Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Ungleichungen für die Minkowskische Summe und Differenz konkaver Körper.

Autor: Ohmann, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23918

Ungleichungen für die Minkowskische Summe und Differenz konvexer Körper

von D. Ohmann, Mailand

Vom Verfasser wurde gezeigt, daß zwischen den Flächeninhalten der konvexen Bereiche A und $B \subseteq A$ sowie deren Minkowskischen Summe $A + B$ und Differenz $A - B$ die Ungleichungen

$$F(A+B) + F(A-B) \geqslant 2F(A) + 2F(B)$$

und

$$F(A+B) \leqslant 3F(A) + F(B) - 2F(A)^{\frac{1}{2}} F(A-B)^{\frac{1}{2}}$$

bestehen, die mit den trivialen Ungleichungen $F(A) \geqslant F(A-B) \geqslant 0$ und $F(B) \geqslant 0$ ein vollständiges Ungleichungssystem bilden[1]). Diese Ungleichungen werden in der vorliegenden Note in folgender Form auf die Volumina konvexer Körper des n-dimensionalen euklidischen Raumes übertragen:

$$V(A+B) + V(A-B) \geqslant (V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B)^{\frac{1}{n}})^n + (V(A)^{\frac{1}{n}} - V(B)^{\frac{1}{n}})^n \quad (V(A) \geqslant V(B)) \,, \tag{1}$$

$$V(A+B) - V(B) \leqslant (2V(A)^{\frac{1}{n}} - V(A-B)^{\frac{1}{n}})^n - (V(A)^{\frac{1}{n}} - V(A-B)^{\frac{1}{n}})^n \quad (A - B \supset L) \,. \tag{2}$$

Dabei steht L in der Ungleichung (2) für die leere Menge, und es bedeutet $A - B \supset L$, daß $A - B$ nicht leer sein soll. In der für $V(A) \geqslant V(B)$ gültigen Ungleichung (1) hat man $V(A - B) = 0$ zu setzen, wenn $A - B = L$ ist.

Für $n \geqslant 3$ stellen die beiden Ungleichungen (1) und (2) unter der Voraussetzung $A - B \supset L$ auch im Verein mit den trivialen Ungleichungen

$$V(A) \geqslant V(A-B) \geqslant 0 \,, \qquad V(B) \geqslant 0 \tag{3}$$

---

[1]) *D. Ohmann*, Ein vollständiges Ungleichungssystem für die Minkowskische Summe und Differenz. Comment. Math. Helv. 27, 151–156 (1953).

noch kein vollständiges Ungleichungssystem für die vier Größen $V(A)$, $V(B)$, $V(A+B)$ und $V(A-B)$ dar. Wie am Schluß in einer kurzen Betrachtung gezeigt wird, besitzt nämlich nur Ungleichung (2) auch in höher dimensionierten Räumen die gleiche Bedeutung für das Vollständigkeitsproblem wie in der Ebene. Dagegen bildet das Ungleichungspaar (1), (2) wiederum eine Verschärfung des Brunn-Minkowskischen Ungleichungspaares

$$V(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqslant V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B)^{\frac{1}{n}}, \quad V(A-B)^{\frac{1}{n}} \leqslant V(A)^{\frac{1}{n}} - V(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{4}$$

1. Vorbereitungen für den Beweis

(a) Minkowskische Summe und Differenz. Werden die Punkte des Raumes mit den zu ihnen hinweisenden Ortsvektoren identifiziert, so gestatten die Minkowskische Summe $A+B$ und Differenz $A-B$ der konvexen Körper A und B die folgenden Definitionen:

$A+B$ stellt die Gesamtheit aller Punkte $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}\,(\mathfrak{x}\in A\,;\ \mathfrak{y}\in B)$ dar.

$A-B$ stellt die Gesamtheit der Punkte $\mathfrak{x}$ dar, für die $\mathfrak{x}+B\subseteq A$ besteht.

Die durch diese Festlegungen entstandenen Körper sind wieder konvex. Im folgenden wird beim Auftreten von Differenzkörpern stets vorausgesetzt, daß diese nicht leer sind.

