ci-dessus; le calcul direct à partir de (4) donne plus précisément ceci: *Supposons* $\arg p = \alpha/2$; alors $\omega_R = \omega_{p\theta_R G_R} \sim (4/\pi)(|p||R|)^{\pi/\alpha}$ lorsque $R \rightarrow \infty$; $w = PF$; en vertu de (4'), $(2^{3-D}/\pi)(|p||R|)^{D\pi/\alpha} \lesssim \omega_R^F \lesssim (2^{3-1/D}/\pi)(|p||R|)^{\pi/D\alpha}$. Je considère de nouveau dans $F(G_R)$ la fonction sous-harmonique $u(t) =$

$\ln |P(t)|$ ($t = F(z)$). En vertu du principe de la majorante harmonique :

$$\text{Si } \liminf_{R \rightarrow \infty} M_R \geq 1, \quad \ln |w(p)| \leq (2^{3-1/D}/\pi) \sigma_1^{(D)} |p|^{\pi/D\alpha}. \quad (17)$$

$$\text{Si } \liminf_{R \rightarrow \infty} M_R \leq 1, \quad \ln |w(p)| \leq (2^{3-D}/\pi) \tau_1^{(D)} |p|^{D\pi/\alpha}. \quad (18)$$

(17) est valable *a fortiori* si $\arg p \neq \alpha/2$; (18) n'est valable que si $\arg p = \alpha/2$. — (On remarquera que l'on n'a pas fait l'hypothèse $|p| \leq 1$.)

9. Fonctions pseudo-analytiques à dérivées partielles continues et transformations quasi-conformes. Variation de la longueur extrémale

9.1. J'appellerai *transformation D-quasi-conforme* une application topologique douée de dérivées partielles continues et satisfaisant à la condition

D') En tout point p , le *quotient des dilatations*

$$Q(p) = |\partial w/\partial z|_{\max}/|\partial w/\partial z|_{\min} \quad \text{reste} \leq D \quad (D \geq 1).$$

On peut aussi dire que l'image d'un cercle infinitésimal est une ellipse infinitésimale dont le rapport a/b des axes est borné supérieurement par une constante $D \geq 1$. (Cf. Grötzsch [3] [4].)

9.2. Soit ρ une répartition (fonction réelle non-négative) dans un domaine G ; elle fait correspondre à toute courbe c dans G le nombre $C_\rho(c) = \int_c \rho ds$; nous posons encore $A_\rho = A_\rho(G) = \overline{\int\int}_G \rho^2 d\tau$.⁷⁾

J'appelle *famille numérique* de courbes dans G une loi C faisant correspondre à toute courbe $c \subset G$ un nombre réel $C(c) \geq 0$. Le *module* de C est défini par $M(C) = \inf_\rho A_\rho$, où l'on admet à concurrence toutes les répartitions ρ telles que $C_\rho \geq C$ (cf. [9], Appendice du Chap. I). — Si la loi C n'attribue que les valeurs 0 ou 1, elle désigne simplement une famille (ordinaire) de courbes $\{c\}$, et $M(C) = M\{c\} = L_{\{c\}}^{-1}$, où $L_{\{c\}}$ est la *longueur extrémale* de la famille $\{c\}$ (c'est essentiellement la définition d'Ahlfors et Beurling [1]).

9.3. **Théorème 3.** — Soit $z' = f(z)$ une transformation D -quasi-conforme d'un domaine G sur un autre G' ; soient C une famille numérique dans G et C' son image: $C'(f(c)) = C(c)$. Alors

$$D^{-1}M(C) \leq M(C') \leq DM(C). \quad (19)$$

⁷⁾ $\overline{\int}$ est l'intégrale supérieure, $\underline{\int}$ l'intégrale inférieure de Darboux.

Démonstration. — Soit $\varrho(z)$ une répartition concurrente pour $M(C)$, c'est-à-dire $C_\varrho(c) \geq C(c)$ pour toute courbe c ; la répartition $\varrho'(z') = \varrho(z) \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max}$ est alors concurrente pour $M(C')$, car

$$C_{\varrho'}(c') \geq C_\varrho(c) \geq C(c) = C'(c')$$

pour toute courbe $c' = f(c)$. En outre $A_{\varrho'}(G') \leq D \cdot A_\varrho(G)$, car

$$\left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max}^2 \leq D \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max} \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\min} = D \cdot d\tau/d\tau' .$$

