Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1956)

Artikel: Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen.

Autor: Ostrowski, Alexander

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23909

Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale und die absolute Konvergenz von linearen Iterationsprozessen*)

von Alexander Ostrowski, Basel

(*Paul Finsler zum sechzigsten Geburtstag*)

Einleitung

1. Sei $A = (a_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung. Das zu dieser Matrix gehörende allgemeine lineare Gleichungssystem kann dann in der Form geschrieben werden

$$A\xi' = \eta' , \qquad \xi = (x_1, \ldots, x_n) , \qquad \eta = (y_1, \ldots, y_n) , \tag{1}$$

wo ξ der gesuchte und η der gegebene Vektor ist. Die Striche bei ξ und η deuten an, daß ξ und η durch die entsprechenden *Spalten*vektoren zu ersetzen sind.

Wird (1) durch *Iteration* gelöst, so wird eine unendliche Vektorenfolge

$$\xi_\kappa(x_1^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)}) \tag{2}$$

aufgestellt, die – im Konvergenzfalle – gegen einen Lösungsvektor ξ von (1) konvergiert. Durch Einsetzen von ξ_κ in (1) ergeben sich die *Residualvektoren*

$$A\xi'_\kappa - \eta' = \varrho'_\kappa , \qquad \varrho_\kappa = (r_1^{(\kappa)}, \ldots, r_n^{(\kappa)}) , \tag{3}$$

$$r_\mu^{(\kappa)} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu^{(\kappa)} - y_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n) , \tag{4}$$

deren „Kleinheit" den Grad der Annäherung an die Lösung charakterisiert.

---

*) Diese Arbeit wurde (zum Teil) ausgeführt im Rahmen eines Forschungsauftrages des *National Bureau of Standards* an die *American University*, Washington D. C.

2. Im folgenden beschäftigen wir uns zuerst mit der Iteration in *Einzelschritten.* Wir nehmen von nun an ein für allemal an, daß für alle ν

$$A_\nu \equiv a_{\nu\nu} \neq 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

gilt. Unter der *Einzelschrittiteration* verstehen wir eine solche sukzessive Erzeugung der Vektorenfolge (2), bei der beim Übergang von ξ_κ zu $\xi_{\kappa+1}$ *nur eine* der Komponenten von ξ_κ überhaupt geändert wird, im allgemeinen so, daß die entsprechende Komponente des Residualvektors zu Null gemacht wird. Ist etwa der Index dieser Komponente N_κ – wir nennen N_κ den κ-ten *Leitindex* –, so wird also $\delta_\kappa = x_{N_\kappa}^{(\kappa+1)} - x_{N_k}^{(\kappa)}$ so gewählt, daß $r_{N_\kappa}^{(\kappa+1)} = 0$ wird. Daraus folgt

$$\delta_\kappa = x_{N_\kappa}^{(\kappa+1)} - x_{N_\kappa}^{(\kappa)} = -\frac{R_\kappa}{A_{N_\kappa}}\,, \tag{6}$$

$$R_\kappa = r_{N_\kappa}^{(\kappa)}\,. \tag{7}$$

Die einzelnen Komponenten von $\varrho_{\kappa+1}$ errechnen sich nach (6), (7) aus den Relationen

$$r_\mu^{(\kappa+1)} = r_\mu^{(\kappa)} - a_{\mu N_\kappa}\frac{R_\kappa}{A_{N_\kappa}} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)\,. \tag{8}$$

Allerdings bedeutet die Festsetzung (7) in (6) und (8) eine Idealisierung des Rechenschemas, da man bei der Benutzung der Formeln (6) und (8) sowieso *abrunden* wird. Schon deshalb ist es von Interesse, eine Modifikation des Ansatzes (7) ins Auge zu fassen, bei der R_κ durch die Formel gegeben wird

$$R_\kappa = q_\kappa r_{N_\kappa}^{(\kappa)}\,, \qquad 0 < q_\kappa < 2\,, \tag{9}$$

wo q_κ zwischen 0 und 2 liegt, und dann natürlich $r_{N_\kappa}^{(\kappa+1)}$ nicht mehr notwendig verschwindet. Ist $q_\kappa \neq 1$, so sprechen wir von *unvollständiger Relaxation*, für $q_\kappa < 1$ von *Unterrelaxation* (underrelaxation), für $q_\kappa > 1$ von *Überrelaxation* (overrelaxation). Doch wird der Fall der unvollständigen Relaxation in dieser Arbeit wohl zum erstenmal systematisch untersucht, so daß unsere Literaturangaben sich ausschließlich auf den Ansatz (7) beziehen.

Die zeitlich erste systematische Veröffentlichung über eine Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme erfolgte wohl 1845 durch Jacobi [11][1]), nachdem ein Jahr vorher Argelander [2] über eine

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern weisen auf die unter den gleichen Nummern im Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit aufgeführten Abhandlungen hin.

Anwendung des gleichen Verfahrens in einem speziellen Fall berichtet und Gerling noch früher in verschiedenen Werken die Gaußschen Ansätze zur Relaxationsmethode ausführlich erläutert hatte.

Das Jacobische Verfahren wird heute auch als die *Iteration in Gesamtschritten* bezeichnet. Es besteht darin, daß aus den Komponenten (2) des Näherungsvektors ξ_κ sämtliche Komponenten von $\xi_{\kappa+1}$ durch die Formeln

$$x_\mu^{(\kappa+1)} = -\frac{1}{A_\mu}\Big(\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{n} a_{\mu\nu}\, x_\nu^{(\kappa)} - y_\mu\Big) \tag{10}$$

bestimmt werden. Die Konvergenzbedingung für dieses Verfahren ergibt sich nach von Mises und Geiringer [14] aus der Betrachtung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \lambda\, a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda\, a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & \lambda\, a_{nn} \end{vmatrix} = 0\ , \tag{11}$$

wo die Determinante links aus derjenigen von A durch Multiplikation der Elemente der Hauptdiagonale mit λ hervorgeht.

Für die Konvergenz des Jacobischen Verfahrens (10) bei jeder Wahl von ξ_1 und η ist notwendig und hinreichend, daß der absolute Betrag $\sigma(A)$ der absolut größten Wurzel von (11) kleiner als 1 ist. Zugleich konvergieren dann die Komponentenfolgen von ξ_κ wie die Abschnitte einer Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $\sigma(A)$.

3. Es kommt bei der Einzelschrittiteration in erster Linie auf die Wahl der Leitindizes N_κ, oder, wie wir sagen werden, auf die *Steuerung* des Verfahrens an. Für diese Steuerung kommen im wesentlichen folgende drei Möglichkeiten in Frage:

a) Man wählt N_κ unter Berücksichtigung der Werte der κ-ten Residuen, das heißt der Komponenten von ϱ_κ. Dann spricht man von einer *Relaxationsmethode* im engeren Sinn.

b) Man kann N_κ periodisch alle Werte von 1 bis n in dieser Reihenfolge unendlich oft durchlaufen lassen. Wir sprechen dann von *zyklischer Steuerung* und vom *zyklischen Einzelschrittverfahren* [2]).

c) Man kann von vornherein die Folge der Werte N_κ beliebig vor-

[2]) Eine interessante Abwandlung dieses Verfahrens hat kürzlich A. C. Aitken [1] angegeben.

schreiben, indessen so, daß dabei jeder Index unendlich oft als Leitindex auftritt. In diesem Fall werden wir von *freier Steuerung* sprechen.

Anscheinend war Gauß der erste, der das Iterationsverfahren in Einzelschritten anzuwenden pflegte, worüber wir aus seiner Korrespondenz [7], aus einem Bericht von Dedekind [5] und vor allem aus Veröffentlichungen von Gerling [10], [10a], [10b] unterrichtet sind. Gauß benutzte die Relaxationssteuerung, und zwar wählte er als Leitindex den Index, der den größten absoluten Betrag von δ_κ in (6) liefert. Über ein Jahrhundert später wurde eine analoge Relaxationsvorschrift durch Southwell [28] entdeckt, der N_κ so wählt, daß $|r^{(\kappa)}_{N_\kappa}|$ *maximal* ist. Von Southwell rührt auch der Name *Relaxation* her.

Die ersten eingehenden Veröffentlichungen über das Einzelschrittverfahren für *Matrizen von definiten quadratischen Formen* rühren von C. L. Gerling [10], C. A. Schott (1855) [26], Seidel (1874) [27] und P. A. Nekrassoff (1884) [15] her.

Dabei ist die von Seidel vorgeschlagene Relaxationsvorschrift allerdings eine andere als diejenigen von Gauß und Southwell, da Seidel diejenige Komponente des Residualvektors zu Null zu machen sucht, bei der dies die stärkste Verkleinerung eines gewissen quadratischen Ausdrucks bewirkt.

Vor allem aber hat Seidel einen Beweis für die Konvergenz seines Verfahrens bei jeder Wahl von ξ_1 und η für definite symmetrische Matrizen gegeben, den man als durchaus korrekt ansehen kann, wenn auch die Schlußüberlegungen von Seidel etwas vage ausklingen.

4. Das zyklische Einzelschrittverfahren ist anscheinend zuerst in einer Abhandlung von Nekrassoff diskutiert worden (1884) [15], und zwar für definite quadratische Formen, und sodann 1892 [13] zusammen mit Mehmke im allgemeinsten Falle.

Trotzdem wird das zyklische Einzelschrittverfahren heute ziemlich allgemein als das „Seidelsche Iterationsverfahren“ bezeichnet, während Seidel in seiner Abhandlung ausdrücklich die zyklische Steuerung nicht empfiehlt, vielleicht, weil sein Konvergenzbeweis nur die Relaxationssteuerung voraussetzt.

Im Falle des zyklischen Einzelschrittverfahrens haben zuerst 1929 von Mises und Geiringer [14] für definite quadratische Formen einen Konvergenzbeweis gegeben. Allerdings ist ihre Fassung dieses Beweises offensichtlich ergänzungsbedürftig. Obgleich diese Fassung wiederholt reproduziert wurde, ist sie wohl erst bei Schmeidler [24] mit genügender Strenge durchgeführt worden.

5. Einen auf ganz anderer Grundlage beruhenden Beweis für die Konvergenz des zyklischen Einzelschrittverfahrens hat Reich [23] gegeben und zugleich bewiesen, daß für eine symmetrische, aber nicht definite Matrix das Verfahren (bei geeigneter Wahl des Ausgangsvektors) divergiert. Reich benutzt das folgende, zuerst von Nekrassoff [15], [16] gegebene und seitdem wiederholt, zum Beispiel von Cesari [3] und R. J. Schmidt [25] wiederentdeckte Kriterium für die Konvergenz des zyklischen Einzelschrittverfahrens bei jeder Wahl von ξ_1 und η.

Es möge die Matrix A in der Form dargestellt werden:

$$A = L + D + R \ , \tag{12}$$

wo in L alle Elemente auf der Hauptdiagonale und rechts davon verschwinden, in R die Elemente der Hauptdiagonale und links davon verschwinden, während D eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonale mit derjenigen von A übereinstimmt. Dann lautet das Nekrassoffsche Konvergenzkriterium für die zyklische Einzelschrittiteration dahin, daß die absoluten Beträge aller Wurzeln der Gleichung

$$|\,(L + D)\lambda + R\,| = 0 \tag{13}$$

kleiner als 1 sind. Die Gleichung (13) ist offenbar die Fundamentalgleichung der Matrix $-(L + D)^{-1} R$. Der absolute Betrag der absolut größten Wurzel von (13) kann dann als das Maß für die Konvergenz des zyklischen Einzelschrittverfahrens benutzt werden. Wir wollen diesen absoluten Betrag im folgenden als die *Nekrassoff-Zahl* N_A von A bezeichnen[3]).

6. Bereits von Gauß (siehe Gerling [10], p. 392) ist eine Verallgemeinerung der Einzelschrittiteration vorgeschlagen worden, bei der beim Übergang von ξ_κ zu $\xi_{\kappa+1}$ nicht nur *eine Komponente*, sondern *eine Gruppe von Komponenten* von ξ_κ abgeändert wird. Sind die Indizes dieser Komponenten etwa $m_1, \ldots, m_g$, so werden wir sie als *aktive* und alle übrigen Indizes als *passive* Indizes bezeichnen. Im folgenden werden α und γ stets durch *alle aktiven* und β durch *alle passiven* Indizes beim κ-ten Schritt laufen. Es wird nun festgesetzt:

$$x_\beta^{(\kappa+1)} = x_\beta^{(\kappa)} \ , \tag{14}$$

---

[3]) Bei der Diskussion dieser Größe ist die folgende von Nekrassoff [15] gegebene Relation sehr nützlich:

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} = \frac{a_{12}\, a_{23} \cdots a_{n1}}{a_{11} \cdots a_{nn}} \ ,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ die $n - 1$ Wurzeln von $\frac{1}{\lambda}\,|\,(L + D)\lambda + R\,|$ sind.

während die den aktiven Indizes entsprechenden Komponenten von $\xi_{\kappa+1}$ aus den entsprechenden Teilgleichungen von (1) bestimmt werden. Setzt man allgemein

$$x_\alpha^{(\kappa+1)} - x_\alpha^{(\kappa)} = \delta_\alpha^{(\kappa)} , \tag{15}$$

so bestimmt man die $\delta_\alpha^{(\kappa)}$ aus den g Gleichungen

$$A_\alpha \delta_\alpha^{(\kappa)} + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_{\alpha\gamma} \delta_\gamma^{(\kappa)} = - r_\alpha^{(\kappa)} , \tag{16}$$

sofern sie auflösbar sind.

