

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1955)  
  
**Artikel:** Longueurs extrémales et théorie des fonctions.  
**Autor:** Hersch, Josef  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23292>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Longueurs extrémales et théorie des fonctions

par JOSEPH HERSCH, Zurich

## Introduction

Le but essentiel du présent travail est de mettre en lumière un champ d'applications de la *méthode des longueurs extrémales*, due notamment à *Ahlfors* et *Beurling*. Cette méthode est appliquée sous une forme modifiée présentant certains avantages. La longueur extrémale est un invariant conforme.

On peut caractériser par des longueurs extrémales les autres invariants conformes que sont le *module* d'un quadrilatère ou d'un domaine doublement connexe (cette propriété est connue), et, pour un domaine de Jordan, la *mesure harmonique* d'un arc-frontière en un point et la *distance hyperbolique* de deux points.

En même temps que des formules exactes, nos méthodes de variation fournissent d'utiles évaluations de théorie des fonctions : les unes précisent, parfois de façon essentielle, des inégalités connues (de *Nevanlinna*, *Ostrowski*, *Sario*, *Strebel*) ; les autres concernent des problèmes nouveaux.

Nous dirons toujours „courbe fermée“ pour *courbe de Jordan*, „arc“ pour *arc de Jordan* et „courbe“ pour *courbe ou arc de Jordan* ; une „coupure“ d'un domaine sera un arc de Jordan à extrémités sur la frontière. Tous les domaines considérés seront supposés définis dans le plan complexe ou sur une surface de *Riemann*.

Les principaux résultats de ce travail ont été annoncés dans trois Notes aux *Comptes rendus* [7], [8], [12]. Une publication ultérieure [10] donnera des applications des méthodes développées ici aux fonctions pseudo-analytiques et aux transformations quasi-conformes, ainsi qu'à une classe plus générale de fonctions ; la plupart de ces résultats ont été sommairement annoncés dans une autre Note aux *Comptes rendus* [11].

J'exprime ici ma vive reconnaissance au Prof. *A. Pfluger* : il m'a fourni l'essentiel de ma formation en théorie des fonctions, et c'est à lui que je dois d'avoir étudié la méthode des longueurs extrémales ; je lui sais particulièrement gré de ses conseils précieux et de sa bienveillance constante. Je remercie aussi vivement le Prof. *B. Eckmann*, dont je suis depuis



longtemps l'assistant et qui m'a toujours encouragé dans mon travail ; ainsi que le Prof. *M. Plancherel*, corapporteur de ma thèse, pour toute l'attention qu'il lui a consacrée. — D'autre part, on verra au Chapitre III que bien des applications m'ont été suggérées par le livre si riche de contenu „Eindeutige analytische Funktionen“ de *R. Nevanlinna*.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction . . . . .</b>	<b>301</b>
<b>Chapitre I. La longueur extrémale</b>	
§ 1. Figures et configurations. Quadrilatères et leurs modules . .	303
§ 2. La longueur extrémale d'une famille de courbes . . . . .	303
§ 3. Longueurs extrémales et modules. Propriétés des modules .	307
Appendice du Chapitre I. Les familles numériques . . . . .	311
<b>Chapitre II. Mesure harmonique et distance hyperbolique</b>	
§ 1. La fonction $\nu(r)$ . . . . .	316
§ 2. Mesure harmonique et longueur extrémale . . . . .	319
§ 3. Distance hyperbolique et longueur extrémale . . . . .	321
<b>Chapitre III. Applications</b>	
§ 1. Variation de la distance hyperbolique par une déformation du domaine . . . . .	322
§ 2. Variation de la mesure harmonique par une déformation du domaine . . . . .	323
§ 3. Applications. Théorème général de Phragmén-Lindelöf . .	325
§ 4. Variation d'une fonction harmonique dans des domaines simplement connexes emboîtés . . . . .	329
§ 5. Evaluation par défaut de la distance hyperbolique. . . . .	330
§ 6. Rayon intérieur, mesure harmonique et modules . . . . .	333
§ 7. Remarque sur les théorèmes de Koebe et d'Ahlfors . . . . .	335
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>336</b>

# Chapitre I. La longueur extrémale

## § 1. Figures et configurations. Quadrilatères et leurs modules

Nous appellerons *figure* et écrirons  $G^{p_1 p_2 \dots}$  (ou simplement  $G^*$  lorsqu'il n'y aura pas d'équivoque possible) l'entité formée par un domaine  $G$  et des points  $p_1, p_2, \dots$  désignés (dans cet ordre) sur la frontière ou à l'intérieur de  $G$ .

Deux figures  $G^{p_1 p_2 \dots}$  et  $H^{q_1 q_2 \dots}$  seront dites *conformément équivalentes* s'il existe une représentation conforme de  $G$  sur  $H$  appliquant respectivement  $p_1, p_2, \dots$  sur  $q_1, q_2, \dots$ . Les figures sont ainsi groupées en classes d'équivalence, que nous appellerons *configurations*. (Voir aussi *Beurling* [2].) En voici deux premiers exemples :

On appelle *quadrilatère*  $Q(\beta' \alpha' \beta'' \alpha'')$  une figure  $G^{p_1 p_2 p_3 p_4}$  obtenue en désignant quatre points-frontière d'un domaine de Jordan ; ils décomposent la frontière en 4 arcs  $\beta', \alpha', \beta'', \alpha''$  (dans cet ordre). On sait que chaque configuration de quadrilatères contient des rectangles, tous semblables entre eux ; prenons donc un de ces rectangles comme représentant de la configuration ; soient  $a$  la longueur de ses côtés  $\alpha'$  et  $\alpha''$ ,  $b$  celle de  $\beta'$  et  $\beta''$  ; on appelle  $a/b = \mu_{\beta' \beta''}$  le *module* de la configuration, ou de chacun de ses quadrilatères ; il caractérise la configuration. Il est immédiat que  $\mu_{\beta' \beta''} \cdot \mu_{\alpha' \alpha''} = 1$ .

Deux domaines *doublement connexes* sont conformément équivalents s'ils se laissent appliquer conformément sur une même couronne circulaire, de rayons 1 et  $R > 1$ . Cette couronne circulaire se laisse à son tour appliquer conformément par la fonction logarithmique sur le rectangle  $(0, \ln R, \ln R + 2i\pi, 2i\pi)$ , les côtés  $(0, \ln R)$  et  $(2i\pi, \ln R + 2i\pi)$  étant identifiés. Nous définissons le module  $\mu = (1/2\pi) \ln R$  de ce rectangle comme *module* de la couronne circulaire, et *des domaines doublement connexes* qui lui sont conformément équivalents. L'équivalence conforme de deux domaines doublement connexes est caractérisée par l'égalité des modules.

## § 2. La longueur extrémale d'une famille de courbes

A. Je dirai que deux courbes fermées ou deux coupures  $c_0$  et  $c_1$  sont *homotopes relativement* à une figure  $G^*$  ( $c_0 \simeq c_1$ ) s'il existe une déformation (continue) de  $c_0$  sur  $c_1$  telle que chaque courbe intermédiaire  $c_\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) passe par les mêmes points désignés sur  $G^*$  (selon la définition) que  $c_0$ , et par aucun autre. — En d'autres termes,  $c_0$  et  $c_1$  ne peuvent

pas être distinguées l'une de l'autre à l'aide des repères figurant dans la définition de  $G^*$ . Si ce sont des coupures, leurs extrémités  $A_0, A'_0; A_1, A'_1$  ne coïncident pas nécessairement deux à deux, mais il suffit que  $A_0$  et  $A_1$  appartiennent à un même arc-frontière sans points désignés, et qu'il en soit de même pour  $A'_0$  et  $A'_1$ . — Les courbes considérées ne seront *pas orientées* (il est donc permis de permuter les extrémités  $A$  et  $A'$ ).

L'ensemble de toutes les courbes fermées et coupures que l'on peut définir dans  $G$  se décompose en classes d'homotopie. Sauf mention explicite du contraire (B; Chapitre III, § 3), j'appelle *famille de courbes* la réunion d'un certain nombre de telles classes. Toute famille de courbes peut alors être décrite topologiquement dans  $G^*$ .

B. Soit  $\{c\}$  une famille de courbes *rectifiables* (donc violant la condition énoncée sous A) dans un domaine  $G$ ; Ahlfors et Beurling [1] définissent la *longueur extrême*  $L_{\{c\}}$  de  $\{c\}$  par le problème de variation :

$$\frac{1}{L_{\{c\}}} = \inf_{\varrho} \iint_G \varrho^2 d\tau,$$

où l'on admet à concurrence les *fonctions réelles non-négatives (répartitions)*  $\varrho$  telles que  $\iint_G \varrho^2 d\tau$  existe, et que, pour toute courbe  $c \in \{c\}$ ,  $\int_c \varrho ds$  existe et soit  $\geq 1$ .

C. Pour des raisons que j'exposerai tout à l'heure, je préfère à cette définition la *définition modifiée* suivante :

Soit  $\{c\}$  une famille de courbes (définie topologiquement dans une figure  $G^*$ ). Posons, pour simplifier l'écriture,

$$A_{\varrho} = A_{\varrho}(G) = \overline{\iint}_G \varrho^2 d\tau \quad \text{et} \quad C_{\varrho}(c) = \underline{\int}_c \varrho ds^1).$$

Je définis la *longueur extrême*  $L_{\{c\}}$  de  $\{c\}$  par

$$\frac{1}{L_{\{c\}}} = M\{c\} = \inf_{\varrho} A_{\varrho}$$

où l'on admet à concurrence toutes les répartitions  $\varrho$  satisfaisant à la condition  $C_{\varrho}(c) \geq 1$  pour toute courbe  $c \in \{c\}$ .

Si le domaine  $G$  est situé sur une surface de Riemann donnée par ses représentations paramétriques locales, on considérera un système de ré-

---

<sup>1)</sup>  $\overline{\int}$  est l'intégrale supérieure,  $\underline{\int}$  l'intégrale inférieure de Darboux;  $d\tau$  est l'élément de surface. — Si la courbe  $c$  n'est pas rectifiable,  $ds$  n'est pas défini;  $\underline{\int}_c \varrho ds$  a cependant le sens évident de la limite inférieure d'une somme, selon une notation due à Weierstrass (cf. Bolza [3], p. 284).

partitions dont chacune  $\varrho_i$  est définie dans le domaine de variation d'un paramètre complexe local  $t_i$ , et telles que, pour toute paire de valeurs  $t_i^p, t_j^p$  des paramètres locaux  $t_i$  et  $t_j$  représentant un même point  $p$  de  $G$ , on ait  $\varrho_i |dt_i| = \varrho_j |dt_j|$ . On peut alors considérer le système des  $\varrho_i$  comme représentant une grandeur *covariante*, la *métrique conforme*  $\varrho$ , „définie sur la surface de Riemann“ elle-même. Nous dirons que  $\varrho$  est une *répartition sur  $G$* .

La définition reste valable dans les deux cas extrêmes : si aucune répartition  $\varrho$  n'est admise à concurrence (par exemple si  $\{c\}$  contient les courbes fermées homotopes à zéro),  $L_{\{c\}} = 0$  ; si  $\inf_{\varrho} A_{\varrho} = 0$  (par exemple si la famille  $\{c\}$  est vide),  $L_{\{c\}} = \infty$ .

Cette définition modifiée de la longueur extrémale présente plusieurs avantages. Les courbes concurrentes sont définies topologiquement ; tandis que la restriction aux courbes rectifiables est une condition métrique ; de même, toutes les répartitions sont considérées. D'importantes propriétés évidentes pour la nouvelle définition, ne le sont pas du tout pour l'ancienne [voir par exemple la seconde partie de b) ci-dessous, et l'inégalité e)]. D'autre part, la nouvelle définition jouera un rôle important dans la publication annoncée [10].

*Dans la suite de ce travail, j'utiliserai exclusivement cette nouvelle définition.*

Pour abréger, nous écrirons  $PLE\{c\}$  pour „problème de longueur extrémale définissant  $L_{\{c\}}$ “. D'autre part, lorsque  $\{c\}$  sera la classe des courbes homotopes à une courbe  $c$  relativement à une figure  $G^*$ , nous écrirons  $L_c$  au lieu de  $L_{\{c\}}$ .

