

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1955)

Artikel: Nouvelle démonstration d'un théorème de P.A. Smith.
Autor: Borel, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23276>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Nouvelle démonstration d'un théorème de P. A. Smith

par ARMAND BOREL, Princeton, N. J.

A Monsieur H. Hopf, à l'occasion de son soixantième anniversaire

L'objet principal de ce travail est de démontrer à nouveau un théorème classique de P. A. Smith [7] affirmant que l'ensemble des points fixes d'un homéomorphisme de période p (p premier), d'une sphère d'homologie mod. p est lui-même une sphère d'homologie mod. p (voir No 3 pour l'énoncé précis). Notre démonstration utilise l'algèbre spectrale des revêtements réguliers finis, la suite exacte de cohomologie à supports compacts et la cohomologie des groupes cycliques (au sens de Hopf-Eilenberg-MacLane-Eckmann), mais par contre elle ne fait pas intervenir les groupes de cohomologie spéciale, le principal instrument de Smith. Malgré cela, la méthode suivie ici n'est tout de même pas sans relations avec celle de Smith, mais elle a au moins l'utilité de bien mettre en évidence le rôle fondamental joué dans cette question par la cohomologie des groupes, et de ne faire appel qu'à des moyens de topologie algébrique relativement généraux.

Le No 5 apporte quelques compléments à ce théorème, et établit notamment un résultat plus récent de E. E. Floyd [5] qui avait été conjecturé par Smith. On remarquera que notre démonstration du théorème de Smith est aussi purement „additive“ en ce sens qu'elle ne se sert pas du cup-produit, dont nous aurons en revanche besoin au No 5.

Notations. — p désigne toujours un nombre premier, Z_p le corps, (ou suivant le cas, le groupe additif) des entiers modulo p .

$H^i(X, A)$, (resp. $H^*(X, A)$), i -ème groupe (resp. algèbre) de cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts de l'espace localement compact X , à coefficients dans l'anneau A . Sauf mention expresse du contraire, on convient de plus que pour X compact, $H^0(X, A)$ dénote le 0-ème groupe de cohomologie réduit (i. e. le noyau de $H^0(X, A) \rightarrow H^0(P, A)$, P point de X , cf. [4] No 7); avec cette convention une sphère d'homologie mod. p est un espace compact X pour lequel

$H^n(X, Z_p) = Z_p$, $H^i(X, Z_p) = 0$, ($i \neq n$), et cela pour tout $n \geq 0$. Par convention une (-1) -sphère d'homologie mod. p est l'ensemble vide.

Soit A un module sur un anneau principal L et soit G un groupe fini opérant sur A . On note A^G l'ensemble des éléments fixes par G , et $H^i(G, A)$, (resp. $H^*(G, A)$), le i -ème groupe de cohomologie de G à valeurs dans A , (resp. la somme directe des $H^i(G, A)$, qui est une algèbre sur L si A est une algèbre sur L avec groupe d'opérateurs G), (pour ces notions, voir par exemple [1], Exposés I–II–III, ou [3]). Rappelons que $H^0(G, A) \cong A^G$.

A partir du No 3, la cohomologie est toujours relative à Z_p et on ne mentionnera plus les coefficients.

1. Algèbre spectrale des revêtements finis réguliers

Soit E un espace sur lequel un groupe fini G opère „sans points fixes“ (i. e. toute transformation non identique n'a aucun point fixe). E est donc un espace fibré principal de groupe structural G , et nous notons B sa base. H. Cartan et J. Leray [2], [1] Exp. XI, XII, ont construit une algèbre spectrale qui relie $H^*(G, H^*(E, A))$ à $H^*(B, A)$, dont nous allons décrire les principales propriétés ; nous ajouterons également quelques détails sur sa construction, sans chercher du tout à faire un exposé complet, mais simplement pour être à même de démontrer les propriétés (1.4) et (1.5), pour lesquelles nous ne pouvons renvoyer à [1] ou à [2]. Les propriétés (1.1) à (1.4) sont formulées pour des algèbres, mais pour l'usage que nous en ferons aux Nos 3 et 4 on pourrait faire abstraction du produit et n'en considérer que la partie additive ; (1.5) n'interviendra qu'au No 5.

Soit L un anneau principal. Nous noterons C^* un complexe sur L , gradué par des sous-modules C^{*i} , qui est G -libre et acyclique pour la cohomologie relative à L . On a donc

$$H^0(C^*) \cong L , \quad H^i(C^*) = 0 \quad (i > 0) ,$$

relativement à un opérateur cobord qui augmente le degré de 1¹). Si A est une algèbre sur L , avec G comme groupe d'opérateurs, on sait que

¹) On peut prendre pour C^* la somme directe des groupes $\text{Hom}_G(C_i, L)$, où C est un complexe sur Z , G -libre et acyclique pour l'homologie, gradué par des sous-groupes C_i . Comme G est *fini*, on peut supposer C_i de type fini, et l'algèbre $(C^* \otimes A)^G$ (resp. $(C^* \otimes \mathcal{E})^G$), considérée plus bas s'identifie alors à la somme directe des groupes $\text{Hom}_G(C_i, A)$ (resp. $\text{Hom}_G(C_i, \mathcal{E}^j)$), introduite dans [1]. Nous adoptons donc dans ce travail plutôt le langage de [2].

