Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Beiträge zur Theorie von Stützfunktionen und Radius - Die Radialflächen.

Autor: Giger, Hans

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23913

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius — Die Radialflächen

von Hans Giger, Bern

§ 1. Einleitung

In der Theorie der Raumflächen lassen sich, wie W. Scherrer in zwei Arbeiten[1]) ausgeführt hat, neben dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und der Flächennormalen $\mathfrak{N}$ mit Vorteil der Stützvektor $\mathfrak{P} = -[\mathfrak{N}, \mathfrak{x}]$ und die beiden orthogonalinvarianten Skalare, die Stützfunktion $p = -(\mathfrak{N}, \mathfrak{x})$ und der Radius $r = \sqrt{\mathfrak{x}^2}$, einführen. In den beiden Arbeiten werden die Grundgleichungen der Flächentheorie auf die Stützfunktion und den Radius, sowie auf die relativen Hauptformen und die entsprechenden Krümmungsmaße zurückgeführt. Mit der reziproken Stützfunktion und dem Radius als Parameter ergeben sich Gleichungen, die sich durch besondere Einfachheit auszeichnen. Es folgt der Satz, daß eine Fläche, deren Gaußsche Krümmung als Funktion dieser Parameter bekannt ist, nach Vorgabe eines nichtasymptotischen Streifens, eindeutig bestimmt ist.

Die Untersuchung[2]) der Flächen, für welche zwischen Stützfunktion und Radius ein funktioneller Zusammenhang besteht und bei denen daher die angegebene Parameterdarstellung entartet, zeigt, daß außer den Rotationsflächen auch gewisse Gesimsflächen eine solche Funktionalabhängigkeit aufweisen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Gesimsflächen und die Rotationsflächen zusammenfassend als Radialflächen bezeichnet.

Im Hinblick auf die Anwendung der erwähnten Grundgleichungen auf bestimmte Flächenklassen ist eine weitere Untersuchung der Radialflächen nahegelegt. W. Scherrer hat die Vermutung aufgestellt, daß die konvexen Rotationsflächen die einzigen Radial-Eiflächen darstellen. Diese Vermutung wird in der vorliegenden Arbeit für analytische Radial-

---

[1]) *W. Scherrer*, Stützfunktion und Radius I, Comment. Math. Helv. 20 (1947). – Stützfunktion und Radius II, Comment. Math. Helv. 25 (1951).

[2]) *H. Schindler*, Beiträge zur Theorie von Stützfunktion und Radius, Comment. Math. Helv. 26 (1952).

Eiflächen bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß das Katenoid die einzige Radial-Minimalfläche darstellt.

Radialflächen ergeben sich ausgehend von einer beliebigen Kegelfläche mit der Spitze im Ursprung durch folgende Konstruktion: Auf einer Tangentialebene der Kegelfläche wird eine willkürliche Kurve $\mathfrak{C}$ vorgegeben. $\mathfrak{C}$ beschreibt die allgemeinste Radialfläche, wenn die Tangentialebene auf der Kegelfläche ohne zu gleiten abrollt, diese also stets längs einer Erzeugenden berührt. Die Rotationsflächen sind in dieser Konstruktion enthalten, falls die Gerade als entartete Kegelfläche zugelassen wird. Diese anschauliche Konstruktion der Radialflächen läßt sich nach H. Schindler[2]) leicht analytisch beschreiben, indem man von einer beliebigen Raumkurve ausgeht. Wir werden uns auf diese Darstellung beziehen und sie für unsere Zwecke geeignet modifizieren. Auf Grund einer Arbeit von W. Scherrer[3]) werden wir zeigen, daß es genügt, von einer Kurve auf der Einheitskugel auszugehen.

Im folgenden Paragraphen stellen wir die für unsere Untersuchung notwendigen Hilfsmittel aus der Raumkurven- und Flächentheorie zusammen.

§ 2. Grundformeln

Es sei

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(s) \tag{1}$$

die auf die Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung einer Raumkurve. Die Ableitungen nach s bezeichnen wir mit Strichen. Die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins, die Tangente $\mathfrak{t}$, die Hauptnormale $\mathfrak{n}$ und die Binormale $\mathfrak{b}$ sind nun gegeben durch

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{y}' , \qquad \mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{y}''}{\sqrt{\mathfrak{y}''^2}} , \qquad \mathfrak{b} = \frac{[\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'']}{\sqrt{\mathfrak{y}''^2}} . \tag{2}$$

Krümmung $\varkappa$ und Torsion τ berechnen sich nach den Formeln

$$\varkappa = \sqrt{\mathfrak{y}''^2} , \qquad \tau = \frac{[\mathfrak{y}', \mathfrak{y}''] \mathfrak{y}'''}{\mathfrak{y}''^2} . \tag{3}$$

Die Frenetschen Grundformeln

$$\mathfrak{t}' = \varkappa \mathfrak{n} , \qquad \mathfrak{n}' = - \varkappa \mathfrak{t} + \tau \mathfrak{b} , \qquad \mathfrak{b}' = - \tau \mathfrak{n} \tag{4}$$

definieren die infinitesimale Bewegung des Kurvendreibeins bei einer Variation des Parameters s, welche sich als infinitesimale Drehung dar-

---

[3]) *W. Scherrer*, Über das Hauptnormalenbild einer Raumkurve, Comment. Math. Helv. 19 (1946).

