Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Sur la théorie des demi-groupes.

Autor: Thierrin, Gabriel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23910

Sur la théorie des demi-groupes

par Gabriel Thierrin, Surpierre (Fribourg)

Dédié à Monsieur S. Bays pour son soixante-dixième anniversaire

Par *demi-groupe*, nous entendons un ensemble dans lequel est définie une opération univoque associative.

Les groupes sont un cas particulier des demi-groupes et il existe plusieurs manières de caractériser les groupes à partir des demi-groupes. Nous avons antérieurement utilisé les notions de régularité et de simplifiabilité des relations d'équivalence pour effectuer une telle caractérisation ([8], [10], [11]). Dans la première partie de ce travail, nous poursuivons l'étude des propriétés caractéristiques des groupes au moyen des équivalences, mais en utilisant cette fois certaines catégories d'équivalences pouvant être définies dans un demi-groupe.

La seconde partie est consacrée aux demi-groupes D tels que les demi-groupes D^2 sont des demi-groupes simples d'un côté ou des deux côtés. Des conditions nécessaires et suffisantes sont données pour qu'il en soit ainsi, et cela en utilisant les notions d'idéaux larges et d'idéaux fermés ([7]). En relation avec cette question, nous étudions les demi-groupes D vérifiant la relation $xD = x^2D$ ou $DxD = Dx^2D$ pour tout $x \in D$.

Quelques théorèmes de décomposition d'un demi-groupe en réunion de demi-groupes disjoints possédant certaines propriétés font l'objet de la dernière partie de ce travail.

1. Equivalences dans les demi-groupes et propriétés caractéristiques des groupes

Rappelons les définitions de quelques équivalences associées à un complexe quelconque H d'un demi-groupe D. Le quotient à droite ou résiduel à droite $H .\cdot a$ de H par l'élément a est l'ensemble des éléments x de D tels que $ax \in H$. L'équivalence principale à droite R_H (cf. [4], [5]) est définie par

$$a \equiv b(R_H) \rightleftarrows H .\cdot a = H .\cdot b \ .$$

Le composé à droite F_a de H par a est l'ensemble des éléments x tels que

$a \in Hx$ (cf. [9]). L'équivalence θ_H (cf. [8]) est définie par

$$a \equiv b(\theta_H) \rightleftarrows F_a = F_b \ .$$

L'équivalence φ_H est définie par

$$a \equiv b(\varphi_H) \rightleftarrows Ha = Hb \ .$$

On a les définitions symétriques des quotients à gauche, des composés à gauche et des équivalences ${}_HR$, ${}_H\theta$, ${}_H\varphi$. Une équivalence R est régulière à droite, si la relation $a \equiv b(R)$ entraîne $ax \equiv bx(R)$ pour tout $x \in D$. Une équivalence S est simplifiable à droite, si la relation $ay \equiv by(S)$ entraîne $a \equiv b(S)$. On définit d'une manière analogue une équivalence régulière à gauche ou simplifiable à gauche.

Théorème 1. *Pour qu'un demi-groupe D soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences régulières à droite et que ses équivalences régulières à gauche soient respectivement des équivalences θ_H et ${}_K\theta$.*

La condition est nécessaire. Si D est un groupe et si R est une équivalence régulière à droite, la classe H mod R contenant l'élément neutre de D est un sous-groupe de D. Le composé à droite F_a de H par a est la classe A mod R contenant a. En effet, si $x \in F_a$, on a $a \in Hx$. D'où $a \equiv x(R)$ et $F_a \subseteq A$. Inversement, si $y \equiv a(R)$, $a \in Hy$, c'est-à-dire $y \in F_a$. Donc $F_a = A$. On en déduit facilement que $R = \theta_H$. La démonstration est symétrique pour une équivalence régulière à gauche.

La condition est suffisante. Soit U l'équivalence universelle. Comme U est régulière à droite, il existe un complexe H de D tel que l'on ait $U = \theta_H$. Soit a un élément quelconque de D. Si $x \in Ha$, $a \in F_x$, F_x étant le composé à droite de H par x, et $F_x = F_y$ pour tout $y \in D$. D'où $a \in F_y$ et $y \in Ha$, c'est-à-dire $D \subseteq Ha \subseteq Da$. Par conséquent, $D = Da$ pour tout $a \in D$. Comme U est aussi régulière à gauche, on montre de même que $aD = D$ pour tout $a \in D$. Le demi-groupe D est donc un groupe.

