Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1956)

Artikel: Zur Theorie der Viertelsenden Riemannscher Flächen.
Autor: Künzi, Heinz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23904

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Theorie der Viertelsenden Riemannscher Flächen

von Hans Künzi, Zürich

Herrn Prof. Dr. Rolf Nevanlinna zum 60. Geburtstag gewidmet

In einer früheren Arbeit [7][1]) untersuchten wir neben den Riemannschen Flächen, die durch Streckenkomplexe mit endlich vielen einfach- und doppeltperiodischen Enden dargestellt werden, auch solche, die sich aus sogenannten Viertelsenden aufbauen lassen. In der vorliegenden Note möchte ich das Problem der Viertelsenden nochmals unter einem erweiterten Gesichtspunkt angreifen. (Man vergleiche hiezu auch [5].) Das einfachste Viertelsende kann als der vierte Teil des von der $\wp$-Funktion erzeugten Streckenkomplexes aufgefaßt werden (Fig. 1a). Komplizierter aufgebaute Viertelsenden liefern für unsere Betrachtungen keine allgemeineren Resultate, weshalb wir uns vorwiegend auf diesen einfachen Fall beschränken. Die Berandung eines Viertelsendes muß zur Vervollständigung des Komplexes noch mit Doppelbindungen versehen werden [7].

In einem ersten Teil beschäftigen wir uns mit dem Streckenkomplex S_1 der Figur 1b, der dadurch charakterisiert

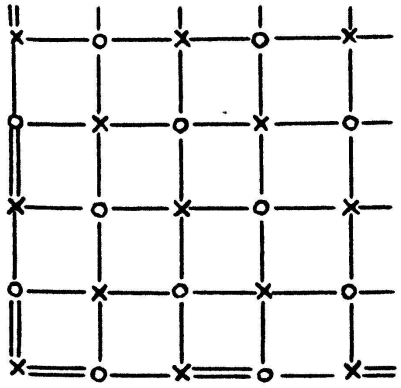

Fig. 1a

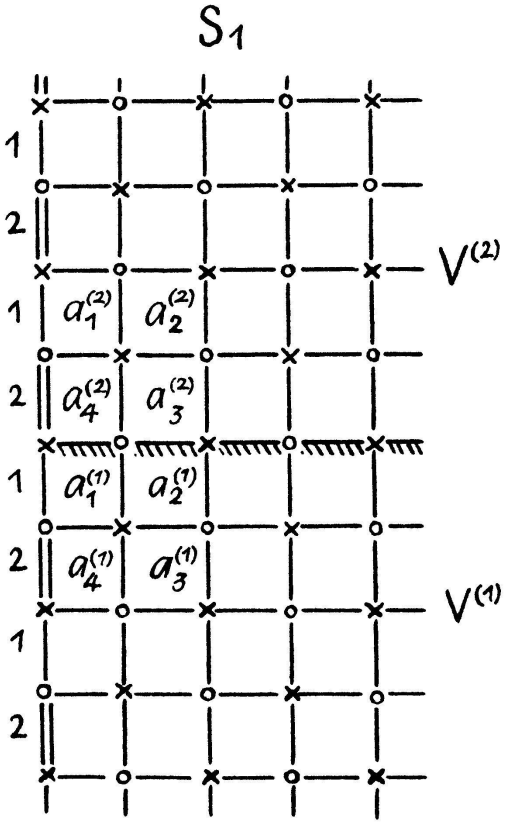

Fig. 1b

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

wird, daß er neben unendlich vielen Windungspunkten 1. Ordnung, nur einen logarithmischen aufweist, der bei S_1 über a_2 liege.

Wir setzen aber voraus, daß die vier Grundpunkte, die dem unteren Viertel $V^{(1)}$ des Streckenkomplexes zugehören und in $a_1^{(1)}$, $a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$, $a_4^{(1)}$ liegen, sich nicht alle decken mit den vier anderen Grundpunkten $a_1^{(2)}$, $a_2^{(2)}$, $a_3^{(2)}$, $a_4^{(2)}$, die dem oberen Viertel $V^{(2)}$ von S_1 entsprechen. 0. B. d. A. wollen wir aber für den logarithmischen Windungspunkt $a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = a_2$ annehmen. Im Grunde genommen dürfen wir sagen, unser Streckenkomplex S_1 setze sich aus zwei Viertelsenden zusammen (man vergleiche hiezu die Arbeit [6]).