Derartige Iterationen werden nach dem Vorschlag von v. Mises und Geiringer als *Gruppeniterationen* bezeichnet.

Um auch hier der Möglichkeit der unvollständigen Relaxation Rechnung zu tragen, verallgemeinern wir die obige Vorschrift dahin, daß die $x_\beta^{(\kappa+1)}$ und $\delta_\alpha^{(\kappa)}$ sich immer noch aus den Gleichungen (14) und (16) bestimmen, während (15) durch

$$x_\alpha^{(\kappa+1)} = x_\alpha^{(\kappa)} + q_\kappa^{(\alpha)} \delta_\alpha^{(\kappa)} \tag{17}$$

ersetzt wird. Die Konstanten $q_\kappa^{(\alpha)}$ sind hier positive Zahlen, die auf jeden Fall den Bedingungen

$$0 < q_\kappa^{(\alpha)} < 2 \tag{18}$$

genügen sollen.

Wird die allgemeine Gruppeniteration betrachtet, so besteht das *Problem der Steuerung* darin, bei jedem Schritt g sowie die aktiven Indizes α zu wählen. Wird diese Wahl nur durch die Bedingung eingeschränkt, daß jeder Index unendlich oft aktiv ist, so sprechen wir auch hier von „*freier Steuerung*".

7. Wir werden im folgenden eines der charakterisierten Iterationsverfahren als *absolut konvergent* für die Matrix A bezeichnen, wenn es bei fester Wahl der Leitindizes bzw. der aktiven Indizes und der Konstanten q_κ, $q_\kappa^{(\alpha)}$ für eine beliebige Wahl des Anfangsvektors ξ_1 und des konstanten Vektors η konvergiert und *konvergent bleibt, wenn die Elemente von A mit beliebigen Faktoren vom absoluten Betrag 1 multipliziert werden.*

Offenbar wird die absolute Konvergenz eines Iterationsverfahrens durch solche Kriterien sichergestellt, in denen die Elemente von A nur mit ihren absoluten Beträgen auftreten, während zum Beispiel die Bedingung der Definitheit der als symmetrisch vorausgesetzten Matrix A für $n > 2$ diesen Charakter nicht hat.

In der Tat sind für die Konvergenz des zyklischen Einzelschrittverfahrens mehrere Kriterien aufgestellt worden, in denen nur die $|a_{\mu\nu}|$ vorkommen. Hierher gehören zum Beispiel:

1. Das *Zeilensummenkriterium.* Das zyklische Einzelschrittverfahren konvergiert, wenn

$$\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} | a_{\mu\nu} | < | a_{\mu\mu} | \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{19}$$

gilt. (Nekrassoff [13], [16].)

2. *Das Spaltensummenkriterium.* Das zyklische Einzelschrittverfahren konvergiert, wenn

$$\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{n} | a_{\mu\nu} | < | a_{\nu\nu} | \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

gilt (Mehmke [12], [13]).

Beide Kriterien sind oft wiederentdeckt worden, vgl. zum Beispiel [4], [14], [9].

Im folgenden soll nun das allgemeinste Kriterium für die absolute Konvergenz der zyklischen Einzelschrittiteration aufgestellt werden, aus dem sich durch einfache Spezialisierungen sowohl (19) und (20), als auch eine Reihe von weiteren analogen Kriterien ergeben. Zugleich wird sich herausstellen, daß auch das allgemeinste Kriterium für die absolute Konvergenz des Jacobischen Verfahrens (10) genau ebenso lautet.

Dies ist deshalb sehr bemerkenswert, weil im allgemeinen die Konvergenzbereiche der Jacobischen und der Einzelschrittiteration sich nur teilweise überdecken.

8. Wir setzen im folgenden

$$| a_{\mu\nu} | = \alpha_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n) \tag{21}$$

und bezeichnen als die *Begleitmatrix zu A* die Matrix

$$A_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Eine Matrix vom Typus (22) werden wir als eine *eigentliche M-Matrix* oder *M-Matrix* schlechthin bezeichnen, wenn ihre Diagonalelemente positiv[4]), ihre Determinante positiv und die Determinanten aller ihrer

---

[4]) Die Positivität der Diagonalelemente ist eine Folge der beiden anderen Definitionseigenschaften einer M-Matrix. Siehe den Satz IX in der Nr. 34 am Schlusse dieser Arbeit.

Andererseits läßt sich die Annahme, daß die Determinanten aller Hauptminoren nicht negativ sind, in zwei Richtungen abschwächen. Man kann diese Annahme durch eine der beiden folgenden ersetzen:

Hauptminoren aller Ordnungen nicht negativ sind. Eine Matrix, deren Begleitmatrix eine M-Matrix ist, bezeichnen wir als eine *eigentliche H-Matrix* oder *H-Matrix* schlechthin.

Wir haben verschiedene Eigenschaften der H- und M-Matrizen bereits in einer früheren Abhandlung [17] bewiesen. Im folgenden werden wir weitere Tatsachen über diese Matrizen benötigen, vor allem den folgenden

Satz I. *Notwendig und hinreichend, damit A eine H-Matrix ist, ist, daß kein Diagonalelement von A verschwindet und daß die nicht-negative Matrix*

$$\Omega = \left(\frac{\alpha_{\mu\nu}}{\alpha_{\mu\mu}}\right) - E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \dots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 0 & \dots & \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

die Maximalwurzel $\sigma_A < 1$ hat.

Zur Erläuterung sei daran erinnert, daß nach einem Satz von Perron [21] eine nicht negative Matrix (das heißt eine Matrix mit nicht negativen Elementen) eine nicht negative Fundamentalwurzel besitzt, die nicht kleiner ist als der absolute Betrag jeder anderen Fundamentalwurzel. Diese Wurzel nennt man die *Maximalwurzel der Matrix.*

Die Maximalwurzel σ_A von (23) soll im folgenden als die *Jacobische Konstante der Matrix A* bezeichnet werden, und zwar auch dann, wenn $\sigma_A \geqq 1$ ist.

9. Wir werden nun beweisen, daß die Bedingung für die absolute Konvergenz der zyklischen Einzelschrittiteration für die Matrix A darin be-

---

I. Die Hauptminoren aus einer *Hauptreihe* sind nicht negativ, wobei unter einer *Hauptreihe* von Hauptminoren eine solche Sequenz von n Hauptminoren der Ordnungen $1, 2, 3, \dots, n$ verstanden wird, daß jedes Element dieser Sequenz zugleich ein Hauptminor des nächstfolgenden Elementes ist.

II. Sowohl die Diagonalelemente als auch alle Hauptminoren der Ordnungen $n - 2$, $n - 4, \dots$ (also gleicher *Parität* mit n) sind nicht negativ.

Daß jede der Bedingungen I, II (verbunden mit der Positivität von $|A_B|$) für eine M-Matrix charakteristisch ist, hat kürzlich Herr Kotelanski [11a] bewiesen, allerdings in anderer Einkleidung und unter Beschränkung auf den Fall, daß alle $\alpha_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) positiv sind. Im Buche von Gantmacher [10c] findet sich die entsprechende Tatsache bewiesen nur unter der Annahme $\alpha_{\mu\nu} \geqq 0$, zugleich unter Vereinfachung des Beweises von Kotelanski. Andererseits überträgt sich der auf II bezügliche Beweis von Kotelanski ohne weiteres auch auf den Fall $\alpha_{\mu\nu} \geqq 0$.

steht, daß A eine H-Matrix ist. Wir beweisen allerdings wesentlich mehr. Diese Bedingung ist bereits *notwendig* für die Konvergenz des Einzelschrittverfahrens für die Begleitmatrix A_B von A bei jeder Wahl von ξ_1 und η. Andererseits konvergiert, wenn diese Bedingung erfüllt ist, das Einzelschrittverfahren und sogar allgemeiner dasjenige der Gruppeniteration für die Matrix A *bei freier Steuerung*; man darf dabei sogar in einem gewissen Umfang *unvollständige Relaxation* zulassen. Genauer werden wir die folgenden Sätze beweisen:

Satz II. *Sei*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & \cdots & -m_{1n} \\ -m_{21} & m_{22} & \cdots & -m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \tag{24}$$

eine Matrix, bei der die Elemente der Hauptdiagonale positiv und die übrigen Elemente nicht positiv sind. Konvergiert das zyklische Einzelschrittverfahren (*mit dem Ansatz* (7)) *für diese Matrix für jede Wahl des Ausgangsvektors* ξ_1, *so ist* M *eine* M*-Matrix*[5]).

Satz III. *Sei* A *eine* H*-Matrix und* σ_A *ihre Jacobische Konstante. Sei* t_1 *eine beliebige positive Zahl* <1 *und* t_2 *und* t *beliebige positive Zahlen mit*

$$t_2 < \frac{1-\sigma_A}{1+\sigma_A}, \qquad \sigma_A < t < 1 . \tag{25}$$

Dann konvergiert die Einzelschrittiteration und allgemeiner die Gruppeniteration bei freier Steuerung für jede Wahl von ξ_1 *und* η. *Dabei ist auch die unvollständige Relaxation mit den folgenden Einschränkungen zugelassen: Bei der Einzelschrittiteration müssen die Faktoren* q_κ *in* (9) *der Bedingung*

$$t_1 \leqq q_\kappa \leqq 1 + t_2 \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) \tag{26^1}$$

genügen. Bei der Gruppeniteration müssen die Faktoren $q_\kappa^{(\alpha)}$ *in* (17) *der Bedingung genügen*

$$|\, q_\kappa^{(\alpha)} - 1 \,| \leqq t_2 , \tag{26^2}$$

bzw., wenn nur Unterrelaxation zugelassen wird, das heißt alle $q_\kappa^{(\alpha)} \leqq 1$ *bleiben, der Bedingung*

$$1 \geqq q_\kappa^{(\alpha)} \geqq t . \tag{26^3}$$

---

[5]) II hängt zusammen mit dem Satz VI von Stein und Rosenberg in [28a], und der Beweis von II ließe sich durch Benutzung dieses Satzes abkürzen.

Setzt man

$$\tau_\kappa = \sum_\alpha | r_\alpha^{(\kappa)} | \ , \tag{27}$$

wo die Summation über alle beim κ-ten Schritt aktiven Indizes α erstreckt wird, so konvergiert

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \tau_\kappa \ . \tag{28}$$

In diesem Satze ist insbesondere ein Resultat von H. Geiringer [9], p. 377, enthalten, bei dem die Folge der Leitindizes aus Gruppen von je n Elementen besteht und jede dieser Gruppen eine Permutation von $1, 2, \ldots, n$ ist.

10. Die zu den obigen Sätzen analogen Aussagen im Falle der Jacobischen Iteration lassen sich im Satze zusammenfassen :

Satz IV. *Notwendig und hinreichend, damit das Jacobische Verfahren* (10) *für die Matrix A absolut konvergiert, ist, daß A eine H-Matrix ist. Dann gilt zugleich für die in Nr. 2 eingeführte Größe $\sigma(A)$:*

$$\sigma(A) \leqq \sigma_A \ . \tag{29}$$

Eine ähnliche Rolle wie in (29) für die Jacobische Iteration spielt die Jacobische Konstante σ_A von A auch für die zyklische Einzelschrittiteration. Namentlich ist die Nekrassoff-Zahl N_A von A höchstens gleich σ_A. Indessen ist diese Tatsache nur ein Spezialfall eines wesentlich allgemeineren Sachverhalts, der sich auf eine allgemeinere Klasse von linearen Iterationsverfahren bezieht.

Werden die Elemente einer Matrix A mit verschiedenen nicht negativen Zahlen $\leqq 1$ multipliziert, so nennen wir die so entstehende Matrix eine *abgestumpfte Teilmatrix von A* (truncated part of A), entstanden aus A durch den Prozeß des *Abstumpfens* (truncation).

Es werde nun die nicht singuläre Matrix A abzählbar unendlich oft als Summe von zwei abgestumpften Teilmatrizen U_κ, V_κ,

$$A = U_\kappa + V_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) \ , \tag{30}$$

dargestellt, wobei die Determinante von U_κ nicht verschwindet. Wir betrachten dann die Folge linearer Operationen :

$$\xi'_{\kappa+1} = H_\kappa \xi'_\kappa + (E - H_\kappa) A^{-1} \eta' \ , \qquad H_\kappa = - U_\kappa^{-1} V_\kappa \tag{31}$$

und fragen, wann die so entstehende Iteration konvergiert.

