Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Konkave Eikörperfunktionale und höhere Trägheitsmomente.

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23917

Konkave Eikörperfunktionale und höhere Trägheitsmomente

von H. HADWIGER, Bern

Eine Klasse $\mathfrak{K}$ konvexer Körper (Eikörper) $P, Q, \ldots$ des k-dimensionalen euklidischen Raumes R heißt *konvex*, wenn aus $P, Q \in \mathfrak{K}$ stets auch $\alpha P \times \beta Q \in \mathfrak{K}$ $[\alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1]$ folgt.

Dabei verstehen wir unter λP einen Eikörper, der aus P durch Dilatation mit $\lambda > 0$ von einem festen Ursprung O des Raumes R aus hervorgeht; $P \times Q$ bezeichnet die Minkowskische Addition. Diese Eigenschaft einer Eikörperklasse bezieht sich demnach nicht nur auf Größe und Gestalt der Körper, sondern auch auf ihre Lage im Raum. [1])

Ein über einer konvexen Eikörperklasse $\mathfrak{K}$ definiertes Funktional $\varphi(P)$ nennen wir (im Minkowskischen Sinn) *konkav*, wenn für zwei beliebige (nichtleere) Eikörper $P, Q \in \mathfrak{K}$ die Funktionalungleichung

$$\varphi(\alpha P \times \beta Q) \geqslant \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q) \qquad [\alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1] \tag{A}$$

erfüllt ist. Eine Invarianzeigenschaft des Funktionals φ wird nicht von vornherein postuliert, doch handelt es sich in den geläufigen Fällen ausschließlich um bewegungsinvariante Funktionale.

Als wichtigstes Beispiel sei vorerst das Funktional

$$\varphi(P) = V(P)^{1/k} \tag{B}$$

erwähnt, wobei V das *Volumen* bezeichnen möge. Der klassische Brunn-Minkowskische Satz, der innerhalb der Theorie der konvexen Körper eine Schlüsselstellung einnimmt, sagt bekanntlich aus, daß dieses Funktional über der Klasse aller Eikörper invariant definiert und in unserem Sinn konkav ist.

Eine wichtige Erweiterung stellt die von *W. Fenchel* und *A. Alexan-*

---

[1]) Beispiele konvexer Klassen sind: a) Eipolyeder, b) Rotationseikörper mit gleicher, durch den Ursprung 0 laufender Achse, c) Eikörper, die in einem festen Eikörper als Teil enthalten sind, wenn dieser selbst den Ursprung 0 enthält.

droff[2]) bewiesene Aussage dar, wonach für $i = 0, \ldots, k-1$ durch die Ansätze

$$\varphi(P) = W_i(P)^{1/(k-i)} \tag{C}$$

im gleichen Sinne konkave Funktionale gegeben sind. Hier bedeutet W_i das i-te *Minkowskische Quermaßintegral.*

Einer Anregung von *G. Pólya*[3]) folgend, beweise ich in der vorliegenden Note u. a., daß

$$\varphi(P) = I(P)^{1/(k+2)} \tag{D}$$

ein konkaves Funktional ist, wenn I das *Inertialmoment* bezüglich des Schwerpunktes von P (polares Trägheitsmoment) bezeichnet.

Im gleichen Zusammenhang betrachte ich auch gewisse höhere Trägheitsmomente, die als Simplexquadratintegrale angesetzt werden und die das gewöhnliche Inertialmoment als einfachsten Sonderfall enthalten. Für diese Momente werden Ungleichungen gewonnen, welche die entsprechenden Extremaleigenschaften der Kugel zum Ausdruck bringen. In diesen Ungleichungen spielt neben dem Volumen V noch die *Norm* N eine wesentliche Rolle. Sie ist proportional der sogenannten *mittleren Breite*[4]), mißt also die (lineare) Größe des Eikörpers. Volumen und Norm stellen im wesentlichen erste und letzte Maßzahl in der Skala der nichttrivialen Minkowskischen Quermaßintegrale dar, indem $V = W_0$ und $N = k\,W_{k-1}$ gilt[5]).

Jedes bewegungsinvariante und konkave Funktional nimmt unter allen Eikörpern fester Norm den größtmöglichen Wert für die Kugel an. Auf dieser Tatsache, die mit der Feststellung der Konkavität eines Funktionals auch schon die Lösung des zugehörigen Extremalproblems liefert, beruht die Bedeutung des erörterten Begriffs innerhalb der Theorie der allgemeinen Eikörperfunktionale, wie dies auch an anderer Stelle hervorgehoben wurde[6]).