stellen läßt. Achse und Winkelgeschwindigkeit der Drehung sind durch Richtung und Betrag des Darbouxschen Drehvektors

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} \equiv [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'] &= \tau \mathfrak{t} + \varkappa \mathfrak{b} \\ \sqrt{\mathfrak{d}^2} &= \sqrt{\tau^2 + \varkappa^2} \end{aligned} \tag{5}$$

gegeben, welcher in der durch die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannten rektifizierenden Ebene liegt. Durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \varkappa &= \omega \cos \varphi \ , \\ \tau &= \omega \sin \varphi \end{aligned} \qquad \omega(s) \geqq 0 \tag{6}$$

führen wir die Winkelgeschwindigkeit ω dieser Drehung und den Nutationswinkel φ ein, welcher die Drehung des Darbouxschen Vektors in der rektifizierenden Ebene beschreibt.

Im nächsten Paragraphen werden wir die Darstellung der Radialflächen nach H. Schindler unseren Zwecken entsprechend modifizieren. Vorbereitend stellen wir kurz die notwendigen Formeln aus der angeführten Arbeit [3]) von W. Scherrer zusammen. Wir berechnen vorerst die Bogenlänge v des Hauptnormalenbildes:

$$v(s) = \int_0^s \sqrt{\mathfrak{n}'^2}\, ds \ . \tag{7}$$

Für den Betrag der ersten Ableitung der Hauptnormalen ergibt sich aus (4) und (6)

$$\sqrt{\mathfrak{n}'^2} = \sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} \equiv \omega(s) \tag{8}$$

und damit die Bogenlänge v des Hauptnormalenbildes

$$v(s) = \int_0^s \omega(s)\, ds \ . \tag{9}$$

Wir setzen voraus, daß die Krümmung $\varkappa$ und damit die Winkelgeschwindigkeit ω der vorgegebenen Raumkurve nicht identisch verschwinde und denken uns die Parameterdarstellung (1) auf Grund von (9) auf die Bogenlänge v des Hauptnormalenbildes bezogen. Aus (9) ergibt sich die Identität

$$\frac{d}{dv} = \frac{1}{\omega(s)} \frac{d}{ds} \ . \tag{10}$$

Damit ergeben sich aus (4) und (6) die auf die Bogenlänge v des Hauptnormalenbildes bezogenen Frenetschen Formeln

$$\frac{d\mathfrak{t}}{dv} = \mathfrak{n} \cos \varphi \ , \quad \frac{d\mathfrak{n}}{dv} = -\mathfrak{t} \cos \varphi + \mathfrak{b} \sin \varphi \ , \quad \frac{d\mathfrak{b}}{dv} = -\mathfrak{n} \sin \varphi \ . \tag{11}$$

An Stelle von (5) führen wir den normierten Darbouxschen Drehvektor $\mathfrak{s}$ ein:

$$\mathfrak{s} \equiv \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] = \mathfrak{t} \sin \varphi + \mathfrak{b} \cos \varphi \ . \tag{12}$$

Die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ liegen mit der ersten Ableitung $\mathfrak{n}'$ der Hauptnormalen und dem normierten Drehvektor in der rektifizierenden Ebene und lassen sich aus diesen Vektoren linear kombinieren. Aus (12) und der zweiten Gleichung (11) ergeben sich für $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ die Darstellungen

$$\mathfrak{t} = -\frac{d\mathfrak{n}}{dv} \cos \varphi + \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] \sin \varphi \ , \qquad \mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{n}}{dv} \sin \varphi + \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] \cos \varphi \ . \tag{13}$$

Schließlich bilden wir noch die Ableitungsgleichungen der orthogonalen und normierten Vektoren

$$\left\{\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}, \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right]\right\} ,$$

indem wir ihre ersten Ableitungen aus den Vektoren dieses rechtsgeschraubten Dreibeins kombinieren. Aus (11) und (12) erhält man nach leichter Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv}(\mathfrak{n}) &= \qquad\qquad \frac{d\mathfrak{n}}{dv} \\ \frac{d}{dv}\left(\frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right) &= -\mathfrak{n} \qquad\qquad + \frac{d\varphi}{dv}\left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] \\ \frac{d}{dv}\left(\left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right]\right) &= \qquad -\frac{d\varphi}{dv}\frac{d\mathfrak{n}}{dv} \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung (14) skalar mit dem normierten Drehvektor (12), so folgt

$$\frac{d\varphi}{dv} = \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] \frac{d^2\mathfrak{n}}{dv^2} \ , \tag{15}$$

und es ergibt sich

$$\varphi(v) - \varphi(0) = \int_0^v \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] \frac{d^2\mathfrak{n}}{dv^2} dv \ . \tag{16}$$

Wegen

$$(\mathfrak{n}(v))^2 \equiv 1 \tag{17}$$

ist das Hauptnormalenbild eine Kurve auf der Einheitskugel. In der Konstruktion der Radialflächen nach H. Schindler treten nur die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ auf. Diese Vektoren lassen sich aber ausgehend von einer

beliebigen Kurve $\mathfrak{n}(v)$ auf der Einheitskugel [4]), die als Funktion ihrer Bogenlänge vorgegeben sei, berechnen. Aus (16) ergibt sich zuerst der Nutationswinkel φ, und nach (13) lassen sich die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ linear kombinieren. Ihre ersten Ableitungen ergeben sich aus (11).