Donc $C_\varrho \geq C$ entraîne $A_\varrho \geq D^{-1}M(C')$, d'où $M(C) \geq D^{-1}M(C')$. — On montrerait de même $M(C') \geq D^{-1}M(C)$, d'où (19). c. q. f. d. ⁸⁾

9.4. Corollaire. — *Toute transformation D -pseudo-conforme à dérivées partielles continues est D -quasi-conforme, et réciproquement.*

Démonstration. — a) Soit $w(z)$ une transformation D -quasi-conforme; il suffit d'appliquer le théorème 3 au problème de longueur extrémale définissant un module d'un quadrilatère ([9] (I. 3. a)), on voit ainsi que D' entraîne D (§ 1.2). — b) Soit maintenant $w(z)$ une transformation D -pseudo-conforme à dérivées partielles continues; soit p un point quelconque; choisissons pour Q un carré infinitésimal dont p est un sommet, et dont les côtés ont les directions de la plus grande et de la plus petite dilatation; son image est (si l'on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur) un rectangle de module $Q(p) \leq D$; la condition D' est donc bien satisfaite. c. q. f. d.

On montre de même: *Sous l'hypothèse de la continuité des dérivées partielles, toute fonction D -pseudo-analytique est une transformation intérieure satisfaisant D' , et réciproquement.* (Utiliser le corollaire 2.1.)

9.5. Théorème 4. — *Soient C une famille numérique dans un domaine G ; $z' = f(z)$ une fonction D -pseudo-analytique à dérivées partielles continues, définie dans G ; et C' la famille numérique définie dans $G' = f(G)$ par $C'(c') = \text{Max}_{f(c)=c'} C(c)$. Alors*

$$M(C') \leq DM(C) . \quad (20)$$

Démonstration. — 1^o) Il suffit de modifier légèrement la démonstration de [11] ou [9] (Appendice Chap. I, C. i): définir

$$\varrho'(z') = \text{Max}_i [\varrho(z_i) \left| \frac{\partial z_i}{\partial z'} \right|_{\max}] ,$$

etc.; 2^o) On peut aussi écrire $f(z) = PF(z)$ (F étant D -pseudo-conforme, P analytique); en vertu de [11] ou [9] et du théorème 3,

$$M(C') \leq M(F(C)) \leq DM(C) .$$

c. q. f. d. ⁸⁾

On peut préciser l'inégalité (20), en vertu de [9] (Appendice Chap. I, C. j) : on a encore

$$M(C^*) \leq DM(C) \quad (20')$$

pour la famille numérique C^* définie par $C^*(c') = \sqrt{\sum_{f(c)=c'} [C(c)]^2}$.

9.6. Les théorèmes 3 et 4 permettent de retrouver immédiatement, à partir des formules (II. 12) et (II. 13) de [9] (mettant en rapport longueurs extrémales d'une part, mesure harmonique et distance hyperbolique d'autre part), les évaluations exactes (4), (4'''), (5), (5^{IV}), pour les cas où $z' = f(z)$ est une transformation quasi-conforme ou une fonction pseudo-analytique à dérivées partielles continues. ⁹⁾

10. Transformations intérieures à dérivées partielles continues: Variation de la longueur extrémale et lemme de Schwarz

10.1. Soient $z' = f(z)$ une transformation topologique à dérivées partielles continues dans un domaine G ; $Q(z)$ son quotient des dilatations (§ 9.1); C une famille numérique et C' son image.

Soit $\varrho(z)$ une répartition concurrente pour $M(C)$;

$$\varrho'(z') = \varrho(z) \left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max}$$

est alors concurrente pour $M(C')$; $\left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max}^2 \leq Q(z) \cdot d\tau/d\tau'$; donc $M(C') \leq \overline{\int \int_{G'}} \varrho'^2(z') d\tau' \leq \overline{\int \int_G} Q(z) \varrho^2(z) d\tau$. ⁸⁾

Théorème 5. — Si $\varrho(z)$ est concurrente pour $M(C)$, alors

$$M(C') \leq \overline{\int \int_G} Q(z) \varrho^2(z) d\tau . \quad (21)$$

En particulier, si le problème variationnel définissant $M(C)$ admet une répartition extrémale ϱ_0 , $M(C) = \overline{\int \int_G} \varrho_0^2(z) d\tau$, d'où ¹¹⁾

$$M(C') - M(C) \leq \overline{\int \int_G} [Q(z) - 1] \varrho_0^2(z) d\tau . \quad (21')$$

⁸⁾ La continuité des dérivées partielles n'est pas essentielle à la démonstration; il faut seulement que $\left| \frac{\partial z}{\partial z'} \right|_{\max}^2 \leq D \cdot d\tau/d\tau'$. En outre, on peut admettre des points isolés où les dérivées partielles n'existent même pas (cf. Teichmüller [17], p. 666—667).