Théorème 2. *Pour qu'un demi-groupe D soit un groupe, il faut et il suffit que pour toute équivalence régulière à droite R_1 et pour toute équivalence régulière à gauche R_2, il existe une classe H_1 mod R_1 et une classe H_2 mod R_2 telles que l'on ait $R_1 = \varphi_{H_1}$ et $R_2 = {}_{H_2}\varphi$.*

La condition est nécessaire. En effet, si H_1 et H_2 sont respectivement les classes mod R_1 et mod R_2 contenant l'élément neutre du groupe, on a $R_1 = \varphi_{H_1}$ et $R_2 = {}_{H_2}\varphi$.

Pour montrer que la condition est suffisante, considérons l'équivalence universelle U qui est régulière. Comme D est la seule classe mod U, on a donc $Dx = Dy$, $xD = yD$, quels que soient $x, y \in D$. Par conséquent $Dx = D^2 = xD$, et $xD^2 = D^2 = D^2x$. En particulier, $zD^2 = D^2 = D^2z$ pour tout $z \in D^2$ et le demi-groupe D^2 est un groupe. L'égalité E étant une équivalence régulière, il existe un élément a tel que l'on ait $E = \varphi_a$. Si $D - D^2 \neq \emptyset$ et si $p \in D - D^2$, on a, en désignant par e l'élément neutre de D^2, $ap = ape$. D'où

$$p \equiv pe(\varphi_a) ,$$

c'est-à-dire $p = pe$, ce qui est impossible. Par conséquent $D = D^2$ et D est un groupe.

Théorème 3. *Pour qu'un demi-groupe D soit un homogroupe*[1]*, il faut et il suffit que ses équivalences régulières à droite et simplifiables à droite et que ses équivalences régulières à gauche et simplifiables à gauche soient respectivement des équivalences* φ_H *et* ${}_K\varphi$.

La condition est nécessaire. Soit dans D une équivalence R régulière à droite et simplifiable à droite. Si e est l'élément neutre du nodule N de D, on sait que e appartient au centre de D et que $N = De = eD$. Soit M la classe $\bmod R$ contenant l'élément e, et posons $H = Me$. Si R^* désigne la trace de l'équivalence R sur N, H est la classe $\bmod R^*$ dans N qui contient l'élément neutre e de N. Comme R est régulière à droite, la relation $a \equiv b(R)$ entraîne $ae \equiv be(R)$ avec $ae \in N$, $be \in N$.

Par conséquent, $ae \equiv be(R^*)$ et $Hae = Hbe$, $Ha = Hb$. Donc $R \subseteq \varphi_H$. Inversement, si $Ha = Hb$, on a $Hae = Hbe$ et $ae \equiv be(R^*)$. D'où $ae \equiv be(R)$ et $a \equiv b(R)$ puisque R est simplifiable à droite. Il en résulte l'égalité $R = \varphi_H$. On montre de même que si S est une équivalence régulière à gauche et simplifiable à gauche, il existe un complexe K tel que $S = {}_K\varphi$.

La condition est suffisante. L'équivalence universelle U étant régulière et simplifiable, il existe des complexes H et K tels que l'on ait $U = \varphi_H = {}_K\varphi$. On a alors

$$Hx = Hy , \qquad xK = yK$$

quels que soient $x, y \in D$. Par conséquent $Hx = HD$ et $xK = DK$. Il en résulte que tout élément de HD est net à gauche et tout élément de DK est net à droite. Donc tout élément de HK est net et D est un homogroupe.

---

[1]) Un homogroupe T est un demi-groupe possédant au moins un élément net r, c'est-à-dire tel que pour tout $x \in T$, il existe $x', x'' \in T$ vérifiant $xx' = x''x = r$. L'ensemble des éléments nets de T est un groupe N appelé le nodule de T (cf. [2], [8]).

Corollaire. *Pour qu'un semi-groupe*[2]) *soit un groupe, il faut et il suffit que ses équivalences régulières à droite et simplifiables à droite et que ses équivalences régulières à gauche et simplifiables à gauche soient respectivement des équivalences* φ_H *et* ${}_K\varphi$.

En effet, tout semi-groupe, qui est un homogroupe, est un groupe.