$H^*(G, A)$ est l'algèbre de cohomologie de $(C^* \otimes A)^G$, (produit tensoriel sur L), muni de la différentielle induite par l'opérateur cobord de C^* .

Soient \mathcal{E}, \mathcal{B} les algèbres des cochaines d'Alexander-Spanier à supports compacts, à valeurs dans A , de E et B respectivement ; et soit π la projection de E sur B ; le groupe G opère sur \mathcal{E} et π induit un isomorphisme π' de \mathcal{B} sur \mathcal{E}^G . L'algèbre spectrale associée à cette fibration est l'algèbre spectrale de

$$S = (C^* \otimes \mathcal{E})^G$$

muni de la différentielle totale, somme des différentielles données sur C^* et \mathcal{E} , et filtré par les sous-modules

$$S^j = \Sigma_{i \geq j} (C^{*i} \otimes \mathcal{E})^G, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

On démontre que $H^*(S) \cong H^*(B, A)$, que

$$E_1^{s,t} \cong (C^{*s} \otimes H^t(E, A))^G$$

et que d_1 est la différentielle partielle par rapport à C^* . Il en résulte :

1.1. Soient E un espace fibré principal localement compact de groupe structural fini G , de base B , π la projection de E sur B et soit A une algèbre sur un anneau principal L . Alors il existe une algèbre spectrale (E_r) sur L , bigraduée, dans laquelle E_∞ est l'algèbre graduée associée à $H^*(B, A)$ convenablement filtrée, et où

$$E_2^{s,t} = H^s(G, H^t(E, A))$$

E_{r+1} est l'algèbre de cohomologie de E_r , relativement à une différentielle d_r qui augmente s de r et diminue t de $r - 1$ ⁴⁾.

1.2. Si A et L sont isomorphes à un même corps et si G opère trivialement sur $H^t(E, A)$, alors

$$E_2^{s,t} \cong H^s(G, A) \otimes H^t(E, A), \quad (s = 0, 1, \dots).$$

1.3. $E_2^{0,t} \cong (H^t(E, A))^G$; le groupe $E_\infty^{0,t}$ s'identifie à l'ensemble des cocycles permanents²⁾ de $E_2^{0,t}$ et le composé des homomorphismes

²⁾ Nous utiliserons les notations usuelles relatives à l'algèbre spectrale, telles qu'elles figurent par exemple dans A. Borel, Ann. Math. 57 (1953), pp. 115–207, § 1. Nous dirons qu'un élément $x \in E_r$ est un *cocycle permanent* s'il est annulé par toutes les différentielles ultérieures, i. e. si $d_s x_s(x) = 0$, ($s \geq r$).

³⁾ Si E est compact, on prend pour E et B le 0-ième groupe de cohomologie non réduit.

⁴⁾ (E_r) a de plus les propriétés habituelles de l'algèbre spectrale des espaces fibrés (voir par exemple loc. cit.²⁾, § 4), s et t , $s + t$ jouant le rôle du degré base, degré fibre et degré total, E et B apparaissant ainsi comme la fibre et l'espace total respectivement. Pour une interprétation topologique, voir [1] ou loc. cit.²⁾, § 22, Remarque 2.

$$H^t(B, A) \rightarrow E_\infty^{0,t} \rightarrow E_2^{0,t} \rightarrow H^t(E, A)$$

est π^* , (cf. [1], Exp. XII, No 10).

1.4. Soient L et A isomorphes à un corps. Alors l'image de l'homomorphisme naturel

$$\bar{\pi}^*: H^*(G, H^*(B, A)) \rightarrow H^*(G, H^*(E, A)) \cong E_2$$

induit par l'homomorphisme π^* des coefficients est formée de cocycles permanents.