Aus den Definitionen folgen die Beziehungen[2])

$$\text{(a)}\ A+B=B+A\ , \qquad \text{(b)}\ (A+B)+C=A+(B+C)\,, \tag{5}$$

$$\text{(a)}\ (A+B)-B=A\ , \qquad \text{(b)}\ (A-B)+B\subseteq A\,, \tag{6}$$

$$\text{(a)}\ (A-B)-C=A-(B+C), \qquad \text{(b)}\ (A+B)-C\supseteq A+(B-C) \tag{7}$$

und

$$\lambda A \pm \mu A = (\lambda \pm \mu)\, A \qquad (\lambda > \mu > 0)\,, \tag{8}$$

wobei die Mengen λA und μA in (8) durch Dilatation aus A entstanden sein sollen. Während sich die Formeln (5), (6) und (8) unmittelbar erschließen lassen, bedürfen die Relationen (7) eines kurzen Beweises: Bei (7a) benutzt man (5) und (6) um zunächst

$$[(A-B)-C]+(B+C)=\{[(A-B)-C]+C\}+B\subseteq(A-B)+B\subseteq A$$

herzuleiten und daraus durch Subtraktion von $A+B$ die Ungleichung $(A-B)-C\subseteq A-(B+C)$ zu gewinnen. Weiter folgert man

$$A\supseteq[A-(B+C)]+(B+C)=\{[A-(B+C)]+C\}+B$$

---

[2]) Die Formeln (5) bis (7a) finden sich für beliebige Mengen bei *H. Hadwiger*, Minkowskische Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen ... Math. Z. 53, 210–218 (1950).

ebenfalls aus (5) und (6) und sodann die umgekehrte Ungleichung $(A - B) - C \supseteq A - (B + C)$ durch aufeinanderfolgende Subtraktion von B und C. Damit ist (7a) schon erwiesen. (7b) ergibt sich aus (6) und (5b) in folgender Weise:

$$\begin{aligned}(A + B) - C &\supseteq \{A + [(B - C) + C]\} - C \\ &= \{[A + (B - C)] + C\} - C = A + (B - C).\end{aligned}$$

Wir haben noch die Beziehung

$$\begin{gathered}A_\tau - B_\tau = A - B \\ (A_\tau = A - \tau B\,;\, B_\tau = B - \tau B\,;\, 0 \leqslant \tau \leqslant 1)\end{gathered} \tag{9}$$

anzumerken, die aus (7a) und (8) fließt:

$$A_\tau - B_\tau = A - [\tau B + (B - \tau B)] = A - (\tau + 1 - \tau)\, B = A - B.$$

(b) Gemischte Volumina. Die Minkowskischen gemischten Volumina $V_k(A\,;\,B) = V(\underbrace{A, \ldots A}_{n-k}\,;\,\underbrace{B, \ldots B}_{k})$ definieren wir rekursiv durch das Formelsystem[3])

$$\begin{gathered}V_{k+1}(A\,;\,B) = \frac{1}{n-k} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,[V_k(A + \varepsilon B\,;\,B) - V_k(A\,;\,B)] \\ V_0(A\,;\,B) = V(A) \qquad (\varepsilon > 0\,;\, k = 0, 1 \ldots n-1).\end{gathered} \tag{10}$$

Es ist dann $V_n(A\,;\,B) = V(B)$. Nachdem wir sodann die elementaren Eigenschaften der Monotonie und Homogenität durch

$$V_k(A'\,;\,B') \leqslant V_k(A\,;\,B) \qquad (A' \subseteq A\,;\, B' \subseteq B), \tag{11}$$

$$V_k(\lambda A\,;\,\mu B) = \lambda^{n-k} \mu^k\, V_k(A\,;\,B) \qquad (\lambda, \mu > 0) \tag{12}$$

ausgedrückt haben, notieren wir die Entwicklung des Volumens der Minkowskischen Summe $V(A + B)$ nach den gemischten Volumina:

$$V(A + B) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} V_k(A\,;\,B) \tag{13}$$

und merken die Minkowskische Ungleichung

$$V_1(A\,;\,B) \geqslant V(A)^{\frac{n-1}{n}}\, V(B)^{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

sowie das Brunn-Minkowskische Ungleichungspaar an:

$$\begin{aligned}&\text{(a)} \quad V_1(A + B\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}} \geqslant V_1(A\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}} + V_1(B\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}}, \\ &\text{(b)} \quad V_1(A - B\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}} \leqslant V_1(A\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}} - V_1(B\,;\,C)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned} \tag{15}$$

---

[3]) Vgl. etwa *T. Bonnesen*, *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3, 1–164, insbes. 38–41 und 91–93 (1935).