D. a) La longueur extrémale est un *invariant conforme*. En effet, soit  $z' = f(z)$  une application conforme transformant  $\{c\}$  en  $\{c'\}$  ; si  $\varrho(z)$  est une répartition concurrente du  $PLE\{c\}$ ,  $\varrho'(z') = \varrho(z) |dz/dz'|$  est concurrente du  $PLE\{c'\}$ , d'où  $L_{\{c'\}} \geq L_{\{c\}}$  ; de même,  $L_{\{c\}} \geq L_{\{c'\}}$ , donc  $L_{\{c\}} = L_{\{c'\}}$ .

b)  $L_{\{\gamma\}} \geq L_{\{c\}}$  si  $\{c\} \supset \{\gamma\}$ . La même propriété subsiste si toute  $\gamma$  contient une  $c$ .

c) S'il existe un point  $z_0$  à l'intérieur ou sur la frontière de  $G$ , tel que, pour tout  $\varepsilon$  assez petit ( $\varepsilon < \varepsilon_0$ ), toutes les courbes  $c \in \{c\}$  coupent le cercle  $|z - z_0| = \varepsilon$ , alors  $L_{\{c\}} = \infty$ . En effet, la répartition  $\varrho_{\varepsilon}(z) = (\ln(\varepsilon_0/\varepsilon) \cdot |z - z_0|)^{-1}$  pour  $\varepsilon < |z| < \varepsilon_0$ ,  $\varrho_{\varepsilon}(z) = 0$  ailleurs, est concurrente, d'où  $L_{\{c\}} \geq (1/2\pi) \ln \varepsilon_0/\varepsilon$  quel que soit  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ).

d) S'il existe un point  $q$  à l'intérieur ou sur la frontière de  $G$ , tel que toutes les circonférences de centre  $q$  et situées dans un voisinage  $U$  de  $q$  relatif à  $G$ , appartiennent à la famille  $\{c\}$ , alors  $L_{\{c\}} = 0$ . En effet, il existe un cercle de centre  $q$  et de rayon  $\varepsilon$  extérieur à  $G - U$ ; pour toute répartition concurrente  $\varrho$  du  $PLE \{c\}$ ,

$$A_{\varrho} \geq \iint_{|z-q| < \varepsilon} \varrho^2 d\tau \geq \int_{r=0}^{\varepsilon} dr \int_{|z-q|=r} \varrho^2 ds \geq \int_{r=0}^{\varepsilon} dr \frac{1}{2\pi r} \left[ \int_{|z-q|=r} \varrho ds \right]^2 \geq \frac{1}{2\pi_0} \int_0^{\varepsilon} \frac{dr}{r} = \infty;$$

donc  $L_{\{c\}} = 0$ .

e)  $M(\{c_1\} \cup \{c_2\}) \leq M\{c_1\} + M\{c_2\}$ .<sup>2)</sup>

En effet, soient  $\varrho_1$  concurrente du  $PLE \{c_1\}$  et  $\varrho_2$  concurrente du  $PLE \{c_2\}$ ; alors  $\varrho(p) = \text{Max} [\varrho_1(p), \varrho_2(p)]$  est concurrente du  $PLE(\{c_1\} \cup \{c_2\})$ ; et

$$A_{\varrho} = \iint \varrho^2 d\tau \leq \iint (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) d\tau \leq \iint \varrho_1^2 d\tau + \iint \varrho_2^2 d\tau = A_{\varrho_1} + A_{\varrho_2};$$

donc  $M(\{c_1\} \cup \{c_2\}) \leq \inf_{\varrho_1} A_{\varrho_1} + \inf_{\varrho_2} A_{\varrho_2} = M\{c_1\} + M\{c_2\}$ .

Il s'ensuit que : primo si  $M\{c_2\} = 0$ , alors  $M(\{c_1\} \cup \{c_2\}) = M\{c_1\}$ ; secundo si l'on augmente la famille  $\{c_1\}$  en sorte que  $M\{c_1\} \rightarrow \infty$  mais si  $M\{c_2\}$  reste borné, alors  $M(\{c_1\} \cup \{c_2\}) = M\{c_1\} + O(1)$ .

f) Si les familles  $\{c_1\}$  et  $\{c_2\}$  sont dans des domaines disjoints  $G_1$  et  $G_2$  et si  $\{c_1\} \cup \{c_2\} \subset \{\gamma\}$ , alors  $M\{\gamma\} \geq M\{c_1\} + M\{c_2\}$ . En effet, soit  $\varrho$  concurrente pour le  $PLE \{\gamma\}$ ;  $\varrho_1 = \varrho$  dans  $G_1$ ,  $= 0$  ailleurs, est concurrente pour le  $PLE \{c_1\}$ ;  $\varrho_2 = \varrho$  dans  $G_2$ ,  $= 0$  ailleurs, est concurrente pour le  $PLE \{c_2\}$ ; et  $A_{\varrho} \geq A_{\varrho_1} + A_{\varrho_2}$ .

g) Si les familles  $\{c_1\}$  et  $\{c_2\}$  sont dans des domaines disjoints  $G_1$  et  $G_2$  et si chaque courbe  $\gamma$  contient une  $c_1$  et une  $c_2$ , alors  $L_{\{\gamma\}} \geq L_{\{c_1\}} + L_{\{c_2\}}$ . En effet, soient  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  concurrentes du  $PLE \{c_1\}$ , resp. du  $PLE \{c_2\}$ ; la répartition  $\varrho$  égale à  $\lambda \varrho_1$  sur  $G_1$ , à  $(1 - \lambda) \varrho_2$  sur  $G_2$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) et nulle sur  $G - G_1 - G_2$ , est concurrente du  $PLE \{\gamma\}$ , d'où  $M\{\gamma\} \leq \lambda^2 M\{c_1\} + (1 - \lambda)^2 M\{c_2\}$ , c'est-à-dire (évaluation la plus forte pour  $\lambda = \frac{M\{c_2\}}{M\{c_1\} + M\{c_2\}}$ )  $L_{\{\gamma\}} \geq L_{\{c_1\}} + L_{\{c_2\}}$ .

### E. Méthode de symétrisation.

Nous dirons qu'un groupe de transformations  $T$  laisse invariante une famille  $\{c\}$  si, pour toute courbe  $c \in \{c\}$  et toute  $t \in T$ ,  $t(c) \in \{c\}$ .

<sup>2)</sup> *Strebel* [22, 23] a démontré, pour la longueur extrémale définie selon *Ahlfors* et *Beurling* (§ 2, B), l'inégalité moins forte  $L_{\{c_1\} \cup \{c_2\}}^{-1/2} \leq L_{\{c_1\}}^{-1/2} + L_{\{c_2\}}^{-1/2}$ .

Supposons qu'il existe un groupe fini de transformations *conformes ou anticonformes* qui laisse invariante  $\{c\}$ . Soient  $z_1, z_2(z_1), \dots, z_n(z_1)$  les images d'un point  $z_1$  par toutes les transformations du groupe. Je veux montrer qu'on obtient également  $M\{c\}$  en restreignant le  $PLE\{c\}$  aux répartitions  $\tilde{\varrho}$  telles que  $\tilde{\varrho}(z_1) = \tilde{\varrho}(z_2) |dz_2/dz_1| = \dots = \tilde{\varrho}(z_n) |dz_n/dz_1|$ .

En effet, soit  $\varrho$  concurrente du  $PLE\{c\}$ ; la répartition

$$\tilde{\varrho}(z_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{dz_i}{dz_1} \right| \varrho(z_i)$$

est également concurrente, et l'inégalité de Schwarz<sup>3)</sup> montre que  $A_{\tilde{\varrho}} \leq A_{\varrho}$ ; donc  $M\{c\} = \inf_{\varrho} A_{\varrho} = \inf_{\tilde{\varrho}} A_{\tilde{\varrho}}$ .

En particulier, si  $G^*$  et  $\{c\}$  sont symétriques par rapport à l'axe réel, on considérera le groupe formé par l'identité et la symétrie: la construction ci-dessus revient alors à définir simplement  $\tilde{\varrho}(z) = [\varrho(z) + \varrho(\bar{z})]/2$ .

#### F. Principe de l'augmentation des longueurs extrémales.

Soient  $\{c\}$  une famille de courbes dans un domaine  $G$ ;  $z' = f(z)$  une fonction analytique définie dans  $G$ ;  $\{c'\}$  la famille des courbes images  $c' = f(c)$ . Alors  $L_{\{c'\}} \geq L_{\{c\}}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varrho(z)$  une répartition concurrente du  $PLE\{c\}$ ; appelons  $z_i$  les images réciproques de  $z'$ ; la répartition

$$\varrho'(z') = \begin{cases} \text{Max}_i \left[ \varrho(z_i) \left| \frac{dz_i}{dz'} \right| \right] & \text{si tous les } \frac{dz'}{dz_i} \text{ sont différents de zéro,} \\ 0 & \text{si un } \frac{dz'}{dz_i} = 0 \quad (\text{ces } z' \text{ sont isolés}), \end{cases}$$

est concurrente du  $PLE\{c'\}$ , car  $C_{\varrho'}(c') \geq C_{\varrho}(c_j) \geq 1$  ( $c_j$  est une courbe  $\in \{c\}$  dont  $c'$  est l'image). Soit  $E$  l'ensemble des points  $z_1$  de  $G$  tels que  $\varrho(z_1) |dz_1/dz'| = \varrho'(z')$ ;  $A_{\varrho'} \leq A_{\varrho}(E) \leq A_{\varrho}(G)$ , d'où l'inégalité annoncée.

### § 3. Longueurs extrémales et modules. Propriétés des modules

A. a) Considérons un *quadrilatère*  $Q(\beta' \alpha' \beta'' \alpha'')$ . Soient  $\{c\}$  la famille des arcs joignant  $\beta'$  à  $\beta''$ , et  $\{\gamma\}$  celle des arcs joignant  $\alpha'$  à  $\alpha''$ . Alors  $M\{\gamma\} = L_c = \mu_{\beta' \beta''}$ .<sup>4)</sup>

<sup>3)</sup> Sous la forme plus générale  $(\int f g dx)^2 \leq \int f^2 dx \cdot \int g^2 dx$  ( $f \geq 0$ ,  $g \geq 0$ ). Par un partage fin adéquat de l'intervalle d'intégration, on démontre en effet que

$$\int f^2 dx + \lambda^2 \int g^2 dx - 2\lambda \int f g dx \geq 0$$

pour tout  $\lambda$  réel.

<sup>4)</sup> Cette propriété est bien connue pour la définition d'*Ahlfors* et *Beurling*; je montre qu'elle reste valable avec ma définition modifiée.

*Démonstration.* — Prenons comme représentant de la configuration à laquelle appartient  $Q$  un rectangle  $(0, a, a + ib, ib)$ ,  $\alpha'$  étant maintenant le segment  $0a$ .  $\mu_{\beta'\beta''} = a/b$ . La répartition constante  $\varrho_0 = 1/a$  dans le rectangle est concurrente du  $PLE\{c\}$ . Soit  $\varrho(x + iy)$  une répartition concurrente quelconque, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint (\varrho - \varrho_0)^2 d\tau \leq \int_0^b dy \int_0^a \left( \frac{1}{a^2} + \varrho^2 - \frac{2}{a} \varrho \right) dx \\ &\leq \frac{b}{a} + \iint \varrho^2 d\tau - \frac{2}{a} \int_0^b dy \int_0^a \varrho dx \leq A_\varrho - \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

d'où  $A_\varrho \geq b/a = A_{\varrho_0}$ ;  $\varrho_0$  est donc extrémale du  $PLE\{c\}$  et  $L_c = a/b$ . On montrerait de même que  $L_\gamma = b/a$ .<sup>5)</sup>

b) Considérons maintenant un *domaine doublement connexe*  $D$ , de contours  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$ . Soient  $\{c\}$  la famille des arcs joignant  $\Gamma'$  à  $\Gamma''$ , et  $\{\gamma\}$  celle des courbes fermées séparant  $\Gamma'$  de  $\Gamma''$ . On a alors de nouveau  $M\{\gamma\} = L_c = \mu$  (où  $\mu$  est cette fois le module de  $D$ ). (Démonstration tout à fait analogue à celle de a.)<sup>6)</sup> 7)

c) Grâce à ces problèmes extrémaux, toute répartition  $\varrho$ , dans un quadrilatère ou un domaine doublement connexe, fournit pour le module deux approximations : l'une par défaut, l'autre par excès.

d) Ces problèmes de variation permettent de retrouver immédiatement les propriétés bien connues de *monotonie* et de *suradditivité* des modules.

e) *Couture des segments.* Soit  $D$  un domaine doublement connexe dont les contours  $\beta'$  et  $\beta''$  sont tous deux symétriques par rapport à l'axe réel ; et soit  $Q$  un quadrilatère  $(\beta' \alpha' \beta'' \alpha'')$  dont le contour est formé par  $\beta'$ ,  $\beta''$  et un segment  $\alpha$  de l'axe réel (joignant  $\beta'$  à  $\beta''$ ) compté doublement. Alors  $\mu_{\beta'\beta''Q} = \mu_D$ .