Théorème 4. *Pour qu'un semi-groupe* S *soit un groupe, il faut et il suffit que pour toute équivalence régulière à droite* R_1 *et pour toute équivalence régulière à gauche* R_2, *il existe une classe* H_1 *mod* R_1 *et une classe* H_2 *mod* R_2, *telles que l'on ait* $R_1 = R_{H_1}$ *et* $R_2 = {}_{H_2}R$, R_{H_1} *et* ${}_{H_2}R$ *désignant respectivement l'équivalence principale à droite associée à* H_1 *et l'équivalence principale à gauche associée à* H_2.

La condition est nécessaire, d'après *P. Dubreil* ([5], p. 22). Elle est aussi suffisante. En effet, si E est l'égalité, il existe un élément a de S tel que $E = R_a$, où R_a désigne l'équivalence principale à droite associée au complexe formé de l'élément a. Si a n'est pas net à droite, son résidu à droite W_a (cf. [4], [5]) est une classe mod R_a. Mais R_a étant l'égalité, W_a ne contient qu'un élément w qui est permis à droite, puisque W_a est un idéal à droite. Mais S, étant un semi-groupe, ne peut avoir d'élément permis à droite. Donc a est net à droite. On montre de même que S contient un élément net à gauche b. Par conséquent, le semi-groupe S, contenant un élément net ab, est un homogroupe, et donc un groupe.

Désignons par A l'ensemble des demi-groupes D ayant la propriété suivante (Π) : Pour toute équivalence régulière à droite R_1 et toute équivalence régulière à gauche R_2 de D, on a $R_1 = R_H$ (équivalence principale à droite) pour toute classe H mod R_1, et $R_2 = {}_KR$ (équivalence principale à gauche) pour toute classe K mod R_2.

Théorème 5. *L'ensemble* A *est formé du pseudo-groupe*[3]) *d'ordre* 2 *et des groupes.*

On sait, d'après *P. Dubreil* ([4], [5]), que les groupes ont la propriété (Π). Soit alors D un demi-groupe ayant la propriété (Π), mais n'étant pas un groupe. Le demi-groupe D contient alors au moins un élément non net d'un côté. Soit x un tel élément que nous supposons non net à droite par exemple. (En supposant que D contient un élément non net à gauche, on arrive au même résultat.) Si E est l'égalité, on a $E = R_x$. Soit W_x le résidu à droite de l'élément x. Comme W_x est une classe mod $R_x = E$, W_x se réduit à un seul élément v qui est permis à droite. Soit $y \in D$,

[2]) Un semi-groupe est un demi-groupe vérifiant la règle de simplification à droite et à gauche.

[3]) Un pseudo-groupe est un demi-groupe D réunion d'un groupe D^* et d'un élément permis $w : wx = xw = w$ pour tout $x \in D$ (cf. [4]).

$y \neq v$. L'élément y n'est pas net à droite puisque $vD = v$. D'autre part, si W_y est le résidu à droite de y, on a $W_y = W_x = v$. En effet, comme $E = R_y$, W_y ne contient qu'un élément w. Si $w \neq v$, il existe v' tel que $vv' = y = v$, ce qui est impossible. Posons $D_1 = D - v$. Pour tout couple d'éléments $a_1, b_1 \in D_1$, il existe c tel que $a_1 c = b_1$.

Si tous les éléments de D sont supposés nets à gauche, l'ensemble D_1 est un demi-groupe. En effet, si $a_1 b_1 = v$, il existe t tel que $tv = a_1$. D'où

$$a_1 b_1 = tvb_1 = tv = a_1 = v$$

ce qui est impossible. D'autre part, D_1 ne contient qu'un élément, car de

$$E = {}_vR \ , \qquad v \cdot . \, a_1 = v \cdot . \, b_1 = v$$

suit

$$a_1 \equiv b_1({}_vR) \ , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad a_1 = b_1 \ .$$

La table de multiplication du demi-groupe est alors la suivante

	a_1	v
a_1	a_1	a_1
v	v	v

On voit facilement que l'on a $U = {}_{a_1}R$, U étant l'équivalence universelle. Mais par hypothèse, on a $E = {}_{a_1}R$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, D contient au moins un élément z non net à gauche.