Der Ansatz (31) fällt in die Klasse der von G. E. Forsythe [5a] als allgemeine (nicht stationäre) lineare Iterationsprozesse bezeichneten Prozesse. Ein solcher Prozeß wird durch den Ansatz

$$\xi'_{\kappa+1} = H_\kappa \xi'_\kappa + (E - H_\kappa) A^{-1} \eta' \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) \tag{32}$$

gegeben, in dem aber H_κ eine *beliebige* Matrix n-ter Ordnung ist. Sind alle H_κ miteinander identisch $= H$, so spricht man von einem *stationären linearen Iterationsprozeß*. In diesem letzteren Falle ist für die Konvergenz des Prozesses für eine beliebige Wahl von ξ_1 und η notwendig und hinreichend, daß die absoluten Beträge aller Fundamentalwurzeln von H kleiner als 1 sind. Eine analoge Konvergenzbedingung für den allgemeinsten *nicht stationären* linearen Iterationsprozeß wird in der Nr. 30 hergeleitet.

Wird nun im Ansatz (31) eine *feste* Zerlegung (30) zugrunde gelegt, so entsteht eine Klasse von stationären Iterationsprozessen, in die zum Beispiel die zyklische Einzelschrittiteration gehört. Diese Iteration entspricht dem Ansatz $U = L + D$, $V = R$ in den Bezeichnungen von (12). Dabei wird allerdings in Abänderung der Bezeichnungen der Nr. 2 mit $\xi_{\kappa+1}$ der Vektor bezeichnet, der aus ξ_κ nach *Ausführung des vollständigen Zyklus von n Einzelschritten entsteht.*

In die gleiche Klasse gehört die *zyklische Gruppeniteration*, bei der die n Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ ein für allemal in k Gruppen zerlegt werden und nacheinander auf die Komponenten der einzelnen Gruppen die Gruppeniteration angewandt wird, wobei die Reihenfolge der Gruppen auch fest bleibt. Es ist leicht zu sehen, daß das Resultat der Ausübung eines vollständigen Zyklus dieser Iterationen gleichfalls in der Form (31) geschrieben werden kann, wobei sogar insbesondere die Diagonalelemente von V alle verschwinden. Hierher gehören auch die von H. Geiringer [9], p. 373–376, diskutierten Iterationsprozesse.

Für die Iterationsprozesse vom Typus (31) gelten nun die beiden folgenden Sätze, mit denen der Satz II und der Kern des Satzes III weitgehend verallgemeinert werden:

Satz V. *Es sei A eine Matrix mit positiven Diagonalelementen und reellen nicht positiven Elementen außerhalb der Hauptdiagonale. Gilt für A die Zerlegung*

$$A = U + V$$

in zwei abgestumpfte Teilmatrizen U, V, wo U eine M-Matrix ist und alle Diagonalelemente von V verschwinden, so ist für die Konvergenz des statio-

nären linearen Iterationsprozesses

$$\xi'_{\kappa+1} = H\,\xi'_\kappa + (E - H)A^{-1}\eta' \;, \qquad H = -\,U^{-1}V \;,$$

für beliebige ξ_1 und η notwendig, daß A eine M-Matrix ist [6]).

Satz VI. *Es sei A eine H-Matrix n-ter Ordnung. Dann konvergiert der Iterationsprozeß* (31) *für eine beliebige Folge der Zerlegungen* (30), *sofern dabei die Diagonalelemente von V_κ verschwinden, und es gilt für jedes $\varepsilon > 0$:*

$$|\,\xi_{\kappa+1} - \xi_\kappa\,| = O((\sigma_A + \varepsilon)^\kappa) \qquad (\kappa \to \infty) \;. \tag{33}$$

11. Die Beweise der angegebenen Sätze beruhen auf den Eigenschaften der H- und M-Matrizen. Wir stellen in Nr. 12 einige Hilfssätze aus einer früheren Abhandlung des Verfassers zusammen, von denen im folgenden Gebrauch gemacht wird. Der Hilfssatz D der Nr. 13 über einparametrige Scharen von M-Matrizen ist die Grundlage des Beweises des Satzes I, der in Nr. 15 erbracht wird. In Nr. 14 werden verschiedene einfache Kriterien für H-Matrizen zusammengestellt, die in den Anwendungen unserer Resultate nützlich sein dürften. In den Nummern 16, 17 wird ein einfacher, aber recht nützlicher Hilfssatz über nicht negative Matrizen bewiesen, aus dem ein neues Analogon der Gerschgorinschen Kreise zur Abgrenzung der Eigenwerte (Satz VII, Nr. 18) hergeleitet werden kann. Der wichtige Hilfssatz F der Nummern 19 bis 20 führt sofort zum Beweis der Sätze V (Nr. 20), II und IV (Nr. 21). Der Beweis des Satzes III zieht sich durch die Nummern 22–27 hin, während in Nr. 28 im Anschluß daran der lineare Charakter der Konvergenz im Falle der Relaxation aufgewiesen wird. In den Nummern 29, 30 wird ein allgemeines Konvergenzkriterium für nicht stationäre lineare Iterationsprozesse hergeleitet (Satz VIII, Nr. 30). Endlich wird in der Nr. 33 der Satz VI aus dem in den Nummern 31,32 entwickelten Hilfssatz G gefolgert. Der Satz IX, der in der Nr. 34 formuliert und bewiesen wird, bezieht sich auf die charakteristischen Eigenschaften einer M-Matrix.

Mit dem Hilfssatz H (Nr. 35) und dem Satz X (Nr. 36) wird in einem gewissen Umfang die Frage beantwortet, inwiefern für eine M-Matrix der nicht negative Typus ihrer Inversen charakteristisch ist. Endlich zeigen wir in den Nummern 37, 38, daß aus unseren Sätzen die Konvergenz des sogenannten Hardy-Croßschen „Verfahrens der sukzessiven Kompensation" für einen kontinuierlichen Balken in sehr allgemeinen Fällen unmittelbar folgt.

---

[6]) Der Beweis von V ließe sich stark abkürzen durch Benutzung des Satzes VI in [28a].

§ 1. Eigenschaften von M- und H-Matrizen (Nrn. 12–18)

12. Wir stellen zunächst einige Eigenschaften von M-Matrizen zusammen, von denen im folgenden Gebrauch zu machen sein wird[7]).

Hilfssatz A. *Sei*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & \cdots & -m_{1n} \\ -m_{21} & m_{22} & \cdots & -m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \tag{34}$$

eine M-Matrix. Gilt dann für eine Matrix $A = (a_{\mu\nu})$

$$|a_{\mu\mu}| \geqq m_{\mu\mu}, \quad |a_{\mu\nu}| \leqq m_{\mu\nu} \quad (\mu \neq \nu; \mu, \nu = 1, \ldots, n), \tag{35}$$

so gilt

$$||A|| \geqq |M| > 0 .$$

Dies ist ein Teil von Satz I unserer oben zitierten Abhandlung [17], p. 69. In A steckt eine Art *Monotonieprinzip: Die Determinante von M wird nicht verkleinert, wenn die Elemente von M monoton wachsen, jedoch so, daß die Elemente außerhalb der Hauptdiagonale nicht positiv werden.* Zugleich bleibt dabei M eine M-Matrix, wie man sich sofort überzeugt, wenn man A auf die Hauptminoren von M anwendet.

Daraus folgt aber offenbar, wenn man alle $m_{\mu\nu}$, die zugleich außerhalb der Hauptdiagonale und außerhalb eines festen Hauptminors von M liegen, durch Nullen ersetzt:

Hilfssatz B. *In einer M-Matrix sind alle Hauptminoren aller Ordnungen positiv.*

---

[7]) Wir benutzen diese Gelegenheit, um einige sinnstörende Versehen zu berichtigen, die sich in unsere Abhandlung [17] eingeschlichen haben; p. 70, 9. Zeile von oben, lies $|h_{\mu\mu}|$ statt $h_{\mu\mu}$; p. 73, Formel (13), lies $|h_{\mu\mu}|$ statt $h_{\mu\mu}$ sowie $\sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n}$ anstatt $\sum\limits_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n}$; p. 73, 4. Zeile von unten, lies 1881 statt 1899; p. 76, in der Formel (18), ist das Produktzeichen rechts wegzulassen; p. 86, in der Formel (11, 1), ist links y_μ durch $m_{\mu\mu} y_\mu$, und rechts 1 durch M zu ersetzen; p. 96, 6. Zeile von unten, lies $\frac{s_1}{s_2}$ statt $\frac{s_2}{s_1}$. Endlich ist auf p. 74 der Satz IV versehentlich für *beliebige* uneigentliche M-Determinanten formuliert worden. Es ist daher p. 74 in der 13. Zeile von oben nach „Jede“ einzuschalten: „eigentliche oder irreduzible uneigentliche“. Ferner ist der vorletzte Absatz auf p. 74, von „Es sei . . .“ bis „charakterisiert“ ganz zu streichen und ebenso p. 87 der erste Absatz der Nr. 13, also von „Ist nun . . .“ bis „M-Determinante ist“.

Die Tatsache B steckt implizite in den Überlegungen auf p. 78 von [17], ohne indessen dort ausdrücklich formuliert worden zu sein.

Hilfssatz C. *Die inverse Matrix zu einer M-Matrix hat durchweg nicht negative Elemente. Gelten für eine Matrix A die Relationen* (35), *so werden die Elemente von* A^{-1} *majorisiert durch diejenigen von* M^{-1}.

Dies ist der erste Teil von Satz III unserer Abhandlung [17], p. 71.

13. **Hilfssatz D.** *Es mögen in der Matrix*

$$C(\kappa) = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & \dots & -c_{1n} \\ -c_{21} & c_{22} & \dots & -c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \tag{36}$$

die n^2 *Elemente stetig von einem reellen Parameter* κ *abhängen, der ein gewisses zusammenhängendes (offenes oder abgeschlossenes oder halboffenes) Intervall J durchläuft, und es mögen für alle* κ *aus J die Relationen gelten*:

$$|C(\kappa)| \neq 0\,, \quad c_{\mu\mu} > 0\,, \quad c_{\mu\nu} \geqq 0 \quad (\mu \neq \nu\,;\, \mu, \nu = 1, \dots, n). \tag{37}$$

Ist dann $C(\kappa)$ *für ein* κ_0 *aus J eine M-Matrix, so gilt dasselbe für alle* κ *aus J*.

Zum *Beweis* nehmen wir an, daß $C(\kappa_1)$ für ein κ_1 aus J keine M-Matrix sei. Es sei etwa, um Ideen zu fixieren, $\kappa_1 > \kappa_0$. Dann gibt es, wenn wir κ von κ_0 bis κ_1 wachsen lassen, ein κ_2 derart, daß bei κ_2 die Eigenschaft von C, eine M-Matrix zu sein, „zum erstenmal aufhört". Dies bedeutet, daß $C(\kappa)$ im offenen Intervall (κ_0, κ_2) noch durchweg eine M-Matrix ist, während dies für das Intervall $(\kappa_0, \kappa_2 + \varepsilon)$ für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ nicht mehr stimmt. Da dann links von κ_2 die Determinanten von $C(\kappa)$ und von allen Hauptminoren $\geqq 0$ sind, gilt dasselbe auch für $\kappa = \kappa_2$. Wegen (37) ist aber dann $|C(\kappa_2)| > 0$, so daß $C(\kappa_2)$ eine M-Matrix ist. Nach der obigen Tatsache B sind aber die Determinanten aller Hauptminoren von $C(\kappa_2)$ *positiv*, und daher ist $C(\kappa_2)$ auch in einer gewissen rechtsseitigen Umgebung von κ_2 eine M-Matrix. Mit diesem Widerspruch ist der Hilfssatz D bewiesen.

Offenbar ist durch D zugleich das folgende allgemeine Prinzip bewiesen:

Es möge durch endlich viele nur von den absoluten Beträgen der Elemente abhängige Bedingungen eine Klasse von Matrizen n-ter Ordnung definiert werden, in der alle Matrizen stetig zusammenhängen und regulär sind. Ent-

hält diese Matrizenklasse eine H-Matrix, so sind sämtliche Matrizen der Klasse H-Matrizen.

14. Wir stellen noch verschiedene, nur von den absoluten Beträgen der Elemente abhängige Kriterien zusammen, durch die gewisse Klassen von H-Matrizen gekennzeichnet werden.

Jede der folgenden Bedingungen a) bis h) ist *hinreichend*, damit die $(n \times n)$-Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ eine H-Matrix ist.