Um Wertverteilungsaussagen für die zu S_1 gehörige Riemannsche Fläche zu erhalten, ist es unsere Aufgabe, diese Fläche, vorgegeben durch den Streckenkomplex S_1, zu uniformisieren. Hiezu benützen wir die vom Verfasser in verschiedenen Arbeiten angegebenen Methoden [1, 2, 3, 7] und beschränken uns an dieser Stelle auf eine kurze Erläuterung des Verfahrens.

Mit Hilfe eines geeignet gewählten, elliptischen Integrals, das man allerdings nicht explizite kennen muß, läßt sich das Viertelsende $V^{(1)}$ in ein Sektorgebiet $P^{(1)}$ uniformisieren, welches von zwei Strahlen begrenzt wird, die einen Winkel $\alpha^{(1)}$ bilden. Bei dieser Übertragung sind neben konformen auch bestimmte quasikonforme Abbildungen zu gebrauchen.

Die auftretenden Perioden normieren wir zu

$$\mathfrak{Re}\,\omega_1^{(1)} > 0 \quad \text{und} \quad \omega_2^{(1)} = -2\pi i \text{ [2]}.$$

In gleicher Weise uniformisieren wir den zu $V^{(2)}$ gehörigen Teil in einen Winkelraum $P^{(2)}$ mit dem zugehörigen Öffnungswinkel $\alpha^{(2)}$ und den normierten Perioden

$$\mathfrak{Re}_1^{(2)}\,\omega > 0 \quad \text{und} \quad \omega_2^{(2)} = +2\pi i\ .$$

(Die Perioden sind natürlich durch die vorgegebene Lage der Grundpunkte bestimmt.)

Die Winkel $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$, die zu den Sektorgebieten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ bzw. zu den entsprechenden Periodenparallelogrammen gehören (vgl. Abb. 2a und 2b), errechnen sich aus

$$\alpha^{(1)} = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\mathfrak{Re}\,\omega_1^{(1)}}{\mathfrak{J}\,\omega_1^{(1)}}\right) \quad \text{und} \quad \alpha^{(2)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mathfrak{Re}\,\omega_1^{(2)}}{\mathfrak{J}\,\omega_1^{(2)}}\ .$$

---

[2]) Wir schreiben für die Periode $\omega_2^{(1)} = -2\pi i$ um anzudeuten, daß der in der Fig. 2b angegebene, untere Sektor gemeint wird.

Den logarithmischen Windungspunkt über a_2 bilden wir jetzt mit Hilfe der Logarithmusfunktion in eine Halbebene L ab.