Si ${}_zW$ est le résidu à gauche de l'élément z, ${}_zW$ se réduit également à un seul élément w, puisque $E = {}_zR$. Comme w est permis à gauche et v permis à droite, on a $v = w$. Par conséquent, D_1 est tel que pour tout $a_1, b_1 \in D$, il existe $c', c'' \in D$ vérifiant $a_1 c' = c'' a_1 = b_1$. D'où

$$a_1 D = D a_1 = D \ , \qquad \text{pour tout} \qquad a_1 \in D_1 \ .$$

L'ensemble D_1 est un demi-groupe, car si $a_1 b_1 = v$, on a $a_1 b_1 D = a_1 D = D = vD = v$, ce qui est impossible. D'autre part, D_1 se réduit à un seul élément. En effet, de

$$E = R_v \ , \qquad v \mathbin{.\!\cdot} a_1 = v \mathbin{.\!\cdot} b_1 = v$$

suit $a_1 = b_1$. Il en résulte que D est le pseudo-groupe d'ordre 2. On vérifie aisément que ce pseudo-groupe a la propriété (Π).

2. Demi-groupes q-simples

Soient D un demi-groupe et P le demi-groupe des parties de D (cf. [7]). On sait qu'un idéal à droite de D est une partie M de D ($M \in P$) vérifiant la condition $MD \subseteq M$. En particulier, D lui-même et la partie vide $\emptyset$ sont des idéaux à droite de D (car, dans P, on a $\emptyset D = \emptyset$). Un idéal à droite M de D est dit *véritable,* si l'on a $M \neq \emptyset$ et $M \neq D$.

Dans l'ensemble P^* des idéaux à droite de D, considérons la relation d'équivalence J définie en posant

$$M \equiv M'(J) \rightleftarrows M \cap D^2 = M' \cap D^2 \ .$$

Toute classe mod J contient un idéal à droite maximum, appelé idéal à droite *large.* Les idéaux à droite larges ont été introduits et étudiés par P. Dubreil dans [7].

Un demi-groupe D sera dit „quadratiquement" simple à droite ou *q-simple à droite,* si le demi-groupe D^2 est simple à droite, c'est-à-dire si D^2 est un demi-groupe ne contenant pas d'idéaux à droite véritables.

Théorème 6. *Pour qu'un demi-groupe D soit q-simple à droite, il faut et il suffit que tout idéal à droite* $M \neq \emptyset$ *vérifie la relation* $D^2 \subseteq M$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante, car si $N \neq \emptyset$ est un idéal à droite de D^2, on a $ND^2 \subseteq N$. Mais ND^2 est un idéal à droite de D et l'on a donc

$$N \subseteq D^2 \subseteq ND^2 \subseteq N$$

d'où $N = D^2$ et D^2 est simple à droite.

Théorème 7. *Pour qu'un demi-groupe D soit q-simple à droite, il faut et il suffit qu'il soit sans idéaux à droite larges véritables.*

Si $D = D^2$, tout idéal à droite de D est large et le théorème est trivial. Considérons le cas où $D^2 \subset D$. La condition est nécessaire. Soit M un idéal à droite large de D, $M \neq \emptyset$. D'après le théorème 6, on a $D^2 \subseteq M$. Si $M \subset D$ et si $x \in D - M$, $xD = D^2 \subseteq M$. Donc $x \in (M \cdot\!.\, D) \cap (D - D^2)$. Comme M est large, on a d'après ([7], théorème 8)

$$(M \cdot\!.\, D) \cap (D - D^2) \subseteq M$$

et donc $x \in M$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, $M = D$ et D ne contient pas d'idéal à droite large véritable. La condition est suffisante. Soit N un idéal à droite de D, $N \neq \emptyset$. Il faut montrer, d'après le théorème 6, que l'on a $D^2 \subseteq N$. Supposons que $D^2 \nsubseteq N$ et posons $N_2 = N \cap D^2$. Alors $N_2 \subset D^2$. Soit X l'ensemble des éléments $x \in D - D^2$ tels que $xD \subseteq N_2$. Comme N_2 est un idéal à droite, l'ensemble $N' = N_2 \cup X$ est un idéal à droite, avec $N' \subset D$. Mais

$$(N' \cdot\!.\, D) \cap (D - D^2) \subseteq N' \ .$$

Donc N' est d'après [7] un idéal à droite large véritable, contre l'hypothèse.

Théorème 8. *Pour qu'un demi-groupe D soit q-simple à droite, il faut et il suffit qu'il soit sans idéaux à droite fermés véritables* [4]).

La condition est nécessaire. Si $D = D^2$, c'est évident. Soit donc $D^2 \subset D$ et soit N un idéal à droite fermé de D, $N \neq \emptyset$. D'après le théorème 5 de [7], N est le résidu à droite de $H = D - ND$. Comme $ND = D^2$, on a $H = D - D^2$. Le résidu à droite de $D - D^2$ étant D, on en déduit $N = D$.