In der Untersuchung der Radialflächen werden wir von der dreimal stetig differenzierbaren Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{18}$$

des Ortsvektors der Fläche ausgehen. Der Betrag des Ortsvektors oder Radius ist gegeben durch

$$r = \sqrt{\mathfrak{x}^2} \; . \tag{19}$$

Die Flächennormale und die Stützfunktion werden durch

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{\sqrt{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]^2}} \tag{20}$$

und

$$p = -(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}) \tag{21}$$

definiert. Die erste Hauptform der Flächentheorie definieren wir in der üblichen Weise:

$$\begin{gathered} \mathrm{I} \equiv E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\ E = x_u^2 \qquad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \qquad G = \mathfrak{x}_v^2 \\ \sqrt{\Delta} = \sqrt{EG - F^2}\;; \qquad do = \sqrt{\Delta}\,du\,dv \; . \end{gathered} \tag{22}$$

do bezeichnet das Flächenelement.

Die zweite Hauptform ist definiert durch

$$\begin{gathered} \mathrm{II} \equiv L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \\ L = -\mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_u \quad M = -\mathfrak{N}_u \mathfrak{x}_v = -\mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_u \quad N = -\mathfrak{N}_v \mathfrak{x}_v \; . \end{gathered} \tag{23}$$

Die Hauptkrümmungen der Fläche bezeichnen wir mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Die Gaußsche und die mittlere Krümmung sind nun gegeben durch

$$\begin{aligned} K &= \varkappa_1 \cdot \varkappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}\,, \\ H &= \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} = \frac{LG - 2FM + NE}{2(EG - F^2)}\;. \end{aligned} \tag{24}$$

---

[4]) Vorausgesetzt wird zweimal stetige Differenzierbarkeit.

Für Krümmungslinienparameter $F \equiv M \equiv 0$ gelten nach Olinde Rodrigues die Vektorrelationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= -\varkappa_1 \mathfrak{x}_u \,, \\ \mathfrak{N}_v &= -\varkappa_2 \mathfrak{x}_v \,. \end{aligned} \tag{25}$$

§ 3. Radialflächen

Zur Konstruktion einer Radialfläche kann man nach H. Schindler von einer beliebigen Raumkurve ausgehen, die im Sinne von (1) als Funktion ihrer Bogenlänge s gegeben sei. Man berechnet nach (2) ihr begleitendes Dreibein, verschiebt die Tangente $\mathfrak{t}$ und die Binormale $\mathfrak{b}$ in den Ursprung und wählt in der durch diese Vektoren aufgespannten Ebene eine willkürliche Kurve $\mathfrak{C}$. Ist deren Parameterdarstellung in rechtwinkligen Koordinaten $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ gegeben, so läßt sich der Ortsvektor (18) der Radialfläche durch

$$\mathfrak{x}(u, s) = \alpha(u)\mathfrak{b}(s) + \beta(u)\mathfrak{t}(s) \tag{26}$$

darstellen. Wir modifizieren diese Konstruktion, indem wir von einer beliebigen Kurve $\mathfrak{n}(v)$ (17) auf der Einheitskugel ausgehen, die als Funktion ihrer Bogenlänge v gegeben sei. Nach (16) berechnen wir den Nutationswinkel $\varphi(v)$ und kombinieren die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ gemäß (13). An Stelle von (26) erhalten wir die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(u, v) = \alpha(u)\mathfrak{b}(v) + \beta(u)\mathfrak{t}(v) \,. \tag{27}$$

Die ebenen u-Linien ($v =$ konstant) bezeichnen wir im folgenden als Meridianlinien, die v-Linien ($u =$ konstant) als Breitenlinien. Die durch die Vektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b}$ aufgespannte Ebene nennen wir kurz Meridianebene.

Wir schließen die Meridianlinien mit identisch verschwindender Krümmung und damit die Radialtorsen, wie sich zeigen wird [5]), von den folgenden Betrachtungen aus. Die Meridianlinie $\mathfrak{C}$ [6]) sei eine stetige und stetig gekrümmte Kurve. Wir fassen $\mathfrak{C}$ als Enveloppe ihrer in der Hesseschen Normalform geschriebenen Tangenten

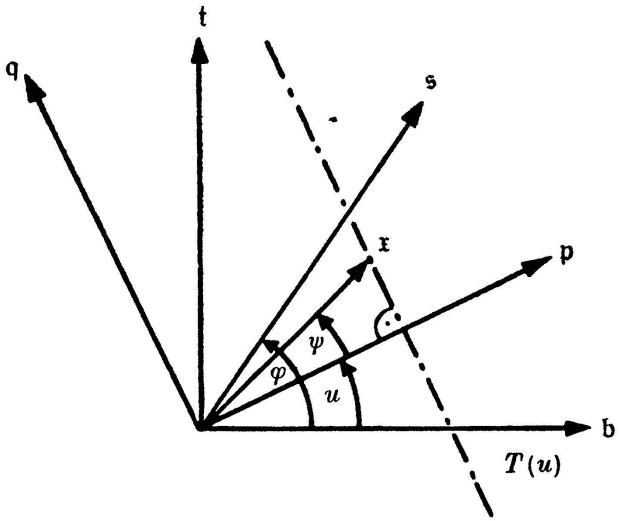
$$T(u) \equiv \alpha \cos u + \beta \sin u - p(u) = 0$$

auf.