Ein Nachweis, daß unter allen Eikörpern vorgeschriebener Norm (mittlerer Breite) die Kugel das größte Inertialmoment aufweist, bot

---

[2]) *W. Fenchel,* Généralisation du théorème de Brunn et Minkowski concernant les corps convexes, C. r. Acad. Sci. Paris **203**, 764–766 (1936); *A. Alexandroff,* Neue Ungleichungen für die Mischvolumen konvexer Körper, C. r. Acad. Sci. URSS (N.S.) **14**, 155–157 (1937).

[3]) Briefwechsel Sommer 1954.

[4]) Es gilt $N = (k\,\omega_k/2)\,\bar{b}$, wenn $\bar{b}$ die mittlere Breite ist. ω_k bezeichnet das Volumen der k-dimensionalen Einheitskugel.

[5]) Für die niedrigsten Dimensionen gilt insbesondere: a) $k = 1$: $N = \bar{b} =$ Länge, b) $k = 2$: $N = \pi\bar{b} =$ Umfang, c) $k = 3$: $N = 2\pi\bar{b} =$ Integral der mittleren Krümmung.

[6]) *H. Hadwiger,* Konkave Eikörperfunktionale. Monatshefte für Mathematik **59**, 230—237 (1955).

unerwartete Schwierigkeiten[7]; aus den Anstrengungen, diese zu überwinden, ist die vorliegende Abhandlung hervorgegangen. Verschiedene sachliche und methodische Ansätze und Kunstgriffe verdanke ich Herrn *G. Pólya*[8]).

I. In diesem ersten Teil gebe ich zunächst eine zusammenfassende Darstellung der für die Trägheitsmomente gültigen Ungleichungen, die in den darauffolgenden Teilen abgeleitet werden sollen, und formuliere damit auch die Extremaleigenschaften der Kugel, unter allen Eikörpern fester Norm die größten und unter allen Eikörpern festen Volumens die kleinsten Trägheitsmomente aufzuweisen.

1.1. Es sei P ein Eikörper des k-dimensionalen euklidischen Raumes R und p bezeichne einen in P veränderlichen Punkt. Für Punkte und ihre Ortsvektoren verwenden wir das gleiche Zeichen. Der Schwerpunkt von P sei s. Das polare Trägheitsmoment I von P ist dann durch das Integral

$$I(P) = \int |s, p|^2 dp \tag{1}$$

gegeben, wobei $|s, p|$ die Länge der von s nach p führenden Strecke und dp das Raumdifferential (Punktdichte) des beweglichen Punktes p bedeutet. Die Integration erstreckt sich über alle Lagen von p im Eikörper P.

Es seien weiter K° bzw. K Kugeln, welche mit P volumgleich bzw. normgleich sind, so daß also

$$V(K^\circ) = V(P) \ ; \quad N(K) = N(P) \tag{2}$$

gilt. Es besteht dann die Ungleichung

$$I(K) \geqslant I(P) \geqslant I(K^\circ) \ . \tag{3}$$

1.2. Nun definieren wir eine Skala von $k+1$ höheren Trägheitsmomenten I_n $(n = 0, 1, \ldots, k)$ durch die Integralansätze

$$I_0(P) = 1 \ , \tag{4a}$$

$$I_n(P) = \frac{1}{c_n} \int \cdots \int |s, p_1, \ldots, p_n|^2 dp_1 \ldots dp_n \qquad [1 \leqslant n \leqslant k] \ . \tag{4b}$$

Hierbei bedeutet $|s, p_1 \ldots, p_n|$ das Volumen eines n-dimensionalen

---

[7]) Im ebenen Fall ($k = 2$) lautet die entsprechende Ungleichung $L^4 - 32\pi^3 I \geq 0$, wobei L den Umfang des Eibereiches bezeichnet; der u. W. einzige Beweis hierfür stammt von *G. Pólya und G. Szegö*, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Princeton 1951, p. 10, 123–126 und erfordert funktionentheoretische Hilfsmittel. Als „Ungelöstes Problem Nr. 1" (Elemente der Math. **9**, 111, (1954)) findet sich die Aufgabe vorgelegt, für die oben stehende Ungleichung einen einfachen Beweis zu finden.

[8]) Vgl. *G. Pólya*, More isoperimetric inequalities proved and conjectured, Comment. Math. Helv. **29**, 112–119, (1955).

Simplex, dessen Eckpunkte durch den Schwerpunkt s und durch n im Eikörper P bewegliche Punkte p_i $(i = 1, \ldots, n)$ gebildet werden. Die n-fache Integration erstreckt sich über alle Lagen der Punkte p_i im Eikörper P. Die Konstante c_n ist durch

$$c_n = \frac{1}{n!\,k^n}\binom{k}{n} \tag{4c}$$

gegeben und bewirkt lediglich eine zweckmäßige Normierung.