La condition est suffisante. Si $D = D^2$, tous les éléments de D sont nets à droite et D est simple à droite. En effet, si a est un élément non net à droite de D, son résidu à droite W_a n'est pas vide et on a $W_a \subset D$, car $a \notin W_a$, puisque $a = a_1 a_2$. Mais W_a est un idéal à droite fermé véritable, contre l'hypothèse. Si $D^2 \subset D$ et si N est un idéal à droite de D, $N \neq \emptyset$, on a $D^2 \subseteq N$ et D est q-simple à droite (théorème 6). En effet, si $D^2 \nsubseteq N$, $N_2 = N \cap D^2$ est un idéal à droite et on a $N_2 D \subseteq N_2 \subset D^2$. Le résidu à droite W_{D-N_2} est non vide et différent de D. Donc W_{D-N_2} est un idéal à droite fermé véritable, contre l'hypothèse.

Théorème 9. *Tout demi-groupe D, vérifiant la relation $xD = x^2 D$ pour tout $x \in D$, est réunion de demi-groupes q-simples à droite disjoints* [5]).

Soit R l'équivalence définie par

$$x \equiv y(R) \rightleftarrows xD = yD \ .$$

Comme $xD = x^2 D$, toute classe S mod R est un sous-demi-groupe de D. Soient $x \in S$, $y_1 \in S$, $y_2 \in S$. Alors $y = y_1 y_2 \in S^2$. De $xyD = y_1 D$, on déduit l'existence d'un élément $d \in D$ tel que $xyd = y_1 y_2 = y$. Posons $a = yd$ et montrons que $a \in S$. De $a = yd$ suit $aD = ydD \subseteq yD$. La relation $dD = d^2 D$ entraîne pour chaque $t \in D$ l'existence d'un élément z tel que $dt = d^2 z$. D'où

$$yt = xydt = xyd^2 z = ydz = az \ .$$

Donc $yD \subseteq aD$ et $aD = yD$. Par conséquent $a \equiv y(R)$ et $a \in S$.

Le demi-groupe S^2 est simple à droite. En effet, si $v \in S^2$, $v^2 \in S^2$ et il existe $a \in S$ tel que $v^2 a = y$. D'où

$$v \cdot va = y \quad \text{avec} \quad va \in S^2 \ .$$

Considérons maintenant l'ensemble B des idéaux bilatères du demi-groupe D. L'ensemble B est évidemment contenu dans l'ensemble P^*

---

[4]) Les idéaux à droite fermés ont été introduits par *P. Dubreil* dans [7].

[5]) Pour l'étude des demi-groupes réunions de demi-groupes simples, voir *R. Croisot* [3] et *A. H. Clifford* [1].

des idéaux à droite de D. Nous pouvons définir l'équivalence J dans l'ensemble B au lieu de l'ensemble P^*. Si N et N' sont deux idéaux (bilatères), nous aurons alors

$$N \equiv N'(J) \rightleftharpoons N \cap D^2 = N' \cap D^2 .$$

Toute classe $\mod J$ contient un idéal maximum qui sera appelé un idéal *quasi-large.*

Posons $X = (D - D^2) \cap (N \cdot . D) \cap (N .\cdot D)$.

Pour qu'un idéal N soit quasi-large, il faut et il suffit que l'on ait $X \subseteq N$. La condition est *nécessaire.* Si $x \in X$, on a

$$Dx \subseteq N , \qquad xD \subseteq N .$$

Si $N_2 = N \cap D^2$, l'ensemble $M = N_2 \cup X$ est un idéal de D et l'on a $M \equiv N(J)$. Donc $M \subseteq N$ et $x \in N$.

La condition est *suffisante.* Il faut montrer que la relation $N \equiv N'(J)$ entraîne $N' \subseteq N$. On a

$$N_2' = N' \cap D^2 = N \cap D^2 = N_2 \subseteq N .$$

Si $x \in N' \cap (D - D^2)$, alors

$$xD \subseteq N_2' \subseteq N , \qquad Dx \subseteq N_2' \subseteq N$$

d'où $x \in N$ et $N' \subseteq N$.

Un demi-groupe D sera dit q-simple, si le demi-groupe D^2 est simple, c'est-à-dire si D^2 ne contient pas d'idéaux véritables.