---

[5]) Die Krümmung der Meridianlinie ist mit der ersten Hauptkrümmung $\varkappa_1$ identisch. Vgl. (52), (49).

[6]) $\mathfrak{C}$ wird im vierten Paragraphen als regulär und konvex vorausgesetzt.



Aus dem Gleichungssystem $T(u) = 0$ und $\dot{T}(u) = 0$ [7]) ergeben sich die Koordinaten des Berührungspunktes und damit die Parameterdarstellung der Meridianlinie:

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= p(u) \cos u - \dot{p}(u) \sin u \ , \\ \beta(u) &= p(u) \sin u + \dot{p}(u) \cos u \ . \end{aligned} \tag{28}$$

Die Stützgröße p ist unter den gemachten Voraussetzungen stetig und zweimal stetig differenzierbar. Nach einer bekannten Formel der Differentialrechnung ist

$$\varrho = p + \ddot{p} \tag{29}$$

der Krümmungsradius der Kurve mit der Parameterdarstellung (28). Setzen wir die Werte aus (28) in (27) ein, so erhalten wir vorerst

$$\mathfrak{x}(u, v) = p(\mathfrak{b} \cos u + \mathfrak{t} \sin u) + \dot{p}(-\mathfrak{b} \sin u + \mathfrak{t} \cos u) \ . \tag{30}$$

Wir führen zwei neue Vektoren ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\equiv \mathfrak{b} \cos u + \mathfrak{t} \sin u \ , \\ \mathfrak{q} &\equiv -\mathfrak{b} \sin u + \mathfrak{t} \cos u \ , \end{aligned} \tag{31}$$

die mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{t}$ in der Meridianebene liegen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \mathfrak{p} \cos u - \mathfrak{q} \sin u \ , \\ \mathfrak{t} &= \mathfrak{p} \sin u + \mathfrak{q} \cos u \ . \end{aligned} \tag{32}$$

Statt den Ortsvektor der Radialflächen im Dreibein $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$ darzustellen, empfiehlt es sich, die Vektoren $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}\}$ einzuführen. Diese Vektoren bilden ebenfalls ein rechtsgeschraubtes und orthogonales Dreibein, welches die Grundlage der weiteren Entwicklung bilden soll. Damit

[7]) Die partiellen Ableitungen nach dem Parameter u werden im folgenden durch Punkte gekennzeichnet.

erhalten wir aus (30) und (31) für den Ortsvektor die Darstellung

$$\mathfrak{x}(u, v) = p\mathfrak{p} + \dot{p}\mathfrak{q} \ . \tag{33}$$

Für den Radius ergibt sich nach (19) aus (33)

$$r(u) = \sqrt{p^2 + \dot{p}^2} \ . \tag{34}$$

Die bei einer Variation des Parameters v auftretende infinitesimale Bewegung des Systems $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}\}$ läßt sich als Drehung um den normierten Darbouxschen Drehvektor (12) auffassen. Führt man die Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ nach (32) in (12) ein, so erhält man mit

$$\mathfrak{s}(v) = \left[\mathfrak{n}, \frac{d\mathfrak{n}}{dv}\right] = \mathfrak{p} \cos(\varphi - u) + \mathfrak{q} \sin(\varphi - u) \tag{35}$$

die Parameterdarstellung des Drehvektors im neuen System. Wir bilden jetzt die Ableitungsgleichungen der Vektoren $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}\}$, indem wir ihre ersten Ableitungen aus den Vektoren dieses Dreibeins kombinieren. Die partiellen Ableitungen nach der Bogenlänge v der Kugelkurve $\mathfrak{n}(v)$ ergeben sich aus (31) und der Formelgruppe (11):

$$\boxed{\mathfrak{q}_u = -\mathfrak{p} \ , \qquad \mathfrak{n}_u = 0 \ , \qquad \mathfrak{p}_u = \mathfrak{q}} \tag{36}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{q}_v &= \qquad\qquad\qquad + \mathfrak{n} \cos(\varphi - u) \\ \mathfrak{n}_v &= -\mathfrak{q} \cos(\varphi - u) \qquad\qquad + \mathfrak{p} \sin(\varphi - u) \\ \mathfrak{p}_v &= \qquad\qquad\qquad - \mathfrak{n} \sin(\varphi - u) \end{aligned}} \tag{37}$$

Die Formelgruppe (36) bzw. (37) beschreibt die infinitesimale Bewegung des Systems $\{\mathfrak{q}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}\}$ bei einer Variation des Parameters u bzw. v.

Jetzt berechnen wir mit (36) und (37) die partiellen Ableitungen des Ortsvektors (33), wobei wir nach (29) den Krümmungsradius der Meridianlinie einführen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u &= \varrho\mathfrak{q} \ , \\ \mathfrak{x}_v &= -\{p \sin(\varphi - u) - \dot{p} \cos(\varphi - u)\}\,\mathfrak{n} \ . \end{aligned} \tag{38}$$

Wie man durch Einsetzen der Definitionen (31), (33) und (35) leicht nachrechnet, gelten die Vektorrelationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u &= \varrho\,[\mathfrak{n}, \mathfrak{p}] \ , \\ \mathfrak{x}_v &= \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{x}] \ , \end{aligned} \tag{39}$$

welche die durch (36) bzw. (37) beschriebene infinitesimale Bewegung als Drehung um die durch $\mathfrak{n}$ bzw. $\mathfrak{s}$ festgelegte Momentanachse charakterisieren. Die Winkelgeschwindigkeiten beider Drehungen sind gleich eins.