Offensichtlich wird $I_1(P) = I(P)$, woraus erhellt, daß mit der Skala der in (4) angesetzten Integralmomente eine Erweiterung des klassischen Trägheitsmomentes zu einem vollständigen System gegeben ist.

Als Vervollständigung der Ungleichung (3) ergibt sich

$$I(K) \geqslant I_1(P) \geqslant I_2(P)^{1/2} \geqslant \cdots \geqslant I_k(P)^{1/k} \geqslant I(K^\circ)\ . \tag{5}$$

Weiter gilt die in den drei Indizes zyklisch-symmetrische Ungleichung

$$I_a(P)^{(b-c)} I_b(P)^{(c-a)} I_c(P)^{(a-b)} \geqslant 1 \qquad [0 \leqslant a < b < c \leqslant k]\ , \tag{6}$$

welche ausdrückt, daß $I_n(P)$ in Abhängigkeit von der ganzzahligen Variablen n logarithmisch konkav ist.

1.3. Durch eine naheliegende Variation des Ansatzes gelangen wir zu einer weiteren Skala von $k + 1$ höheren Integralmomenten J_n $(n = 0, 1, \ldots, k)$, die wir durch

$$J_0(P) = V(P) \tag{7a}$$

$$J_n(P) = \frac{1}{c_n} \int \cdots \int |\, p_0, p_1, \ldots, p_n \,|^2\, dp_0 dp_1 \ldots dp_n \qquad [1 \leqslant n \leqslant k] \tag{7b}$$

einführen. Es handelt sich um zu den vorher definierten I_n analoge Simplexquadratintegrale, wobei nun aber alle $n + 1$ Eckpunkte p_i $(i = 0, \ldots, n)$ des n-dimensionalen Simplex im Eikörper P variieren sollen.

Es zeigt sich, daß diese J_n keine neuen Eikörperfunktionale darstellen, sondern sich auf einfache Weise auf die I_n zurückführen lassen. Sie dürfen daher auch als höhere Trägheitsmomente gelten. Es besteht nämlich die Beziehung

$$J_n(P) = (n + 1)\, V(P) I_n(P)\ , \tag{8}$$

welche gestattet, alle Resultate über die Momente I_n direkt auf die J_n zu übertragen. Dies lassen wir hier natürlich weg.

II. Dieser zweite Teil ist dem Nachweis der Konkavität der gewöhnlichen polaren und planaren Trägheitsmomente gewidmet.

2.1. Es bezeichne O den Ursprung des Raumes und E eine durch O gelegte, $(k - 1)$-dimensionale Ebene; u sei ein in O angreifender, auf E orthogonal stehender, normierter Richtungsvektor. Alle Vektoren x, deren Skalarprodukte mit u durch $(x, u) \geqslant 0$ bzw. $(x, u) \leqslant 0$ eingeschränkt sind, kennzeichnen die beiden durch E erzeugten (abgeschlossenen) Halbräume H_+ bzw. H_-. Wir betrachten im folgenden nur Eikörper, die ganz im positiven Halbraum H_+ liegen; sie bilden bezüglich des Ursprungs O als Dilatationszentrum eine konvexe Eikörperklasse $\mathfrak{K}_+$ (vgl. Einleitung).

Das planare Trägheitsmoment von P bezüglich E ist durch das Integral

$$T_+(P) = \int | E, p |^2 dp \tag{8}$$

gegeben, wobei $| E, p |$ den Abstand des in P beweglichen Punktes p von E bezeichnet. Das zugehörige Funktional

$$\varphi(P) = T_+(P)^{1/(k+2)} \tag{9}$$

ist über der Klasse $\mathfrak{K}_+$ definiert, dort definit, monoton und linear bei Dilatation, so daß also

$$\varphi(P) \geqslant 0, \quad \varphi(P) \geqslant \varphi(Q) \quad (P \supset Q), \quad \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$$

gilt. Wir zeigen jetzt, daß das Funktional auch (im Minkowskischen Sinne) konkav ist, so daß die Beziehung (A) der Einleitung erfüllt ist.