Théorème 10. *Pour qu'un demi-groupe D soit q-simple, il faut et il suffit que tout idéal* $M \neq \emptyset$ *vérifie la relation* $D^2 \subseteq M$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante. Si $N \neq \emptyset$ est un idéal de D^2, D^2ND^2 est un idéal de D et l'on a

$$N \subseteq D^2 \subseteq D^2ND^2 \subseteq N$$

d'où $N = D^2$ et D^2 est simple.

Théorème 11. *Pour qu'un demi-groupe D soit q-simple, il faut et il suffit qu'il soit sans idéaux quasi-larges véritables.*

Comme pour le théorème 7, il suffit de considérer le cas où $D^2 \subset D$.

La condition est nécessaire. Soit M un idéal quasi-large de D, $M \neq \emptyset$. D'après le théorème 10, on a $D^2 \subseteq M$. Si $M \subset D$ et si $x \in D - M$, $xD \subseteq D^2 \subseteq M$, $Dx \subseteq D^2 \subseteq M$. Donc

$$x \in (M \cdot . D) \cap (M .\cdot D) \cap (D - D^2) .$$

Comme M est quasi-large, on a $x \in M$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $M = D$.

La condition est suffisante. Soit N un idéal de D, $N \neq \emptyset$. D'après le théorème 10, il faut montrer que $D^2 \subseteq N$. Supposons que $D^2 \nsubseteq N$. Si $N_2 = N \cap D^2$, alors $N_2 \subset D$. Soit X l'ensemble des éléments $x \in D - D^2$ tels que $xD \subseteq N_2$, $Dx \subseteq N_2$. Comme N_2 est un idéal, l'ensemble $N' = N_2 \cup X$ est un idéal de D, avec $N' \subset D$. Mais

$$(N' \cdot. D) \cap (N' .\cdot D) \cap (D - D^2) \subseteq N' \ .$$

Donc N' est un idéal quasi-large véritable, contre l'hypothèse.

Théorème 12. *Tout demi-groupe D, vérifiant la relation $DxD = Dx^2D$ pour tout $x \in D$, est réunion de demi-groupes S_i disjoints, tels que les demi-groupes S_i^3 soient des demi-groupes simples. De plus l'équivalence R correspondant à cette partition est régulière et le demi-groupe-quotient D/R est un demi-treillis.*

Soient a, b, c des éléments quelconques de D. Nous avons

$$(bc)ab(ca) = (bca)^2 \in DabD$$

d'où

$$D(bca)^2D = DbcaD \subseteq D^2abD^2 \subseteq DabD$$

et

$$DbD \cdot DaD \subseteq DabD \ .$$

Mais

$$DabD = DababD \subseteq DbaD = DbabaD \subseteq DbD \cdot DaD \ .$$

Donc

$$DabD = DbD \cdot DaD \ . \tag{1}$$

D'autre part, de

$$DabD = DababD \subseteq DbaD \ , \qquad DbaD = DbabaD \subseteq DabD$$

suit

$$DabD = DbaD \ . \tag{2}$$

Soit R l'équivalence définie par

$$x \equiv y(R) \rightleftarrows DxD = DyD \ .$$

D'après (1), on a

$$DxyD = DyD \cdot DxD = DxD \cdot DxD = Dx^2D = DxD \ ,$$

c'est-à-dire

$$xy \equiv x(R) \ .$$

Par conséquent, toute classe S_i mod R est un demi-groupe. L'équivalence R est régulière d'après (1) et le demi-groupe-quotient D/R est un demi-treillis d'après (2) et du fait que $DxD = Dx^2D$.

Le demi-groupe S_i^3 est simple. Soit $x \in S_i$ et posons $DxD = H$. On a $HxH = H$, pour tout $x \in S_i$. En effet, $HxH \subseteq H$. D'autre part, $H = DxD = Dx^3D \subseteq DxDxDxD = HxH$. Si v et $w \in S_i^3$, $DvD = DwD = H$ et $v \in H$, $w \in H$. Il existe $h \in H$, $k \in H$ tels que l'on ait $hvk = w$. On en déduit $DwD = DhvkD \subseteq DhD$. Mais $h = awb$. Donc $DhD = DawbD \subseteq DwD$. D'où

$$DhD = DwD \quad \text{et} \quad h \equiv w(R) .$$

On montre de même que $k \equiv w(R)$. Donc $h \in S_i$, $k \in S_i$. Comme $v^3 \in S_i^3$, il existe $h' \in S_i$, $k' \in S_i$ tels que l'on ait

$$h'v^3k' = w \quad \text{d'où} \quad h'v \cdot v \cdot vk' = w$$

avec $h'v \in S_i^3$, $vk' \in S_i^3$. Le demi-groupe S_i est par conséquent simple.