⁹⁾ Il se peut que (19) soit valable pour toutes les transformations D -pseudo-conformes, et (20) pour toutes les fonctions D -pseudo-analytiques. Je n'ai pu l'établir que dans les cas se ramenant au module d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe (théorèmes 2 et 2' du § 2).

¹⁰⁾ Ce résultat a été brièvement annoncé dans la Note [7].

¹¹⁾ Car, si $f \geq 0$ et $g \geq 0$, $\overline{\int \int} (f + g) d\tau \leq \overline{\int \int} f d\tau + \overline{\int \int} g d\tau$.

Cette inégalité est particulièrement utile si $Q(z)$ n'est différent de 1 que dans une partie de G (par exemple dans le voisinage d'un point). — La borne donnée par (21') n'est pas en général „exacte“. ¹²⁾

Dans le cas particulier où G est un domaine doublement connexe, (21') devient équivalente à un théorème récent de $G.$ af Hällström ([5], p. 5); voir aussi Teichmüller [17], p. 668.

10.2. Les inégalités (21) et (21') restent valables si $z' = f(z)$ est une transformation intérieure à dérivées partielles continues, la famille numérique C' étant définie par $C'(c') = \text{Max}_{f(c)=c'} C(c)$; on a même le droit d'y remplacer C' par C^* , définie par $C^*(c') = \sqrt{\sum_{f(c)=c'} [C(c)]^2}$. — On le dé-

montre (comme au § 9.5) à l'aide de [9] (Appendice Chap. I, C. i et j).

(21) et (21') restent encore valables si l'on y remplace $Q(z)$ par toute fonction majorante connue $D(z) \geq Q(z)$; elles prennent alors la place de (19) et (20): elles donnent une précision bien meilleure (si $D(z)$ est une „bonne“ majorante), et restent applicables si $Q(z)$ n'est pas borné dans G .

10.3. Généralisation du lemme de Schwarz.

10.3.1. Transformation topologique à dérivées partielles continues $z' = f(z)$ du cercle-unité G sur lui-même, telle que $f(0) = 0$.

Soit Γ la frontière $|z| = 1$ de G . Désignons dans G les points 0 et r ($0 < r < 1$). Considérons la famille $\{c\}$ des courbes fermées de Jordan séparant 0 et r de Γ , et la famille $\{\gamma\}$ des coupures séparant 0 de r . Nous avons alors (cf. [9], Chap. II, § 3) $M\{c\} = \nu(r)$, $M\{\gamma\} = [4\nu(r)]^{-1}$; $\{f(c)\} = \{c'\}$, $\{f(\gamma)\} = \{\gamma'\}$; $M\{c'\} = \nu(|f(r)|)$, $M\{\gamma'\} = [4\nu(|f(r)|)]^{-1}$.

Pour déterminer les répartitions extrémales ϱ_{0c} et $\varrho_{0\gamma}$ pour $M\{c\}$ et pour $M\{\gamma\}$, il suffit d'appliquer conformément le quadrilatère (défini par le demi-plan inférieur et les points-frontière $\infty, 1/r, r, 0$) sur le rectangle $(0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2)$ (ω_1 réel > 0 , $\omega_2 = i|\omega_2|$) par l'inté-

grale elliptique $w(z) = \int_{\infty}^z dz / \sqrt{z(z-r)(z-1/r)}$;

$$\omega_1 = w(1/r) = 2\sqrt{r}K(r) \quad \text{et} \quad |\omega_2| = 2\sqrt{r}K'(r)$$

(cf. § 3 et [9] (II. 1. B)). On obtient

$$\varrho_{0c} = \frac{1}{2\omega_1} \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{4K(r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z| \cdot |z-r| \cdot |1-rz|}}$$

¹²⁾ Exemple: G = rectangle de côtés 1 et 3; $Q = 1$ dans un carré de côté 1, $Q = 2$ ailleurs; G' = rectangle de côtés 1 et 2.

et

$$\rho_{0\gamma} = \frac{1}{|\omega_2|} \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{2K'(r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{|z| \cdot |z-r| \cdot |1-rz|}}.$$