In der Tat: Wir betten den k-dimensionalen Raum R in einen $(k + 2)$-dimensionalen Raum R^* ein und führen weiter zwei Richtungsvektoren v und w im R^* ein, die zueinander wie auch auf R orthogonal stehen und zudem normiert sein sollen. Einem Eikörper $P \subset R$ der Klasse $\mathfrak{K}_+$ ordnen wir dann den Eikörper $P^* \subset R^*$ zu, dessen Punkte p^* durch die Parameterdarstellung

$$p^* = p + (p, u)(\varrho v + \sigma w) \;, \quad (0 \leqslant \varrho \leqslant 1, \; 0 \leqslant \sigma \leqslant 1)$$

aus den Punkten p von P hervorgehen. Man bestätigt leicht, daß für $P, Q \in \mathfrak{K}_+$ und $\alpha, \beta \geqslant 0$ die Beziehung $(\alpha P \times \beta Q)^* = \alpha P^* \times \beta Q^*$ erfüllt ist, wobei sich die Minkowskische Linearkombination links im R und rechts im R^* vollzieht. Weiter ist unmittelbar einzusehen, daß für $P \in \mathfrak{K}_+$ die Identität $T_+(P) = V^*(P^*)$ gilt, wo V^* das Volumen im Raum R^* bezeichnet. Mit der Vertauschungsrelation oben ergibt sich das Bestehen der Funktionalungleichung (A) für das Funktional (9), wenn man den Brunn-Minkowskischen Satz im Raum R^* zur Wirkung bringt.

2.2. Es sei jetzt P ein Eikörper des Raumes R, den wir uns so verschoben denken, daß sein Schwerpunkt s mit dem Ursprung O zusammenfällt. Die beiden zu Beginn des vorigen Abschnittes betrachteten Halbräume H_+ und H_- zerlegen P in die beiden Teilkörper $P_+ = P \frown H_+$ und $P_- = P \frown H_-$. Da unsere Definition des planaren Trägheitsmomentes für P versagt, führen wir die beiden einseitigen Trägheitsmomente $T_+(P)$ und $T_-(P)$ durch die Festsetzungen $T_+(P) = T_+(P_+)$, $T_-(P) = T_-(P_-)$ ein. Die Summe $T(P) = T_+(P) + T_-(P)$ ist das gewöhnliche planare Trägheitsmoment T des Eikörpers P bezüglich der Ebene E, das durch das Integral

$$T(P) = \int | E, p |^2 dp \tag{10}$$

dargestellt wird. Mit dem Ansatz

$$\psi(P) = T(P)^{1/(k+2)} \tag{11}$$

wird ein über der Klasse aller Eikörper definiertes Funktional festgelegt, das wie das Funktional (9) definit, monoton und linear bei Dilatation ist, das aber außerdem translationsinvariant ausfällt, so daß $\psi(P) = \psi(Q)$ gilt, wenn P und Q translationsgleich sind. Hierbei ist selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Ebene E durch den Ursprung O festgelassen wird. Wir wollen nun nachweisen, daß ψ auch (im Minkowskischen Sinne) konkav ist.

In der Tat: Es seien P und Q zwei Eikörper des Raumes R und $S = \alpha P \times \beta Q$ $(\alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$ bezeichne eine Linearkombination; der Schwerpunkt s von S möge mit dem Ursprung O zusammenfallen. Mit u bezeichnen wir wieder einen normierten Richtungsvektor, der auf E orthogonal steht. Nun betrachten wir neue Körper P_τ und Q_τ, die aus P und Q durch entgegengesetzt wirkende Transformationen hervorgehen sollen; sind nämlich p und q Punkte von P und Q, so mögen

$$p_\tau = p + \tau\beta u \quad \text{und} \quad q = q - \tau\alpha u$$

Punkte von P_τ und Q_τ darstellen. τ bezeichnet einen im Intervall $-\infty < \tau < \infty$ variierbaren Parameter. Wie man mühelos bestätigt, gilt für alle τ die Beziehung $S = \alpha P_\tau \times \beta Q_\tau$ in unveränderter Weise.

Nun führen wir die Hilfsfunktionen $\xi(\tau) = T_+(P_\tau)/T_-(P_\tau)$ und $\eta(\tau) = T_+(Q_\tau)/T_-(Q_\tau)$ ein, wobei $\xi(\tau)$ in einem offenen Intervall $\underline{\varrho} < \tau < \overline{\varrho}$ definiert ist und dort monoton von 0 bis ∞ stetig ansteigt, während $\eta(\tau)$ in einem andern offenen Intervall $\underline{\sigma} < \tau < \overline{\sigma}$ definiert ist, dort aber von ∞ bis 0 stetig sinkt. Da für ausreichend kleine τ sicher $P_\tau \subset H_-$ und $Q_\tau \subset H_+$, für ausreichend große τ dagegen umgekehrt $P_\tau \subset H_+$ und $Q_\tau \subset H_-$ gilt, da weiter niemals beide Eikörper im gleichen Halbraum liegen, da sich sonst auch S ganz in einem Halbraum befinden müßte, was nach Annahme über den Schwerpunkt ausgeschlossen ist, so gibt es Parameterwerte derart, daß P_τ und Q_τ gleichzeitig durch E in zwei eigentliche Teilkörper zerlegt werden. Dies bedeutet, daß die beiden Definitionsintervalle für $\xi(\tau)$ und $\eta(\tau)$ ein nichtleeres Durchschnittsintervall aufweisen müssen.