Démonstration : Munissons l'algèbre

$$T = (C^* \otimes \mathcal{B})^G \cong C^{*G} \otimes \mathcal{B}$$

de la différentielle totale et de la filtration définie par les sous-modules

$$T^j = \Sigma_{i \geq j} (C^{*i} \otimes \mathcal{B})^G, \quad (j = 0, 1, \dots);$$

l'homomorphisme π' de \mathcal{B} dans \mathcal{E} induit un homomorphisme de T dans S , compatible avec différentielles et filtrations, d'où un homomorphisme (ν_r^*) de l'algèbre spectrale (E'_r) de T dans (E_r) ; on a visiblement

$$E'^s_1, t \cong (C^{*s} \otimes H^t(B, A))^G \cong (C^{*s})^G \otimes H^t(B, A)$$

$$E'^s_2, t \cong H^s(G, H^t(B, A)) \cong H^s(G, A) \otimes H^t(B, A),$$

(nous avons fait usage du fait que A est un corps et que G agit trivialement sur \mathcal{B} et sur $H^*(B, A)$). Bien entendu ν_2^* n'est autre que $\bar{\pi}^*$ et pour obtenir (1.4), il suffit de faire voir que les différentielles d'_r de (E'_r) , ($r \geq 2$), sont toutes nulles, ce qui est immédiat. En effet, un élément

$$u \otimes v, \quad (u \in H^s(G, A), v \in H^t(B, A))$$

de E'^s_2, t admet comme représentant dans le sous-groupe C'^s_2, t de T dont E'^s_2, t est le quotient²⁾ un produit $\bar{u} \otimes \bar{v}$ de cocycles de u et v ; ce produit est lui-même un cocycle et par définition même de d'_r il s'ensuit que $u \otimes v$ est un cocycle permanent.

1.5. Soient L et A isomorphes à un corps et $k \geq j \geq 2$ des entiers. Supposons que G agisse trivialement sur $H^k(E, A)$ et $H^{k-j+1}(E, A)$ et soit $x \in E_j^{0,k}$. On peut écrire d'après (1.1), (1.2)

$$d_j x = \chi_j^2(\Sigma_1^m (u_i \otimes v_i)), \quad (u_i \in H^j(G, A), v_i \in H^{k-j+1}(E, A));$$

soit enfin $h \in H^q(G, A)$. Alors $h \otimes x \in E_2^{q,k}$ vu (1.2) et l'hypothèse, et l'on a

$$d_r \chi_r^2(h \otimes x) = 0, \quad (2 \leq r < j); \quad d_j \chi_j^2(h \otimes x) = \chi_j^2(\Sigma_1^m (h \cdot u_i \otimes v_i)).$$

Remarquons tout d'abord que (1.5) est évident lorsque E est compact. Dans ce cas en effet $H^*(E, A)$ possède un élément neutre et $h \otimes x$ est le produit du cocycle permanent $(h \otimes 1)$ par $(1 \otimes x)$, et il suffit de savoir que d_r est une différentielle ; c'est seulement pour E non compact que la démonstration ci-dessous est nécessaire⁵⁾.

Définissons tout d'abord un accouplement de C^{*G} et $(C^* \otimes \mathcal{E})^G$ à $(C^* \otimes \mathcal{E})^G$ en associant à $c \in C^{*G}$ et à

$$x = \Sigma_1^m (a_i \otimes b_i) , \quad (a_i \in C^*, b_i \in \mathcal{E}, x \in (C^* \otimes \mathcal{E})^G) ,$$

l'élément

$$c \cdot x = \Sigma_1^m (c \cdot a_i \otimes b_i) ,$$

ce qui est légitime, comme on le voit tout de suite en remontant à la définition du produit tensoriel. Si c est homogène de degré q on a $c \cdot S^j \subset S^{q+j}$, si de plus c est un cocycle, alors

$$c \cdot C_r^{s,t} \subset C_r^{q+s,t} , \quad c \cdot D_r^{s,t} \subset D_r^{q+s,t} , \quad c \cdot E_r^{s,t} \subset E_r^{q+s,t} \quad (2)$$

et $x \rightarrow c \cdot x$ induit un endomorphisme (additif) de la suite spectrale commutant à κ_{r+1}^r et à d_r , augmentant le degré-base de q , laissant le degré-fibre invariant. Pour un élément

$$x = \Sigma_1^m (a_i \otimes b_i) , \quad (a_i \in C^{*s}, b_i \in H^t(E, A)) ,$$

qui fait partie de $E_1^{s,t}$, on a évidemment

$$c \cdot x = \Sigma_1^m (c \cdot a_i \otimes b_i) ;$$

si donc G agit trivialement sur $H^t(E, A)$, on en déduit que pour l'élément

$$x = a \otimes b , \quad (a \in H^s(G, A), b \in H^t(E, A))$$

de $E_2^{s,t}$, on a

$$c \cdot x = \bar{c} \cdot a \otimes b , \quad (\bar{c} \text{ classe de cohomologie de } c) .$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de (1.5). Soit c un cocycle de h , alors

$$\begin{aligned} d_r \kappa_r^2(h \otimes x) &= d_r \kappa_r^2(c \cdot (1 \otimes x)) = c \cdot (d_r \kappa_r^2(1 \otimes h)) = 0 \quad (r < j) , \\ d_j \kappa_j^2(h \otimes x) &= c \cdot \kappa_j^2(\Sigma_1^m (u_i \otimes v_i)) = \kappa_j^2(c \cdot \Sigma_1^m (u_i \otimes v_i)) \\ d_j \kappa_j^2(h \otimes x) &= \kappa_j^2(\Sigma_1^m (h \cdot u_i \otimes v_i)) . \end{aligned}$$