Si, au lieu du point réel r , on a z_0 ($|z_0| < 1$), il faut remplacer $K(r)$ par $K(|z_0|)$, $K'(r)$ par $K'(|z_0|)$, $|z-r|$ par $|z-z_0|$, et $|1-rz|$ par $|1-\bar{z}_0 z|$. L'inégalité (21') fournit donc les deux évaluations :

$$\nu(|z'_0|) - \nu(|z_0|) \leq \frac{1}{16K^2(|z_0|)} \iint_{|z|<1} \frac{Q(z) - 1}{|z| \cdot |z-z_0| \cdot |1-\bar{z}_0 z|} d\tau; \quad (22)$$

$$\frac{1}{\nu(|z'_0|)} - \frac{1}{\nu(|z_0|)} \leq \frac{1}{K'^2(|z_0|)} \iint_{|z|<1} \frac{Q(z) - 1}{|z| \cdot |z-z_0| \cdot |1-\bar{z}_0 z|} d\tau. \quad (23)$$

10.3.2. *Transformation intérieure à dérivées partielles continues* $z' = f(z)$ dans le cercle-unité, telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$.

Tout comme au § 1.3, on voit que $f(z) = PF(z)$, où $F(z)$ est topologique à dérivées partielles continues, et de quotient des dilatations = $Q(z)$ en tout point ordinaire z (les points de ramification sont isolés, cf. 8)), et P est analytique; on peut choisir $F(z)$ du type considéré ci-dessus (§ 10.3.1): comme P obéit alors au lemme classique de Schwarz, $|z'_0| \leq |F(z_0)|$.

L'inégalité (23) reste donc valable: c'est la généralisation cherchée du lemme de Schwarz.

(23) se réduit à (6) (§ 5.3) lorsqu'on sait seulement de $Q(z)$ qu'il est borné par une constante $D \geq 1$.

Ce travail est fortement imprégné d'idées du Prof. A. Pfluger, auquel j'exprime ma vive reconnaissance.

Note complémentaire. Après la correction des épreuves, je constate que deux idées importantes des paragraphes 4 et 5 se trouvent déjà dans le travail de H. Grötzsch: *Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl. 84, 1932, p. 114—120.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *L. Ahlfors et A. Beurling*: Conformal invariants and function theoretic null-sets. *Acta Math.* **83**, 1950, p. 101–129.
- [2] *R. Caccioppoli*: Fondamenti per una teoria generale delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa. *Atti Accad. Naz. Lincei, Rendiconti classe sci. fis.-mat.-nat., serie 8*, vol. **13**, 1952, p. 197–204.
- [3] *H. Grötzsch*: Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl.* **80**, 1928, p. 503–507.
- [4] *H. Grötzsch*: Über die Verzerrung bei nichtkonformen schlichten Abbildungen mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat. Kl.* **82**, 1930, p. 69–80.
- [5] *G. af Hällström*: Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendungen auf die Wertverteilungslehre. *Acta Acad. Abo., Math.-Phys.* **18.8**, 1952, p. 3–16.
- [6] *W. K. Hayman*: Some remarks on Schottky's theorem. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **43**, 1947, p. 442–454.
- [7] *J. Hersch*: Longueurs extrémales, mesure harmonique et distance hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris* **235**, 1952, p. 569–571.
- [8] *J. Hersch*: Sur une forme générale du théorème de Phragmén-Lindelöf. *C. R. Acad. Sci. Paris* **237**, 1953, p. 641–643.
- [9] *J. Hersch*: Longueurs extrémales et théorie des fonctions. *Comment. Math. Helv.* **29**, 1955, fasc. 4.
- [10] *J. Hersch et A. Pfluger*: Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **234**, 1952, p. 43–45.
- [11] *J. Hersch et A. Pfluger*: Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. *C. R. Acad. Sci. Paris* **237**, 1953, p. 1205–1207.
- [12] *O. Lehto*: A majorant principle in the theory of functions. *Math. Scand.* **1**, 1953, p. 1–17.
- [13] *A. Pfluger*: Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques. *C. R. Acad. Sci. Paris* **231**, 1950, p. 1022–1023.
- [14] *A. Pfluger*: Quasikonforme Abbildungen und logarithmische Kapazität. *Ann. Inst. Fourier II*, 1950, p. 69–80.
- [15] *R. M. Robinson*: On numerical bounds in Schottky's theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.* **45**, No 12, 1939, p. 907–910.
- [16] *S. Stoilow*: Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. Gauthier-Villars, Paris 1938.
- [17] *O. Teichmüller*: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. *Deutsche Math.* **3**, 1938, p. 621–678.

(Reçu le 19 mai 1954)