Unter Verwendung der Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften ergibt sich jetzt leicht, daß ein τ_0 existiert, für welches $\xi(\tau_0) = \eta(\tau_0) = \zeta$ wird. Ohne Einschränkung darf man annehmen (Translationsinvarianz des Funktionals ψ!), daß $\tau_0 = 0$ wird, was damit gleichbedeutend ist, daß sich die beiden ursprünglich gewählten Körper $P = P_0$ und $Q = Q_0$ in der durch die Gleichheit von ξ und η ausgezeichneten Lage befinden.

Nun überlegt man sich weiter, daß

$$S_+ \supset \alpha P_+ \times \beta Q_+ \qquad \text{und} \qquad S_- \supset \alpha P_- \times \beta Q_- \ .$$

Hieraus ergeben sich mit der bereits bewiesenen Konkavität der einseitigen Funktionale $T_+^{1/(k+2)}$ und $T_-^{1/(k+2)}$ die Ungleichungen

$$T_\pm(S)^{1/(k+2)} \geqslant \alpha T_\pm(P)^{1/(k+2)} + \beta T_\pm(Q)^{1/(k+2)} \ .$$

Nun war aber nach unserer Konstruktion $T_+(P) = \zeta T_-(P)$ und $T_+(P) = \zeta T_-(Q)$. Aus den beiden obenstehenden Relationen und unter Verwendung der Ungleichungen

$$T_+(P) + T_-(P) \geqslant T(P) \qquad \text{und} \qquad T_+(Q) + T_-(Q) \geqslant T(Q)$$

(man beachte, daß die Ebene E nicht notwendig durch die Schwerpunkte von P und Q geht), gewinnt man jetzt leicht die gewünschte Formel, nämlich

$$T(S)^{1/(k+2)} \geqslant \alpha T(P)^{1/(k+2)} + \beta T(Q)^{1/(k+2)} \ ,$$

also das Bestehen der Ungleichung (A) für das Funktional (11).

2.3. Wir betrachten nun k paarweise aufeinander orthogonal stehende normierte Richtungsvektoren u_i $(i = 1, \ldots, k)$ und legen die k ihnen entsprechenden Ebenen E_i $(i = 1, \ldots, k)$ durch den Ursprung O. Einen Eikörper P denken wir wieder so im Raum R verschoben, daß sein Schwerpunkt s mit O zusammenfällt. Die Summe der k gewöhnlichen, planaren Trägheitsmomente T_i $(i = 1, \ldots, k)$ des Körpers P bezüglich der Ebenen E_i ist dann bekanntlich gleich dem gewöhnlichen polaren Trägheitsmoment I, so daß die Additionsformel $I = \Sigma T_i$ vorgemerkt werden kann. Wir erinnern, daß I durch das Integral (1) eingeführt wurde.

Der Ansatz

$$\chi(P) = I(P)^{1/(k+2)} \tag{12}$$

führt ein für die Klasse aller Eikörper definiertes Funktional ein, das wie das Funktional (11) ebenfalls definit, monoton und linear bei Dilatation ist, das aber nicht nur wie jenes translationsinvariant, sondern sogar bewegungsinvariant ist, so daß $\chi(P) = \chi(Q)$ gilt, falls P und Q kongruent sind.

Nun wollen wir beweisen, daß χ auch (im Minkowskischen Sinn) konkav ist. Um das Bestehen der Funktionalungleichung (A) zu bestätigen, genügt es zu zeigen, daß aus $I(P) = I(Q) = 1$ und $S = \alpha P \times \beta Q$ $(\alpha, \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta = 1)$ die Ungleichung $I(S) \geqslant 1$ gefolgert werden kann.

Dies ist in der Tat der Fall: Es sei u ein variabel gedachter Richtungsvektor und $T(P, u)$ bezeichne das planare Moment des Eikörpers P bezüglich einer durch den Schwerpunkt von P gehenden, auf u orthogonal stehenden Ebene. Offenbar ist $T(P, u)$ eine stetige Funktion von u. Nun betrachten wir die stetige Richtungsfunktion $f(u) = T(P, u) - T(Q, u)$. Nach einem Hilfssatz über stetige Funktionen auf Sphären gibt es k paarweise aufeinander senkrecht stehende Richtungen u_i $(i = 1, \ldots, k)$, so daß $f(u_1) = \ldots = f(u_k)$ wird[9]). Da nun $\Sigma f(u_i) = I(P) - I(Q) = 0$ ausfällt (man beachte die Additionsformel für die Momente und die Voraussetzung der zu beweisenden Aussage), schließt man auf $f(u_i) = 0$, $(i = 1, \ldots, k)$ oder also auf $T(P, u_i) = T(Q, u_i)$, $(i = 1, \ldots, k)$.