Zu (14) ist dabei zu bemerken, daß dort nur im Falle der Homothetie der Körper A und B Gleichheit gelten kann. Die Ungleichung (15b) ergibt sich mit Rücksicht auf (6b) und (11) durch Anwendung der bekannten Ungleichung (15a) auf $(A - B) + B$.

Aus (10) läßt sich unter Beachtung von (5b) noch die Differentiationsformel

$$V'(A + \tau B) = n V_1(A + \tau B\,;\, B) \qquad (\tau > 0) \tag{16}$$

für die Körper der Schar $A + \tau B$ herleiten. V' gibt darin die Ableitung nach τ an.

(c) Die Schar der Relativparallelkörper nach innen. Die Haupthilfe beim Beweis von (1) stellt uns die von G. Bol[4]) als Beweismittel eingeführte Betrachtung der Relativparallelkörper nach innen, die in unserer Bezeichnungsweise die Differenzkörperschar $A_\tau = A - \tau B$ darstellen. Nach G. Bol ist

$$V'(A_\tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[V(A_{\tau+\varepsilon}) - V(A)] = -n V(A_\tau; B) \quad (0 < \tau < 1\,;\, \varepsilon > 0)\,. \tag{17}$$

Uns wird vor allem die Schar $A_{\alpha\tau} + B_\tau (A_{\alpha\tau} = A - \alpha\tau B\,;\, B_\tau = B - \tau B)$ bei festem $\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ beschäftigen. Aus (7) und (8) kann man für diese $A_{\alpha(\tau+\varepsilon)} + B_{\tau+\varepsilon} \subseteq (A_{\alpha\tau} + B_\tau)_{\varepsilon(1+\alpha)}$ erschließen und daraus vermöge (17)

$$V'_{\sup}(A_{\alpha\tau} + B_\tau) \leqslant -(1+\alpha)\, n\, V_1(A_{\alpha\tau} + B_\tau\,;\, B) \tag{18}$$

folgern, wobei durch $V'_{\sup}$ gekennzeichnet sein soll, daß der Limes in (17) durch den Limes superior zu ersetzen ist. Mit Hilfe von (12) erhalten wir wegen $B_\tau = (1 - \tau) B$ die endgültigen Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & V'(A_\tau) = -\dfrac{n}{1-\tau} V_1(A_\tau; B_\tau)\,, \\[2ex] \text{(b)} & V'(B_\tau) = -\dfrac{n}{1-\tau} V(B_\tau)\,, \\[2ex] \text{(c)} & V'_{\sup}(A_{\alpha\tau} + B_\tau) \leqslant -\dfrac{(1+\alpha)n}{1-\tau} V_1(A_{\alpha\tau} + B_\tau; B_\tau)\,. \end{array}\right\} (0 < \tau < 1) \tag{19}$$

2. Beweis der Ungleichungen (1) und (2)

(a) Ungleichung (1) für $A - B \supset L$. Durch Kombination von (19c) und (15a) findet man

$$V'_{\sup}(A_\tau + B_\tau) \leqslant -\frac{2n}{1-\tau} \left(V_1(A_\tau\,;\, B_\tau)^{\frac{1}{n-1}} + V(B_\tau)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}.$$

[4]) *G. Bol*, Beweis einer Vermutung von H. Minkowski. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15, 37–56 (1943).

Für die Ableitung des Funktionals

$$F(A_\tau\,;\,B_\tau) = V(A_\tau + B_\tau) + V(A_\tau - B_\tau)$$
$$- \left(V(A_\tau)^{\frac{1}{n}} + V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(V(A_\tau)^{\frac{1}{n}} - V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}\right)^n \quad (0<\tau<1)$$

ergibt sich daher gemäß (19a, b) und (9) die Abschätzung

$$-\frac{1-\tau}{n} F'_{\sup}(A_\tau;\,B_\tau) \geqslant \varphi(x)$$

$$\equiv 2\left(x^{\frac{1}{n-1}} + b^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{a^{\frac{n-1}{1}}} + b^{\frac{1}{n}}\right)\left(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} - \left(\frac{x}{a^{\frac{n-1}{n}}} - b^{\frac{1}{n}}\right)\left(a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}}\right),$$