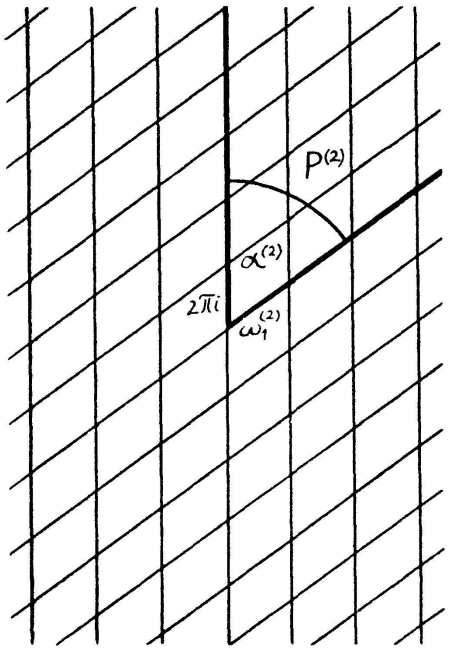

Fig. 2a

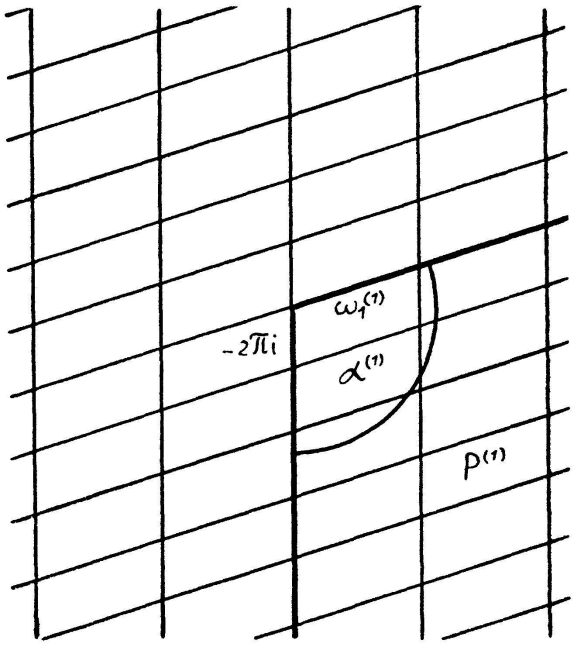

Fig. 2b

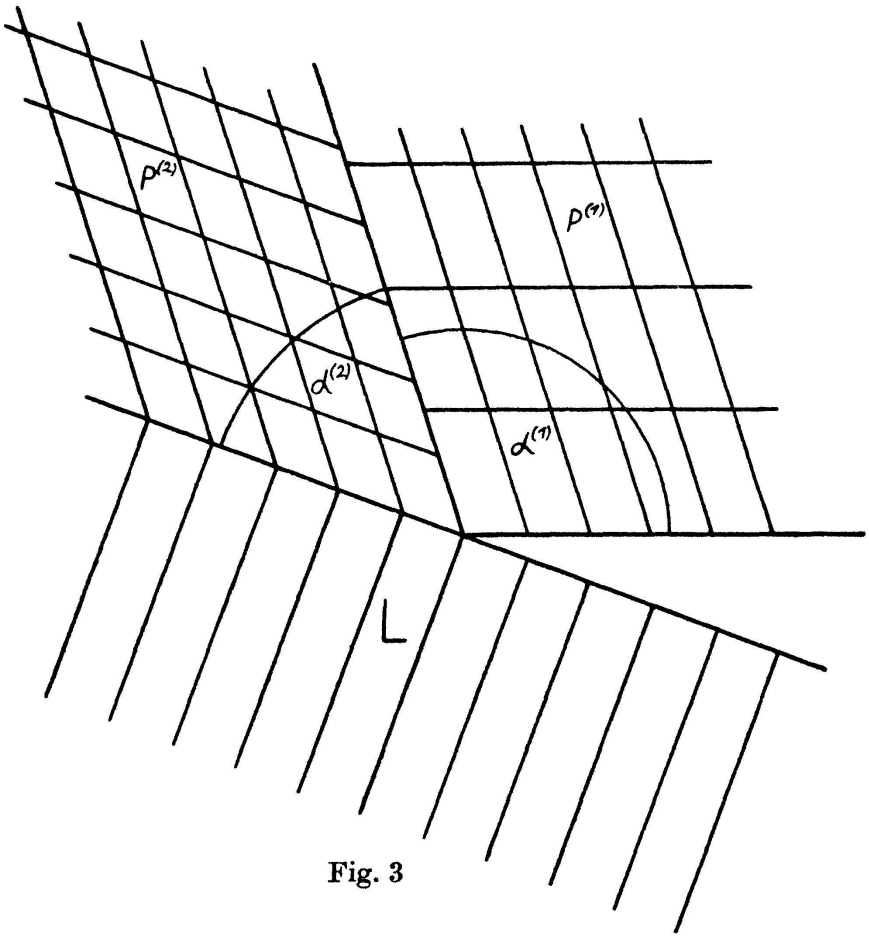

Fig. 3

Nach Anordnung der Fig. 3 lassen sich die beiden Winkelräume $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ wiederum mit Hilfe von quasikonformen Abbildungen [7] zusammen mit der Halbebene L verheften.

Zum Schluß müssen noch die beiden freien Ufer $\operatorname{arc} Z = 0$ und $\operatorname{arc} Z = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi$ identifiziert werden, was wie üblich mit einer passenden Spiralabbildung erfolgt.