C'est une conséquence immédiate de la méthode de symétrisation (§ 2, E).

<sup>5)</sup> Sans transformation conforme, la théorie du potentiel montre que  $L_c L_\gamma = 1$  pour  $Q$  quelconque : Soit  $u$  harmonique,  $= 0$  sur  $\beta'$ ,  $= 1$  sur  $\beta''$  et à dérivée normale nulle sur  $\alpha'$  et  $\alpha''$  ; soit  $e = \int_{\beta''} \partial u / \partial n ds$  ( $\vec{n}$  = normale extérieure),  $\varrho_{0c} = |\text{grad } u|$  est extrémale du  $PLE\{c\}$ , et  $\varrho_{0\gamma} = (1/e) |\text{grad } u|$  est extrémale du  $PLE\{\gamma\}$ . Il s'ensuit que  $1/L_\gamma = L_c = 1/e$ .

<sup>6)</sup> Nous voulons nous rendre indépendants, dans la mesure du possible, du théorème fondamental de *Riemann* sur la représentation conforme : aussi considérerons-nous  $\mu$  comme défini par la longueur extrémale d'une des familles de courbes  $\{c\}$ ,  $\{\gamma\}$ .

<sup>7)</sup> Pour les deux types de figures considérées ici,  $\{\gamma\}$  est la famille des courbes coupant chaque  $c$  en un point au moins ; et nous constatons que  $L_c L_\gamma = 1$ . Voir à ce propos l'Appendice du Chap. I : E et F.



## B. Coupure extrémale.

Soit  $G$  un domaine (ordre de connexion quelconque) situé dans le plan complexe, et dont chaque contour est symétrique par rapport à l'axe réel. Nous supposons que l'on ait désigné, sur la frontière de  $G$ , un certain ensemble  $\beta''$  également symétrique relativement à l'axe réel. Soient donnés en outre deux points réels  $p, q$  (à l'intérieur ou sur la frontière de  $G$ ) tels que l'intervalle réel  $p < x < q$  soit intérieur à  $G$ . Soit  $\beta'$  un continu quelconque dans  $G$ , contenant  $p$  et  $q$ ; et soit  $\{c\}$  la famille des arcs situés dans  $G$  et reliant  $\beta'$  à  $\beta''$ . Alors  $L_{\{c\}}$  est maximum si  $\beta' = \beta'_1 \equiv$  segment réel  $p \leq x \leq q$ .

*Démonstration.* — Appelons  $\{c_1\}$  la famille des arcs dans  $G$  reliant  $\beta'_1$  à  $\beta''$ . Soit  $\varrho$  concurrente du  $PLE\{c\}$ , la répartition  $\tilde{\varrho}(z) = [\varrho(z) + \varrho(\bar{z})]/2$  (où l'on définit  $\varrho = 0$  sur  $\beta'$ ) est concurrente du  $PLE\{c_1\}$ ; en effet,  $C_{\tilde{\varrho}}(c_1) = (1/2)C_{\varrho}(c_1 \cup \bar{c}_1)$ ; or,  $c_1 \cup \bar{c}_1$  est un arc<sup>8)</sup> séparant  $p$  de  $q$  et ayant ses extrémités sur  $\beta''$ ;  $c_1 \cup \bar{c}_1$  a donc au moins un point commun avec le continu  $\beta'$ ,  $c_1 \cup \bar{c}_1$  contient donc deux arcs disjoints  $\epsilon\{c\}$ ; donc  $C_{\tilde{\varrho}}(c_1) \geq 1$ ,  $\tilde{\varrho}$  est bien concurrente du  $PLE\{c_1\}$ .  $A_{\tilde{\varrho}} \leq A_{\varrho}$  est (comme au § 2, E) une conséquence du lemme de Schwarz. Donc  $L_{\{c_1\}} \geq L_{\{c\}}$ .

Si  $G$  est un domaine de Jordan  $\ni p, q$ , de frontière  $\Gamma = \beta''$ , nous avons une importante propriété extrémale concernant les modules  $\mu$  des domaines doublement connexes  $D$  dans  $G$ , qui séparent  $p$  et  $q$  de  $\Gamma$ :  $\mu \leq \mu_1$ .<sup>9)</sup>

## C. Comportement asymptotique des modules.

Soient (fig. 1)  $G$  un domaine de Jordan;  $\Gamma$  sa frontière;  $\alpha$  un arc-frontière;  $\{\theta_\lambda\}$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ , indice discret ou continu) des arcs à extrémités sur  $\Gamma - \alpha$ , tels que, si  $\lambda' < \lambda < \lambda''$ ,  $\theta_\lambda$  sépare  $\alpha$  et  $\theta_{\lambda'}$  de  $\theta_{\lambda''}$ , et se refermant, lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , sur un point  $E$  de  $\Gamma$  ( $E \neq$  extrémité d'un  $\theta_\lambda$ ).

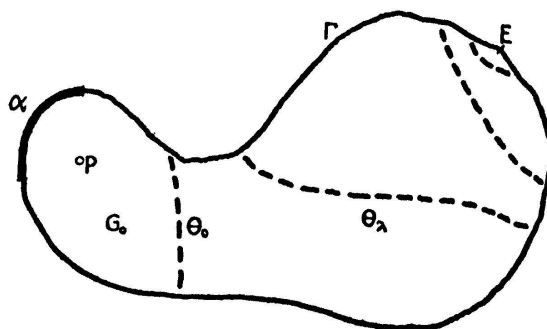


fig. 1

$\theta_\lambda$  partage  $G$  en deux domaines de Jordan; appelons  $G_\lambda$  celui qui est adjacent à  $\alpha$ .  $\theta_0$  partage  $G_\lambda$  en  $G_0$  et  $G_{0\lambda}$ . Soit  $\{\gamma_\lambda\}$  la famille des coupures dans  $G_\lambda$  séparant  $\alpha$  de  $\theta_\lambda$ ; soit  $\{\gamma_{0\lambda}\} \subset \{\gamma_\lambda\}$  celle des coupures dans  $G_{0\lambda}$  séparant  $\theta_0$  de  $\theta_\lambda$ ; et soit  $\{c_\lambda\} = \{\gamma_\lambda\} - \{\gamma_{0\lambda}\}$ . Appelons  $\{c\}$  la famille des coupures dans  $G$  séparant  $E$  de  $\alpha$ , mais non pas de  $\theta_0$ .  $M\{c\} < \infty$ <sup>10)</sup>;

<sup>8)</sup> Si  $c_1$  a plusieurs points réels, il recoupe  $\bar{c}_1$ , mais tout le raisonnement reste valable.

<sup>9)</sup> Cette propriété peut également être obtenue à l'aide d'une symétrisation de Steiner (cf. Pólya et Szegő [18]). Voir aussi Nehari [15], p. 174.

<sup>10)</sup> Chaque  $c$  a, sur la sphère, une longueur positive; la métrique sphérique fournit donc une répartition concurrente du  $PLE\{c\}$ .



$\{c_\lambda\} \subset \{c\}$ , donc  $M\{c_\lambda\} \leq M\{c\}$ ;  $\{\gamma_\lambda\} = \{\gamma_{0\lambda}\} \cup \{c_\lambda\}$ , donc (cf. § 2, D, e)  $M\{\gamma_\lambda\} \leq M\{\gamma_{0\lambda}\} + M\{c_\lambda\} \leq M\{\gamma_{0\lambda}\} + M\{c\}$ , c'est-à-dire  $\mu_{\alpha\theta_\lambda} \leq \mu_{\theta_0\theta_\lambda} + M\{c_\lambda\}$ . — En vertu de la suradditivité, on sait que  $\mu_{\alpha\theta_\lambda} \geq \mu_{\alpha\theta_0} + \mu_{\theta_0\theta_\lambda}$ ; donc

$$\mu_{\alpha\theta_0} \leq \mu_{\alpha\theta_\lambda} - \mu_{\theta_0\theta_\lambda} \leq M\{c_\lambda\} \leq M\{c\}.$$

D'où la formule asymptotique :

$$\mu_{\alpha\theta_\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} + O(1) \quad \text{lorsque} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Cette formule nous sera utile par la suite, notamment à propos du théorème général de *Phragmén-Lindelöf* (III, 3, C).

D. Applications du principe de l'augmentation des longueurs extrémales. f) *Augmentation du module d'un domaine doublement connexe.*

Soient  $G$  un domaine simplement connexe, de frontière  $\Gamma$ ;  $K$  un continu simplement connexe dans  $G$ ;  $D$  le domaine doublement connexe  $G - K$ ;  $z' = f(z)$  une transformation intérieure bornée dans  $G$ , analytique dans  $D$ ;  $G' = f(G)$ ,  $K' = f(K)$ . Appelons  $\gamma_1$  le contour extérieur de  $K'^{11)}$ , et  $\Gamma_1$  celui de  $G'$ ;  $D_1$  le domaine doublement connexe de contours  $\gamma_1$  et  $\Gamma_1$ . Alors

$$\mu_{D_1} \geq \mu_D.$$

*Démonstration.* — Soit  $\{c\}$ , resp.  $\{c_1\}$ , la famille des arcs joignant les deux contours de  $D$ , resp.  $D_1$ . Tout arc  $c_1$  a un point  $p' = f(p)$  sur  $K'$  ( $p \in K$ ); si  $z'$  décrit  $c_1$  à partir de  $p'$ ,  $z$  décrit un arc  $\eta$  à partir de  $p$ ;  $p$  étant intérieur à  $G$ ,  $\eta$  coupe  $\Gamma$  en un point  $q$ , dont l'image  $q'$  est sur  $c_1$ . Il existe donc un arc  $c$  (de  $p$  à  $q$ )  $\subset \eta$ , dont l'image  $c'$  (de  $p'$  à  $q'$ )  $\subset c_1$ . — La propriété b) du §2, D dit que  $L_{\{c_1\}} \geq L_{\{c'\}}$ ; le principe d'augmentation (§ 2, F) dit que  $L_{\{c'\}} \geq L_{\{c\}}$ ; donc  $L_{\{c_1\}} \geq L_{\{c\}}$ , soit  $\mu_{D_1} \geq \mu_D$ .<sup>12)</sup>

g) *Diminution du module d'un quadrilatère.*

*Primo.* Soit  $Q(\beta_1\alpha_1\beta_2\alpha_2)$  un quadrilatère; supposons que son image par une fonction analytique  $z' = f(z)$  soit un domaine simplement connexe, à partir duquel les ensembles-images  $\beta'_1$  et  $\beta'_2$  définissent un quadrilatère  $Q'$ . Le module de  $Q'$  est défini par  $M\{\gamma_1\}$ , où  $\{\gamma_1\}$  est la famille des coupures séparant  $\beta'_1$  de  $\beta'_2$  dans  $Q'$ . Alors

$$\mu_{\beta'_1\beta'_2Q'} \leq \mu_{\beta_1\beta_2Q}.$$

<sup>11)</sup> C'est la frontière de la composante connexe infinie du complément de  $K'$ .