Wir setzen

$$Z_\mu = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} | a_{\mu\nu} | \,, \qquad S_\mu = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} | a_{\nu\mu} | \,. \tag{38}$$

a) *Es ist*

$$Z_\mu < | a_{\mu\mu} | \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \,. \tag{39^1}$$

b) *Es ist*

$$S_\mu < | a_{\mu\mu} | \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \,. \tag{39^2}$$

c) *Es gilt für ein* α *mit* $0 \leqq \alpha \leqq 1$:

$$Z_\mu^\alpha \, S_\mu^{1-\alpha} < | a_{\mu\mu} | \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \,. \tag{40}$$

d) *Es gilt für ein* α *mit* $0 \leqq \alpha \leqq 1$ *und alle Paare verschiedener Indizes* ν, μ:

$$Z_\mu^\alpha \, S_\mu^{1-\alpha} \, Z_\nu^\alpha \, S_\nu^{1-\alpha} < | a_{\mu\mu} | | a_{\nu\nu} | \,. \tag{41}$$

In den Relationen (40) und (41) darf man die Produkte vom Typus $Z_\mu^\alpha \, S_\mu^{1-\alpha}$ durch die Summen ersetzen: $\alpha Z_\mu + (1 - \alpha) S_\mu$.

e) *Man setze für ein* $p > 1$

$$Z_\mu^{(p)} = \Big[\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} | a_{\mu\nu} |^p \Big]^{\frac{1}{p}} \,, \qquad S_\mu^{(p)} = \Big[\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} | a_{\nu\mu} |^p \Big]^{\frac{1}{p}} \,. \tag{42}$$

Es gilt dann für $q = \dfrac{p}{p-1}$ *eine der beiden Relationen:*

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{| a_{\mu\mu} |}{Z_\mu^{(p)}} \right)^q} < 1 \,, \qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{| a_{\mu\mu} |}{S_\mu^{(p)}} \right)^q} < 1 \,. \tag{43}$$

f) *Man setze*

$$m_\mu = \operatorname{Max} (| a_{\mu 1} |, \ldots, | a_{\mu \mu-1} |, | a_{\mu \mu+1} |, \ldots, | a_{\mu n} |) \quad (\mu = 1, \ldots, n) \,. \tag{44}$$

Es gilt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu}{| a_{\mu\mu} | + m_\mu} < 1 \,. \tag{45}$$

Natürlich gilt dasselbe, wenn man Zeilen mit Kolonnen vertauscht.

g) *Man setze*

$$\operatorname*{Max}_{\mu>\nu}\left|\frac{a_{\mu\nu}}{a_{\mu\mu}}\right| = m\ , \qquad \operatorname*{Max}_{\mu<\nu}\left|\frac{a_{\mu\nu}}{a_{\mu\mu}}\right| = M\ . \tag{46}$$

Es gilt

$$m<M\ , \qquad \frac{m}{(1+m)^n} < \frac{M}{(1+M)^n}\ .\,^{8)} \tag{47}$$

Eine äquivalente Formulierung erhält man, wenn man in (46) $a_{\mu\mu}$ durch $a_{\nu\nu}$ ersetzt.

h) *Man setze*

$$p_1 = \left|\frac{1}{a_{11}}\right| \sum_{\nu>1} |a_{1\nu}|\ ,$$

$$p_\mu = \left|\frac{1}{a_{\mu\mu}}\right| \Big[\sum_{\kappa<\mu} |a_{\mu\kappa}|\, p_\kappa + \sum_{\lambda>\mu} |a_{\mu\lambda}|\Big] \qquad (\mu = 2, \ldots, n)\ . \tag{48}$$

Dann gilt

$$p_\mu < 1 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)\ .\,^{9)} \tag{48^1}$$

15. *Beweis des Satzes* I (vgl. Nr. 8). Man beachte, daß eine M-Matrix durch Multiplikation ihrer Zeilen mit positiven Zahlen wieder in eine M-Matrix übergeht, so daß A dann und nur dann eine H-Matrix ist, wenn in den Bezeichnungen von (21) bis (23) $E - \Omega$ eine M-Matrix ist. Man betrachte die Schar der Matrizen

$$C(\kappa) = E - \kappa\Omega \qquad \left(0 \leqq \kappa \leqq \frac{1}{\sigma_A}\right). \tag{49}$$

Nach der Definition von σ_A verschwindet die Determinante $|\lambda E - \Omega|$ für $\lambda > \sigma_A$ nicht, so daß

$$|E - \kappa\Omega| \neq 0 \qquad \left(0 \leqq \kappa < \frac{1}{\sigma_A}\right) \tag{50}$$

gilt. Ist nun $\sigma_A < 1$, so gilt (50) sicher für $0 \leqq \kappa \leqq 1$, und da $C(0)$ eine M-Matrix ist, gilt dies nach dem Hilfssatz D der Nr. 13 auch für $\kappa = 1$, so daß A eine H-Matrix ist.

---

[8]) Vgl. für die Kriterien a) bis g) die Abhandlungen [18], [19], [20].

[9]) Das entsprechende Kriterium für die Konvergenz des zyklischen Einzelschrittverfahrens ist von Nekrassoff in [13], [16] gegeben worden, zugleich mit verschiedenen Verallgemeinerungen. Daß daher dieses Kriterium auch für den H-Charakter der Matrix A hinreichend ist, folgt aus dem Satz II.

Wird umgekehrt A als ein H-Matrix vorausgesetzt, so ist die Determinante $|E - \Omega|$ positiv, und dasselbe gilt nach dem Hilfssatz A von Nr. 12 mit $0 \leqq \kappa \leqq 1$ für $|E - \kappa\Omega|$. Dann bleibt die Determinante $|\lambda E - \Omega| \neq 0$ für $\lambda \geqq 1$, so daß $\sigma_A < 1$ sein muß. Damit ist der Satz I bewiesen.

16. Wir werden im folgenden als eine *positive Diagonalmatrix* eine Matrix bezeichnen, deren Diagonalelemente alle positiv sind, während alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen verschwinden. Es sei ferner daran erinnert, daß eine Matrix K *reduzibel* heißt, wenn sie sich durch geeignete kogrediente Umstellung der Zeilen und Kolonnen auf die Form bringen läßt $\begin{pmatrix} Q & O \\ S & R \end{pmatrix}$, wo Q und R quadratische Matrizen sind, während O aus lauter Nullen besteht. Ist K nicht reduzibel, so heißt K *irreduzibel*. K und K' sind beide zugleich reduzibel oder beide zugleich irreduzibel. Unter der Benutzung dieser Bezeichnungen läßt sich der folgende Hilfssatz formulieren:

Hilfssatz E. *Ist $K = (k_{\mu\nu})$ eine nicht negative Matrix mit der Maximalwurzel σ, so läßt sich für jedes positive ε eine solche positive Diagonalmatrix P mit den Diagonalelementen $p_\mu = p_{\mu\mu}$ finden, daß in der nicht negativen Matrix PKP^{-1} in jeder Kolonne die Elementensumme $\sigma + \varepsilon$ nicht übersteigt. Ist aber K irreduzibel, so läßt sich P so wählen, daß in PKP^{-1} jede der Kolonnensummen den Wert σ hat.*

17. *Beweis des Hilfssatzes* E. An den in Nr. 8 erwähnten Perronschen Satz anknüpfend, hat Frobenius [6], p. 459, bewiesen, daß wenn eine nicht negative Matrix $K = (k_{\mu\nu})$ irreduzibel ist, zu ihrer Maximalwurzel σ ein positiver Eigenvektor $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ von K' gehört, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_{\nu\mu} p_\nu = \sigma p_\mu \,, \qquad p_\mu > 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{51}$$

gilt. Aus (51) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu k_{\nu\mu} p_\mu^{-1} = \sigma \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \,,$$

womit die Behauptung von E für irreduzible Matrizen bewiesen ist.

Wir dürfen von nun an annehmen, daß die Behauptung von E für alle Matrizen niedrigerer Ordnung als n bewiesen ist. Ist nun K reduzibel, so kann man K in der Form $\begin{pmatrix} Q & O \\ S & R \end{pmatrix}$ schreiben, wo O aus Nullen besteht, während Q und R quadratische Matrizen sind.

Ist m die Ordnung von R, so kann man nach der Annahme m positive Zahlen $p_{n-m+1}, \ldots, p_n$ und $n-m$ positive Zahlen $q_1, \ldots, q_{n-m}$ so finden, daß

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} q_\nu k_{\nu\mu} q_\mu^{-1} \leqq \sigma + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\mu = 1, \ldots, n-m) , \tag{52}$$

$$\sum_{\nu=n-m+1}^{n} p_\nu k_{\nu\mu} p_\mu^{-1} \leqq \sigma + \varepsilon \qquad (\mu = n-m+1, \ldots, n) \tag{53}$$

gilt. Setzt man dann

$$\operatorname*{Max}_{\mu=1,\ldots,n-m} \sum_{\nu=n-m+1}^{n} p_\nu k_{\nu\mu} q_\mu^{-1} = u, \quad \varrho = \frac{2u}{\varepsilon} + 1, \quad p_\mu = \varrho q_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, n-m),$$

so folgt aus (52)

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu k_{\nu\mu} p_\mu^{-1} \leqq \sigma + \varepsilon \qquad (\mu = 1, \ldots, n-m) ,$$

und dies zusammen mit (53) liefert den Beweis von E.

Die dem Hilfssatz E analoge Tatsache für *Zeilensummen* folgt durch den Übergang zu transponierten Matrizen.

18. Aus E folgt leicht der

Satz VII. *Man ersetze in der Matrix A alle Diagonalelemente durch Nullen und alle übrigen Elemente durch ihre absoluten Beträge. Hat die entstehende Matrix R die Maximalwurzel σ, so liegen alle Fundamentalwurzeln von A in der Gesamtheit der Kreise*[10])

$$| \lambda - a_{\mu\mu} | \leqq \sigma \qquad (\mu = 1, \ldots, n) . \tag{54}$$

Beweis. Sei ε eine beliebige positive Zahl. Man wende das Lemma E auf die Matrix R an und bestimme die positive Diagonalmatrix P so, daß die Kolonnensummen in PRP^{-1} die Größe $\sigma + \varepsilon$ nicht übersteigen. Die entsprechende Matrix PAP^{-1} hat die gleichen Fundamentalwurzeln und die gleichen Diagonalelemente wie A. Wendet man daher auf PAP^{-1} den Satz von Gerschgorin an, so folgt, daß alle Fundamentalwurzeln von A in den Kreisen um die $a_{\mu\mu}$ mit dem Radius $\sigma + \varepsilon$ liegen. Wegen der Willkür von ε folgt die Behauptung nunmehr sofort.

---

[10]) Der Satz VII ist ein gewisses Analogon zum Satz von Gerschgorin, für den sowie für die anschließende Literatur auf den Bericht von O. Taußky-Todd [29] verwiesen sei.

§ 2. Charakterisierung der absolut konvergenten Iterationsverfahren

(Nrn. 19—28)

19. **Hilfssatz F.** *Es sei*

$$A = U + V \tag{55}$$

eine Zerlegung der Matrix A mit nicht verschwindenden Diagonalelementen in die Summe von zwei abgestumpften Teilmatrizen, wobei U eine H-Matrix ist und alle Diagonalelemente von V verschwinden. Man bilde die entsprechende Zerlegung von A_B in (22)

$$A_B = U_B + V_B \tag{56}$$

und setze

$$H = -U^{-1}V \ ; \qquad \tilde{H} = -U_B^{-1}V_B \ . \tag{57}$$

Seien ϱ_0 und ϱ die Fundamentalwurzeln von H und $\tilde{H}$ mit maximalen absoluten Beträgen.

Dann wird H majorisiert durch $\tilde{H}$:

$$H \ll \tilde{H} \ , \tag{58}$$

ϱ ist reell und $\geqq 0$ und es gilt

$$|\varrho_0| \leqq \varrho \ . \tag{59}$$

Ist $\varrho < 1$ oder $\sigma_A < 1$, so gilt

$$\varrho \leqq \sigma_A < 1 \ . \tag{60}$$

20. *Beweis.* Werden die Zeilen von A und damit von U und V mit von Null verschiedenen Konstanten multipliziert, so werden H und $\tilde{H}$ nicht geändert und ebenso bleiben ϱ_0, ϱ und σ_A unverändert. Wir können daher von Anfang an annehmen, daß alle Diagonalelemente von A und U gleich 1 sind. ϱ_0 und ϱ sind bzw. die Wurzeln mit maximalen absoluten Beträgen der Gleichungen

$$|\lambda U + V| = 0 \ , \qquad |\lambda U_B + V_B| = 0 \ ,$$

die wir in der Form

$$\left| E + (U - E) + \frac{1}{\lambda} V \right| = 0 \ , \tag{61}$$

$$\left| E + (U_B - E) + \frac{1}{\lambda} V_B \right| = 0 \tag{62}$$

schreiben können.

Da $\dfrac{1}{\varrho}$ die Wurzel mit dem minimalen absoluten Betrag der Gleichung $| E + (U_B - E) + \lambda V_B | = 0$ ist, folgt, daß keine der Matrizen der Schar

$$E + (U_B - E) + \kappa V_B \; ; \qquad \left(0 \leqq \kappa < \frac{1}{|\varrho|}\right) \tag{63}$$

eine verschwindende Determinante hat. Und da für $\kappa = 0$ die Matrix (63) nach der Annahme eine M-Matrix ist, folgt aus dem Hilfssatz D von Nr. 13, daß alle Matrizen (63) M-Matrizen sind. Andererseits aber ist (63) sicher keine M-Matrix mehr für $\kappa = \dfrac{1}{|\varrho|}$, da sonst nach dem Hilfssatz A die Determinante von (63) keine Wurzel mit dem absoluten Betrag $\dfrac{1}{|\varrho|}$ haben könnte. Daher verschwindet die Determinante von (63) für $\dfrac{1}{|\varrho|}$, und wir sehen, daß $\varrho \geqq 0$ ist.