in der zur Abkürzung $V(A_\tau) = a$, $V(B_\tau) = b$ und $V_1(A_\tau\,;\,B_\tau) = x$ gesetzt ist. Da aus der Minkowskischen Ungleichung (14) und der Bedingung $A - B \supset L$ wegen (11) auf $x_0 = a^{\frac{n-1}{n}} b^{\frac{1}{n}} \leqslant x \leqslant a$ zu schließen ist, kann die wichtige Beziehung

$$F'_{\sup}(A_\tau;\,B_\tau) \leqslant 0 \tag{20}$$

der Ungleichung $\varphi(x) \geqslant 0\ (x_0 \leqslant x \leqslant a)$ entnommen werden, die für $n = 2$ trivial ist, und für $n \geqslant 3$ wegen der Konkavität von $\varphi(x)$ ($\varphi''(x) < 0$) aus $\varphi(x_0) = 0$ und $\varphi(a) \geqslant 0$ folgt. Während nun $\varphi''(x) < 0$ und $\varphi(x_0) = 0$ unmittelbar verifiziert werden kann, vereinfacht man zum Nachweis von $\varphi(a) \geqslant 0$ zunächst zu

$$\varphi(a) = a\cdot\left(2\cdot\left(1 + c^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} - \left(1 + c^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(1 - c^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) \quad \left(c = \frac{b}{a}\right)$$

und entwickelt nach dem binomischen Lehrsatz. Durch geeignete Zusammenfassung erhält man

$$\varphi(a) = 2a \sum_{\nu=1}^{n'} \left[\binom{n-1}{2\nu-1} c^{\frac{2\nu-1}{n-1}} + \binom{n-1}{2\nu} c^{\frac{2\nu}{n-1}} - \binom{n}{2\nu} c^{\frac{2\nu}{n}}\right]$$

wobei $n' = \frac{n-2}{2}$ für gerades n und $n' = \frac{n-1}{2}$ für ungerades n zu setzen ist. Als Anwendung der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel ergibt sich jedoch, daß jedes Glied der Summe nichtnegativ ist und höchstens für $c = 0$ und $c = 1$ null werden kann.

Setzt man $\tau_0 = 1$, womit sich B_{τ_0} auf einen Punkt reduziert, so wird $V(A_{\tau_0} + B_{\tau_0}) = V(A_{\tau_0})$ und $V(A_{\tau_0} - B_{\tau_0}) = V(A_{\tau_0})$, und es ist mithin $F(A_{\tau_0}; B_{\tau_0}) = 0$. Aus (20) erschließt man daher

$$F(A; B) \geqslant F(A_{\tau_0}; B_{\tau_0}) - \int_0^{\tau_0} F'_{\sup}(A_\tau; B_\tau)\, d_\tau \geqslant 0\,,$$

was den Inhalt der Ungleichung (1) ausmacht.

Zur Herleitung von später zu benutzenden Gleichheitsbedingungen für $n \geqslant 3$ stellen wir fest, daß $\varphi(x) = 0$ für $n \geqslant 3$ und $b = V(B_\tau) > 0$ nur an der Stelle $x = x_0$ bestehen kann. Falls nämlich, wie es nach der obigen Entwicklung möglich ist, etwa auch $\varphi(a) = 0$ wäre, so ist $c = \frac{b}{a} = 1$ und daher $a = x_0$ Voraussetzung. Da $x = x_0$ aber nichts anderes als $V_1(A_\tau; B_\tau) = V(A_\tau)^{\frac{n-1}{n}} V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}$ bedeutet, ist der Gleichheitsbedingung für die Minkowskische Ungleichung (14) die folgende Aussage zu entnehmen: In Ungleichung (1) kann für $n \geqslant 3$ und $V(B) > 0$ nur bei homothetischen Körpern A und B Gleichheit eintreten.