Der Vergleich von (38) mit (34) gibt uns Anlaß, durch den Ansatz

$$\begin{aligned} p(u) &= r(u)\cdot\cos\psi(u) \ , \\ \dot{p}(u) &= r(u)\cdot\sin\psi(u) \end{aligned} \tag{40}$$

den Radius r und den Winkel ψ zwischen dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und dem Vektor $\mathfrak{p}$ einzuführen.

Damit erhalten wir für den Ortsvektor (33) und seine partiellen Ableitungen (38) die Darstellungen

$$\mathfrak{x}(u, v) = r\,\{\mathfrak{p}\cos\psi + \mathfrak{q}\sin\psi\} \ , \tag{41}$$

$$\mathfrak{x}_u = \varrho\,\mathfrak{q} \ , \qquad \mathfrak{x}_v = -\,r\,\mathfrak{n}\sin(\varphi - u - \psi) \ . \tag{42}$$

Nun rechnen wir noch (28) und (29) auf die Funktionen r und ψ um. Wir setzen (40) in (28) ein und erhalten mit

$$\alpha(u) = r\cos(u + \psi) \ , \qquad \beta(u) = r\sin(u + \psi) \tag{43}$$

die Polarkoordinaten der Meridianlinie im System $\{\mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{b}\}$. Bildet man die erste Ableitung des Radiusquadrats (34) und berücksichtigt (29) und (40), so ergibt sich für $\dot{p}(u) \not\equiv 0$ mit

$$\varrho = \frac{\dot{r}}{\sin\psi} \ ; \qquad \{\dot{p}(u) \not\equiv 0\} \tag{44}$$

die Darstellung des Krümmungsradius der Meridianlinie.

Schließlich gehen wir noch auf eine für die weitere Diskussion wichtige Feststellung ein. Nach unseren Voraussetzungen gilt

$$1 + \dot{\psi} \not\equiv 0 \ ; \tag{45}$$

denn aus $1 + \dot{\psi} \equiv 0$ folgt, daß $u + \psi =$ konstant und damit nach (43) $\operatorname{tang}(u + \psi) = \dfrac{\beta(u)}{\alpha(u)} =$ konstant ist. Entgegen unserer Voraussetzung wäre die Meridianlinie eine Gerade.

Jetzt berechnen wir auf Grund von (38) und der Definition (20) die Flächennormale, über deren Orientierung wir sinngemäß so verfügen, daß der Radius nach (40) nicht negativ ist:

$$\mathfrak{N} = -\,\mathfrak{p} \ . \tag{46}$$

Aus (33) und (46) ergibt sich, daß die durch (21) definierte Stützfunktion

mit der in (28) eingeführten Stützgröße übereinstimmt:

$$p = -(\mathfrak{N}, \mathfrak{x}) \equiv p(u) \ . \tag{47}$$

Schließlich berechnen wir noch die partiellen Ableitungen der Flächennormalen (46), wobei wieder (36) und (37) Verwendung finden:

$$\mathfrak{N}_u = -\mathfrak{q} \ , \qquad \mathfrak{N}_v = \mathfrak{n} \sin(\varphi - u) \ . \tag{48}$$

Kombinieren wir (48) mit (38) und (42), so ergeben sich die Rodriguesschen Formeln (25):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{N}_u &= -\varkappa_1 \mathfrak{x}_u \\ \mathfrak{N}_v &= -\varkappa_2 \mathfrak{x}_v \\ \varkappa_1 &= \frac{1}{\varrho} \\ \varkappa_2 &= \frac{\sin(\varphi - u)}{p \sin(\varphi - u) - \dot{p} \cos(\varphi - u)} = \frac{\sin(\varphi - u)}{r \sin(\varphi - u - \psi)} \end{aligned}} \tag{49}$$

Die Meridian- und Breitenlinien sind die Krümmungslinien der Radialflächen.

§ 4. Radialeiflächen

Die in der Einleitung angegebene, von W. Scherrer aufgestellte Vermutung läßt sich wie folgt formulieren: Eine reguläre, analytische Eifläche, für welche zwischen Stützfunktion und Radius ein funktioneller Zusammenhang besteht, ist notwendigerweise eine Rotationsfläche. Zum Beweis dieses Satzes berechnen wir aus (39) und (42) vorbereitend die Koeffizienten der ersten Hauptform (22):

$$\begin{aligned} E &= \mathfrak{x}_u^2 &&= \varrho^2 [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}]^2 &&= \varrho^2 \\ F &= \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v &&= 0 &&= 0 \\ G &= \mathfrak{x}_v^2 &&= [\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]^2 &&= r^2 \sin^2(\varphi - u - \psi) \ ; \end{aligned} \tag{50}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\varrho^2 [\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]^2} = \sqrt{\varrho^2 r^2 \sin^2(\varphi - u - \psi)} \ . \tag{51}$$

Auf Grund der Definition (24) berechnen wir aus (49) die Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{\sin(\varphi - u)}{\varrho \cdot r \sin(\varphi - u - \psi)} \ . \tag{52}$$

Bekanntlich entartet das Parameternetz auf einer Fläche in denjenigen Punkten, in welchen die Determinante $\sqrt{\Delta}$ verschwindet. Wenn der

Krümmungsradius ϱ der Meridianlinie für alle Werte des Parameters u von Null verschieden ist, verschwindet $[\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]$ und damit $\sqrt{\Delta}$ für festes v dann und nur dann, wenn der zugehörige Meridian mit der durch den Vektor $\mathfrak{s}$ festgelegten Graden einen Punkt gemein hat. Diese Gerade ist nach (39) Momentanachse der durch (37) definierten infinitesimalen Drehung.