⁵⁾ De façon analogue, on démontrera une propriété similaire de l'algèbre spectrale en cohomologie à supports compacts des espaces fibrés localement compacts, lorsque la base est compacte et la fibre non compacte ; on en déduit notamment que si la fibre est totalement non homologique à zéro relativement à un corps, alors $E_2 \cong E_\infty$ ce qui étend au cas F non compact un résultat bien connu de J. Leray-Hirsch.

2. Cohomologie des groupes cycliques

Pour les résultats de ce No, voir par exemple [1], Exp. III—IV ou [3], No 11 ; Z_m désigne le groupe cyclique à m éléments, g un générateur de Z_m , A un groupe abélien sur lequel G opère ; la norme Na de $a \in A$ est la somme des éléments $g^i \cdot a$ ($1 \leq i \leq m$), et NA désigne le sous-groupe formé par les normes.

2.1. Si i est impair, $H^i(Z_m, A)$ est le quotient du groupe des éléments de norme nulle par le sous-groupe qu'engendrent les éléments de la forme $g \cdot a - a$. Si i est pair et > 0 , alors $H^i(Z_m, A) \cong A^\theta / NA$.

On en déduit en particulier, (compte tenu de $H^0(G, A) \cong A^G$) :

2.2. Soit p un nombre premier. Alors $H^i(Z_p, Z_p) \cong Z_p$, ($i \geq 0$) ,⁶⁾.

Au point de vue multiplicatif, (les coefficients étant alors envisagés comme un corps), (2.2) se précise par le résultat suivant, que nous n'utiliserons qu'au No 5 :

2.3. Pour p impair, $H^*(Z_p, Z_p)$ est le produit tensoriel (gauche) d'une algèbre extérieure $\wedge(x)$ engendrée par un élément x de degré 1 et d'une algèbre de polynômes $Z_p[y]$, (y de degré 2). Pour $p = 2$, $H^*(Z_2, Z_2) \cong Z_2[x]$, (x de degré 1).

3. Énoncé du théorème de Smith; début de la démonstration

Nous supposons dorénavant p fixé, et notons $H^i(X)$, $H^i(G)$ les groupes de cohomologie d'un espace ou d'un groupe fini à valeurs dans Z_p .

Théorème. Soient p un nombre premier, X un espace compact de dimension finie qui est une n -sphère d'homologie mod. p , T un homéomorphisme de X , de période p . Alors l'ensemble F des points fixes de T est une k -sphère d'homologie mod. p , ($-1 \leq k \leq n$).

Soit Y l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qu'y définit T et soit π la projection de X sur Y ; elle est biunivoque sur F , dont l'image dans Y sera aussi notée F . Il n'y a rien à démontrer si F est vide, (ou si T est l'identité), et nous supposerons dorénavant F et $X - F$ non vides. L'application π induit un homomorphisme de la suite exacte de cohomologie relative de la paire (Y, F) dans celle de (X, F) ; mais X et Y sont compacts, F est fermé, les groupes de cohomologie relative s'identifient donc, comme on sait, aux groupes de cohomologie à supports compacts des espaces différences. Nous obtenons ainsi un diagramme commutatif

⁶⁾ Nous utiliserons fréquemment et sans autre commentaire le fait que Z_p opère toujours trivialement sur Z_p .

$$\begin{array}{ccccccc}
& \rightarrow H^{t-1}(F) \rightarrow H^t(X - F) \rightarrow H^t(X) \rightarrow H^t(F) \rightarrow & & & & & \\
& \uparrow \text{id.} & \uparrow \pi_t^* & \uparrow \pi_t^* & \uparrow \text{id.} & & \\
& \rightarrow H^{t-1}(F) \rightarrow H^t(Y - F) \rightarrow H^t(Y) \rightarrow H^t(F) \rightarrow & & & & &
\end{array} \quad (3.1)$$

(id. = identité), où les deux lignes sont exactes.

3.2. p étant premier, le groupe cyclique engendré par T opère sans points fixes sur $X - F$, qui est donc un espace fibré principal de groupe structural Z_p , de base $Y - F$, projection π , d'où (No 1) une algèbre spectrale que nous noterons (E_r) . L'algèbre E_∞ est donc l'algèbre graduée associée à $H^*(Y - F)$ convenablement filtrée, et E_2 est isomorphe à $H^*(Z_p, H^*(X - F))$.