(b) Der Fall $A - B = L$, $V(A) \geqslant V(B)$. Da nun $V(A - B) = 0$ ist, untersucht man das Verhalten des Funktionals

$$G(A; B_\tau) = V(A + B_\tau) - (V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B_\tau)^{\frac{1}{n}})^n - (V(A)^{\frac{1}{n}} - V(B_\tau)^{\frac{1}{n}})^n$$

Berücksichtigt man, daß hier die zweite Klammer mit wachsendem τ und daher abnehmendem $V(B_\tau)$ zunimmt, so ergibt sich für die Ableitung unter Beachtung von (19)

$$G'_{\sup}(A; B_\tau) \leqslant -\frac{n}{1-\tau}[V(A + B_\tau; B_\tau) - V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}(V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B_\tau)^{\frac{1}{n}})^{n-1}]$$

Mit Hilfe von (14): $V_1(A + B_\tau; B_\tau) \geqslant V(A + B_\tau)^{\frac{n-1}{n}} V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}$ und der Brunn-Minkowskischen Ungleichung (4):

$$V(A + B_\tau)^{\frac{1}{n}} \geqslant V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B_\tau)^{\frac{1}{n}}$$

folgt schon, daß $G'_{\sup}(A; B_\tau) \leqslant 0$ ausfallen muß. Man hat nun τ_1 nur noch so groß zu wählen, daß $A - B_{\tau_1}$ zwar nicht leer ist, aber doch verschwindendes Volumen besitzt. Damit gewinnt man Anschluß an den Fall (a). Es ist dann nämlich $G(A; B_{\tau_1}) = F(A; B_{\tau_1}) \geqslant 0$. Daraus folgt

$$G(A; B) \geqslant G(A; B_{\tau_1}) - \int_0^{\tau_1} G'_{\sup}(A; B_\tau)\, d_\tau \geqslant 0\,.$$

(c) Die Ungleichung (2). Durch Entwicklung von $V(A + B)$ nach der Formel (13) erhält man $V(A + B) - V(B) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} V_k(A; B)$. Auf Grund der Monotonieeigenschaft (11) kann $V(A + B) - V(B)$ daher nicht abnehmen, wenn man $A - B$ mit C bezeichnet und B sodann durch $A - C \supseteq B$ ersetzt. (2) folgt mithin aus der Ungleichung

$$(2\,V(A)^{\frac{1}{n}} - V(C)^{\frac{1}{n}})^n - V[A+(A-C)] \geqslant (V(A)^{\frac{1}{n}} - V(C)^{\frac{1}{n}})^n - V(A-C)\,,$$

die aber sicher richtig ist, wenn die Funktion

$$\psi(\tau) = (V(A + \tau A)^{\frac{1}{n}} - V(C)^{\frac{1}{n}})^n - V[\tau A + (A - C)]$$

für $\tau > 0$ monoton zunimmt. Um dies zu zeigen, bilden wir unter Beachtung von (16) die Ableitung

$$\psi'(\tau) = n\frac{V_1(A+\tau A\,;A)}{V(A+\tau A)^{\frac{n-1}{n}}}(V(A+\tau A)^{\frac{1}{n}} - V(C)^{\frac{1}{n}})^{n-1} - n\,V_1[\tau A+(A-C)\,;A].$$

Nun ist $V_1(A + \tau A\,;A) = V(A + \tau A)^{\frac{n-1}{n}}\,V(A)^{\frac{1}{n}}$; und es folgt weiter $V_1[\tau A + (A - C)\,;A] \leqslant V_1[(A + \tau A) - C\,;A]$ aus (7b) und (11).

Mit Rücksicht auf (14) ergibt sich daher

$$\psi'(\tau) \geqslant n[V_1(A+\tau A\,;A)^{\frac{1}{n-1}} - V_1(C\,;A)^{\frac{1}{n-1}}]^{n-1} - n\,V_1[(A+\tau A) - C\,;A]\,,$$

so daß $\psi'(\tau)$ gemäß (15b) nicht negativ sein kann.

3. Das Vollständigkeitsproblem

Setzt man

$$V(A) = u\,,\quad V(B) = v\,,\quad V(A + B) = x\,,\quad V(A - B) = y\,,\qquad (21)$$

so gehen die Ungleichungen (3) und (4) bzw. (1) bis (3) in die Ungleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{ll} & x \geqslant (u^{\frac{1}{n}} + v^{\frac{1}{n}})^n,\quad y \leqslant (u^{\frac{1}{n}} - v^{\frac{1}{n}})^n \\ \text{(a)} & x + y \geqslant (u^{\frac{1}{n}} + v^{\frac{1}{n}})^n + (u^{\frac{1}{n}} - v^{\frac{1}{n}})^n \\ \text{(b)} & x - v \leqslant (2u^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})^n - (u^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})^n \end{array}\right\}\; u \geqslant y \geqslant 0\,,\ v \geqslant 0 \qquad \begin{array}{r}(22)\\ \text{bzw.}\\ \\ (23)\end{array}$$