Nun unterscheiden wir drei Fälle:

1. Die Radialfläche habe für irgendeinen Parameterwert $v = v_0$ mit der durch $\mathfrak{s}(v_0)$ bestimmten Drehachse keinen Punkt gemein. Dies bedeutet, daß $[\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]$ und damit nach (51) auch die Determinante $\sqrt{\Delta}$ für $v = v_0$ und alle u von Null verschieden sind, falls der Krümmungsradius ϱ der Meridianlinie nirgends verschwindet. Der Meridian $v = v_0$ stimmt aber als reguläre Krümmungslinie mit der von der Meridianebene und der Eifläche bestimmten Schnitteilinie überein. Aus Gründen der Stetigkeit gelten dieselben Feststellungen für eine genügend kleine Umgebung $|v - v_0| < \varepsilon$. Die kongruenten Meridianlinien und die Breitenlinien bilden daher, für alle u und alle zu v_0 hinreichend benachbarten Parameterwerte von v, ein reguläres Kurvennetz. Nach (22) ist das Flächenelement der Radialfläche durch $do = \sqrt{\Delta}\, du dv$ gegeben. Wir integrieren die Gaußsche Krümmung über die ausgewählte Umgebung $\mathfrak{A}$ der Meridianlinie $v = v_0$. Aus (51) und (52) ergibt sich bei positivem Flächenelement sukzessive

$$\int_{\mathfrak{A}} K do = \iint_{\mathfrak{A}} K \sqrt{\Delta}\, du dv = \iint_{\mathfrak{A}} \sin(\varphi - u) du dv \ ,$$

$$\int_{\mathfrak{A}} K do = \int_{v_0-\varepsilon}^{v_0+\varepsilon} \{ \oint \sin(\varphi - u) du \} dv = \int_{v_0-\varepsilon}^{v_0+\varepsilon} \{ - \cos(\varphi - u) \,|_a^e \} dv = 0 \ .$$

Dieses Resultat steht im Widerspruch zur Eigenschaft $K > 0$ der Eiflächen. Der Fall 1 kann daher nicht eintreten.

2. Die Radialeifläche wird für $v = v_0$ von der durch $\mathfrak{s}(v_0)$ festgelegten Drehachse geschnitten. Dann gilt dasselbe für eine hinreichend kleine Umgebung $|v - v_0| < \varepsilon$. Der Meridian $v = v_0$ stimmt als reguläre Kurve mit der durch die Meridianebene und die Eifläche bestimmten Schnitteilinie überein und wird von der Drehachse in zwei Punkten geschnitten. Die zu den Schnittpunkten $[\mathfrak{s}, \mathfrak{x}] = 0$ gehörigen Parameterwerte $u = u_0$ und $u = u_1$ genügen nach (51) der Gleichung

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]^2 = r^2 \sin^2(\varphi - u - \psi) = 0 \ .$$

Da der Meridian $v = v_0$ als Eilinie mit der Drehachse mindestens einen

vom Ursprung verschiedenen Punkt gemein hat, darf man weiter voraussetzen, daß $r(u)$ in einer genügend kleinen Umgebung $|u - u_0| < \delta(v_0)$ von Null verschieden sei. Aus Gründen der Stetigkeit gilt diese Feststellung entsprechend für alle zu v_0 hinreichend benachbarten Parameterwerte von v. In der Umgebung $|v - v_0| < \varepsilon$ werden alle Meridiane von der Drehachse getroffen. Die zu u_0 und v_0 hinreichend benachbarten Parameterwerte der Schnittpunkte müssen daher der Gleichung

$$\sin(\varphi - u - \psi) = 0$$

oder

$$\Phi(u, v) = \varphi(v) - u - \psi(u) - k\pi = 0$$

genügen. Die Funktion $\Phi(u, v)$ ist in einer gewissen Umgebung des Schnittpunkts (u_0, v_0) definiert und besitzt dort die stetigen partiellen Ableitungen

$$\Phi_u = -(1 + \dot{\psi}) ,$$

$$\Phi_v = \frac{d\varphi}{dv} .$$

Da die Krümmung der Meridianlinie nicht verschwindet, ist Φ_u nach (45) von Null verschieden. Nach den Sätzen über implizite Funktionen wird die Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ durch die Funktion $u = u(v)$ mit $u_0 = u(v_0)$ identisch erfüllt.

a) Es verschwinde $\frac{d\varphi}{dv}$ nicht identisch. Dann gilt dasselbe für

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\Phi_v}{\Phi_u} = -\frac{d\varphi}{dv} \cdot \frac{1}{1 + \dot{\psi}} ;$$

$u = u(v)$ ist daher nicht konstant.