Nach [7] ist diese Hilfsabbildung von der Form

$$Z = z^{a+bi} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(1)} + \pi}{2\pi} \quad \text{und} \quad b = -\frac{\log A}{2\pi} \left(A = \left| \frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_1^{(2)}} \right| \right).$$

Bei dieser Abbildung geht ein Kreis $|z| = r$ der z-Ebene in der Z-Ebene in einen Bogen einer logarithmischen Spirale über von

$$Z = r^{\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\pi}{2\pi} \cdot \beta} \quad \text{bis} \quad Z = r^{\frac{\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\pi}{2\pi} \cdot \beta} \cdot A e^{i(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\pi)}$$

mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi} \right)^2.$$

Aus diesen Betrachtungen schließen wir nach [5] und [7] für die Ordnung der erzeugenden Funktion auf den Wert

$$\lambda = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi}{\pi} \cdot \beta \,. \tag{1}$$

Ergebnis:

Die Ordnung λ, die zur Riemannschen Fläche des Streckenkomplexes S_1 gehört, oder zu deren erzeugenden Funktion, liegt zwischen 1 und Unendlich.

Spezialfälle:

1. $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} \to 0$ und

$$|\omega^{(1)}| = |\omega^{(2)}| \,, \quad \text{also} \quad A = 1 \,.$$

Dann gilt für die Ordnung $\lambda \to 1$.

2. $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} = \pi$, hier wird die Ordnung zu $\lambda = 2\beta$ und weiter haben wir speziell für $|\omega_1^{(1)}| = |\omega_1^{(2)}|$ die Ordnung $\lambda = 2$.

Das ist die Ordnung, die wir beim gewöhnlichen doppeltperiodischen Ende in [7] gefunden haben.

Ein analoges Beispiel zu S_1 liefert uns der Streckenkomplex S_2 von Figur 4a, der aus den vier Viertelsenden $V^{(1)}, \ldots V^{(4)}$ zusammengesetzt ist. Die Windungspunkte liegen für

$$
\begin{array}{llll}
V^{(1)} & \text{über} & a_i^{(1)} & \text{und für} \\
V^{(2)} & \text{über} & a_i^{(2)} & \text{und für} \\
V^{(3)} & \text{über} & a_i^{(3)} & \text{und für} \\
V^{(4)} & \text{über} & a_i^{(4)} & .
\end{array}
\qquad (i = 1, \ldots . 4)
$$