<sup>12)</sup> Si  $f(z)$  applique  $D$  de façon non-triviale dans un domaine doublement connexe  $D_2$  (c. à d. si  $f(D)$  sépare les deux contours de  $D_2$ ), alors  $D_2 \supset D_1$  et  $\mu_{D_2} \geq \mu_{D_1}$ , donc  $\mu_{D_2} \geq \mu_D$ . Cette dernière inégalité a déjà été démontrée par *Schiffer* [20] et par *Jenkins* [14].

*Démonstration.* — Soit  $\{\gamma\}$  la famille des arcs dans  $Q$ , séparant  $\beta_1$  de  $\beta_2$ . Soit  $c$  un arc joignant  $\beta_1$  à  $\beta_2$  dans  $Q$ ;  $c'$  joint  $\beta'_1$  à  $\beta'_2$  dans  $Q'$ ;  $c'$  coupe donc tout arc  $\gamma_1$  en un point  $p'$ , qui est l'image d'un point  $p$  de  $c$ . Par  $p$  passe une image réciproque de  $\gamma_1$ , qui coupe  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  et contient donc un arc  $\gamma$ ; donc  $\gamma_1 \supset \gamma'$ ;  $L_{\{\gamma_1\}} \geq L_{\{\gamma'\}} \geq L_{\{\gamma\}}$  en vertu du principe d'augmentation, d'où l'inégalité annoncée.

*Secundo.* Soient  $Q(\beta_1\alpha_1\beta_2\alpha_2)$  un quadrilatère;  $z' = f(z) = u + iv$  une fonction analytique dans  $Q$ , telle que  $v \leq -b$  sur  $\alpha_1$ ,  $v \geq b$  sur  $\alpha_2$ , et  $|u| < a$  dans tout  $Q$  ( $a$  et  $b$  réels  $> 0$ ). Alors  $\mu_{\beta_1\beta_2Q} \leq a/b$ .

*Démonstration.* — Soient  $\{c\}$  la famille des arcs dans  $Q$  reliant  $\beta_1$  à  $\beta_2$ , et  $\{c_1\}$  celle des arcs dans le rectangle  $|u| < a$ ,  $|v| < b$ , reliant les deux arcs-frontière verticaux. Chaque arc  $c_1$  contient un arc  $c' = f(c)$ ; donc  $L_{\{c_1\}} \geq L_{\{c'\}} \geq L_{\{c\}}$  (principe d'augmentation); d'où

$$\mu_{\beta_1\beta_2Q} \leq L_{\{c_1\}} = a/b.$$

L'évaluation est exacte, l'égalité ayant lieu si  $Q$  est le rectangle  $|u| < a$ ,  $|v| < b$  et  $f(z) \equiv z$ .<sup>13)</sup>

## Appendice du Chapitre I. Les familles numériques

A. J'appellerai *courbe brisée* un système fini ou dénombrable de courbes ou d'arcs de Jordan  $c_i$ , chacun étant compté un nombre entier  $n_i \geq 0$  de fois:  $c = n_1c_1 + n_2c_2 + \dots = \sum n_i c_i$ . Le sens de parcours des courbes  $c_i$  est indifférent ici, ainsi que l'ordre dans lequel figurent les termes. On conviendra d'omettre ceux pour lesquels  $n_i = 0$ .

La somme de deux courbes brisées est définie par  $c^{(1)} + c^{(2)} = \sum (n_i^{(1)} + n_i^{(2)}) c_i$ . Pour  $N$  entier positif,  $Nc$  définira donc la courbe brisée  $\sum (Nn_i) c_i$ . — L'ensemble  $B_G$  de toutes les courbes brisées dans un domaine  $G$  diffère d'un espace vectoriel du fait de la condition  $n_i \geq 0$ .

B. Une *famille numérique* dans un domaine  $G$  est une fonction réelle non-négative  $C$  dans  $B_G$ , telle que  $C(kc) = k \cdot C(c)$  ( $k$  réel  $\geq 0$ ).

Un exemple particulièrement important est fourni par la famille numérique  $C_\varrho(c) = \sum n_i \int_{c_i} \varrho ds$  (cf. § 2, C), induite par une répartition  $\varrho$  dans

<sup>13)</sup> *Jenkins* [14] a démontré tout récemment une propriété équivalente à notre inégalité; sa méthode (bien que liée à plusieurs hypothèses restrictives) présente une forte analogie avec notre démonstration générale du principe d'augmentation (§ 2, F); nous avons cependant travaillé indépendamment de lui. — *Nevanlinna* ([16], p. 75–76) avait déjà démontré une inégalité analogue, mais moins forte. — Un problème analogue a été traité par *Pólya* [17].

$G$ . Cette fonction  $C_\varrho$  dans  $B_G$  est *linéaire* ; en outre,  $C_{k\varrho} = k \cdot C_\varrho$  ( $k$  réel  $\geq 0$ ) et  $C_{\varrho_1 + \varrho_2} \geq C_{\varrho_1} + C_{\varrho_2}$ .

*Définitions.* — La somme  $C_1 + C_2$  est définie par  $(C_1 + C_2)(c) = C_1(c) + C_2(c)$  ;  $kC$  ( $k$  réel  $\geq 0$ ) par  $(kC)(c) = k \cdot C(c)$  ;  $[C_1, C_2] = \text{Max}(C_1, C_2)$  par  $[C_1, C_2](c) = \text{Max}(C_1(c), C_2(c))$  ;  $\underline{C_1 C_2} = \text{Min}(C_1, C_2)$  par  $\underline{C_1 C_2}(c) = \text{Min}(C_1(c), C_2(c))$ . — Nous écrirons  $C_1 \geq C_2$  si  $C_1(c) \geq C_2(c)$  pour toute courbe brisée  $c$ .

C. Le *module*  $M(C)$  d'une famille numérique  $C$  est défini par

$$M(C) = \inf_{\varrho} A_{\varrho} \quad (A_{\varrho} = \iint \varrho^2 d\tau),$$

où l'on admet à concurrence toutes les répartitions  $\varrho$  telles que  $C_{\varrho} \geq C$ .

Cette définition généralise celle qui a été donnée (§ 2, C) pour les familles (ordinaires) de courbes<sup>14</sup>). Elle jouit notamment des propriétés suivantes :

a) Le module  $M(C)$  est un *invariant conforme*. Même démonstration qu'au § 2, D, a.

b) *Monotonie* :  $C_1 \leq C_2$  entraîne  $M(C_1) \leq M(C_2)$ . En effet, toute répartition concurrente pour  $M(C_2)$  l'est aussi pour  $M(C_1)$ .

c) *Homogénéité* :  $M(kC) = k^2 \cdot M(C)$ . En effet,  $C_{k\varrho} \geq kC$  si et seulement si  $C_{\varrho} \geq C$  ; et  $A_{k\varrho} = k^2 \cdot A_{\varrho}$ .

d)  $[M(C_1 + C_2)]^{1/2} \leq [M(C_1)]^{1/2} + [M(C_2)]^{1/2}$  .

*Démonstration.* — Soient  $\varrho_1$  et  $\varrho_2$  concurrentes pour  $M(C_1)$ , resp. pour  $M(C_2)$ , c.-à-d.  $C_{\varrho_1} \geq C_1$  et  $C_{\varrho_2} \geq C_2$  ;  $C_{\varrho_1 + \varrho_2} \geq C_{\varrho_1} + C_{\varrho_2} \geq C_1 + C_2$  ;

$$A_{\varrho_1 + \varrho_2} \leq \iint \varrho_1^2 d\tau + \iint \varrho_2^2 d\tau + 2 \iint \varrho_1 \varrho_2 d\tau \leq A_{\varrho_1} + A_{\varrho_2} + 2 \sqrt{A_{\varrho_1} A_{\varrho_2}}$$

en vertu de l'inégalité de *Schwarz*<sup>3</sup>), d'où le résultat.

e)  $M[C_1, C_2] \leq M(C_1) + M(C_2)$ .

*Démonstration.* — (Cf. § 2, D, e.) Si  $C_{\varrho_1} \geq C_1$  et  $C_{\varrho_2} \geq C_2$ , alors  $C_{[\varrho_1, \varrho_2]} \geq [C_1, C_2]$  ; et  $A_{[\varrho_1, \varrho_2]} \leq \iint (\varrho_1^2 + \varrho_2^2) d\tau \leq A_{\varrho_1} + A_{\varrho_2}$  ; d'où l'inégalité.

f) Nous dirons qu'un domaine  $G$  „porte“ une famille numérique  $C$  si  $C(c) = 0$  pour toute courbe brisée  $c$  non située entièrement dans  $G$ .

<sup>14</sup>) *Jenkins* [13] avait déjà généralisé la notion de longueur extrémale au cas où, étant données plusieurs familles de courbes  $\{c_\nu\}$ , on impose aux répartitions  $\varrho$  les conditions  $C_{\varrho}(c_\nu) \geq a_\nu$  ( $> 0$ ).

Si  $C_1$  et  $C_2$  sont portées par deux domaines disjoints  $G_1$  et  $G_2$ , alors  $M(C_1 + C_2) = M(C_1) + M(C_2)$ . (Généralisation du § 2, D, f.)

*Démonstration.* — Ici  $C_1 + C_2 = [C_1, C_2]$ , e) nous fournit donc déjà une inégalité. — Soit  $\varrho$  telle que  $C_\varrho \geq C_1 + C_2$ ; posons  $\varrho_1 = \varrho$  dans  $G_1$ ,  $\varrho_1 = 0$  ailleurs; et  $\varrho_2 = \varrho$  dans  $G_2$ ,  $\varrho_2 = 0$  ailleurs;  $A_{\varrho_1} + A_{\varrho_2} = A_\varrho(G_1) + A_\varrho(G_2) \leq A_\varrho$ . Donc  $M(C_1) + M(C_2) \leq M(C_1 + C_2)$ ; c. q. f. d.

g) (Généralisation du § 2, D, g.) Considérons trois familles numériques  $C_1, C_2, C$  satisfaisant aux deux conditions suivantes :

Primo.  $C_1$  et  $C_2$  sont portées par deux domaines *disjoints*  $G_1$  et  $G_2$ ;

Secundo. Chaque courbe brisée  $c$  contient deux courbes brisées  $c_1$  et  $c_2$  telles que  $C(c) \leq \min(C_1(c_1), C_2(c_2))$ .

Alors

$$\frac{1}{M(C)} \geq \frac{1}{M(C_1)} + \frac{1}{M(C_2)}.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\begin{aligned} M(C) &\leq M[(1 - \lambda)C_1 + \lambda C_2] \leq M[(1 - \lambda)C_1] + M(\lambda C_2) \\ &= (1 - \lambda)^2 M(C_1) + \lambda^2 M(C_2) \end{aligned}$$

en vertu de f) et c). Cette borne a (en fonction de  $\lambda$ ) le minimum

$$[M(C_1)^{-1} + M(C_2)^{-1}]^{-1},$$

d'où l'inégalité.

h) La *méthode de symétrisation* (§ 2, E) et sa démonstration restent valables pour les familles numériques. On dira qu'un groupe de transformations  $T$  laisse invariante une famille numérique  $C$  si, pour toute courbe brisée  $c$  et toute  $t \in T$ ,  $C(c) = C(t(c))$ .

i) Le *principe d'augmentation* des longueurs extrémales (§ 2, F) se laisse transposer ici comme suit :

Soient  $C$  une famille numérique portée par un domaine  $G$ ;  $z' = f(z)$  une fonction analytique définie dans  $G$ ;  $C'$  la famille numérique définie dans  $G' = f(G)$  par  $C'(c') = \text{Max}_i C(c_i)$ , où  $f(c_i) = c'$ . Alors  $M(C') \leq M(C)$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varrho(z)$  concurrente pour  $M(C)$ , c'est-à-dire  $C_\varrho \geq C$ ; appelons  $z_i$  les images réciproques d'un point  $z' \in G'$ ; la répartition

$$\varrho'(z') = \begin{cases} \text{Max}_i [\varrho(z_i) | dz_i/dz' |] & \text{si tous les } dz_i/dz_i \text{ sont différents de zéro,} \\ 0 & \text{si l'une de ces dérivées est nulle,} \end{cases}$$

est concurrente pour  $M(C')$ , car  $C_{\varrho'}(c') \geq \text{Max}_i C_{\varrho}(c_i) \geq \text{Max}_i C(c_i) = C'(c')$ ; et  $A_{\varrho'} \leq A_{\varrho}$ , d'où le théorème.