Die Radialfläche wird von der Drehachse längs der Kurve $\mathfrak{x}[u(v), v]$ geschnitten. In den Schnittpunkten verschwindet der Nenner der Gaußschen Krümmung (52). Wegen der vorausgesetzten Regularität muß auch der Zähler von (52) identisch verschwinden, und die beiden Gleichungen

$$\sin\{\varphi(v) - u(v)\} = 0 , \qquad \sin\{\varphi(v) - u(v) - \psi[u(v)]\} = 0$$

sind für alle zu $v = v_0$ hinreichend benachbarten Parameterwerte von v erfüllt. Dies ist nur möglich, wenn ψ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Nach (40) folgt dann $\dot{p}[u(v)] = 0$ und wegen $\frac{du}{dv} \not\equiv 0$, daß die Stützfunktion und damit nach (29) die Krümmung der Meridianlinie für alle zu u_0 hinreichend benachbarten Parameterwerte von u konstant ist.

Wegen der vorausgesetzten Analytizität der Eifläche gilt diese Feststellung für alle Parameterwerte von u. Die Meridianlinie ist in diesem Fall ein Kreis mit dem Zentrum im Ursprung des Raumes und die Radialfläche nach (33) als Kugelfläche eine spezielle Rotationsfläche.

b) Es verschwinde $\frac{d\varphi}{dv}$ identisch. Unter Verwendung von (37) bilden wir die Ableitung des Drehvektors (35):

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(v) &= \mathfrak{p}\cos(\varphi - u) + \mathfrak{q}\sin(\varphi - u)\ , \\ \frac{d\mathfrak{s}}{dv} &= \frac{d\varphi}{dv}\{-\mathfrak{p}\sin(\varphi - u) + \mathfrak{q}\cos(\varphi - u)\}\ . \end{aligned} \tag{53}$$

Wegen $\frac{d\varphi}{dv} \equiv 0$ ist $\mathfrak{s}$ konstant.

Daher folgt mit (39) $(\mathfrak{x}, \mathfrak{s})_v = (\mathfrak{x}, \mathfrak{s}_v) \equiv 0$. Nach (34) gilt weiter $(\mathfrak{x}^2)_v = (r^2)_v \equiv 0$. Bei unserer Parameterwahl sind durch diese beiden Bedingungen die Rotationsflächen mit der Drehachse $\mathfrak{s}$ charakterisiert. Die der Konstruktion zugrunde liegende Kurve auf der Einheitskugel fällt nach (14) in diesem Fall mit einem Großkreis zusammen.

3. Schließlich betrachten wir noch den Fall, daß die durch $\mathfrak{s}(v_0)$ festgelegte Drehachse den Meridian $v = v_0$ im Punkte $u = u_0$ berührt. Die Parameterwerte (u_0, v_0) genügen dann nach (51), (38) und (35) den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} [\mathfrak{s}, \mathfrak{x}]^2 &\equiv r^2(u_0)\sin^2\{\varphi(v_0) - u_0 - \psi(u_0)\} &= 0 \\ [\mathfrak{s}, \mathfrak{x}_u]^2 &\equiv \varrho^2(u_0)\cos^2\{\varphi(v_0) - u_0\} &= 0\ , \end{aligned}$$

da der Ortsvektor $\mathfrak{x}$ und die Tangente T an die Meridianlinie mit der Drehachse zusammenfallen. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\sin\{\varphi(v_0) - u_0\} = \pm 1\ .$$

Der Zähler in (52) ist bei verschwindendem Nenner von Null verschieden und daher die Gaußsche Krümmung im Berührungspunkt unendlich. Dieser Fall kann wegen der vorausgesetzten Regularität nicht eintreten.

Damit ist bewiesen, daß eine reguläre, analytische Radialeifläche Rotationssymmetrie aufweist.

§ 5. Anhang

Es lassen sich für die Radialflächen (27) auch Bedingungen im kleinen angeben, denen nur die Rotationsflächen genügen. Wir zeigen, daß die Radialflächen konstanter mittlerer Krümmung Rotationsflächen sind.

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß das Katenoid die einzige Radialminimalfläche darstellt.

Aus (49) ergibt sich auf Grund der Definition (24) die Darstellung der mittleren Krümmung

$$2H = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r} \frac{\sin(\varphi - u)}{\sin(\varphi - u - \psi)} \,. \tag{54}$$

Für konstantes H ist

$$\chi \equiv \left(2H - \frac{1}{\varrho}\right) r$$

eine Funktion von u allein. Aus

$$\chi \equiv \frac{\sin(\varphi - u)}{\sin(\varphi - u - \psi)}$$

ergibt sich nach einfacher Umformung die Identität

$$\Phi(u) \sin\varphi \equiv \Psi(u) \cos\varphi \,,$$

$$\Phi(u) = \chi \cos(u + \psi) - \cos u \,, \qquad \Psi(u) = \chi \sin(u + \psi) - \sin u \,. \tag{55}$$

Verschwinden Φ und Ψ identisch, so folgt mit (55) aus

$$\chi \cos(u + \psi) \equiv \cos u \,,$$

$$\chi \sin(u + \psi) \equiv \sin u \,,$$

daß $\chi^2 \equiv 1$ und ψ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Nach (40) ist daher $\dot{p}(u) \equiv 0$ und damit die Stützfunktion konstant. Die Meridianlinie ist daher ein Kreis mit dem Zentrum im Ursprung und die Radialfläche, bei jeder Wahl der Kurve $\mathfrak{n}(v)$ auf der Einheitskugel, nach (33) eine Kugelfläche.