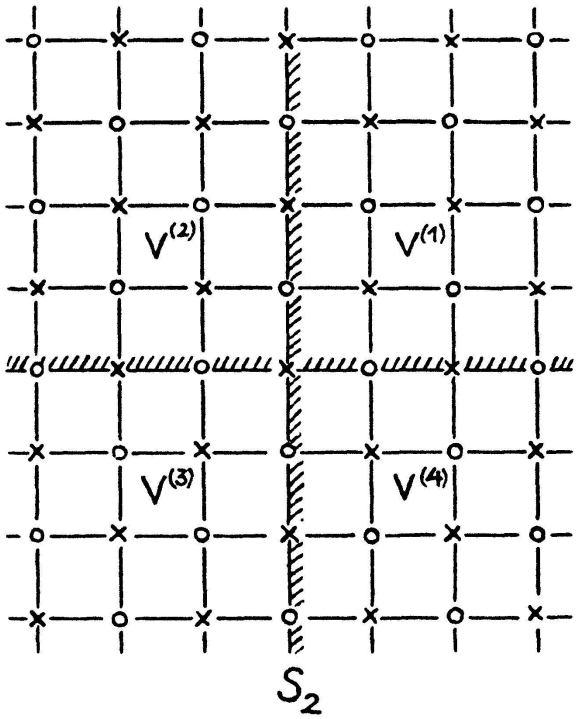

Fig. 4a

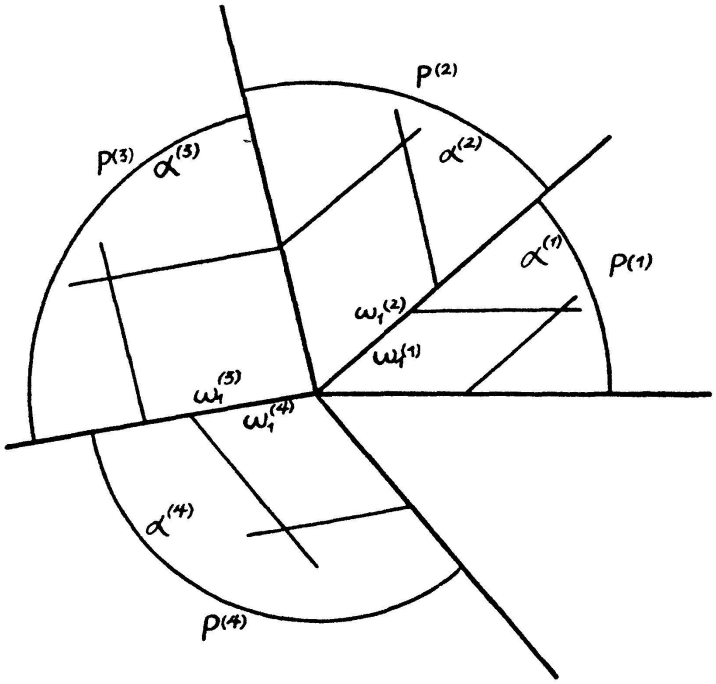

Fig. 4b

Zu den vier Viertelsenden gehören entsprechend die normierten Perioden

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{Re}\, \omega_1^{(1)} > 0 \,, & \omega_2^{(1)} = -\, 2\pi i \quad {}^{3)} \\
\mathfrak{Re}\, \omega_1^{(2)} > 0 \,, & \omega_2^{(2)} = +\, 2\pi i \\
\mathfrak{Re}\, \omega_1^{(3)} < 0 \,, & \omega_2^{(3)} = +\, 2\pi i \\
\mathfrak{Re}\, \omega_1^{(4)} < 0 \,, & \omega_2^{(4)} = -\, 2\pi i \,.
\end{array}
$$

Für die zu den Periodenparallelogrammen gehörigen Winkeln ergeben sich die Werte

$$
\alpha^{(i)} = \operatorname{arc\,tg} \left\{ \operatorname{sgn} \omega_2^{(i)} \frac{|\, \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(i)} \,|}{\mathfrak{J}\, \omega_1^{(i)}} \right\} .
$$

Wie im Beispiel des Streckenkomplexes S_2 werden die vier Viertelsenden $V^{(1)}, \ldots V^{(4)}$ in vier Sektoren $P^{(1)}, \ldots P^{(4)}$ uniformisiert. Mit entsprechenden quasikonformen Abbildungen lassen sie sich dann nach Anordnung der Figur 4b miteinander verheftet in einer Ebene Z. Zuletzt identifiziert man wieder die beiden noch freien Ufer mit der bekannten

---

[3]) Vergleiche Fußnote [2]).

Spiralabbildung $Z = z^{\alpha+ib}$. Hier erhält man für die Konstanten a und b die Werte

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{4} \alpha^{(i)}}{2\pi} \qquad b = -\frac{\log A}{2\pi} \qquad A = \left| \frac{\omega_1^{(1)} \cdot \omega_1^{(3)}}{\omega_1^{(2)} \cdot \omega_1^{(4)}} \right| .$$

Analog wie im ersten Beispiel schließt man für die Ordnung

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{4} \alpha^{(i)}}{\pi} \beta \tag{2}$$

mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{\log A}{\sum_{i=1}^{4} \alpha^{(i)}} \right)^2 .$$

Ergebnis:

Die Ordnung λ, die zur Erzeugenden der Riemannschen Fläche des Streckenkomplexes S_2 gehört, variiert zwischen Null und Unendlich. Weiter ist leicht einzusehen, daß durch die Streckenkomplexe der Klasse S_2 *jeder* Wert zwischen Null und Unendlich für die Ordnung angenommen werden kann.

Spezialfall: Wird $\sum_{i=1}^{4} \alpha^{(i)} = 2\pi$ so gilt für die Ordnung

$$\lambda = 2\beta .$$

Für $|\omega_1^{(1)}| = |\omega_1^{(2)}| = |\omega_1^{(3)}| = |\omega_1^{(4)}|$ wird

$$\lambda = 2 ,$$

wie bei einer doppeltperiodischen Funktion.