Ist $\varrho = 0$, $| V_B | = 0$, so sind die Matrizen (63) M-Matrizen für alle positiven κ, und nach dem Hilfssatz A von Nr. 12 kann die Gleichung (61) nur für $\lambda = 0$ befriedigt werden. Da aber dann $| V | = 0$ ist, folgt in diesem Falle $\varrho_0 = 0$.

Ist aber $\varrho > 0$, so folgt aus dem Hilfssatz A, daß (61) sicher nicht befriedigt werden kann, solange $\dfrac{1}{|\lambda|} < \dfrac{1}{\varrho}$ ist, so daß (59) auch in diesem Falle gilt.

Da U eine H-Matrix ist, wird nach dem Hilfssatz C, U^{-1} durch U_B^{-1} majorisiert, woraus (58) folgt.

Nehmen wir nun an, daß $\varrho < 1$ ist, so ist nach dem Hilfssatz A die Matrix (63) für $\kappa = 1$ eine M-Matrix, und daher ist die Determinante von $E + \theta(U_B - E) + \theta V_B$ für $| \theta | \leqq 1$ nicht 0. Dann hat aber die Gleichung $| \lambda E + U_B - E + V_B | = 0$ keine Lösungen vom absoluten Betrage $\geqq 1$, und wir sehen, daß $\sigma_A < 1$ ist.

Nehmen wir aber an, daß $\sigma_A < 1$ ist, so haben die Matrizen der Schar

$$E + s\,(U_B - E) + s\,V_B \qquad \left(0 \leqq s < \frac{1}{\sigma_A}\right) \tag{64}$$

von Null verschiedene Determinanten, und da $s = 0$ einer M-Matrix entspricht, sind alle Matrizen (64) M-Matrizen. Hätten wir nun

$$\varrho > \sigma_A \,, \qquad \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{\sigma_A} \,,$$

so könnte man eine Zahl s so finden, daß

$$\frac{1}{\varrho} < s < \frac{1}{\sigma_A}\,, \qquad 1 < s$$

gilt, und da die entsprechende Matrix (64) eine M-Matrix ist, erhalten wir noch eine M-Matrix, wenn wir in (64) den Faktor s bei $U_B - E$ durch 1 und den Faktor s bei V_B durch $\frac{1}{\varrho}$ ersetzen. Dann aber wäre

$$\left| E + (U_B - E) + \frac{1}{\varrho} V_B \right| \neq 0\,,$$

entgegen der Definition von ϱ. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes F vollendet.

Der Satz V (vgl. Nr. 10) folgt unmittelbar aus dem Hilfssatz F und dem Satz I der Nr. 8, der ja bereits in der Nr. 15 bewiesen wurde, da im Konvergenzfalle die Zahl ϱ für die Matrix $H = -U^{-1}V$ kleiner als 1 sein muß und dann auch $\sigma_A < 1$ folgt.

21. Aus dem Hilfssatz F folgen aber auch die Sätze II und IV (vgl. die Nrn. 9 und 10) sofort.

Beweis des Satzes II. Man wende unter den Annahmen des Satzes II den Hilfssatz F an und bilde $U = U_B$ aus M, indem man alle Elemente von M rechts von der Hauptdiagonale durch Nullen ersetzt. Hier ist nach Voraussetzung $\varrho_0 = \varrho < 1$, und daher $\sigma_M < 1$, so daß M nach Satz I eine M-Matrix ist.

Beweis des Satzes IV. Man wende den Hilfssatz F an, indem als U die aus Diagonalelementen von A bestehende Diagonalmatrix genommen wird. Dann ist das zugehörige ϱ gerade gleich σ_A. Konvergiert das Jacobische Iterationsverfahren für A_B, so läuft es nach dem an die Gleichung (11) anknüpfenden Kriterium darauf hinaus, daß $\varrho = \sigma_A < 1$ ist, und nach dem Satz I ist A eine H-Matrix. Zugleich folgt (29) aus (59). Ist aber A eine H-Matrix, also $\sigma_A = \varrho < 1$, so konvergiert das Jacobische Verfahren für A_B und daher wegen (29) absolut.

22. *Beweis des Satzes* III (vgl. Nr. 9). Offenbar kommt es darauf an, zu zeigen, daß unter den Bedingungen des Satzes die Folge der Residualvektoren ϱ_κ gegen 0 konvergiert. Ist $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ die Lösung von (1), so hat die Verschiebung des Ursprungs um ξ den Effekt, daß in (1) der Vektor η verschwindet, während die durch (3) gegebenen Residualvektoren sich nicht ändern. *Wir können daher* $\eta = 0$ *annehmen.* Werden

dann die Zeilen von A mit festen, von 0 verschiedenen Faktoren multipliziert, so werden die Komponenten von ϱ_κ in (4) mit denselben festen Faktoren multipliziert. Man kann so erreichen, daß alle $a_{\nu\nu} \equiv A_\nu = 1$ werden.

Werden ferner die Komponenten x_ν von ξ vermöge $x_\nu = p_\nu x'_\nu$ transformiert, wo die p_ν nicht verschwinden, so werden die Kolonnen von A mit entsprechenden Faktoren multipliziert, während die Residualvektoren sich nicht ändern. Nach dem Hilfssatz E der Nr. 16 kann aber auf diese Weise erreicht werden, daß die Summen der absoluten Beträge in den Kolonnen von $A-E$ für ein beliebig kleines positives ε die Schranke $\sigma_A + \varepsilon$ nicht übersteigen. Und man kann dieses ε so klein wählen, daß die Ungleichungen (25) noch richtig bleiben, wenn in ihnen σ_A durch $\sigma_A + \varepsilon$ ersetzt wird. Wir *können daher* ohne Beschränkung der Allgemeinheit *über A annehmen, daß für ein konstantes s*:

$$A_\nu = a_{\nu\nu} = 1 \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \; ,$$

$$\sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{n} | a_{\mu\nu} | < s \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \; , \tag{65}$$

$$t_2 < \frac{1-s}{1+s} \; , \qquad s < t < 1 \tag{66}$$

gilt.

Bei der Beurteilung der „Größe“ eines Vektors werden wir anstatt der „Euklidischen Länge“ von dem Jordanschen „*écart*“ Gebrauch machen, indem wir für den Vektor $\zeta = (z_1, \ldots, z_n)$ setzen

$$| \zeta |_1 = | z_1 | + \cdots + | z_n | \; .$$

Offenbar gilt auch für diese Größe die Dreiecksungleichung. Es sei ferner daran erinnert, daß im folgenden α und γ durch *sämtliche aktiven* und β durch *sämtliche passiven* Indizes laufen.

Wir setzen nun für jedes $\kappa = 1, 2, \ldots$

$$\tau_\kappa = \sum_\alpha | r_\alpha^{(\kappa)} | \tag{67}$$

und wollen zuerst zeigen, daß eine positive, nur von s, t, t_1 und t_2 abhängige positive Konstante u existiert, derart daß für $\kappa = 1, 2, \ldots$

$$| \varrho_{\kappa+1} |_1 - | \varrho_\kappa |_1 \leqq - u \tau_\kappa \; , \tag{68}$$

$$| r_\beta^{(\kappa+1)} - r_\beta^{(\kappa)} | \leqq 2 \tau_\kappa \tag{69}$$

gilt. (69) wird in der Nr. 24 bewiesen, während der Beweis von (68) sich bis zur Nr. 26 hinzieht.

23. Wir benutzen im folgenden die Bezeichnungen der Nr. 6.

Um zu einer Abschätzung der Größe der Zahlen δ_α, die sich aus den Gleichungen (16) bestimmen, zu gelangen, setzen wir

$$m_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}| \qquad (\mu \neq \nu) \ , \qquad m_{\mu\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \ , \tag{70}$$

wo nach (65)

$$\sum_{\mu=1}^{n} m_{\mu\nu} \leqq s \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{71}$$

ist, und denken uns beim κ-ten Schritt die Größen Δ_α, berechnet aus dem linearen System

$$\Delta_\alpha = \sum_\gamma m_{\alpha\gamma} \Delta_\gamma + |r_\alpha^{(\kappa)}| \ , \tag{72}$$

das beim κ-ten Schritt dem System (16) entsprechend gebildet ist.

Dann folgt aus dem Hilfssatz C der Nr. 12

$$|\delta_\alpha^{(\kappa)}| \leqq \Delta_\alpha \ . \tag{73}$$

Setzen wir konform mit (67)

$$\sum_\alpha \Delta_\alpha = \sigma \ , \qquad \sum_\alpha |r_\alpha^{(\kappa)}| = \tau \ , \tag{74}$$

wo der einfacheren Schreibweise halber der Index κ bei σ und τ weggelassen wird, so folgt aus (72)

$$\sigma \geqq \tau \ . \tag{75}$$

Durchläuft nun, wie schon in Nr. 6 gesagt, β alle passiven Indizes, so gilt

$$\sum_\alpha \sum_\beta m_{\beta\alpha} \Delta_\alpha = \sum_\alpha \Delta_\alpha \sum_{\mu=1}^{n} m_{\mu\alpha} - \sum_\alpha \sum_\gamma m_{\gamma\alpha} \Delta_\alpha$$

und daher, wegen (71), (72), (74),

$$\sum_\alpha \sum_\beta m_{\beta\alpha} \Delta_\alpha \leqq s\sigma - \sigma + \tau \ . \tag{76}$$

Aus (4) folgt, wenn μ von 1 bis n läuft,

$$r_\mu^{(\kappa+1)} - r_\mu^{(\kappa)} = (x_\mu^{(\kappa+1)} - x_\mu^{(\kappa)}) + \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq \mu}}^{n} a_{\mu\nu} (x_\nu^{(\kappa+1)} - x_\nu^{(\kappa)}) \ . \tag{77}$$

24. Ist hier μ ein *passiver Index* β, so folgt aus (14) und (17)

$$r_\beta^{(\kappa+1)} - r_\beta^{(\kappa)} = \sum_\alpha a_{\beta\alpha} q_\kappa^{(\alpha)} \delta_\alpha^{(\kappa)} \ ,$$

und daher wegen (26^1), (26^2), (73)

$$|r_\beta^{(\kappa+1)}| - |r_\beta^{(\kappa)}| \leqq |r_\beta^{(\kappa+1)} - r_\beta^{(\kappa)}| \leqq (1 + t_2) \sum_\alpha m_{\beta\alpha} \Delta_\alpha \ . \tag{78}$$

Wird hier über alle passiven Indizes β summiert, so ergibt sich wegen (76)

$$\sum_\beta |r_\beta^{(\kappa+1)}| - \sum_\beta |r_\beta^{(\kappa)}| \leqq (1+t_2) \sum_\beta\sum_\alpha m_{\beta\alpha} \Delta_\alpha \leqq (1+t_2)(s\sigma - \sigma + \tau) \ . \tag{79}$$

Da die Ausdrücke rechts in (78) nicht negativ sind, folgt zugleich aus (79)

$$| r_\beta^{(\kappa+1)} - r_\beta^{(\kappa)} | \leqq (1+t_2)(s\sigma - \sigma + \tau) \qquad (g \geqq 1) \ , \tag{80}$$

womit, wegen

$$s\sigma - \sigma + \tau = \tau - (1-s)\sigma \leqq \tau - (1-s)\tau = s\tau \ ,$$

(69) bewiesen ist.

In (78), (79) und (80) ist, wenn nur Unterrelaxation zugelassen wird, der Faktor $1+t_2$ durch 1 zu ersetzen.