3.3. F , $X - F$ et $Y - F$ sont de dimensions finies $\leq \dim X$; en particulier leurs groupes de cohomologie d'Alexander-Spanier à supports compacts sont nuls pour les degrés $> \dim X$.

Car X est de dimension finie et $Y - F$ est localement homéomorphe à $X - F$.

3.4. On a $H^{t-1}(F) = H^t(X - F)$ pour $t \neq n, n + 1$.

Cela se déduit de la suite exacte de (X, F) .

3.5. Pour $t \neq n$, $H^t(X - F)$ est dans l'image de π^* , par conséquent (voir (1.2), (1.4), (2.2)), $E_2^{s,t}$ est isomorphe à $H^t(X - F)$ et formé de cocycles permanents, ($s \geq 0$).

Il suffit de remarquer que (3.1) donne pour $t \neq n$:

$$\begin{array}{c}
H^{t-1}(F) \rightarrow H^t(X - F) \rightarrow 0 \\
\uparrow \text{id.} \quad \uparrow \pi^* \\
H^{t-1}(F) \rightarrow H^t(Y - F).
\end{array}$$

3.6. On a $H^t(X - F) = 0$, ($t \geq n$), donc, d'après (3.4), $H^i(F) = 0$, ($i > n$).

Supposons (3.6) faux ; il existe alors, vu (3.3), un plus grand k , ($k > n$), tel que $H^k(X - F) \neq 0$ et, d'après (3.5), $E_2^{s,k}$ est $\neq 0$ et formé de cocycles permanents ($s \geq 0$) ; ces cocycles ne peuvent jamais être cobords, car les différentielles d_r , ($r \geq 2$), diminuent strictement le degré-fibre et ici E_2 , (donc a fortiori E_r , ($r \geq 2$)), ne contient aucun élément de degré-fibre $> k$. Ainsi on a $E_\infty^{s,k} \cong E_2^{s,k} \neq 0$ et $H^{s+k}(Y - F)$ est $\neq 0$ pour tout $s \geq 0$, en contradiction avec (3.3).

Un raisonnement tout pareil, que nous ne reproduirons pas, utilisant (1.4), (3.3) et (3.6) donne :

3.7. L'image de $\bar{\pi}^*$: $H^i(Z_p, H^n(Y - F)) \rightarrow H^i(Z_p, H^n(X - F))$ est nulle pour $i > \dim X - n$.

4. Fin de la démonstration

Montrons tout d'abord que F possède au moins un groupe de cohomologie mod. p non nul (rappelons que F est supposé non vide et que nous considérons en $\dim 0$ les groupes de cohomologie réduits). Si ce n'est pas le cas, on obtient par suite exacte :

$$H^i(X - F) = 0 \quad , \quad (i \neq n) \quad , \quad H^n(X - F) \cong Z_p$$

d'où

$$E_2^{s,t} = 0 \quad (t \neq n) \quad , \quad E_2^{s,n} \cong H^n(X - F) \cong Z_p \quad , \quad (s \geq 0) \quad .$$

L'algèbre spectrale n'a donc qu'un degré-fibre, par conséquent les différentielles sont identiquement nulles, et $E_\infty^{s,n} \cong E_2^{s,n}$ est $\neq 0$ pour tout s , en contradiction avec (3.3).

Soit alors k le plus grand degré pour lequel $H^k(F) \neq 0$; on sait par (3.6) que $k \leq n$ et nous devons montrer

$$H^i(F) = 0 \quad , \quad (i < k) \quad , \quad H^k(F) \cong Z_p \quad . \quad (4.1)$$

Nous distinguerons trois cas, le premier étant le plus général, et le troisième étant le moins simple.

Premier cas : $k \leq n - 2$. Vu (3.4) et $H^k(F) \neq 0$, il nous suffit d'établir

$$\dim (H^{n-1}(X - F) + H^{n-2}(X - F) + \dots + H^0(X - F)) = 1 \quad . \quad (4.2)$$

La suite exacte de (X, F) montre que

$$H^n(X - F) \cong H^n(X) \cong Z_p$$

d'où

$$E_2^{s,n} \cong H^s(Z_p) \otimes H^n(X - F) \cong Z_p \quad (s \geq 0) \quad .$$