Für $\alpha^{(i)} \to 0 \quad (i = 1, \ldots 4)$ gilt

$$\lambda \to 0 .$$

Berechnung der Verzweigungsindices für S_1 und S_2

Auf Grund der Arbeit [7] erkennt man, daß die Riemannschen Flächen, welche zu den Streckenkomplexen S_1 und S_2 gehören, keine defekten Werte im Sinne Nevanlinnas aufweisen können. Interessanter hingegen erweisen sich die Verzweigungsindices, die natürlich im wesentlichen von den Größen $\alpha^{(i)}$ abhängig werden. Ein Viertelsende, dem ein verhältnismäßig großes $\alpha^{(i)}$ entspricht, beeinflußt die Verzweigung stärker als ein anderes mit kleinerem $\alpha^{(i)}$. Zur Bestimmung der Indices ist es wichtig,

den Verlauf des logarithmischen Spiralbogens in der $Z = \mathrm{R}e^{i\Phi}$-Ebene, dem Bild von $|z| = r$ aus der $z = re^{i\psi}$-Ebene zu bestimmen.

Wir erhalten für den Spiralbogen des Beispiels S_1 die Darstellung

$$|Z| = r^{\frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi}{2\pi}\beta} \cdot A^{\frac{\psi}{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi}} . \tag{3}$$

Jetzt kann man die Punkte $Z_1, \ldots Z_2$ bestimmen, die den Schnittpunkten mit den Geraden $\operatorname{arc} Z = 0, \alpha^{(1)}, \alpha^{(1)} + \pi, \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi$ und dem Spiralbogen entsprechen.

Wir erhalten dafür

$$\begin{aligned} |Z_1| &= r^{\frac{\gamma}{2\pi}\beta} & |Z_2| &= r^{\frac{\gamma}{2\pi}\beta} \cdot A^{\frac{\alpha^{(1)}}{\gamma}} \\ |Z_3| &= r^{\frac{\gamma}{2\pi}\beta} \cdot A^{\frac{\alpha^{(1)} + \pi}{\gamma}} & |Z_1| &= r^{\frac{\gamma}{2\pi}\beta} \cdot A^{1} \end{aligned} \tag{3'}$$

mit $\gamma = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \pi$.

Aus diesen Werten kann man in den uniformisierten Gebieten $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die Anzahlen der Fundamentalparallelogramme abzählen, die durch die Abbildung $Z \to z$ in den Kreis mit dem Radius $|z| = r$ zu liegen kommen, und damit läßt sich die Wertverteilung einfach vornehmen[4]). Wir bezeichnen wie in [7] mit $G^{(\mu)} (\mu = 1,2)$ die Zahl der in einem Periodenparallelogramm von $V^{(\mu)}$ vorkommenden Innenknoten. Betrachten wir weiter alle algebraischen Elementargebiete im Parallelogramm, deren $2m$ Seiten von Streckenzyklen $k, k+1$ gebildet werden und benennen diese Zahl mit j. Die dazugehörigen halben Seitenzahlen seien $m_1, m_2, \ldots m_j$. Dann ist

$$G_1(a) = \sum_{\nu=1}^{j} (m_\nu - 1) .$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir nach (3) und (3′) für die Anzahlfunktionen von Nevanlinna [5], [7] die Werte:

$$n(r, a) = G^{(1)} \frac{r^{\frac{\gamma}{\pi}\beta}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(1)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(1)}} + G^{(2)} \frac{r^{\frac{\gamma}{\pi}\beta}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(2)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(2)}} \cdot A^{\frac{2(\alpha^{(1)} + \pi)}{\gamma}}$$

und

$$n_1(r, a) = G_1^{(1)}(a) \frac{r^{\frac{\gamma}{\pi}\beta}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(1)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(1)}} + G_1^{(2)}(a) \frac{r^{\frac{\gamma}{\pi}\beta}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(2)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(2)}} \cdot A^{\frac{2(\alpha^{(1)} + \pi)}{\gamma}} .$$

---

[4]) Die folgenden Berechnungen führen wir für allgemeine Viertelsenden durch, bei denen in einem Periodenparallelogramm des Komplexes noch weitere Knoten auftreten können [7].