Aus der bereits bewiesenen Konkavität der Funktionale $T^{1/(k+2)}$ folgen jetzt die k Ungleichungen

$$T(S, u_i)^{1/(k+2)} \geqslant \alpha T(P, u_i)^{1/(k+2)} + \beta T(Q, u_i)^{1/(k+2)} ,$$

die unter Verwendung der oben erzielten Übereinstimmung der einzelnen Momente von P und Q in die Ungleichungen $T(S, u_i) \geqslant T(P, u_i)$ übergehen. Mit der Additionsformel resultiert $I(S) \geqslant 1$, was zu beweisen war.

III. In diesem dritten Teil wollen wir zeigen, daß sich die von uns betrachteten höheren Trägheitsmomente als elementar-symmetrische Funktionen der planaren Hauptträgheitsmomente darstellen lassen. Dadurch wird eine zwischen den Simplexquadratintegralen bestehende starke gegenseitige Abhängigkeit auf rein algebraische Weise ausgedrückt.

3.1. Wir geben wieder einen Eikörper P im Raum R vor und dazu k Richtungen u_i $(i = 1, \ldots, k)$, welche durch den Schwerpunkt von P

---

[9]) Es handelt sich um die k-dimensionale Erweiterung eines Theorems von *S. Kakutani* $(k = 3)$. Vgl. *H. Yamabe und Z. Yujobo*, On the continuos function defined on a sphere. Osaka math. J. 2, 19–22 (1950).

hindurchlaufen und seinen Hauptträgheitsachsen entsprechen mögen. Die ihren Normalebenen zugeordneten planaren Trägheitsmomente von P sind dann die planaren Hauptträgheitsmomente T_i $(i = 1, \ldots, k)$ bezüglich der Hauptebenen E_i.

Wie wir nachfolgend beweisen werden, gelten für die mit (4) und (7) eingeführten höheren Trägheitsmomente die Darstellungen

$$I_n(P) = \frac{1}{n!\, c_n} \Sigma_n(T_1, \ldots, T_k) \tag{13}$$

und

$$J_n(P) = \frac{n+1}{n!\, c_n} V\, \Sigma_n(T_1, \ldots, T_k)\,, \tag{14}$$

wobei Σ_n $(T_1, \ldots, T_k)$ die elementarsymmetrische Funktion n-ten Grades der k planaren Hauptträgheitsmomente T_i bezeichnet. Insbesondere ist also $I_0 = 1$, $I_1 = I = T_1 + \cdots + T_k$, $I_k = k^k T_1 \ldots T_k$ und $J_0 = V$, $J_1 = 2V$ $(T_1 + \cdots + T_k)$, $J_k = (k+1) k^k V T_1 \ldots T_k$.

3.2. Die Resultate (13) und (14) können durch direkte Rechnung gewonnen werden. Es sei p_0 ein Punkt im Eikörper P, den wir uns zunächst fest denken wollen, während weitere n Punkte p_i $(i = 1, \ldots, n)$ variabel sind. Setzen wir $q_i = p_i - p_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist

$$| p_0, p_1, \ldots, p_n |^2 = (1/n!)^2 \operatorname{Det} \| (q_\nu, q_\mu) \| \,, \qquad (\nu, \mu = 1, \ldots, n)\,.$$

Nun wählen wir die Hauptachsen der Trägheit durch den Ursprung O, der selbst mit dem Schwerpunkt von P zusammenfallen soll, als Koordinatenachsen.

Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte p_i mit $x_{i\lambda}$ $(i = 1, \ldots, n;$ $\lambda = 1, \ldots, k)$ und diejenigen von p_0 mit y_λ $(\lambda = 1, \ldots, k)$ und setzen wir die Ausdrücke

$$(q_\nu, q_\mu) = \sum_{\lambda=1}^{k} (x_{\nu\lambda} - y_\lambda)(x_{\mu\lambda} - y_\lambda)$$

für die Skalarprodukte oben in die Determinante ein! Hierauf integrieren wir über die n im Körper P variierbaren Punkte p_i $(i = 1, \ldots, n)$. Es ergibt sich dann nach einigen zweckmäßigen Umgruppierungen die Formel

$$\int \cdots \int | p_0, p_1, \ldots, p_n |^2 dp_1 \ldots dp_n = (1/n!)^2 \sum_{\lambda_1=1}^{k} \cdots \sum_{\lambda_n=1}^{k} \Delta [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\,,$$