über. Wird nun $v > 0$ und $u > v$ fest vorgegeben, so bezeichne $\Gamma_1(u, v)$ bzw. $\Gamma_2(u, v)$ den durch die Ungleichungen (22) bzw. (23) bestimmten Bereich der (x, y)-Ebene und $\Gamma_3(u, v)$ die Menge der Punkte (x, y), denen sich derart konvexe Körper A, B zuordnen lassen, daß (21) erfüllt ist. Wir zeigen, daß für $n \geqslant 3$

$$\Gamma_1(u, v) \supset \Gamma_2(u, v) \supset \Gamma_3(u, v) \qquad (u > v > 0) \qquad (24)$$

besteht, was die Folgerung zuläßt, daß das Ungleichungssystem (1) bis

(3) wohl eine Verschärfung des Ungleichungssystems (3), (4) darstellt, jedoch noch nicht vollständig ist.

(a) Wie aus (22) zu folgern ist, stellt Γ_1 den Halbstreifen der (x, y)-Ebene dar, der von Teilen der Geraden $y = 0$, $y = y_0$ und $x = x_0$ begrenzt wird, wobei zur Abkürzung $x_0 = (u^{\frac{1}{n}} + v^{\frac{1}{n}})^n$ und $y_0 = (u^{\frac{1}{n}} - v^{\frac{1}{n}})^n$ gesetzt ist. Durch die Ungleichungen (23) wird Γ_2 als ein dreiecksförmiger Bereich beschrieben, dessen Begrenzung durch die beiden Geraden $y = 0$ und $x + y = x_0 + y_0$ und die für $0 < y < u$ monoton fallende Kurve $x - v = (2u^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})^n - (u^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}})^n$ gegeben wird. Als Ecken ermittelt man unschwer die Punkte $P_0(x_0; y_0)$, $P_1(x_1 = x_0 + y_0; y_1 = 0)$ und $P_2(x_2 = (2^n - 1)\,u + v; y_2 = 0)$. Es ist daher unmittelbar $\Gamma_1 \supset \Gamma_2$ zu erschließen.

(b) Da für Körper A, B positiven Volumens in Ungleichung (1) nur im Falle ihrer Homothetie Gleichheit besteht, d.h. aber für $x = x_0$ und $y = y_0$, gehört von der Randstrecke $\overline{P_0 P_1}$ des Bereiches Γ_2 nur der Punkt P_0 auch zu Γ_3. Die triviale Beziehung $\Gamma_2 \supseteq \Gamma_3$ verschärft sich daher zu $\Gamma_2 \supset \Gamma_3$.

Zur weiteren Untersuchung des Durchschnitts des Randes von Γ_2 mit Γ_3 sei A' ein gerader Kegel des Grundflächenradius r_0 und der Höhe $h_0 = \frac{n}{\kappa} r_0$ (κ = Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel), und B' stelle einen zu A' parallelen Kegelstumpf dar, d.h. einen geraden Kegelstumpf, der aus einem zu A' homothetischen Kegel durch Abschneiden seiner Spitze entstanden ist. Bezeichnen r_1 und $r_2 < r_1$ dabei die Radien der Deckflächen von B', so läßt sich $V(A') = r_0^n$ und $V(B') = r_1^n - r_2^n$ errechnen. Da sich $A' + B'$ bzw. $A' - B'$ als ein zu A' paralleler Kegelstumpf bzw. Kegel ergibt, findet man zudem $V(A' + B') = (r_0 + r_1)^n - r_2^n$ und $V(A' - B') = (r_0 - r_1)^n$. Für A', B' tritt daher in (2) Gleichheit ein, wie sich durch Einsetzen verifizieren läßt. Man kann die Radien nun aber offenbar noch so wählen, daß die Körper A', B' der Beziehung (21) bei Vorgabe eines beliebigen Quadrupels u, v, x, y genügen, für das (23) erfüllt ist und speziell in (23b) Gleichheit gilt. Der Randbogen $\widehat{P_0 P_2}$ gehört mithin ganz zu Γ_3. Dies besagt aber, daß sich Ungleichung (2) nicht mehr verschärfen läßt.

Eingegangen den 17. Oktober 1955