De même que les principes de *Nevanlinna* (sur la mesure harmonique et sur la distance hyperbolique), le principe ci-dessus exprime seulement une propriété de monotonie; il ne dit pas *de combien* le module d'une famille numérique diminue par une application analytique non-univalente. Il n'est donc pas sans intérêt de le préciser comme suit.

j) Soit  $C^*$  la famille définie dans  $G'$  par  $C^*(c') = \sqrt{\sum_i [C(c_i)]^2}$ , où  $f(c_i) = c'$ . Alors  $M(C^*) \leq M(C)$ .

*Démonstration.* — Soit  $\varrho(z)$  telle que  $C_{\varrho} \geq C$ ; je dis que la répartition

$$\varrho^*(z') = \begin{cases} \sqrt{\sum_i [\varrho(z_i) | dz_i/dz' |]^2} & \text{si tous les } dz_i/dz' \text{ sont différents de zéro,} \\ 0 & \text{si l'une de ces dérivées est nulle,} \end{cases}$$

est concurrente pour  $M(C^*)$ . En effet, l'inégalité

$$C_{\varrho^*}(c') = \int_{z' \in c'} \sqrt{\sum_i (\varrho(z_i) | dz_i |)^2} \geq \sqrt{\sum_i (\int_{c_i} \varrho(z_i) | dz_i |)^2} = \sqrt{\sum_i [C_{\varrho}(c_i)]^2}$$

s'obtient par passage à la limite à partir de  $\sum_j \sqrt{\sum_i a_{ij}^2} \geq \sqrt{\sum_i (\sum_j a_{ij})^2}$

(la somme  $\sum_j |\vec{a}_j|$  des longueurs des vecteurs  $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$

est au moins égale à la longueur  $|\sum_j \vec{a}_j|$  du vecteur résultant); donc

$$C_{\varrho^*}(c') \geq \sqrt{\sum_i [C(c_i)]^2} = C^*(c'), \quad \varrho^* \text{ est bien concurrente pour } M(C^*).$$

D'autre part,  $A_{\varrho^*} = A_{\varrho}$ , d'où  $M(C^*) \leq M(C)$ .

Par exemple, si  $i = 1, 2, \dots, n$  et  $C(c_1) = C(c_2) = \dots = C(c_n)$ , alors  $C^* = \sqrt{n} \cdot C'$ , le principe énoncé sous i) est précisé dans ce cas par  $M(C') \leq M(C)/n$ .

D. Je dirai que deux courbes brisées  $c = \sum n_i c_i$  et  $c' = \sum n'_i c'_i$  sont *homotopes* relativement à une figure  $G^*$  ( $c \simeq c'$ ), si l'on peut établir une correspondance biunivoque  $i \leftrightarrow \nu_i$  telle que  $c_i \simeq c'_{\nu_i}$  et  $n_i = n'_{\nu_i}$ .

L'ensemble  $B_G$  des courbes brisées dans  $G$  se décompose en classes d'homotopie  $h_i$  (relativement à  $G^*$ ).

Une famille numérique  $C$  sera dite *relative à une figure  $G^*$*  si  $c \simeq c'$  entraîne  $C(c) = C(c')$ ;  $C$  induit alors une fonction, notée aussi  $C$ , dans l'ensemble  $\mathfrak{H}$  des classes d'homotopie  $h_i$ .

E. Je me permets d'énoncer ici une conjecture : je n'ai pas pu la démontrer, mais je l'ai vérifiée dans de nombreux exemples ; nous en rencontrons plusieurs au cours de ce travail.

Je désigne par  $n_{ij}$  le nombre minimum de „points d'intersection de deux courbes brisées“  $c^{(i)} = \sum_K n_K^{(i)} c_K^{(i)} \in h_i$  et  $c^{(j)} = \sum_S n_S^{(j)} c_S^{(j)} \in h_j$  :

$$n_{ij} = \min_{\substack{c^{(i)} \in h_i \\ c^{(j)} \in h_j}} \sum_{K, S} n_K^{(i)} n_S^{(j)} \cdot n(c_K^{(i)}, c_S^{(j)}) ,$$

où  $n(c, \gamma)$  est le nombre de points d'intersection des courbes  $c$  et  $\gamma$ .

**Conjecture.** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux fonctions réelles  $\geq 0$  dans  $\mathfrak{H}$ , telles que  $C_1(h_i) \cdot C_2(h_j) \leq n_{ij}$  pour tous  $i, j$ . Alors  $M(C_1) \cdot M(C_2) \leq 1$ .

Cas particulier : Soient  $\{c\}$  et  $\{\gamma\}$  deux familles de courbes. Si chaque courbe  $c$  coupe chaque courbe  $\gamma$  en  $N$  points au moins, alors  $L_{\{c\}} \cdot L_{\{\gamma\}} \geq N^2$ .

F. Soit  $C$  une fonction réelle  $\geq 0$  dans  $\mathfrak{H}$ . Je désigne par  $\bar{C}$  la plus grande fonction  $\geq 0$  dans  $\mathfrak{H}$ , satisfaisant avec  $C$  à l'hypothèse de la conjecture. En d'autres termes, je définis  $\bar{C}$  par

$$\bar{C}(h_i) = \inf_{C(h_j) > 0} \frac{n_{ij}}{C(h_j)} \quad ^{15)}$$

Si  $C$  est la fonction caractéristique d'une famille de courbes  $\{\gamma\}$ ,  $\bar{C}(c) = n(c, \{\gamma\}) = \min_{\gamma \in \{\gamma\}} n(c, \gamma)$ .

La conjecture énoncée sous E est équivalente à  $M(C) \cdot M(\bar{C}) \leq 1$ .

Dans les exemples qui se présentent au cours de ce travail (Chapitre I, § 3, A ; Chapitre II, §§ 2 et 3), on a même  $M(C) \cdot M(\bar{C}) = 1$ . Cela suggère la

**Question.** Sous quelles hypothèses a-t-on  $M(C) \cdot M(\bar{C}) = 1$  ?

<sup>15)</sup> Utilisons momentanément les notations de la théorie des ensembles :  $\subset$  au lieu de  $\leq$ ,  $C_1 \cup C_2$  au lieu de  $[C_1, C_2]$ ,  $C_1 \cap C_2$  au lieu de  $\underline{C_1 C_2}$ . On montre facilement : a) si  $C_1 \subset C_2$ , alors  $\bar{C}_1 \supset \bar{C}_2$  ; b)  $\bar{\bar{C}} \supset C$  ; c)  $\bar{\bar{\bar{C}}} = \bar{C}$  ; d)  $\overline{C_1 \cup C_2} = \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$  ; e)  $\overline{C_1 \cap C_2} \supset \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$  ; f)  $\overline{C_1 \cup C_2} \supset \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$  et  $\overline{C_1 \cap C_2} \subset \bar{C}_1 \cap \bar{C}_2$ . – Appelons  $\bar{C}$  la *fermeture* de  $C$ , et disons que  $C$  est *fermée* si  $\bar{\bar{C}} = C$ . Toute famille fermée est inverse, et réciproquement.  $\bar{\bar{C}}$  est la plus petite famille fermée  $\supset C$ . Appelons „famille vide“ (ou „nulle“)  $0(c) \equiv 0$  ;  $\bar{0}(c) \equiv \infty$ ,  $\bar{0} = 0$ . d) montre que l'intersection de deux familles fermées est fermée. Cependant, e) ne permet pas d'affirmer que la réunion de deux familles fermées soit fermée : c'est le seul axiome de Kuratowski non-satisfait ici.

Dans les exemples simples qui se présentent au cours de ce travail, les familles considérées sont fermées ; rien ne dit que ce soit le cas généralement. – On pourrait restreindre les définitions de ce paragraphe aux familles numériques de courbes connexes, non-brisées. Il est alors facile de construire une famille  $\{c\} \neq \bar{\{c\}}$  : dans un domaine triplement connexe de contours  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ,  $\{c\}$  sera la famille des arcs joignant  $\Gamma_1$  à  $\Gamma_2$  ou à  $\Gamma_3$ .

## Chapitre II. Mesure harmonique et distance hyperbolique

### § 1. La fonction $\nu(r)$

A. **Définition.**  $\nu(r)$  ( $0 \leq r < 1$ ) est le module du domaine doublement connexe dont les contours sont le cercle-unité  $|z| = 1$  et le segment réel  $0 \leq x \leq r$ .<sup>16)</sup>

B. *Discussion dans le cadre de la théorie des intégrales elliptiques.* Le quadrilatère défini par le demi-plan inférieur  $y < 0$  et ses points-frontière  $\infty, 1/r, r, 0$  est représenté conformément sur le rectangle  $(0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2)$  ( $\omega_2 = i |\omega_2|$ ) par l'intégrale elliptique

$$w(z) = \int_{\infty}^z \frac{dz}{Vz(z-r)(z-1/r)},$$

avec  $\omega_1 = w(1/r) = 2\sqrt{r} K(r)$  et  $|\omega_2| = 2\sqrt{r} K'(r)$ , selon les notations usuelles pour la forme normale de *Legendre* :

$$K(r) = \int_0^1 \frac{dx}{V(1-x^2)(1-r^2x^2)}, \quad K'(r) = K(\sqrt{1-r^2}).$$

Le module  $\mu$  de notre quadrilatère initial (relativement aux arcs-frontière  $0 \leq x \leq r$  et  $1/r \leq x \leq \infty$ ) vaut  $\frac{|\omega_2|}{\omega_1} = \frac{K'(r)}{K(r)}$ . La méthode de symétrisation (I, 2, E) montre dès lors sans peine que

$$\nu(r) = \frac{1}{4} \frac{K'(r)}{K(r)}. \quad (1)$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\nu(r) \cdot \nu(\sqrt{1-r^2}) = \frac{1}{16}. \quad (2)$$

D'autre part, la *transformation de Landen*, connue dans la théorie des fonctions elliptiques [25], permet de déduire de (1) les *formules de récurrence* :

$$2\nu(r) = \nu\left(\frac{(1 - \sqrt{1-r^2})^2}{r^2}\right) \quad (3)$$

et

$$\frac{1}{2}\nu(r) = \nu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right) \quad (3')$$

---

<sup>16)</sup> Si  $\Phi(P)$  désigne la fonction définie par *Teichmüller* [24],  $\nu(1/P) = (1/2\pi) \ln \Phi(P)$ . Il est immédiat que  $\nu$  est monotone décroissante.



On tire des égalités (2) et (3) :

$$\nu(r) \cdot \nu\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{1}{8} \quad (4)$$

Les *développements asymptotiques* de  $\nu(r)$  pour  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow 1$  peuvent être obtenus à partir des développements connus de  $K(r)$  pour ces deux mêmes cas limites. On obtient ainsi :

$$r \rightarrow 0 : \quad \nu(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{r} + O(r^2) , \quad (5)$$

$$r \rightarrow 1 : \quad \nu(r) = \frac{\pi}{4 \ln \frac{8}{1-r}} (1 + O(1-r)) . \quad (6)$$

C. *Discussion élémentaire.* Au lieu d'employer la théorie des intégrales elliptiques et les développements connus, on peut procéder élémentairement ; comme *Teichmüller* [24] (pour des résultats partiels), je pense qu'il vaut la peine d'indiquer de quelle façon.