Verschwinden Φ und Ψ nicht gleichzeitig identisch, und ist etwa $\Psi(u) \not\equiv 0$, so folgt aus (55) nach Separation der Variabeln

$$\operatorname{cotg} \varphi(v) \equiv \frac{\Phi(u)}{\Psi(u)} = \text{konstant} \,.$$

Daher gilt $\dfrac{d\varphi}{dv} \equiv 0$. Nach (53) ist die Radialfläche in diesem Fall eine Rotationsfläche.

Zum Schluß untersuchen wir die Nabelpunkte auf den Radialflächen. Wir zeigen, daß Nabellinien auftreten, die jedenfalls bei Radialflächen ohne Rotationssymmetrie nicht dem Parameternetz der Krümmungslinien angehören.

Die Stützgröße der Meridianlinie $\mathfrak{C}$ sei dreimal stetig differenzierbar; dann ist ihr Krümmungsradius nach (29) stetig differenzierbar. Die Parameterdarstellung der Evolute eines Meridians $v = v_0$ ist mit (33) und (29) gegeben durch

$$\bar{\mathfrak{x}}(u, v_0) = \mathfrak{x} - \varrho \mathfrak{p} = - \ddot{p} \mathfrak{p} + \dot{p} \mathfrak{q} \ . \tag{56}$$

Multiplizieren wir den Vektor $\bar{\mathfrak{x}}$ vektoriell mit dem normierten Drehvektor (35), so ergibt sich aus (56)

$$[\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{x}}] = \{\ddot{p} \sin(\varphi - u) + \dot{p} \cos(\varphi - u)\} \mathfrak{n} \ . \tag{57}$$

Für Nabelpunkte erhält man nach (49) wegen $\varkappa_1(u) = \varkappa_2(u, v)$ die Bedingung

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &\equiv (p - \varrho) \sin(\varphi - u) - \dot{p} \cos(\varphi - u) = 0 \ , \\ \Phi(u, v) &\equiv - \{\ddot{p} \sin(\varphi - u) + \dot{p} \cos(\varphi - u)\} = 0 \ , \end{aligned} \tag{58}$$

welche nur für Meridiankreise, die zum Ursprung konzentrisch sind, identisch erfüllt ist. Wir bilden die partiellen Ableitungen der durch (58) definierten Funktion. Berücksichtigt man (29), so folgt

$$\begin{aligned} \Phi_u &= - \dot{\varrho} \sin(\varphi - u) \ , \\ \Phi_v &= \frac{d\varphi}{dv} \{- \ddot{p} \cos(\varphi - u) + \dot{p} \sin(\varphi - u)\} \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Die Evolute $v = v_0$ (56) werde von der Drehachse $\mathfrak{s}(v_0)$ im Punkt $u = u_0$ geschnitten. Dann werden die Evoluten aller Meridiane in einer genügend kleinen Umgebung $|v - v_0| < \varepsilon$ von der Drehachse geschnitten. Die zu den Schnittpunkten gehörigen Parameterwerte genügen der Gleichung (58), da mit $[\mathfrak{s}, \bar{\mathfrak{x}}] = 0$ die Klammer auf der rechten Seite von (57) verschwindet. Die den Schnittpunkten entsprechenden Punkte auf der Radialfläche sind also Nabelpunkte und umgekehrt.

Nach (59) verschwindet $\Phi_u(u, v)$ nur für Kreise identisch. Schließen wir die Kreise als Meridianlinien aus, so wird die Gleichung (58) nach den Sätzen über implizite Funktionen durch $u = u(v)$ mit $u_0 = u(v_0)$ identisch erfüllt. $\mathfrak{x}[u(v), v]$ beschreibt die Nabellinie durch den Punkt (u_0, v_0) auf der Radialfläche.

Für die erste Ableitung der Funktion $u = u(v)$ ergibt sich nach (59), $\Phi[u(v), v] \equiv 0$,

$$\frac{du}{dv} = \frac{d\varphi}{dv} \frac{\dot{p}}{\dot{\varrho} \sin^2(\varphi - u)} \ . \tag{60}$$

Da die Kreise allgemein ausgeschlossen wurden, verschwindet $\frac{du}{dv}$ nur mit $\frac{d\varphi}{dv}$ identisch. Nach (53) ist die Radialfläche in diesem Fall eine Rotationsfläche. Bei Radialflächen ohne Rotationssymmetrie ist daher $u = u(v)$ nicht konstant, und die Nabellinie fällt nicht mit einer Breitenlinie zusammen.

Aus den Codazzischen Gleichungen der Flächentheorie folgt, daß eine Nabellinie, die dem orthogonalen Netz der Krümmungslinien angehört, auf einer Kugel oder Ebene verläuft. Die Nabellinien auf den Radialflächen genügen der Nebenbedingung des Satzes im allgemeinen nicht, und es lassen sich Radialflächen angeben, deren Nabellinien nicht auf einer Kugel oder Ebene verlaufen.

(Eingegangen den 27. April 1955