Für $g = 1$ können wir offenbar die $q_\kappa^{(\alpha)}$ mitführen:

$$\sum_\beta | r_\beta^{(\kappa+1)} | - \sum_\beta | r_\beta^{(\kappa)} | \leqq q_\kappa^{(\alpha)}(s\sigma - \sigma + \tau) \qquad (g = 1) \ . \tag{79'}$$

25. Ist dagegen μ in (77) ein *aktiver Index* α, so folgt

$$\begin{aligned} r_\alpha^{(\kappa+1)} - r_\alpha^{(\kappa)} &= q_\kappa^{(\alpha)} \delta_\alpha^{(\kappa)} + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_{\alpha\gamma} q_\kappa^{(\gamma)} \delta_\gamma^{(\kappa)} \\ &= q_\kappa^{(\alpha)} [\delta_\alpha^{(\kappa)} + \sum_{\gamma \neq \alpha} a_{\alpha\gamma} \delta_\gamma^{(\kappa)}] + \sum_\gamma (q_\kappa^{(\gamma)} - q_\kappa^{(\alpha)}) a_{\alpha\gamma} \delta_\gamma^{(\kappa)} \ . \end{aligned}$$

Wegen (16) ist hier der Faktor in der eckigen Klammer gleich $-r_\alpha^{(\kappa)}$, so daß wir schließlich erhalten

$$r_\alpha^{(\kappa+1)} - (1 - q_\kappa^{(\alpha)}) r_\alpha^{(\kappa)} = \sum_\gamma (q_\kappa^{(\gamma)} - q_\kappa^{(\alpha)}) a_{\alpha\gamma} \delta_\gamma^{(\kappa)} \ , \tag{81}$$

und daher wegen (26^2), (73), (72):

$$| r_\alpha^{(\kappa+1)} | - | 1 - q_\kappa^{(\alpha)} || r_\alpha^{(\kappa)} | \leqq 2t_2 \sum_\gamma m_{\alpha\gamma} \Delta_\gamma = 2t_2(\Delta_\alpha - | r_\alpha^{(\kappa)} |) \ . \tag{82}$$

Hier ist allerdings der Faktor $2t_2$, der die aus (26^2) folgende Schranke für $| q_\kappa^{(\alpha)} - q_\kappa^{(\gamma)} |$ darstellt, durch den aus (26^3) folgenden Faktor $(1-t)$ zu ersetzen, wenn dabei nur die Unterrelaxation zugelassen wird. Im Falle der Einzelschrittiteration $(g = 1)$ kann (82) durch

$$| r_\alpha^{(\kappa+1)} | - | 1 - q_\kappa^{(\alpha)} || r_\alpha^{(\kappa)} | = 0 \qquad (g = 1) \tag{82'}$$

ersetzt werden. Summiert man (82) über α, so folgt, wegen (74),

$$\sum_\alpha | r_\alpha^{(\kappa+1)} | - \sum_\alpha | r_\alpha^{(\kappa)} | \leqq \sum_\alpha (| q_\kappa^{(\alpha)} - 1 | - 1) | r_\alpha^{(\kappa)} | + 2t_2(\sigma - \tau) \ . \tag{83}$$

Hier sind die Faktoren $| q_\kappa^{(\alpha)} - 1 | - 1$, wegen ($26^2$), $\leqq -(1 - t_2)$, während, wenn nur die Unterrelaxation zugelassen wird, wegen (26^3), $| q_\kappa^{(\alpha)} - 1 | - 1 = - q_\kappa^{(\alpha)} \leqq -t$ ist.

26. Daher folgt durch Addition von (79) und (83)

$$| \varrho_{\kappa+1} |_1 - | \varrho_\kappa |_1 \leqq -(1 - t_2)\,\tau + 2t_2(\sigma - \tau) + (1 + t_2)(s\sigma - \sigma + \tau) =$$

$$= -\sigma(1 + s)\left(\frac{1 - s}{1 + s} - t_2\right), \tag{84}$$

und da hier der letzte Klammerfaktor nach (66) positiv ist, folgt schließlich wegen (75) die Relation (68) mit

$$u = (1 - s - t_2(1 + s))\ .$$

Wird nur die Unterrelaxation in Betracht gezogen, so ist (84) zu ersetzen durch

$$| \varrho_{\kappa+1} |_1 - | \varrho_\kappa |_1 \leqq -t\tau + (1 - t)(\sigma - \tau) + s\sigma - \sigma + \tau$$

$$= -\sigma(t - s) \leqq -\tau u\ , \qquad u > 0\ . \tag{85}$$

Für $g = 1$ endlich, also im Falle eines Einzelschrittes, folgt durch Addition von (79') und (82')

$$| \varrho_{\kappa+1} |_1 - | \varrho_\kappa |_1 \leqq q_\kappa^{(\alpha)}(s\sigma - \sigma + \tau) + (| 1 - q_\kappa^{(\alpha)} | - 1)\tau\ .$$

Hier ist der Ausdruck rechts für $q_\kappa^{(\alpha)} \leqq 1$ gleich

$$-q_\kappa^{(\alpha)}(1 - s)\sigma \leqq -q_\kappa^{(\alpha)}(1 - s)\tau$$

und für $q_\kappa^{(\alpha)} > 1$ gleich

$$2(q_\kappa^{(\alpha)} - 1)\tau - q_\kappa^{(\alpha)}(1 - s)\sigma \leqq (q_\kappa^{(\alpha)}(1 + s) - 2)\tau\ .$$

Wegen (26[1]) und (66) folgt schließlich auch in diesem Falle die Relation (68) mit

$$u = \mathrm{Min}\left[t_1(1 - s),\ (1 + s)\left(\frac{1 - s}{1 + s} - t_2\right)\right]. \tag{86}$$

27. Aus (68) folgt nunmehr, daß die nicht negativen Größen $| \varrho_\kappa |_1$ gegen einen Grenzwert ϱ konvergieren. Die demnach konvergente unendliche Reihe

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} (| \varrho_\sigma |_1 - | \varrho_{\sigma+1} |_1) = | \varrho |_1 - \varrho$$

ist eine Majorante von

$$u \sum_{\sigma=1}^{\infty} \tau_\sigma\ ,$$

so daß die Reihe (28) konvergiert. Setzen wir

$$\varepsilon_\kappa = \sum_{\sigma=\kappa}^{\infty} \tau_\sigma\ , \tag{87}$$

so gilt $\varepsilon_\kappa \downarrow 0$ $(\kappa \to \infty)$.

Sei nun β ein beim κ-ten Schritt passiver Index, und es sei λ die erste ganze Zahl $> \kappa$, so daß β beim λ-ten Schritt aktiv wird. Dann folgt nach (69)

$$| r_\beta^{(\lambda)} - r_\beta^{(\kappa)} | \leqq \sum_{\sigma=\kappa}^{\lambda-1} | r_\beta^{(\sigma+1)} - r_\beta^{(\sigma)} | \leqq 2 \sum_{\sigma=\kappa}^{\lambda-1} \tau_\sigma \leqq 2\varepsilon_\kappa ,$$

$$| r_\beta^{(\kappa)} | \leqq 2\varepsilon_\kappa + | r_\beta^{(\lambda)} | .$$

Da aber β beim λ-ten Schritt aktiv ist, gilt

$$| r_\beta^{(\lambda)} | \leqq \tau_\lambda \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \varepsilon_\kappa ,$$

so daß wir schließlich erhalten

$$| r_\beta^{(\kappa)} | < 3\varepsilon_\kappa . \tag{88}$$

Für die beim κ-ten Schritt aktiven Indizes α gilt

$$\sum_\alpha | r_\alpha^{(\kappa)} | = \tau_\kappa \leqq \varepsilon_\kappa ,$$

so daß

$$| \varrho_\kappa |_1 \leqq (3n - 2)\varepsilon_\kappa , \tag{89}$$

$\varrho_\kappa \to 0$ folgt, womit der Beweis des Satzes III vollendet ist.

28. Im Falle der Relaxationsvorschrift etwa vom Southwellschen Typus[11]) kann man über die Geschwindigkeit der Konvergenz etwas mehr aussagen. Werden beim κ-ten Schritt die g_κ aktiven Indizes so gewählt, daß die $| r_\alpha^{(\kappa)} |$ die größten sind, so gilt

$$\tau_\kappa \geqq \frac{g_\kappa}{n} | \varrho_\kappa |_1 ,$$

und daher, wenn wir von der unvollständigen Relaxation absehen, so daß $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $u = 1 - s$ gesetzt werden kann,

$$| \varrho_{\kappa+1} |_1 \leqq \left(1 - \frac{g_\kappa}{n}(1 - s)\right) | \varrho_\kappa |_1 . \tag{90}$$

Die Konvergenz ist hier wenigstens vom sogenannten *linearen Typus*, und zwar, wie man leicht sieht, auch *vor* der Transformation, durch die s nahe an σ_A herangebracht wurde.

---

[11]) In diesem Falle ist für eine positive symmetrische Matrix und $q = 1$ der Konvergenzbeweis von Temple [30] erbracht worden.

§ 3. Verallgemeinerungen und Ergänzungen (Nrn. 29–38)

29. Wir betrachten nunmehr den allgemeinsten nichtstationären linearen Prozeß zur Auflösung von (1):

$$\xi'_{\kappa+1} = H_\kappa \xi'_\kappa + (E - H_\kappa) A^{-1} \eta' \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) . \tag{91}$$

Bei der Untersuchung der Konvergenz eines solchen Prozesses darf man $\eta = 0$ annehmen, da dies durch eine Translation erreicht werden kann, sofern $| A | \neq 0$ ist, so daß es sich um die Bedingung dafür handelt, daß,

$$G_\kappa = H_\kappa H_{\kappa-1} \ldots H_1 \tag{92}$$

gesetzt, für einen beliebigen Vektor ξ stets

$$\lim_{\kappa \to \infty} G_\kappa \xi' = 0 \tag{93}$$

gilt. Dabei kann man allerdings nicht mehr, wie im Falle eines stationären Prozesses, wo alle H_κ gleich sind, die *Fundamentalwurzeln* der H_ν benutzen.

Wir führen folgende Definitionen ein: Für eine Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ verstehen wir unter $\Lambda(A) = \Lambda_2(A)$ die Quadratwurzel aus der größten Fundamentalwurzel der Matrix $A A^*$; $\Lambda_\infty(A)$ soll die größte unter den „Zeilensummen" $\sum\limits_{\nu=1}^{n} | a_{\mu\nu} |$ bedeuten und analog $\Lambda_1(A)$ die größte unter den „Kolonnensummen" $\sum\limits_{\mu=1}^{n} | a_{\mu\nu} |$. Ferner setzen wir für den Vektor $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned} | \xi | \equiv | \xi |_2 &= \sqrt{| x_1 |^2 + \cdots + | x_n |^2} \, , \\ | \xi |_1 &= | x_1 | + \cdots + | x_n | \, , \qquad | \xi |_\infty = \operatorname*{Max}_{\mu} | x_\mu | \, . \end{aligned} \tag{94}$$

Dann gilt, wie bekannt und leicht zu sehen ist,

$$| A \xi' |_p \leqq \Lambda_p(A) \, | \xi' |_p \qquad (p = 1, 2, \infty) . \tag{95}$$

Man sieht ebenso leicht ein, daß $\Lambda_p(A)$ die kleinste Konstante c_p ist, für die $| A \xi' |_p \leqq c_p \, | \xi' |_p$ für jeden Vektor ξ ist. Daraus folgt aber wiederum die Ungleichung

$$\Lambda_p(AB) \leqq \Lambda_p(A) \, \Lambda_p(B) \, , \tag{96}$$

die übrigens für $p = 1$ oder ∞ auch durch direkte Rechnung sofort zu bestätigen ist.

30. Nunmehr ist die folgende Tatsache leicht zu beweisen:

Satz VIII. *Notwendig und hinreichend, damit der nicht stationäre Iterationsprozeß* (91) *für jede Wahl von* ξ_1 *und* η *gegen die Lösung* ξ *von* (1) *konvergiert, ist daß* $\Lambda_p(H_\kappa H_{\kappa-1}\ldots H_1) \to 0$ $(\kappa \to \infty)$ *gilt, für einen der drei Werte von* p.

Bemerkung. Daß die Bedingungen $\Lambda_p(G_\kappa) \to 0$ $(\kappa \to \infty)$ für $p = 1, 2, \infty$ äquivalent sind, folgt direkt aus den leicht beweisbaren Ungleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \Lambda_i(A) \leqq \Lambda_2(A) \leqq n \Lambda_i(A) \qquad (i = 1, \infty) \; . \tag{97}$$

Beweis. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus (95). Es möge nun umgekehrt (93) für jeden Vektor ξ gelten. Sei ξ_κ für jedes κ ein Vektor mit $|\xi_\kappa|_p = 1$ und $|G_\kappa \xi'_\kappa|_p = \Lambda_p(G_\kappa)$. Sind $x_1^{(\kappa)}, x_2^{(\kappa)}, \ldots, x_n^{(\kappa)}$ die Komponenten von ξ_κ, so gilt

$$G_\kappa \xi'_\kappa = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(\kappa)} G_\kappa \eta'_\nu \; ,$$

wo η_ν die Koordinatenvektoren sind. Daher gilt, da $|x_\nu^{(\kappa)}| \leqq 1$ ist, wegen $G_\kappa \eta'_\nu \to 0$ $(\kappa \to \infty)$,

$$\Lambda_p(G_\kappa) = |G_\kappa \xi'_\kappa|_p \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |G_\kappa \eta'_\nu|_p \to 0 \qquad (\kappa \to \infty) \; ,$$

w. z. b. w.

Korollar. *Für die Konvergenz von* (91) *ist hinreichend, daß für ein festes* q *mit* $0 < q < 1$ *und einen der Indizes* $p = 1, 2, \infty$ *für alle* κ

$$\Lambda_p(H_\kappa) \leqq q \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) \tag{98}$$

gilt. In der Tat ist mit (98) wegen (96) das Kriterium des Satzes VIII erfüllt[12]).