Je désigne par  $D(a, \delta, b)$  le domaine doublement connexe obtenu en coupant la sphère de Riemann le long des segments réels  $-a \leq x \leq 0$  et  $\delta \leq x \leq \delta + b$ , et par  $\mu(a, \delta, b)$  son module. Le module étant un invariant conforme,  $\mu(a, \delta, b) = \mu(\lambda a, \lambda \delta, \lambda b) = \mu(b, \delta, a)$ . D'autre part, une inversion  $w = a/z$ , appliquée sur  $D(a, \delta, b)$ , montre que  $\mu(a, \delta, b) = \mu(ab/\delta, a + \delta + b, \infty)$ .

La méthode de symétrisation (I, 2, E) montre que

$$2\nu(r) = \mu(r, 1/r - r, \infty) ,$$

donc

$$2\nu(r) = \mu(r^2, 1 - r^2, \infty) . \quad (7)$$

D'autre part, la transformation  $w = (z + 1/z)/2$  donne

$$\nu(r) = \mu\left(2, \frac{1+r^2}{2r} - 1, \infty\right) = \mu(4r, (1-r)^2, \infty) = \mu\left(\frac{4r}{(1+r)^2}, \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2, \infty\right) .$$

La comparaison de cette expression avec (7) fournit les *formules de récurrence* (3') et (3).

(I, 2, E) montre aussi facilement que le quadrilatère défini par le demi-plan supérieur et les segments-frontière  $-a \leq x \leq 0$  et  $\delta \leq x \leq \infty$ , a un module  $\mu_{a\infty} = 2\mu(a, \delta, \infty)$  ; l'autre module du même quadrilatère vaut  $\mu_{\infty\delta} = 2\mu(\delta, a, \infty)$  ;  $\mu_{a\infty} \cdot \mu_{\infty\delta} = 1$ , donc  $\mu(a, \delta, \infty) \cdot \mu(\delta, a, \infty) = 1/4$ . En vertu de (7), cette identité est équivalente à (2) ; d'où (4).



De (7), on tire encore

$$\mu(a, \delta, b) = 2\nu\left(\sqrt{\frac{ab}{(a+\delta)(b+\delta)}}\right) = 2\nu(V(x_1, x_4, x_2, x_3)) = \frac{1}{8\nu(V(x_1, x_2, x_4, x_3))} \quad (8)$$

en vertu de (2), où  $a = x_2 - x_1$ ,  $\delta = x_3 - x_2$ ,  $b = x_4 - x_3$ , et

$$(x_1, x_4, x_2, x_3) = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} : \frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_4}.$$

*Evaluations.* La transformation  $w = (z + 1/z)/2$  applique l'anneau circulaire  $1 < |z| < R$  sur l'ellipse  $E_a$ , de foyers  $\pm 1$  et de demi-axes  $a = (R + 1/R)/2$ ,  $b = (R - 1/R)/2$ , coupée le long du segment joignant les foyers. C'est un domaine doublement connexe de module

$$\mu(E_a) = (1/2\pi) \ln R = (1/2\pi) \ln (a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Considérons maintenant le cercle  $|z| < K > 1$ , que nous coupons le long du segment réel  $-1 \leq x \leq 1$ ; soit  $C_K$  le domaine doublement connexe ainsi construit. La transformation conforme  $w = \frac{z+1}{K^2+z} K$  montre que  $\mu(C_K) = \nu\left(\frac{2K}{K^2+1}\right) = \frac{1}{2}\nu\left(\frac{1}{K^2}\right)$  selon (3').  $E_K \subset C_K \subset E_{\sqrt{K^2+1}}$ ; donc, selon la monotonie des modules,  $\mu(E_K) \leq \mu(C_K) \leq \mu(E_{\sqrt{K^2+1}})$ , d'où

$$\frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1-r}}{\sqrt{r}} \leq \nu(r) \leq \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sqrt{1+r}}{\sqrt{r}}. \quad (9)$$

Formule asymptotique pour  $r \rightarrow 0$ : (9) donne

$$\nu(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{r} + O(r) \quad (5')$$

L'inégalité de droite dans (9) se laisse améliorer par le raisonnement suivant: Considérons le segment réel  $0 \leq x \leq r$  et les circonférences  $|z| = 1$  et  $|z| = R > 1$ . En vertu de la suradditivité des modules (I, 3, d),

$$\nu\left(\frac{r}{R}\right) \geq \nu(r) + \frac{1}{2\pi} \ln R. \quad (10)$$

$r$  restant fixe, prenons  $R$  très grand; (10) devient, en vertu de (5'),

$$\nu(r) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{r} + O\left(\frac{r}{R}\right)$$

(valable si grand que soit  $R$ ), donc

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{(1 + \sqrt{1-r})^2}{r} \leq \nu(r) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{4}{r}. \quad (9')$$

On voit que ces évaluations sont d'autant meilleures que  $r$  est plus petit. On peut d'ailleurs les améliorer autant que l'on voudra, par l'application itérée de la formule de récurrence (3).

Améliorons p. ex. l'inégalité de droite :

$$\nu(r) \leq \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2(1 + \sqrt{1-r^2})}{r}. \quad (9'')$$

Pour obtenir des évaluations bonnes pour  $r$  voisin de 1, nous remplaçons  $r$  par  $\frac{1-r}{1+r}$  dans (9') et nous utilisons (4) :

$$\frac{4}{\pi} \ln \frac{(\sqrt{1+r} + \sqrt{2r})^2}{1-r} \leq \frac{1}{\nu(r)} \leq \frac{4}{\pi} \ln \left( 4 \cdot \frac{1+r}{1-r} \right). \quad (11)$$

On peut améliorer ces évaluations autant que l'on voudra, par l'application itérée de (3').

Formule asymptotique pour  $r \rightarrow 1$  : (11) donne essentiellement (6).

Quelques valeurs particulières. (2) donne immédiatement  $\nu(1/\sqrt{2}) = 1/4$ , et de même (4) donne  $\nu(\sqrt{2}-1) = 1/2\sqrt{2}$ . A partir de ces valeurs, on peut résoudre élémentairement toute équation en  $r$  de la forme  $\nu(r) = 2^{-n}$  (avec  $n$  entier), par application répétée des formules (3) ou (3'). Exemple :  $1/2 = 2\nu(1/\sqrt{2}) = \nu((\sqrt{2}-1)^2) = \nu(3-2\sqrt{2})$ .

## § 2. Mesure harmonique et longueur extrémale

Nous considérons un domaine de Jordan sur lequel on a désigné un point intérieur  $p$  et un arc-frontière (connexe)  $\alpha$ . On sait que la configuration à laquelle appartient cette figure est complètement déterminée par la mesure harmonique  $\omega$  de l'arc  $\alpha$  au point  $p$ . — Il suffit donc de choisir un représentant de cette configuration : le cercle-unité, avec  $p$  à l'origine et le point 1 au milieu de  $\alpha$  :  $\alpha = \{e^{i\varphi}\}_{-\pi\omega \leq \varphi \leq \pi\omega}$ .

Soit  $\beta$  l'arc-frontière complémentaire de  $\alpha$ . Appelons  $\{c\}$  la famille des coupures (à extrémités sur  $\alpha$ ) qui séparent  $p$  de  $\beta$ , et  $\{\gamma\}$  celle des coupures (à extrémités sur  $\beta$ ) qui séparent  $p$  de  $\alpha$ .

Soit  $\eta$  le segment réel  $-1 \leq x \leq 0$ ;  $\eta$  détermine un quadrilatère  $Q(\alpha\beta'\eta\beta'')$ , dont les modules  $\mu_{\alpha\eta Q} = 1/\mu_{\beta'\beta''Q}$  sont caractérisés par deux PLE. La méthode de symétrisation (I, 2, E) permet de restreindre ces deux PLE, ainsi que le PLE  $\{c\}$  et le PLE  $\{\gamma\}$  aux répartitions  $\tilde{\varrho}(z) = \tilde{\varrho}(\bar{z})$ ; il en découle facilement que  $L_c = 4\mu_{\alpha\eta}$  et  $L_\gamma = \mu_{\beta'\beta''} = 1/\mu_{\alpha\eta}$ . La transformation conforme  $w = u + iv = (z + 1/z)/2$  applique l'inté-

rieur du cercle-unité sur l'extérieur du segment réel  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $\eta$  sur le segment réel  $-\infty \leq u \leq -1$  et  $\alpha$  sur le segment réel  $\cos(\pi\omega) \leq u \leq 1$ . Une „couture“ (I, 3, e) du segment réel  $-1 \leq u \leq \cos(\pi\omega)$  montre que  $\mu_{\alpha\eta} = \mu(1 - \cos(\pi\omega), 1 + \cos(\pi\omega), \infty) = 2\nu(\sin \pi\omega/2)$  selon (8). Donc

$$L_c = 8\nu\left(\sin \frac{\pi\omega}{2}\right); \quad L_\gamma = \frac{1}{2\nu\left(\sin \frac{\pi\omega}{2}\right)} = 8\nu\left(\cos \frac{\pi\omega}{2}\right) \quad (12)$$

en vertu de (2). On a  $L_\gamma(\omega) = L_c(1 - \omega)$ , comme il se doit<sup>17)</sup>18).

Cas limite  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\frac{4}{L_\gamma} = L_c = \frac{4}{\pi} \ln \frac{8}{\pi\omega} + O(\omega^2). \quad (12')$$

$\omega$  est une fonction biunivoque de  $L_c$  (ou  $L_\gamma$ ); donc  $L_c$  caractérise la configuration. De plus,  $\nu$  étant monotone décroissante, *chaque répartition concurrente du PLE  $\{c\}$  (resp. du PLE  $\{\gamma\}$ ) fournit une évaluation par excès (resp. par défaut) de  $\omega$ .*<sup>19)</sup>

*Application du principe d'augmentation des longueurs extrémales.* Supposons qu'une figure  $G^{p\alpha}$  (domaine de Jordan  $G$ , point intérieur  $p$ , arc-frontière  $\alpha$ ) soit appliquée sur une autre  $G_1^{p'\alpha_1}$  du même type par une fonction analytique  $z' = f(z)$ :  $G_1 = f(G) - f(\alpha)$ ,  $\alpha_1 =$  frontière commune à  $G_1$  et à  $f(\alpha)$ . (Par exemple  $G =$  cercle-unité et  $z' = z^2$ .) Alors  $\omega_{p'\alpha_1 G_1} \geq \omega_{p\alpha G}$ . En effet: Soit  $\{\gamma\}$ , resp.  $\{\gamma_1\}$ , la famille des coupures séparant  $p$  de  $\alpha$  dans  $G$ , resp.  $p'$  de  $\alpha_1$  dans  $G_1$ ; tout comme en (I, 3, D), on montre que chaque  $\gamma_1$  contient une  $\gamma' = f(\gamma)$ ;  $L_{\{\gamma_1\}} \geq L_{\{\gamma'\}} \geq L_{\{\gamma\}}$  en vertu du principe d'augmentation (I, 2, F), donc  $\omega_1 \geq \omega$  selon (12). On voit par ce cas particulier que *notre principe sur les longueurs extrémales est apparenté au principe de Nevanlinna sur la mesure harmonique*: la mesure harmonique d'un ensemble-frontière ne peut pas être diminuée par une application analytique<sup>20)</sup>.

<sup>17)</sup> Il faut insister sur le fait que les formules (12) ne sont valables que si primo le domaine est simplement connexe et secundo  $\alpha$  n'est formé que d'un seul arc-frontière.

<sup>18)</sup> Chaque courbe  $c$  coupe chaque coube  $\gamma$  en deux points au moins, et  $L_c L_\gamma = 2^2$ . (Cf. Appendice du Chap. I, E et F.)

<sup>19)</sup> Ces évaluations sont essentiellement indépendantes du choix de la figure dans la configuration, contrairement à l'évaluation de Carleman pour un domaine convexe:  $\omega \leq \varphi/\pi$ , où  $\varphi$  est l'angle sous lequel on voit  $\alpha$  à partir de  $p$ . - L'évaluation de  $\omega$  donnée par Beurling [2] ne dépend également que de la configuration; mais elle n'est pas la meilleure possible, et est moins maniable que celle indiquée ici.

<sup>20)</sup> Nous n'avons considéré ici qu'un cas très particulier des deux principes.