La question se pose de savoir si les demi-groupes S_i de la décomposition donnée par le théorème 12 ne sont pas des demi-groupes q-simples, autrement dit de savoir si les demi-groupes S_i^2 ne sont pas simples. L'exemple suivant montre que ce n'est pas le cas en général. Considérons le demi-groupe D défini par la table de multiplication

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	b

On a $DxD = a = Dx^2D$ pour tout $x \in D$. Par conséquent $D = S_i$ est la seule classe de l'équivalence R. Le demi-groupe $S_i^3 = a$ est un groupe, donc un demi-groupe simple. Par contre, le demi-groupe $S_i^2 = \{a, b\}$ n'est pas simple, puisque a est un idéal véritable de S_i^2.

3. Décomposition d'un demi-groupe

Un complexe H d'un demi-groupe D est consistant à gauche, si la relation $ab \in H$ entraîne $a \in H$. Un complexe K est réversible à gauche si $kK \cap k'K \neq \emptyset$ pour tout couple d'éléments k, $k' \in K$ (cf. [5]). A tout complexe T de D, on peut associer l'équivalence réversible généralisée à gauche ${}_T\Sigma$ (cf. [4], [6]) définie de la manière suivante. On a

$$a \equiv a' ({}_T\Sigma)$$

si et seulement s'il existe un nombre fini d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant [6])

$$aT \mid a_1T \mid \ldots \mid a_nT \mid a'T .$$

[6]) La notation $xT \mid yT$ signifie $xT \cap yT \neq \emptyset$.

Théorème 13. *Tout demi-groupe D est réunion d'idéaux à droite consistants à gauche disjoints, qui sont ses idéaux à droite consistants à gauche minimaux* [7]). *De plus, l'équivalence associée à cette partition est régulière et le demi-groupe-quotient correspondant est un demi-groupe dont tous les éléments sont permis à droite.*

Soit ${}_D\Sigma$ l'équivalence réversible généralisée à gauche associée à D et soit A une classe $\bmod_D \Sigma$. On a pour tout $x \in D$ et tout $a \in A$

$$axD \subseteq aD \quad \text{d'où} \quad a \equiv ax({}_D\Sigma)$$

ce qui montre que A est un idéal à droite de D.

Soit $rs \in A$. De $rsD \subseteq rD$ suit $rs \equiv r({}_D\Sigma)$ et $r \in A$. L'idéal à droite A est donc consistant à gauche.

La classe A est un idéal à droite consistant à gauche minimal de D. Supposons en effet qu'il existe un idéal à droite consistant à gauche non vide B avec $B \subset A$, et soient $b \in B$, $c \in A - B$. On a, puisque $b \equiv c({}_D\Sigma)$

$$bD \mid b_1D \mid \ldots \mid b_mD \mid cD\ .$$

Les propriétés de B entraînent alors successivement

$$bD \subseteq B,\, b_1 \in B,\, b_1D \subseteq B, \ldots, b_m \in B,\, b_mD \subseteq B,\, c \in B$$

ce qui est contradictoire.

D'autre part, tout idéal à droite consistant à gauche minimal M de D est une classe $\bmod {}_D\Sigma$. En effet, si $a_1 \in M$, la classe $M_1 \bmod {}_D\Sigma$ contenant a_1 étant un idéal à droite consistant à gauche, l'intersection $V = M \cap M_1$ est aussi un idéal à droite consistant à gauche. D'où, puisque M et M_1 sont minimaux, $V = M = M_1$.

La dernière partie du théorème est immédiate.

Théorème 14. *Tout demi-groupe D, tel que les relations $aD \mid bD$ et $bD \mid cD$ entraînent $aD \mid cD$, est réunion d'idéaux à droite disjoints, consistants à gauche et réversibles à gauche. De plus, ces idéaux sont les sous-demi-groupes réversibles à gauche maximaux de D.*

D'après le théorème 13, D est réunion d'idéaux à droite consistants à gauche disjoints qui sont les classes de l'équivalence ${}_D\Sigma$. Soit A une telle classe et montrons que $aA \mid a'A$ pour tout couple d'éléments a, $a' \in A$, c'est-à-dire que A est réversible à gauche.

---

[7]) Par idéal à droite consistant à gauche minimal M de D, nous entendons un idéal à droite consistant à gauche non vide M tel que, si N est un idéal à droite consistant à gauche non vide de D, la relation $N \subseteq M$ entraîne $N = M$.