31. **Hilfssatz G.** *Seien* $P = (p_{\mu\nu})$ *eine nicht negative Matrix der Ordnung* n *mit der Maximalwurzel* $\varrho < 1$ *und* A_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$ *eine Folge von Matrizen, die sämtlich durch* P *majorisiert werden. Es sei jedes* A_κ *in eine Summe von zwei abgestumpften Teilmatrizen* U_κ, V_κ, $A_\kappa = U_\kappa + V_\kappa$ *zerlegt, derart, daß* $E - U_\kappa$ *nicht singulär ist. Man bilde die Matrizen*

$$H_\kappa = (E - U_\kappa)^{-1} V_\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) \tag{99}$$

und die Produkte

$$G_\kappa = H_\kappa H_{\kappa-1} \ldots H_1 \; . \tag{100}$$

---

[12]) Der Übergang vom Kriterium des Satzes VIII zum Fall der *stationären Iteration* kann mit Hilfe des Theorems 1 von We. Gautschi [8] leicht hergestellt werden.

Dann sind die absoluten Beträge der Fundamentalwurzeln der H_κ höchstens gleich ϱ und die absoluten Beträge der Fundamentalwurzeln der G_κ höchstens gleich ϱ^κ. Ferner entspricht jedem positiven $\varepsilon < 1 - \varrho$ eine nur von P und ε abhängige Konstante C derart, daß

$$\Lambda_p(G_\kappa) \leqq C(\varrho + \varepsilon)^\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \infty) \tag{101}$$

gilt.

32. *Beweis.* Nach dem Hilfssatz E der Nr. 16, angewandt auf P', läßt sich für ein beliebiges positives $\varepsilon < 1 - \varrho$ eine Diagonalmatrix Q mit den positiven Diagonalelementen $q_1, \ldots, q_n$ so bestimmen, daß

$$\Lambda_\infty(QPQ^{-1}) = s \leqq \varrho + \varepsilon < 1 \tag{102}$$

gilt. Ist dann die Summe der absoluten Beträge der Elemente der ν-ten Zeile in den Matrizen $QU_\kappa Q^{-1}$, $QV_\kappa Q^{-1}$, $QH_\kappa Q^{-1}$ bzw. u_ν, v_ν, h_ν, so gilt

$$u_\nu + v_\nu \leqq s < 1 .$$

Ferner gilt

$$QH_\kappa Q^{-1} = (E - QU_\kappa Q^{-1})^{-1} QV_\kappa Q^{-1}, \quad (E - QU_\kappa Q^{-1}) QH_\kappa Q^{-1} = QV_\kappa Q^{-1},$$
$$QH_\kappa Q^{-1} = QV_\kappa Q^{-1} + (QU_\kappa Q^{-1})(QH_\kappa Q^{-1}) ,$$

und daher, wenn die Elemente der Matrizen $QH_\kappa Q^{-1}$, $QU_\kappa Q^{-1}$, $QV_\kappa Q^{-1}$ bzw. mit $h_{\mu\nu}$, $u_{\mu\nu}$ $v_{\mu\nu}$ bezeichnet werden,

$$h_{\mu\nu} = v_{\mu\nu} + \sum_{\lambda=1}^{n} u_{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n) ,$$
$$|h_{\mu\nu}| \leqq |v_{\mu\nu}| + \sum_{\lambda=1}^{n} |u_{\mu\lambda}| |h_{\lambda\nu}| ,$$

und, wenn über $\nu = 1, \ldots, n$ summiert wird,

$$h_\mu \leqq v_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n} h_\lambda |u_{\mu\lambda}| . \tag{103}$$

Sei $h = \Lambda_\infty(QH_\kappa Q^{-1}) = \operatorname*{Max}_\mu h_\mu = h_m$, dann folgt aus (103) für $\mu = m$ wegen $u_m \leqq s < 1$:

$$h \leqq v_m + h u_m ,$$

$$h \leqq \frac{v_m}{1 - u_m}, \quad 1 - h \geqq 1 - \frac{v_m}{1 - u_m} = \frac{1 - u_m - v_m}{1 - u_m} \geqq 1 - s ,$$

$$h = \Lambda_\infty(QH_\kappa Q^{-1}) \leqq \Lambda_\infty(QPQ^{-1}) = s < \varrho + \varepsilon , \tag{104}$$

und ferner wegen (96)

$$\Lambda_\infty(QG_\kappa Q^{-1}) \leqq (\varrho + \varepsilon)^\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots) . \tag{105}$$

Aus (104) folgt nach der bekannten Frobeniusschen Ungleichung, daß die Fundamentalwurzeln von $QH_\kappa Q^{-1}$ und daher auch von H_κ absolut $\leqq \varrho + \varepsilon$ und daher $\leqq \varrho$ sind; aus (105) folgt ebenso, daß die Fundamentalwurzeln von G_κ absolut $\leqq (\varrho + \varepsilon)^\kappa$ und daher $\leqq \varrho^\kappa$ sind. Ist ferner der Quotient der größten der Zahlen q_μ durch die kleinste gleich c, so folgt aus (105)

$$A_\infty(G_\kappa) \leqq A_\infty(Q)\, A_\infty(Q^{-1})(\varrho + \varepsilon)^\kappa = c(\varrho + \varepsilon)^\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots)\ ,$$

woraus, wegen (97), die Behauptungen (101) sofort folgen.

33. Der Satz VI (vgl. Nr. 10) folgt nunmehr leicht. Es genügt wiederum anzunehmen, daß $\eta = 0$ und alle Diagonalelemente von A gleich 1 sind. Wendet man den Hilfssatz G der Nr. 31 auf $A_\kappa \equiv E - A$ und die Matrix $P = E - A_B$ an, so folgt aus (58) und (101)

$$A_\infty(H_\kappa \ldots H_1) \leqq A_\infty(\tilde{H}_\kappa \ldots \tilde{H}_1) \leqq C(\varrho + \varepsilon)^\kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots)\ ,$$

wenn allgemein $\tilde{H}_\kappa = -\, U_{\kappa_B}^{-1} V_{\kappa_B}$ gesetzt wird.

Dann folgt aber die Behauptung des Satzes VI und namentlich die Relation (33) aus (95), angewandt auf $H_\kappa \ldots H_1$.

34. **Satz IX.** *Sei A eine Determinante vom Typus*

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \tag{106}$$

wo sämtliche $\alpha_{\mu\nu} \geqq 0$ und sämtliche koaxiale Unterdeterminanten, ebenso wie die Determinante A selbst nicht negativ sind. Ist dann eines der Diagonalelemente $\alpha_{\nu\nu} = 0$, so verschwindet A und zugleich verschwindet jeder der $n!$ Terme in der Entwicklung der Determinante A.

Beweis. Da die Behauptung für $n = 1$ trivial ist, dürfen wir beim Beweis annehmen, daß der Satz für kleinere Werte von n bereits bewiesen ist.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\alpha_{11} = 0$ ist. Bekanntlich entspricht jeder Permutation P der n Indizes $1, 2, \ldots, n$ ein Term der Determinante A, den wir mit T_P bezeichnen wollen. Unter diesen Permutationen wollen wir vor allem diejenigen herausgreifen, die einen n-gliedrigen Zyklus C_n darstellen. Ist etwa

$$C_n = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}, \kappa_n)\ ,$$

so gilt $T_{C_n} = -\alpha_{\kappa_1\kappa_2}\ldots\alpha_{\kappa_n\kappa_1} \leqq 0$. In der Tat, der diesem Term nach der allgemeinen Determinantentheorie zugeordnete Vorzeichenfaktor ist $(-1)^{n-1}$, während von den n Faktoren der Faktor $(-1)^n$ beigesteuert wird. Wir haben nun

$$A = \sum_{C_n} T_{C_n} + \sum_{P*} T_{P*}\ , \tag{107}$$

wo die erste Summe über alle n-gliedrigen Zyklen erstreckt wird, während in der zweiten Summe die Permutationen $P*$ jedesmal wenigstens zwei Zyklen enthalten. Ist nun eine Zyklenzerlegung der Permutation $P*$ etwa

$$P* = C_1 C_2 \ldots C_m\ ,$$

so möge der Index 1 etwa im Zyklus C_1 stecken. Das dem Zyklus C_1 entsprechende Produkt der $\alpha_{\mu\nu}$ steckt aber dann mit einem gewissen Vorzeichen in einer koaxialen Unterdeterminante von A, in der auch das Element α_{11} vorkommt und auf die daher unser Satz bereits angewandt werden darf. Daher verschwindet dieses C_1 entsprechende Produkt und daher gilt auch $T_{P*} = 0$ für jedes $P*$.

Nunmehr sind aber alle Terme rechts in (107) $\leqq 0$, woraus, wegen $A \geqq 0$ folgt, daß jedes der $T_{C_n} = 0$ ist, und der Satz IX ist bewiesen[13]).

35. **Hilfssatz H.** *Sei A eine Matrix vom Typus*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & -\alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{108}$$

wo für $\mu \neq \nu$ sämtliche $\alpha_{\mu\nu} \geqq 0$, alle $\alpha_{\mu\mu}$ reell sind und $|A| \neq 0$ ist.

I. *Gibt es dann einen Vektor $\xi(x_1, \ldots, x_n)$ mit nicht negativen x_ν, so daß alle Komponenten des Vektors $A\xi'$ positiv sind, so ist A eine M-Matrix.*

II. *Gibt es einen Vektor $\xi(x_\nu)$ mit nicht negativen und nicht sämtlich verschwindenden x_ν derart, daß alle Komponenten von $A\xi'$ nicht negativ sind, und ist die Matrix A irreduzibel, so ist A eine M-Matrix.*

---

[13]) Man übersieht leicht, daß die gleiche Überlegung einen etwas allgemeineren Satz beweist: Eine Determinante $A = (a_{\mu\nu})$ läßt sich in der Form darstellen

$$A = \sum_{C_n} T_{C_n} + \sum c \Delta_k \Delta_l \ldots \Delta_m\ ,$$

wo die T_{C_n} alle Terme von A durchlaufen, die n-gliedrigen Zyklen entsprechen, während in der zweiten Summe rechts die Koeffizienten c gewisse ganze Zahlen sind und die Ausdrücke $\Delta_k, \Delta_l, \ldots, \Delta_m$ koaxiale Unterdeterminanten von A. Natürlich ist in der zweiten Summe rechts jedes Glied von der Gesamtdimension n in bezug auf die $a_{\mu\nu}$, und die Gesamtheit der in den entsprechenden Faktoren vorkommenden Indizes stimmt mit der Gesamtheit aller Indizes $1, 2, \ldots, n$ überein.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß, wenn alle Komponenten x_ν von ξ positiv sind und diejenigen von $A\xi'$ nicht negativ, dann A sicher eine M-Matrix ist. In der Tat ändert sich der Charakter einer M-Matrix nicht, wenn ihre Kolonnen durch positive Zahlen dividiert werden. Dies bedeutet aber, daß wir von vornherein alle $x_\nu = 1$ voraussetzen können. Die Komponenten von $A\xi'$ werden dann zu den Ausdrücken $\alpha_{\mu\mu} - \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{n} \alpha_{\mu\nu}$. Sind diese Summen nicht negativ, so folgt daraus nach dem bekannten Hadamardschen Satz, daß A und alle Hauptminoren von A nicht negativ sind. Wegen $|A| \neq 0$ ist damit nach der Definition der Nummer 8 der M-Charakter von A erwiesen.

Um nunmehr den Teil I des Hilfssatzes zu beweisen, beachte man, daß unter den Voraussetzungen dieses Teiles die Komponenten von $A\xi$ positiv bleiben, wenn die x_ν um hinreichend kleine Beträge variiert werden. Da sie aber nicht negativ sind, kann man sie dabei sämtlich positiv machen, und die Behauptung von I ergibt sich aus dem Obigen unmittelbar.

Unter den Voraussetzungen des Teiles II des Hilfssatzes können wir durch kogrediente Vertauschung von Zeilen und Kolonnen erreichen, daß die verschwindenden x_ν die Indizes $k+1, \ldots, n$ haben, während die ersten x_ν $(\nu = 1, \ldots, k)$ sämtlich von 0 verschieden sind. Wäre nun $k < n$, so wären die $n-k$ letzten Komponenten von $A\xi'$ gleich $-\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{\mu\nu} x_\nu$ $(\mu = k+1, \ldots, n)$. Da sie aber nach Annahme $\geqq 0$ und die $x_1, \ldots, x_k$ positiv sind, folgt daraus $\alpha_{\mu\nu} = 0$ $(\nu = 1, \ldots, k;$ $\mu = k+1, \ldots, n)$, so daß A reduzibel wäre. Daher verschwindet keines der x_ν, und unsere Behauptung folgt aus dem Obigen.

Korollar. *Ist für eine reelle Matrix A vom Typus* (108), *wo für $\mu \neq \nu$ sämtliche $\alpha_{\mu\nu} \geqq 0$ sind und $|A| \neq 0$ ist, die Inverse A^{-1} nicht negativ, so ist A eine M-Matrix.*

Bildet man in der Tat die Zeilensummen von A^{-1}, so hat für den aus diesen Zeilensummen gebildeten Vektor ξ der Vektor $A\xi'$ sämtliche Komponenten $= 1$, so daß die Behauptung aus dem Fall I des Hilfssatzes H folgt[14]).

36. Aus dem Hilfssatz H läßt sich nunmehr ein Kriterium für den M-Charakter einer reellen Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ herleiten, bei dem keine Annahmen über die Vorzeichen der $a_{\mu\nu}$ zugrunde gelegt werden.