### § 3. Distance hyperbolique et longueur extrémale

La figure considérée  $G^{pq}$  est définie par un domaine *simplement connexe*  $G$  dont la frontière est un continu  $\Gamma$ , et à l'intérieur duquel on a désigné deux points  $p, q$ . Sa configuration est caractérisée par la *distance hyperbolique*  $h = h_{pqG}$  (ou la *fonction de Green*  $g = g_{pqG}$ ) des points  $p$  et  $q$  relativement au domaine  $G$ .<sup>21)</sup> — Comme au paragraphe précédent, il suffit donc de considérer un représentant de cette configuration : le cercle-unité, avec  $p$  à l'origine et  $q = \text{Th } h = e^{-g}$ .

Soient  $\{c\}$  la famille des courbes fermées séparant  $p$  et  $q$  de  $\Gamma$ , et  $\{\gamma\}$  la famille des coupures qui séparent  $p$  de  $q$ . Nous comparons, dans le cercle-unité, le  $PLE\{c\}$  et le  $PLE\{\gamma\}$  avec les deux  $PLE$  qui définissent le module  $\nu(q)$  du domaine doublement connexe dont les contours sont le cercle  $|z| = 1$  et le segment réel  $0 \leq x \leq q$ . La méthode de symétrisation (I, 2, E) montre facilement que  $1/L_c = L_\gamma/4 = \nu(q)$ .

En vertu de (4),  $\nu(\text{Th } h) = \frac{1}{8\nu(e^{-2h})}$  ; donc<sup>22)</sup> 18)

$$L_\gamma = \frac{1}{2\nu(e^{-2h})} = 4\nu(e^{-g}) ; \quad L_c = 8\nu(e^{-2h}) = \frac{1}{\nu(e^{-g})} \quad (13)$$

Cas limite  $h \rightarrow 0$ , soit  $g \rightarrow \infty$  :

$$\frac{4}{L_c} = L_\gamma = \frac{2}{\pi} \ln \frac{4}{h} + O(h^2) = \frac{2}{\pi} (g + \ln 4) + O(e^{-2g}) \quad (13')$$

Cas limite  $h \rightarrow \infty$ , soit  $g \rightarrow 0$  :

$$L_c = \frac{4}{L_\gamma} = \frac{8}{\pi} (h + \ln 2) + O(e^{-4h}) = \frac{4}{\pi} \ln \frac{8}{g} + O(g^2) . \quad (13'')$$

$L_c$  (ou  $L_\gamma$ ) caractérise la configuration. — Chaque répartition concurrente du  $PLE\{c\}$  (resp. du  $PLE\{\gamma\}$ ) fournit une évaluation par défaut (resp. par excès) de  $h$  et une évaluation par excès (resp. par défaut) de  $g$ .<sup>23)</sup>

*Application du principe d'augmentation.* Soient  $G$  un domaine simplement connexe ;  $z' = f(z)$  une fonction analytique dans  $G$  ;  $G_1$  un domaine simplement connexe contenant  $f(G)$ . Si  $p, q \in G$ , on a  $h_{p',q',G_1} \leq h_{pqG}$ . En effet : Soit  $\{\gamma\}$ , resp.  $\{\gamma_1\}$ , la famille des coupures séparant  $p$  de  $q$

<sup>21)</sup>  $h_{pqG}$  est normée comme suit : si  $G$  est le cercle-unité,  $h_{0rG} = (1/2) \ln (1+r)/(1-r) = \text{Ar Th } r$  (fonction inverse de la *tangente hyperbolique* :  $r = \text{Th } h_{0rG}$ ) ; et  $g_{0rG} = -\ln r$ .

<sup>22)</sup> Il est essentiel pour la validité de (13) que  $G$  soit simplement connexe.

<sup>23)</sup> *Beurling* a indiqué dans sa thèse [2] un problème de variation caractérisant  $h$ , et conduisant à des évaluations par défaut ; ce problème est tout à fait distinct du nôtre.

dans  $G$ , resp.  $p'$  de  $q'$  dans  $G_1$ ; comme en (I, 3, D), on montre que chaque  $\gamma_1$  contient une  $\gamma'$ ;  $L_{\{\gamma_1\}} \geq L_{\{\gamma'\}} \geq L_{\{\gamma\}}$  (principe d'augmentation, I, 2, F), donc  $h_1 \leq h$  selon (13). Ce cas particulier montre que *notre principe est aussi en relation avec le principe de Nevanlinna sur la longueur hyperbolique*: celle-ci ne peut jamais être augmentée par une application analytique<sup>24</sup>).

### Chapitre III. Applications

#### § 1. Variation de la distance hyperbolique par une déformation du domaine

A. Je considère deux domaines simplement connexes  $G \subset G'$  emboîtés, de frontières disjointes  $\Gamma, \Gamma'$ . Je désignerai par le signe ' les grandeurs relatives à  $G'$ . Soient  $p$  et  $q$  deux points intérieurs ou frontaliers de  $G$ . L'inégalité  $h'_{pq} < h_{pq}$  (monotonie) est bien connue, elle est équivalente au lemme de Schwarz pour le cas d'une fonction univalente. — Sous nos hypothèses, le module  $\mu_{\Gamma\Gamma'}$  (du domaine doublement connexe  $G' - G - \Gamma$ ) n'est pas nul; je veux alors remplacer l'inégalité de monotonie par une autre plus forte.

J'écris  $h$  pour  $h_{pq}$  et  $\mu$  pour  $\mu_{\Gamma\Gamma'}$ . Soit  $\{c\}$  (resp.  $\{c'\}$ ) la famille définie au Chapitre II, § 3, et soit  $\{\gamma_{\Gamma\Gamma'}\}$  la famille des courbes fermées séparant  $\Gamma$  de  $\Gamma'$ ;  $\{c'\} \supset \{c\} \cup \{\gamma_{\Gamma\Gamma'}\}$ ; donc, en vertu de (I, 2, D, f),

$$M\{c'\} \geq M\{c\} + M\{\gamma_{\Gamma\Gamma'}\},$$

c'est-à-dire, selon (II, 13),

$$\frac{1}{v(e^{-2h'})} \geq \frac{1}{v(e^{-2h})} + 8\mu; \quad v(e^{-g'}) \geq v(e^{-g}) + \mu, \quad (1)$$

où  $g = g_{pq}$  est la fonction de Green.

B. *Cas limite*  $h \rightarrow 0$ , soit  $g \rightarrow \infty$ :  $h' \leq e^{-2\pi\mu}(h + O(h^3))$ ;  $g' \geq g + 2\pi\mu + O(e^{-2g})$ . Ces évaluations sont valables uniformément, quelle que soit la manière dont  $h \rightarrow 0$ . — Notons que l'inégalité  $h' \leq e^{-2\pi\mu}h$  est valable pour tout  $h$  (démonstration élémentaire).

Soit  $p$  fixe, intérieur à  $G$ ; lorsque  $q \rightarrow p$ ,  $M(\{c'\} - \{c\})$  reste borné; il s'ensuit facilement (comme en (I, 3, C)) que  $g' = g + O(1)$ . Ce résultat connu permet de définir la *constante de Robin*  $\gamma_p: g = \ln(1/|q - p|)$

---

<sup>24</sup>) Précision importante: Si l'on prend pour  $G$  et  $G_1$  des surfaces universelles de recouvrement, le raisonnement ci-dessus démontre ce principe de Nevanlinna lui-même.

$+ \gamma_p + o(1)$  lorsque  $q \rightarrow p$ ; et notre cas limite de (1) exprime l'inégalité connue  $\gamma'_p - \gamma_p \geq 2\pi\mu$ .

C. *Cas où  $h$  (resp.  $g$ ) est inconnu* (on s'en désintéresse). Les inégalités (1) fournissent le *théorème général* suivant, qui est en réalité à la base du § 3 du Chapitre II :

*Tout continu dans  $G'$  contenant  $p$  et  $q$  détermine avec  $\Gamma'$  un domaine doublement connexe de module*

$$\mu \leq \frac{1}{8\nu(e^{-2h'})} = \nu(e^{-g'}) .$$

*Cas limite  $\mu \rightarrow \infty$  :*  $h' \leq 4e^{-2\pi\mu} + O(e^{-6\pi\mu})$ ;  $g' \geq 2\pi\mu - \ln 4 + O(e^{-4\pi\mu})$ . Supposons que  $G^{pq}$  reste fixe; lorsque  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma'$  se referme sur un point  $E'$ . Soit  $\{\xi\}$  la famille des courbes fermées séparant  $E'$  de  $p$  et  $q$ , mais non pas de  $\Gamma$ ;  $\{c'\} \subset \{\gamma_{\Gamma\Gamma'}\} \cup \{\xi\}$ , donc, selon (I, 2, D, e),  $M\{c'\} \leq M\{\gamma_{\Gamma\Gamma'}\} + M\{\xi\}$ , ce qui démontre que  $h' = e^{-2\pi\mu + O(1)}$ ;  $g' = 2\pi\mu + O(1)$ .

D. Les inégalités (1) ne peuvent pas être améliorées, la borne indiquée est exacte. En effet, étant données des valeurs  $h_0$ ,  $h'_0$  et  $\mu_0$  telles que l'égalité soit réalisée dans (1), on peut construire des figures  $G' \supset G \ni p, q$  telles que  $h = h_0$ ,  $h' = h'_0$  et  $\mu = \mu_0$ : il suffit de choisir pour  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  des ellipses convenables, de foyers  $p$  et  $q$ . — Plus généralement, quel que soit  $G'^{pq}$ , coupons  $G'$  le long du segment hyperbolique (relativement à  $G'$ )  $\eta = pq$ ; soit  $u$  la fonction harmonique nulle sur  $\Gamma'$  et  $= 1$  sur  $\eta$ ; pour que l'on ait l'égalité dans (1), il faut et il suffit que  $\Gamma$  soit une courbe de niveau de  $u$ .

E. *Hadamard* [5] [6] (cf. *Schiffer* [21], p. 292) a donné une formule permettant de calculer la variation exacte de la fonction de Green par une déformation *infinitésimale* d'un domaine dont la frontière a presque partout une tangente. La formule d'Hadamard peut être comparée à (1) si en outre le domaine est *simplement connexe*. Elle est toujours meilleure que (1), à condition que l'on connaisse exactement quelle est la variation de la frontière. Au contraire, (1) ne suppose pas la variation infinitésimale, et on peut l'appliquer dès que l'on connaît  $\mu$  (ce n'est qu'une donnée globale sur la déformation).

## § 2. Variation de la mesure harmonique par une déformation du domaine

A. Soient (fig. 2)  $G$  un domaine de Jordan de frontière  $\Gamma$ ,  $\beta$  un arc-frontière de  $G$  et  $\alpha$  une coupure de  $G$ , à extrémités sur  $\Gamma - \beta$ ;  $\alpha$  partage  $G$  en deux domaines  $G_2$  (adjacent à  $\beta$ ) et  $G_1$ ; soit enfin  $p$  un point de

$G_1$ . — J'écrirai  $\omega_\beta$  pour  $\omega_{p\beta G}$ ,  $\omega_\alpha$  pour  $\omega_{p\alpha G_1}$ , et  $\mu_2$  pour  $\mu_{\alpha\beta G_2}$ . — Le principe de déformation de *Carleman* dit que  $\omega_\beta \leq \omega_\alpha$ ; nous voulons permettre de préciser cette inégalité chaque fois que l'on connaîtra pour  $\mu_2$  une évaluation par défaut.