wobei $\Delta [\lambda_1, \ldots \lambda_n] = \operatorname{Det} \| D^0_{\lambda_i \lambda_j} \|$, $(i, j = 1, \ldots, n)$ ist und $D^0_{\lambda\mu}$ das Moment

$$D^0_{\lambda\mu} = \int (x_\lambda - y_\lambda)(x_\mu - y_\mu) dp$$

bezeichnet (der Punktindex ist hier als überflüssig weggelassen). Setzt man noch

$$D_{\lambda\mu} = \int x_\lambda x_\mu dp \ ,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf das Verschwinden der statischen Momente $\int x_\lambda dp$ die Beziehung

$$D^0_{\lambda\mu} = D_{\lambda\mu} + y_\lambda y_\mu V \ .$$

Nun wollen wir die Determinanten $\varDelta$ berechnen.

1. Fall: Die λ_i sind alle verschieden. Es gilt dann $D_{\lambda_i\lambda_j} = 0$ für $i \neq j$, da es sich um Deviationsmomente bezüglich der Hauptebenen der Trägheit handelt. Die Diskussion der Determinante $\varDelta$ liefert

$$\varDelta[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = T_{\lambda_1}, \ldots, T_{\lambda_n}\{1 + y^2_{\lambda_1} V/T_{\lambda_1} + \cdots + y^2_{\lambda_n} V/T_{\lambda_n}\} \ ,$$

wobei noch zu beachten ist, daß $D_{\lambda_i\lambda_i} = T_{\lambda_i}$ ist.

2. Fall: Die λ_i sind nicht alle verschieden. Da die Determinante gleiche Zeilen enthält, gilt

$$\varDelta\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = 0 \ .$$

Lassen wir jetzt einmal p_0 mit dem Schwerpunkt, also mit O zusammenfallen, so gilt $y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ und es resultiert mit Rücksicht auf die Formel des 1. Falles

$$\varDelta[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] = T_{\lambda_1}, \ldots, T_{\lambda_n}$$

die Darstellung

$$\int \cdots \int |\, s, p_1, \ldots, p_n\,|^2 dp_1 \ldots dp_n = \frac{1}{n!}\,\Sigma_n(T_1, \ldots, T_k) \ .$$

Wird aber p_0 auch als veränderlich angenommen, so ergibt sich mit Rücksicht auf die wieder aus dem 1. Fall fließende Formel

$$\int \varDelta\,[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] dp_0 = (n+1)\,V T_{\lambda_1}, \ldots, T_{\lambda_n}$$

ganz analog

$$\int \cdots \int |\, p_0, p_1, \ldots, p_n\,|^2 dp_0 dp_1 \ldots dp_n = \frac{(n+1)}{n!}\,V\,\Sigma_n(T_1, \ldots, T_k) \ .$$

Damit sind die Darstellungen (13) und (14) gewonnen.

IV. In diesem letzten Teil beweisen wir die im ersten zusammengefaßt dargestellten Ungleichungen.

4.1. Wir weisen zunächst die zyklisch-symmetrische Ungleichung (6) nach. Setzen wir

$$s_n = 1\Big/\binom{k}{n}\,\Sigma_n(T_1, \ldots, T_k)\ ,$$

so gilt nach einer klassischen Ungleichung für elementarsymmetrische Funktionen[10])

$$s_{n-1}s_{n+1} \leqslant s_n^2 \qquad [0<n<k]\ .$$

Diese Ungleichung drückt auch aus, daß $\log s_n$ als Funktion der ganzzahligen Variablen n konkav ist. Mit Rücksicht auf diesen Umstand läßt sich (durch logarithmieren) unmittelbar die Beziehung

$$s_a^{b-c}s_b^{c-a}s_c^{a-b} \geqslant 1 \qquad [0 \leqslant a<b<c \leqslant k]$$

verifizieren. Wegen (13) und (4c) ergibt sich aber, daß $s_n = k^{-n}I_n$ ist. Setzt man dies in obenstehender Ungleichung ein, so erhält man (6). Hier gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn alle T_i den gleichen Wert aufweisen, d. h. wenn der Eikörper ein solcher „konstanter Trägheit" ist, insbesondere also dann, wenn es sich um eine Kugel handelt[11]).

Setzen wir in (6) $a = 0$, $b = n$, $c = n + 1$, so erhalten wir unter Beachtung von (4a) die Beziehung

$$I_n^{1/n} \geqslant I_{n+1}^{1/(n+1)}$$

und damit den Nachweis des mittleren Teils der Kettenungleichung (5).