Setzen wir

$$\Pi_1 = \frac{1}{\frac{4\pi}{\alpha^{(1)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(1)}} \quad \text{und}$$

$$\Pi_2 = \frac{A^{\frac{2(\alpha^{(1)} + \pi)}{\gamma}}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(1)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(2)}} \quad \text{so ist}$$

$$\varepsilon(a_h^{(k)}) = \frac{\sum_{\mu=1}^{2} G_1^{(\mu)}(a_h^{(k)}) \cdot \Pi_\mu}{\sum_{\mu=1}^{2} G^{(\mu)} \cdot \Pi_\mu} .$$

$$(h = 1, \ldots 4;\ k = 1, 2$$

Spezialfall:

$$\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad |\, \omega_1^{(1)} \,| = |\, \omega_1^{(2)} \,|, \qquad (A = 1)$$

so wird für S_1

$$G^{(1)} = G^{(2)} = 2$$

und

$$G_1^{(1)}(a_i^{(1)}) = 1 \qquad G_1^{(2)}(a_i^{(1)}) = 0$$

$$G_1^{(1)}(a_i^{(2)}) = 0 \qquad G_1^{(2)}(a_i^{(2)}) = 1$$

und somit

$$\varepsilon(a_h^{(k)}) = 1/4 .$$

Für das Beispiel von S_2 liefert die Spiralabbildung als Bild von $|\, z \,| = r$ den Bogen

$$|\, Z \,| = r^{\frac{\mathfrak{A}}{2\pi}\beta} \cdot A^{\frac{\psi}{\mathfrak{A}}} \left(\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^{4} \alpha^{(i)}\right) . \qquad (3'')$$

Daraus ergeben sich die vier Schnittpunkte von

$$\operatorname{arc} Z = 0, \alpha^{(1)}, \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}, \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)},$$

mit dem Spiralbogen, entsprechend wie in (3) und (3′).
Durch den Ansatz

$$\Pi_\mu = \frac{A^{\frac{\mathfrak{a}_\mu}{\mathfrak{A}}}}{\frac{4\pi}{\alpha^{(\mu)}} \mathfrak{Re}\, \omega_1^{(\mu)}} \quad (\mu = 1, \ldots . 4); \quad \left(\mathfrak{a}_\mu = \sum_{i=\nu}^{\mu-1} \alpha^{(i)}\right)$$

finden wir für die Verzweigungsindices eines Streckenkomplexes der Klasse S_2 die Werte

$$\varepsilon(a_h^{(k)}) = \frac{\sum_{\mu=1}^{4} G_1^{(\mu)}(a_h^{(k)}) \cdot \Pi_\mu}{\sum_{\mu=1}^{4} G^{(\mu)} \cdot \Pi_\mu} \qquad (h, k = 1, \ldots 4)$$

Für das spezielle Beispiel S_2 der Figur $4a$ erhält man

$$\varepsilon(a_h^{(k)}) = {}^1/_8 \, .$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *H. P. Künzi*, Représentation et répartition des valeurs des surfaces de Riemann à extrémités bipériodiques. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) p. 793—795.

[2] *H. P. Künzi*, Surfaces de Riemann avec un nombre fini d'extrémités simplement et doublement périodiques. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) p. 1660—1662.

[3] *H. P. Künzi*, Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem. Arch. Math. 3 (1953) S. 210—215).

[4] *H. P. Künzi*, Über periodische Enden mit mehrfach zusammenhängendem Existenzgebiet. Math. Z. 61 (1954) S. 200—205.

[5] *H. P. Künzi*, Konstruktion Riemannscher Flächen mit vorgegebener Ordnung der erzeugenden Funktion. Math. Ann. 128 (1955) S. 471—474.

[6] *H. P. Künzi*, Zwei Beispiele zur Wertverteilungslehre. Math. Z. 62 (1955) S. 94—98.

[7] *H. P. Künzi*, Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilung. Comment. Math. Helv. 29 (1955) S. 223—257.

(Eingegangen den 9. März 1955)