Posons

$$B_r^{i+n} = E_r^{i+1,n-1} + E_r^{i+2,n-2} + \dots + E_r^{i+n,0} ;$$

d'après ce qui précède et (3.5) on sait que

$$B_2^{i+n} \cong H^{n-1}(X - F) + H^{n-2}(X - F) + \dots + H^0(X - F) \quad (4.3)$$

est $\neq 0$ et est formé de cocycles permanents. Pour $i > \dim X$, B_2^{i+n} doit avoir une image nulle dans E_∞ , autrement dit, chaque élément de B_2^{i+n} doit être cobord relativement à une différentielle d_r , d'un élément qui doit naturellement avoir le degré total $n + i - 1$. Or, parmi les groupes $E_2^{s,t}$ ($s + t = n + i - 1$), seul $E_2^{i-1,n}$ n'est pas a priori formé de

cocycles permanents ; comme il est de dimension 1, cela signifie qu'il existe un unique indice j ($j \geq 2$), tel que

$$d_r(E_r^{i-1,n}) = 0 \quad (2 \leq r < j) , \quad d_j E_j^{i-1,n} = B_j^{i+n} ,$$

ce qui implique

$$B_2^{i+n} \cong B_j^{i+n} \cong E_j^{i-1,n} \cong E_2^{i-1,n} \cong Z_p$$

et, ajouté à (4.3), démontre (4.2).

Deuxième cas : $k = n$. Comme $H^n(X) \cong Z_p$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^{n-1}(F) & \rightarrow & H^n(X - F) & \rightarrow & H^n(X) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id.} & & \uparrow \pi^* & & \\ & & H^{n-1}(F) & \rightarrow & H^n(Y - F) & & \end{array}$$

montre que

$$H^n(F) \cong Z_p ; \quad H^{n-1}(F) \cong H^n(X - F) \cong \pi^*(H^n(Y - F)) . \quad (4.5)$$

Ainsi, $E_2^{s,n}$ est lui aussi formé de cocycles permanents ; on a donc $d_r = 0$ ($r \geq 2$) et

$$H^t(X - F) \cong E_2^{s,t} \cong E_\infty^{s,t}$$

doit être nul pour s assez grand, d'où, vu (3.4) et (4.5), la nullité de $H^i(F)$ pour $i < n$, et F est une n -sphère d'homologie mod. p .

Troisième cas : $k = n - 1$. Nous montrerons en premier lieu :

4.6. $H^{n-1}(F) \cong Z_p$. L'espace $H^n(X - F)$ est de dimension deux, soutenu par un élément u engendrant l'image de π^* , donc fixe par T , et par un élément v tel que $Tv = u + v$.

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^{n-1}(F) & \xrightarrow{\lambda} & H^n(X - F) & \xrightarrow{\mu} & H^n(X) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{id.} & & \uparrow \pi^* & & \\ & & H^{n-1}(F) & \rightarrow & H^n(Y - F) & & \end{array}$$

montre que $H^n(X - F)$ est somme de l'image biunivoque (donc $\neq 0$), U de $H^{n-1}(F)$ et d'un sous-espace V de dimension 1, appliqué biunivoquement sur $H^n(X)$ par μ ; de plus U fait partie de l'image de π^* , et ses éléments sont fixes par T ; cette transformation ne peut agir trivialement sur V , car sinon $E_2^{i,n}$ serait, pour tout i , la somme directe de $H^i(Z_p, V)$ et d'un espace $H^i(Z_p, U)$ non nul, contenu dans l'image de

$\bar{\pi}^*$, ce qui contredit (3.7). Comme T agit trivialement sur $H^n(X)$ et commute à μ , on a pour $v \in V$ ($v \neq 0$) :

$$Tv = u + v \quad (u \in U, u \neq 0) ,$$

d'où

$$T^i v = v + i \cdot u \quad (1 \leq i \leq p) ,$$

et l'espace à deux dimensions W engendré par u et v est invariant par T ; il admet un supplémentaire W' contenu dans U , donc fixe par T et faisant partie de l'image de π^* ; l'espace $H^n(X - F)$ est donc somme directe de deux sous-espaces W, W' *invariants* par T , d'où

$$E_2^{i,n} \cong H^i(Z_p, H^n(X - F)) \cong H^i(Z_p, W) + H^i(Z_p, W') ;$$

de plus le dernier terme est dans l'image de $\bar{\pi}^*$, donc (3.7) nul pour $i > \dim X$, d'où $W' = 0$, puisque T agit trivialement sur W' . Ainsi $H^n(X - F)$ est sous-tendu par les éléments u, v linéairement indépendants, vérifiant les conditions de (4.6); par ailleurs $H^{n-1}(F)$ est isomorphe à U , donc de dimension 1; enfin, U est toute l'image de π^* , puisque T n'agit pas trivialement sur $H^n(X - F)$, ce qui termine la démonstration de (4.6).

4.7. *A montrer*: $p = 2$. Supposons p impair; à l'aide de (4.6) on calcule immédiatement que les normes dans $H^n(X - F)$ sont toutes nulles et, vu (2.1), on voit que, pour tout $i > 0$ et pair,

$$E_2^{i,n} \cong H^i(Z_p, H^n(X - F)) = \bar{\pi}^*(H^i(Z_p, H^n(Y - F))) \cong Z_p$$

ce qui est en contradiction avec (3.7).