Comme A est un idéal à droite, on a $aa \equiv a'a({}_D\Sigma)$. Il existe donc une relation de la forme

$$aaD \mid a_1D \mid \ldots \mid a_nD \mid a'aD \ ,$$

ce qui entraîne d'après l'hypothèse du théorème $aaD \mid a'aD$.
Mais $aD \subseteq A$. Donc $aA \mid a'A$.

Si B est un sous-demi-groupe de D réversible à gauche et si $b \in B$, $b' \in B$, on a $bB \mid b'B$ et par conséquent $bD \mid b'D$, c'est-à-dire $b \equiv b'({}_D\Sigma)$, ce qui montre que les classes $\bmod_D \Sigma$ sont les sous-demi-groupes réversibles à gauche maximaux de D.

Un demi-groupe A est dit *quasi-réversible à gauche* si pour tout couple d'éléments $a \in A$, $a' \in A$, il existe un nombre fini d'éléments

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

de A tels que l'on ait

$$aA \mid a_1A \mid a_2A \mid \ldots \mid a_nA \mid a'A \ .$$

Remarque. Le théorème 13 et sa démonstration montrent qu'un *demi-groupe est quasi-réversible à gauche si et seulement s'il ne contient pas d'idéal à droite consistant à gauche véritable.*

Théorème 15. *Tout idéal à droite consistant à gauche minimal et globalement idempotent* [8]) *M d'un demi-groupe D est un demi-groupe quasi-réversible à gauche.*

Soient $m, m' \in M$. Les éléments mm et $m'm$ appartiennent aussi à M. D'après le théorème 13, M est une classe $\bmod_D \Sigma$. On a donc un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$mmD \mid x_1D \mid \ldots \mid x_nD \mid m'mD \ .$$

Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à M. Comme $M = M^2$, on a donc

$$x_1 = a_1b_1, \ldots, x_n = a_nb_n$$

avec $a_1 \in M$, $b_1 \in M, \ldots, a_n \in M$, $b_n \in M$. De

$$mD \subseteq M, b_1D \subseteq M, \ldots, b_nD \subseteq M$$

suit alors

$$mM \mid a_1M \mid \ldots \mid a_nM \mid m'M \ .$$

Théorème 16. *Tout demi-groupe fini F est réunion de demi-groupes quasi-réversibles à gauche disjoints.*

---

[8]) C'est-à-dire tel que l'on ait $M = M^2$.

En effet, si F n'est pas quasi-réversible à gauche, il est, d'après le théorème 13 et la remarque précédente, réunion de plusieurs demi-groupes disjoints F_i. Si l'un des demi-groupes F_i n'est pas quasi-réversible à gauche, il est de même réunion de plusieurs demi-groupes disjoints et ainsi de suite. Comme F est fini, on arrivera finalement à des demi-groupes quasi-réversibles à gauche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *A. H. Clifford,* Bands of semigroups, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 1954, p. 499–504.

[2] *A. H. Clifford* and *D. D. Miller,* Semigroups having zeroid elements, Am. J. Math. 70, 1948, p. 117–125.

[3] *R. Croisot,* Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, Ann. Ecole Norm. 70, 1953, p. 361–379.

[4] *P. Dubreil,* Algèbre I, Deuxième édition, Gauthier-Villars, Paris 1954.

[5] *P. Dubreil,* Contribution à la théorie des demi-groupes I, Mém. Acad. Sci. 63, 1941, p. 1–52.

[6] *P. Dubreil,* Contribution à la théorie des demi-groupes II, Rendic. Mat. appl. 10, 1951, p. 183–200.

[7] *P. Dubreil,* Contribution à la théorie des demi-groupes III, Bull. Soc. Math. France 81, 1953, p. 289–306.

[8] *G. Thierrin,* Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, Thèse, Paris 1954. Bull. Soc. Math. France, 83, 1955, p. 103–159.

[9] *G. Thierrin,* Sur une équivalence en relation avec l'équivalence réversible généralisée, C. R. Acad. Sc. Paris 236, 1953, p. 1723–1725.

[10] *G. Thierrin,* Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences régulières, C. R. Acad. Sci. Paris 238, 1954, p. 1954–1956.

[11] *G. Thierrin,* Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences simplifiables, C. R. Acad. Sci. Paris 238, 1954, p. 2046–2048.

(Reçu le 7 avril 1955.)