[14]) Für den Fall, daß sowohl die Determinante $|A|$ als auch sämtliche $\alpha_{\mu\nu}$ $(\mu \neq \nu)$ in (108) positiv sind, ergibt sich aus einem Satz von Herrn Kotelanski, [11a], p. 502, daß die Matrix A bereits dann eine M-Matrix ist, wenn eine ganze Zeile oder eine ganze Kolonne von A^{-1} aus nicht negativen Elementen besteht.

Satz X. *Es sei A eine reelle $(n \times n)$-Matrix mit der Eigenschaft, daß sowohl A^{-1} als auch $(A + \lambda E)^{-1}$ für alle hinreichend großen λ lauter nicht negative Elemente hat. Dann ist A eine eigentliche M-Matrix.*

Beweis. Nach dem Hilfssatz H genügt es, zu beweisen, daß alle Elemente von A außerhalb der Hauptdiagonale $\leqq 0$ sind. Da man durch kogrediente Vertauschungen von Zeilen und Kolonnen jedes Element von A in die letzte Kolonne bringen kann, genügt es, unsere Behauptung für die *Elemente der letzten Kolonne* von A zu beweisen.

Wir schreiben nun $|A + \lambda E|$ als eine geränderte Determinante

$$|A + \lambda E| = \begin{vmatrix} b_{\mu\nu} & x_\mu \\ y_\nu & z \end{vmatrix} ,$$

wo $B = (b_{\mu\nu})$ eine quadratische Matrix $(n - 1)$-ter Ordnung ist. Werden die Determinante von B mit $|B|$ und die den Elementen $b_{\mu\nu}$ entsprechenden adjungierten Minoren von B mit $B_{\mu\nu}$ bezeichnet, so liefert die bekannte Entwicklung einer einfach geränderten Determinante für $|A + \lambda E|$ den Ausdruck

$$|A + \lambda E| = z\,|B| - \sum_{\mu,\nu=1}^{n-1} B_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \ .$$

(Vgl. Kowalewski, Determinantentheorie, 1. Aufl., 1909, p. 90.) Daher folgt für das zu y_ν gehörende algebraische Komplement $C(y_\nu)$ von $A + \lambda E$

$$C(y_\nu) = -\sum_{\mu=1}^{n-1} B_{\mu\nu} x_\mu \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \ .$$

Damit ergibt sich aber aus unserer Annahme

$$\sum_{\mu=1}^{n-1} B_{\mu\nu} x_\mu \leqq 0 \qquad (\lambda > \lambda_0, \nu = 1, \ldots, n-1) \ .$$

Entwickeln wir hier den Ausdruck links nach fallenden Potenzen von λ, so beginnt $B_{\nu\nu}$ mit λ^{n-2}, während die $B_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ höchstens vom Grade $n - 3$ sind. Daher liefert die obige Ungleichung für $\lambda \to \infty$

$$x_\nu \lambda^{n-2} + O(\lambda^{n-3}) \leqq 0 \qquad (\lambda \to \infty) \ ,$$

woraus $x_\nu \leqq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ folgt.

Wir sehen, daß in der Tat alle Elemente von A außerhalb der Hauptdiagonalen nicht positiv sind, womit der Satz X bewiesen ist.

37. Die Einzelschrittiteration, wie sie durch die Formeln (6) bis (9) der Nr. 2 beschrieben wird, läßt sich auch auffassen als die Iteration des Residualvektors ϱ_κ, wie er durch (3) und (4) definiert ist. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden $a_{\mu\mu} = A_\mu = 1$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ vor-

aussetzen. Es ergibt sich dann aus (8) und (9)

$$r_\mu^{(\kappa+1)} = r_\mu^{(\kappa)} - q_\kappa a_{\mu N_\kappa} r_{N_\kappa}^{(\kappa)} \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \; . \tag{109}$$

Um (109) vektortheoretisch zu interpretieren, führen wir die zu A gehörenden Kolonnenmatrizen ein:

$$\varDelta_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{\nu-1\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{\nu+1\nu} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n\nu} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \; , \tag{110}$$

wobei also die ν-te Kolonne in $\varDelta_\nu$ mit der ν-ten Kolonne in A übereinstimmt, während alle übrigen Kolonnen von $\varDelta_\nu$ aus Nullen bestehen. Dann läßt sich offenbar (109) in der Form schreiben

$$\varrho'_{\kappa+1} = (E - q_\kappa \varDelta_{N_\kappa}) \, \varrho'_\kappa \; . \tag{111}$$

Man beachte andererseits, daß wenn $|A| \neq 0$ ist, durch geeignete Wahl von ξ_1 sich $\varrho'_1 = A \xi'_1 - \eta'$ einem beliebigen Vektor gleichmachen läßt. Wenn daher das Einzelschrittverfahren bei einer geeigneten Steuerung für die Matrix A für jede Wahl von ξ_1 konvergiert, bedeutet dies, daß die durch (111) definierte Vektorenfolge ϱ_κ für jede Wahl des Anfangsvektors ϱ_1 gegen 0 konvergiert. Ist daher A insbesondere eine H-Matrix und genügen die q_κ der Bedingung (26^1) des Satzes III, so konvergiert die durch (111) erzeugte Vektorenfolge ϱ_κ für jede Wahl von ϱ_1 gegen 0, sofern die Folge der Leitindices N_κ so gewählt wird, daß dabei jeder Index unendlich oft auftritt.

38. Aus dem obigen Resultat ergibt sich nun insbesondere, daß das sogenannte Hardy-Croßsche Verfahren der sukzessiven Kompensation für einen kontinuierlichen Balken (*Hardy-Cross Balancing Process for a Continuous Beam*) stets konvergiert, wenn dabei jede Stütze unendlich oft benutzt wird[15]).

In der Tat, im Falle des Hardy-Croßschen Verfahrens, wie es von Oldenburger [16a] formuliert wird, hat man zu setzen

$$a_{\nu\nu} = 1 \, , \; a_{\nu-1\nu} = \sigma_\nu \, , \; a_{\nu+1\nu} = \tau_\nu \, , \; a_{\mu\nu} = 0 \;\; (|\mu - \nu| > 1) \;\; (\nu = 1, \ldots, n) \, , \tag{112}$$

[15]) Die Konvergenz des Hardy-Croßschen Verfahrens ist von R. Oldenburger [16a] in dem speziellen Falle bewiesen worden, daß das Verfahren abwechselnd auf alle Stützen mit geraden, und sodann auf alle Stützen mit ungeraden Nummern in einer festen Reihenfolge angewandt wird.

wobei

$$\sigma_\nu = s_\nu(1 - T_\nu) \quad (\nu = 2, \ldots, n), \quad \tau_\nu = r_\nu T_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n-1) \tag{113}$$

gilt für geeignete T_ν, r_ν, s_ν, die den Bedingungen

$$0 \leqq T_\nu \leqq 1, \quad 0 \leqq r_\nu < 1, \quad 0 \leqq s_\nu < 1 \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{114}$$

genügen. Dann ist die Kolonnensumme der (nicht negativen) Elemente von A außerhalb der Hauptdiagonalen offenbar gleich

$$\sigma_\nu + \tau_\nu < 1 - T_\nu + T_\nu = 1 \quad (\nu = 2, \ldots, n-1)$$

und gleich $\tau_1 < 1$ oder $\sigma_n < 1$ bzw. für $\nu = 1$ oder $\nu = n$. Daher ist die zugehörige Matrix A nach dem Kriterium b) von Nr. 14 eine M-Matrix.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Aitken, A. C.*, Studies in Practical Mathematics, V. On the iterative solution of a system of linear equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 63 (1950) p. 52–60.

[2] *Argelander*, Über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf einen besondern Fall. Astr. Nachr. Nr. 491 (1844), p. 163.

[3] *Cesari, L.*, Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. Rendic. Accad. Naz. dei Lincei (62) 25 (1937), p. 422–428.

[4] *Collatz, L.*, Über die Konvergenzkriterien bei Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Math. Z. 53 (1950), p. 149–161.

[5] *Dedekind, R.*, Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1901), 45–59; Werke, 2. Bd., p. 293–306, namentlich p. 300–301.

[5a] *Forsythe, G. E.*, Theory of Selected Methods of Finite Matrix Inversion and Decomposition. National Bureau of Standards Report INA 52–5 vom 13. August 1951.

[6] *Frobenius, G.*, Über Matrizen aus nicht-negativen Elementen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math.-Nat. Kl. (1912), p. 456–477.

[7] *Gauß, C. F.*, Werke, Bd. IX, p. 278–281.

[8] *Gautschi, Werner*, On the asymptotic behavior of the powers of matrices. Duke Math. J. 20 (1953), p. 127–140.

[9] *Geiringer, H.*, On the Solution of Systems of Linear Equations by Certain Iterative Methods. Reißner Anniversary Volume (1949), p. 365–393.

Geiringer, H., siehe von Mises, R.

[10] *Gerling, C. L.*, Die Ausgleichsrechnung usw. Hamburg-Gotha 1843.

[10a] *Gerling, C. L.*, Beiträge zur Geographie von Kurhessen. Cassel 1831–1839.

[10b] *Gerling, C. L.*, Pothenotsche Aufgabe. Marburg 1840.

[10c] *Gantmacher, F. R.*, Die Theorie der Matrizen. Moskau 1953. (Russisch.) p. 338 bis 339.

[11] *Jacobi, C. G. F.*, Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen. Astr. Nachr. Nr. 523 (1845), p. 297; Werke, 3. Bd., p. 467–478.

[11a] *Kotelanski, D. M.*, Über einige Eigenschaften von Matrizen mit positiven Elementen (russisch). Mosk. Math. Samml. XI (LXXIII) (1953), p. 497–506.

[12] *Mehmke, R.*, Über das Seidelsche Verfahren, um lineare Gleichungen bei einer sehr großen Anzahl der Unbekannten durch sukzessive Annäherung aufzulösen. Mosk. Math. Samml. XVI (1892), p. 342–345.

[13] *Mehmke, R. und Nekrassoff, P. A.*, Auflösung eines linearen Systems von Gleichungen durch sukzessive Annäherung (zwei Briefe von Mehmke deutsch, zwei Briefe von Nekrassoff russisch). Mosk. Math. Samml. XVI (1892), p. 437–459.

[14] *von Mises, R. und Geiringer, H.*, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Zusammenfassender Bericht, Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), p. 58–77 und p. 152–164.

[15] *Nekrassoff, P. A.*, Die Bestimmung der Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadraten für sehr große Anzahl der Unbekannten (russisch). Mosk. Math. Samml. XII (1884), p. 189–204.

[16] *Nekrassoff, P. A.*, Zum Problem der Auflösung von linearen Gleichungssystemen mit einer großen Anzahl von Unbekannten durch sukzessive Approximationen. Ber. Petersburger Akad. der Wissenschaften LXIX (1892), Nr. 5, p. 1–18. (Russisch.)

Nekrassoff, P. A., siehe Mehmke.

[16a] *Oldenburger, R.*, Convergence of Hardy-Cross' Balancing Process. J. Appl. Mechanics 7 (1940), p. 166–170.

[17] *Ostrowski, A.*, Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. 10 (1937), p. 69–96.

[18] *Ostrowski, A.*, Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen. Compositio Math. 9 (1951), p. 209–226.

[19] *Ostrowski, A.*, Sur les conditions générales pour la régularité des matrices. Rendic. di Mat. e. d. s. Applicaz. (V) 10 (1951), p. 156–168.

[20] *Ostrowski, A.*, Sur les matrices peu différentes d'une matrice triangulaire. C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), p. 1558–1560.

[21] *Perron, O.*, Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Math. Ann. 64 (1907), p. 47–52.

[22] *Perron, O.*, Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. 64 (1907), p. 248–263.

[23] *Reich, E.*, On the convergence of the classical iterative method of solving linear simultaneous equations. Ann. Math. Statistics 20 (1949), p. 448–451.

[24] *Schmeidler, W.*, Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik. Berlin 1949.

[25] *Schmidt, R. J.*, On the numerical solution of linear simultaneous equations by an iterative method. Philos. Mag. (7) 32 (1941), p. 369–383.

[26] *Schott, C. A.*, Solution of normal equations by indirect elimination. Report Supt., U. S. Coast Survey (1855), p. 255–264.

[27] *Seidel, L.*, Über ein Verfahren usw. Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. 11 (1874), p. 81–108.

[28] *Southwell, R. V.*, Stress calculations in the frame-works by the method of systematic relaxation of constraints. I, II. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 151 (1935), p. 56–95.

[28a] *Stein, P. and Rosenberg, R. L.*, On the solution of linear simultaneous equations by iteration. J. London Math. Soc. 23 (1948), p. 111–118.

[29] *Taussky-Todd, O.*, A recurring theorem on determinants. Amer. Math. Monthly 56 (1949), p. 672–676.

[30] *Temple, G.*, The general theory of relaxation method applied to linear systems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 169 (1939), p. 476–500.

(Eingegangen den 4. Juni 1954.)