4.8. Nous savons déjà que $H^{n-1}(F) \cong Z_2$; il reste donc à prouver que $H^i(F) = 0$ pour $i \leq n - 2$.

En s'appuyant sur (2.1), (4.6), (4.7) on calcule aisément que

$$E_2^{i,n} \cong H^i(Z_2, H^n(X - F)) = 0 \quad (i > 0) ;$$

d'autre part, $E_2^{0,n} \cong (H^n(X - F))^T$ est égal à U , donc dans l'image de $\bar{\pi}^*$ et (1.4) formé de cocycles permanents, ce qui, ajouté à (3.5), montre que $E_2 \cong E_\infty$, d'où

$$H^t(X - F) \cong E_2^{i,t} \cong E_\infty^{i,t} = 0 \quad (t \neq n, i \text{ assez grand})$$

et la nullité de $H^i(F)$ pour $i \leq n - 2$ se déduit de (3.4).

Remarque 4.9. Nous venons de voir que $E_\infty^{0,n} \cong Z_2$, $E_\infty^{s,t} = 0$ sinon, d'où $H^n(Y - F) = Z_2$, $H^i(Y - F) = 0$ ($i \neq n$), dans ce dernier cas.

5. Compléments

Convention. *Dans tous les énoncés de ce No, on garde les hypothèses et notations du Théorème de Smith ; on note Y l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qu'y définit T .*

Proposition 5.1. *Si $k = n - 1$, alors $p = 2$.*

Si F est non vide, voir (4.7) ; il reste donc à examiner le cas où F est vide, c'est-à-dire où $n = 0$, $k = -1$. L'espace X est alors fibré principal de groupe structural Z_p et de base Y , qui est par conséquent aussi de dimension finie. Comme $H^i(X)$ est nul pour $i > 0$ on a dans la suite spectrale correspondante $E_2^{s,t} = 0$ pour $s \geq 0$, $t \neq 0$ d'où

$$H^s(Y) \cong E_\infty^{s,0} \cong E_2^{s,0} \cong H^s(Z_p, H^0(X)) \quad (s \geq 0),$$

($H^0(X)$ étant le groupe non réduit, donc isomorphe à $Z_p + Z_p$), et $H^s(Z_p, H^0(X))$ doit être nul pour $s > \dim X$; ainsi, T ne peut opérer trivialement sur $H^0(X)$, et X est formé de deux composantes connexes échangées par T , d'où $p = 2$.

Remarque 5.2. En fait (5.1) est un cas particulier de la proposition suivante ; nous l'avons cependant isolée car il faut quoi qu'il en soit traiter à part le cas $n = 0$, $k = -1$.

Proposition 5.3. (Floyd [5]). *Si p est impair, $n - k$ est pair.*

Pour $k = n$ il n'y a rien à démontrer, et d'après (5.1) on a $k \neq n - 1$. Il reste à considérer le cas $k \leq n - 2$, $n \geq 1$; nous n'excluons pas $k = -1$, c'est-à-dire F vide, mais convenons alors d'utiliser en dimension 0 les groupes de cohomologie non réduits.

On tire tout d'abord de la suite exacte de (X, F) :

$$H^{k+1}(X - F) \cong H^n(X - F) \cong Z_p, \quad H^i(X - F) = 0, \quad (i \neq k + 1, n),$$

d'où pour l'algèbre spectrale

$$E_2^{s,k+1} \cong E_2^{s,n} \cong Z_p; \quad E_2^{s,t} = 0 \quad (t \neq k + 1, n).$$

Il n'y a ainsi que deux degrés-fibre, dont la différence est $n - k - 1$, et seule la différentielle d_{n-k} peut ne pas être identiquement nulle, d'où

$$E_{n-k} \cong E_2, \quad E_{n-k+1} \cong E_\infty.$$

Soient u et v des générateurs de $E_{n-k}^{0,n}$ et $E_{n-k}^{0,k+1}$; on peut écrire

$$d_{n-k}(u) = f \otimes v \quad (f \in H^{n-k}(Z_p)),$$

et par conséquent (*voir* (1.5)) :

$$d_{n-k}(h \otimes u) = h \cdot f \otimes v \quad (h \in H^i(Z_p), \quad i \geq 0) . \quad (5.4)$$

d_{n-k} est nulle sur $E_{n-k}^{s, k+1}$ (par (3.5), ou parce que ces éléments ont le degré-fibre minimum), par suite, si $f = 0$, la différentielle d_{n-k} est identiquement nulle, E_∞ est isomorphe à E_2 et contient des éléments non nuls de degrés arbitrairement grands, ce qui est impossible (3.3). Ainsi $f \neq 0$, et si l'on suppose $n - k$ impair, on a dans les notations de (2.3) :

$$f = c \cdot x \cdot y^a, \quad (c \in Z_p, \quad c \neq 0; \quad 2a + 1 = n - k) ;$$

(5.4) donne alors

$$d_{n-k}(x \cdot y^b \otimes u) = c \cdot x^2 \cdot y^{a+b} \otimes v = 0$$

(puisque $x^2 = 0$), donc $d_{n-k}(E_{n-k}^{2b+1, n}) = 0$ et

$$E_\infty^{2b+1, n} \cong E_{n-k+1}^{2b+1, n} \cong E_{n-k}^{2b+1, n} \cong Z_p$$

pour tout $b \geq 0$, en contradiction avec (3.3), d'où (5.3).