4.2. Nun weisen wir das linksseitige Ende der Ungleichungskette (5) nach. Wir betrachten einen Eikörper Q, der aus P durch eine Minkowskische Drehsymmetrisierung hervorgeht, also in der Form

$$Q = \lambda_1P_1\times\lambda_2P_2\times\cdots\lambda_mP_m\ , \qquad [\lambda_i>0,\ \lambda_1+\cdots+\lambda_m = 1]$$

darstellbar ist, wobei die Körper P_i alle durch Drehungen aus P hervorgehen. Mit der Konkavität des Funktionals $I^{1/(k+2)}$ und der Drehinvarianz von I schließt man auf $I(Q) \geqslant I(P)$. Die Norm N bleibt bei der Drehsymmetrisierung invariant, so daß $N(Q) = N(P)$ vorgemerkt werden kann.

Nun läßt sich aber nach einem bereits an anderer Stelle bewiesenen

---

[10]) Vgl. *G. Hardy, J. E. Littlewood und G. Pólya,* Inequalities. Cambridge 1934, p. 52, Theorem **51**.

[11]) Ein Körper konstanter Trägheit hat die Eigenschaft, daß sein Trägheitsellipsoid eine Kugel ist; demzufolge sind seine planaren und axialen Trägheitsmomente aller Richtungen einander gleich. Der Zylinder mit Radius $R = 1$ und Höhe $H = \sqrt{12/(k+1)}$ ist ein Körper konstanter Trägheit.

Hilfssatz[12]) durch eine geeignete Drehsymmetrisierung mit beliebig vorgegebener Genauigkeit eine Kugel approximieren. Es gibt also bei beliebigem $\varepsilon > 0$ ein Q so, daß $d(Q, K) < \varepsilon$ wird, wo K eine mit P normgleiche Kugel und d die Eikörperdistanz bedeutet. Unter Verwendung der üblichen Stetigkeitsbetrachtungen folgt sofort $I(K) \geqslant I(P)$, was zu zeigen war.

4.3. Endlich wenden wir uns noch dem rechtsseitigen Ende der Ungleichungskette (5) zu. Aus der Definition (4) folgt unmittelbar, daß das Funktional $\Delta = I_k V^{-(k+2)}$ affininvariant ist. Ersetzen wir I_k nach Formel (13) durch die planaren Hauptträgheitsmomente, so resultiert das affininvariante Funktional $\Delta = k^k T_1, \ldots, T_k V^{-(k+2)}$. Wir können aber den Eikörper P durch eine einfache affine Abbildung in einen Eikörper P_0 konstanter Trägheit überführen, für welche alle planaren Hauptträgheitsmomente den gleichen Wert T_0 haben; wegen $kT_0 = I_0$ ergibt sich dann die Beziehung $\Delta = \Delta_0 = I_0^k V_0^{-(k+2)}$.

Nun ist $I_0 = \int r^2 dp$, wo r den Abstand des in P_0 variierenden Punktes p vom Schwerpunkt bedeutet. Bezeichnet $d\Omega$ die Richtungsdichte (Flächendifferential der $(k-1)$-dimensionalen Richtungssphäre), so läßt sich $dp = r^{k-1} dr d\Omega$ schreiben, und es resultiert $I_0 = \int\int r^{k+1} dr d\Omega$. In diesem Integral integrieren wir zunächst bei fester Richtung nach r und erzielen $I_0 = 1/(k+2) \int R^{k+2} d\Omega$, wobei R die Länge derjenigen Teilsehne bedeutet, die von einer vom Schwerpunkt auslaufenden Halbgeraden in der fest gewählten Richtung aus P_0 ausgeschnitten wird. Ein Vergleich mit der Integralformel $V_0 = 1/k \int R^k d\Omega$ führt hierauf mit Anwendung der bekannten Ungleichung für Potenzintegralmittel[13]) und mit Kenntnis des Richtungsintegrals $\int d\Omega = k\omega_k$ zur (bekannten) Ungleichung

$$I_0 \geqslant k/(k+2)\, \omega_k^{-2/k} V_0^{(k+2)/k} .$$

Wir verwenden dieses Teilresultat in der obigen Darstellung des Funktionals Δ und gewinnen $\Delta \geqslant \omega_k^{-2} [k/(k+2)]^k$. Damit resultiert aber die Ungleichung $I_k \geqslant \omega_k^{-2} [k/(k+2)]^k V^{k+2}$, und diese ist gleichbedeutend mit $I_k(P)^{1/k} \geqslant I(K^0)$, wo K^0 eine mit P volumgleiche Kugel bezeichnet. Damit ist der Nachweis abgeschlossen.

(Eingegangen den 27. September 1955.)

[12]) *H. Hadwiger*, Altes und Neues über konvexe Körper. Birkhäuser Basel 1955, p. 27. (Der Beweis ist daselbst nur dreidimensional geführt.)

[13]) Loc. cit. Fußnote 10, p. 143, Theorem 192.