Remarque 5.5. Sachant $n - k$ pair, on détermine aisément E_∞ ; en effet on a

$$d_{n-k}(u) = c \cdot y^a \otimes v, \quad (c \in Z_p, \quad c \neq 0, \quad 2a = n - k) ,$$

d'où, en utilisant (5.4), (2.3)

$$\begin{aligned} d_{n-k}(E_{n-k}^{s, n}) &= E_{n-k}^{s+n-k, k+1} \quad (s \geq 0) , \\ E_\infty^{j, k+1} &\cong E_{n-k+1}^{j, k+1} \cong E_{n-k}^{j, k+1} \cong Z_p \quad (0 \leq j < n - k) \\ E_\infty^{s, t} &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

et finalement

$$H^i(Y - F) \cong Z_p, \quad (k + 1 \leq i \leq n) , \quad H^i(Y - F) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Lemme 5.6. *On a $H^i(Y - F) = Z_p$, $(k + 1 \leq i \leq n)$, $H^i(Y - F) = 0$ sinon.*

(Si F est vide, on prend le groupe de cohomologie non réduit en dimension 0.) Pour $k = n$, *voir* No 4, deuxième cas ; pour p impair, $k < n$ *voir* (5.5), pour $p = 2$, $k < n - 1$, la démonstration est tout à fait analogue et laissée au lecteur ; enfin, pour $p = 2$, $k = n - 1$, *voir* (4.9).

Proposition 5.7 (Liao [6]). *Pour $k < n$ on a*

$$H^i(Y) \cong Z_p, \quad (k+1 < i \leq n), \quad H^i(Y) = 0 \text{ sinon.}$$

Pour $k = n$, on a $H^n(Y) \cong Z_p$, $H^i(Y) = 0$ sinon.

Si $k = n$, ou si $k = -1$, cela résulte de (5.6) et de la suite exacte de la paire (Y, F) . Soit donc $0 \leq k < n$; la suite exacte de (Y, F) donne

$$H^i(Y) = 0, \quad (i < k); \quad H^j(Y) = H^j(Y - F) \quad (j \geq k + 2);$$

compte tenu de (5.6), il nous suffira de montrer que $H^k(Y)$ et $H^{k+1}(Y)$ sont nuls; considérons pour cela le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^k(F) & \xrightarrow{g} & H^{k+1}(Y - F) & & \\ & & \uparrow \text{id.} & & \uparrow \pi^* & & \\ 0 & \rightarrow & H^k(Y) & \rightarrow & H^k(F) & \xrightarrow{h} & H^{k+1}(Y - F) \rightarrow H^{k+1}(Y) \rightarrow 0 \end{array}$$

ou les deux lignes sont exactes. Puisque $H^k(F) \cong Z_p$, l'homomorphisme g est non nul et il doit en être de même pour h ; mais $H^{k+1}(Y - F)$ étant aussi de dimension 1, h est alors un isomorphisme sur, d'où la nullité de $H^k(Y)$ et $H^{k+1}(Y)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *H. Cartan*, Séminaire de Topologie algébrique de l'E. N. S., Paris 1951–52, Notes polycopierées.
- [2] *H. Cartan-J. Leray*, Relations entre anneau d'homologie et groupe de Poincaré, Colloque de Topologie algébrique, C. N. R. S. Paris 1949, pp. 83–85.
- [3] *S. Eilenberg*, Topological methods in abstract algebra. Cohomology theory of groups, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), pp. 3–27.
- [4] *S. Eilenberg-N. Steenrod*, Foundations of algebraic topology, Princeton 1952.
- [5] *E. E. Floyd*, On periodic maps and the Euler-characteristic of associated spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), pp. 138–147.
- [6] *S. D. Liao*, A theorem on periodic transformations of homology spheres. Ann. Math. **56** (1952), pp. 68–83.
- [7] *P. A. Smith*, Transformations of finite period, Ann. Math. **39** (1938), pp. 127 à 164. Aussi Fixed points of periodic transformations, Appendix B de Lefschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium publ. No. 28, New-York 1942.

(Reçu le 28 juin 1954.)