Soient  $\{\gamma\}$  la famille des coupures dans  $G$  séparant  $p$  de  $\beta$ ;  $\{\gamma_1\}$  celle des coupures dans  $G_1$  séparant  $p$  de  $\alpha$ ; et  $\{\gamma_2\}$  celle des coupures dans  $G_2$  séparant  $\alpha$  de  $\beta$ .  $\{\gamma\} \supset \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\}$ ; donc, en vertu de (I, 2, D, f),  $M\{\gamma\} \geq M\{\gamma_1\} + M\{\gamma_2\}$ , c'est-à-dire, selon (II, 12),

$$\nu\left(\sin \frac{\pi \omega_\beta}{2}\right) \geq \nu\left(\sin \frac{\pi \omega_\alpha}{2}\right) + \frac{\mu_2}{2}. \quad (2)$$

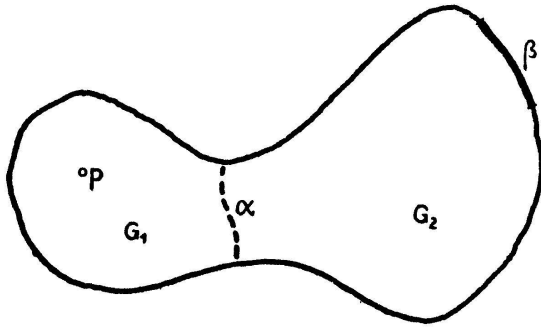


fig. 2

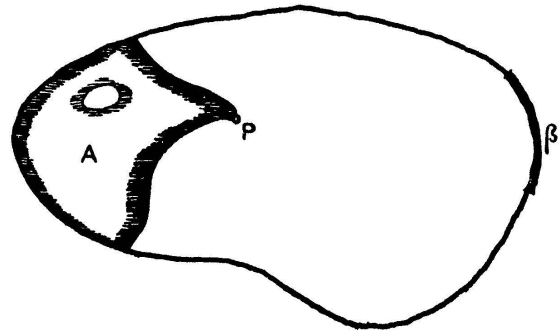


fig. 3

B. *Cas limite*  $\omega_\alpha \rightarrow 0$ :  $\omega_\beta \leq e^{-\pi\mu_2}(\omega_\alpha + O(\omega_\alpha^3))$ . Appelons  $\Gamma_1$  la frontière de  $G_1$ . Soit  $\{\xi\}$  la famille des coupures séparant  $p$  de  $\beta$ , mais non pas de  $\alpha$ ;  $\{\gamma\} = \{\gamma_1\} \cup \{\xi\}$ ; en vertu de (I, 2, D, e),  $M\{\gamma\} \leq M\{\gamma_1\} + M\{\xi\}$ . Si  $p$  tend vers un point intérieur de l'arc  $\Gamma_1 - \alpha$ , on voit facilement (répartition constante concurrente) que  $M\{\xi\}$  reste borné supérieurement. Donc  $M\{\gamma\} = M\{\gamma_1\} + O(1)$ , d'où  $\omega_\beta = \omega_\alpha \cdot e^{O(1)}$ ,  $\omega_\beta$  et  $\omega_\alpha$  sont du même ordre de grandeur.

C. *Cas où*  $\omega_\alpha$  *est quelconque, inconnu* (fig. 3). (2) donne le *théorème général* suivant, qui est en réalité à l'origine du § 2 du Chapitre II :

*Tout continu*  $A$  *dans*  $G + \Gamma$ , *joignant*  $p$  *à*  $\Gamma - \beta$ , *détermine dans*  $G$  *un quadrilatère de module*  $\mu_{A\beta} \leq 2\nu\left(\sin \frac{\pi \omega_\beta}{2}\right)$ .

$$\text{Cas limite } \mu_2 \rightarrow \infty : \omega_\beta \leq \frac{8}{\pi} e^{-\pi\mu_2} + O(e^{-3\pi\mu_2}).$$

Supposons que  $G_1^{p\alpha}$  reste fixe et que  $\beta$  se réduise progressivement à un point  $E$ , tandis que  $G_2$  est augmenté ou ne change pas; soit  $\{\xi\}$  la famille des arcs séparant  $E$  de  $p$  mais non pas de  $\alpha$  (dans le grand domaine  $G$  = réunion des domaines intermédiaires);  $\{\gamma\} \subset \{\gamma_2\} \cup \{\xi\}$ ; selon (I, 2, D, e),  $M\{\gamma\} \leq M\{\gamma_2\} + M\{\xi\}$ ; d'où

$$\ln \omega_\beta = -\pi\mu_2 + O(1). \quad (3)$$



Si  $p, q \in G_1$ , nous avons donc

$$\omega_{p\beta} = \omega_{q\beta} \cdot e^{O(1)} ; \quad (3')$$

mais (I, 3, C) montre que le choix de  $\alpha$  ne joue pas de rôle pour le comportement asymptotique de  $\mu_2$  (addition de  $O(1)$ ), donc :

(3') reste valable pour tous  $p$  et  $q$  dans  $G$ .

D. L'évaluation (2) ne peut pas être améliorée, la borne indiquée est exacte. En effet, étant données des valeurs  $\omega_\beta^0$ ,  $\omega_\alpha^0$  et  $\mu_2^0$  réalisant l'égalité dans (2), on peut construire une figure  $G^{p\beta}$  et  $\alpha \subset G$  telles que  $\omega_\beta = \omega_\beta^0$ ,  $\omega_\alpha = \omega_\alpha^0$  et  $\mu_2 = \mu_2^0$ . On choisira par exemple, dans un faisceau de coniques homofocales dont  $p$  est un foyer, pour  $\Gamma - \beta$  un arc d'ellipse, pour  $\beta$  et  $\alpha$  des arcs d'hyperboles. — Plus généralement, quel que soit  $G^{p\beta}$ , soit  $a$  le point-frontière partageant  $\Gamma - \beta$  en deux arcs d'égale mesure harmonique au point  $p$ . Soit  $\eta$  le segment hyperbolique  $pa$  relativement au domaine  $G$ ; soit  $u$  la fonction harmonique dans  $G - \eta$ , solution du problème de *Dirichlet-Neumann* suivant :  $u = 0$  sur  $\beta$ ,  $u = 1$  sur  $\eta$ ,  $\partial u / \partial n = 0$  sur  $\Gamma - \beta$ . Pour que l'égalité ait lieu dans (2), il faut et il suffit que  $\alpha$  soit une ligne de niveau de  $u$ .

E. La borne exacte fournie par (2) est beaucoup meilleure que celle contenue dans l'inégalité

$$\omega_\beta \leq \omega_\alpha \cdot \sup_{s \in \alpha} \omega_{s\beta G} \quad (4)$$

due à *Ostrowski* ([4], p. 44—45). Cette inégalité (reposant sur un raisonnement élémentaire de théorie du potentiel) n'est jamais la meilleure possible si  $p$  est intérieur à  $G_1$ .

### § 3. Applications. Théorème général de Phragmén-Lindelöf

A. Considérons (*fig. 4*) le cas particulier où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des segments rectilignes parallèles  $x=a$  et  $x=b$ .  $G$  étant simplement connexe, la droite  $x = \lambda$  ( $a \leq \lambda < b$ ) a un et un seul intervalle  $\theta_\lambda$  (de longueur  $\theta(\lambda)$ ) dans  $G$  qui sépare  $p$  de  $\beta$ ;  $\theta_a = \alpha$ ,  $\theta_b = \beta$ .

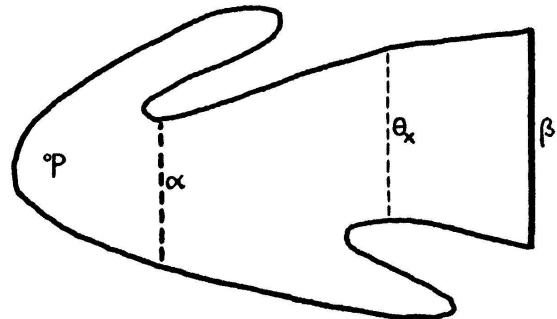


fig. 4

Les segments infiniment voisins  $\theta_x$ ,  $\theta_{x+dx}$  déterminent avec  $\Gamma$  un quadrilatère de module  $d\mu(x) = \mu_{\theta_x \theta_{x+dx}} = dx / \theta(x)$ ; en vertu de la suradditivité des modules,  $\mu_2 = \mu_{\alpha\beta} \geq \int_a^b d\mu(x) = \int_a^b dx / \theta(x)$ ; je désigne-



rai cette intégrale par  $\bar{\mu} = \bar{\mu}(a, b)$ .<sup>25)</sup> (2) donne maintenant

$$\nu\left(\sin \frac{\pi \omega \beta}{2}\right) \geq \nu\left(\sin \frac{\pi \omega \alpha}{2}\right) + \frac{\bar{\mu}}{2}. \quad (5)$$

On remarquera que, vu la restriction imposée aux arcs  $\alpha$  et  $\beta$  (*qui n'est pas de nature topologique*), l'inégalité (5) a *perdu* la propriété de (2) d'être la meilleure possible.

B. Je veux comparer cette évaluation avec l'inégalité

$$\omega_{\beta} \leq \omega_{\alpha} \cdot e^{-\frac{4}{\pi} \bar{\mu}} \quad (6)$$

que *R. Nevanlinna* ([16], p. 71) a obtenue (sous des hypothèses un peu plus générales) à partir du principe de déformation de *Carleman*, en appliquant de façon continue l'inégalité (4) le long de l'intervalle  $a < x < b$ .<sup>26)</sup>

a) *Cas où  $\omega_{\alpha}$  est quelconque, inconnu.*

Pour  $\bar{\mu} \rightarrow 0$ , (6) est beaucoup meilleure que (5).

Pour  $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ , par contre, (5) donne

$$\omega_{\beta} \leq \frac{8}{\pi} e^{-\pi \bar{\mu}} + O(e^{-3\pi \bar{\mu}}), \quad (5')$$

qui est meilleure que (6).

Si  $\bar{\mu} = 1/2$ , (5) donne  $\omega_{\beta} \leq 1/2$ , tandis que (6) donne

$$\omega_{\beta} \leq e^{-\frac{2}{\pi}} \simeq 1/1,89 ;$$

on voit que (5) est déjà un peu meilleure dans ce cas.

b) Dans le *cas où  $\omega_{\alpha}$  a une valeur connue* (ou évaluée par excès), l'avantage de (5) sur (6) (pour  $\bar{\mu}$  pas trop petit) est encore renforcé. Voici quelques exemples :

Pour  $\bar{\mu} \rightarrow \infty$  et  $\omega_{\alpha} = 1/2$ , (5) donne

$$\omega_{\beta} \leq \frac{8}{\pi} e^{-\pi \bar{\mu} - \frac{\pi}{2}} + O(e^{-3\pi \bar{\mu}}) \approx \frac{1}{4,8} \cdot \frac{8}{\pi} e^{-\pi \bar{\mu}} \quad (5'')$$

tandis que (6) donne seulement  $\omega_{\beta} \leq (1/2) e^{-\frac{4}{\pi} \bar{\mu}}$ .<sup>27)</sup>

<sup>25)</sup> L'évaluation  $\mu_2 \geq \bar{\mu}$  peut aussi être obtenue comme suit : soit  $\{\theta\} = \{\theta_x\}_{a < x < b}$  ; l'inégalité de *Schwarz* montre que  $\varrho_0 = 1/\theta(x)$  sur  $\theta_x$  est extrémale du *PLE*  $\{\theta\}$  ; donc  $M\{\theta\} = \int_a^b dx/\theta(x) = \bar{\mu}$ . Soit  $\{\gamma\}$  la famille des arcs séparant  $\alpha$  de  $\beta$  dans  $G_2$  ;  $\{\gamma\} \supset \{\theta\}$ , donc  $\mu_2 = M\{\gamma\} \geq M\{\theta\} = \bar{\mu}$ . Cette méthode se laisserait généraliser à des domaines multiplement connexes.

<sup>26)</sup> Comme (4) ne fournit pas la borne exacte, il faut s'attendre à ce que (6) soit d'autant moins précise que l'intervalle  $b - a$  est plus grand.

<sup>27)</sup> En appliquant l'inégalité (4) d'*Ostrowski* au résultat (5'), on obtient une évaluation différant de (5'') par le seul facteur 1/2 au lieu de 1/4,8 ; (5'') est donc plus forte, et on voit par cet exemple combien la formule générale (2) fournit un mécanisme d'approximation plus adéquat.

Pour  $\bar{\mu} = 1/2$  et  $\omega_\alpha = 1/2$ , (5) donne

$$\omega_\beta \leq (2/\pi) \arcsin(3 - 2\sqrt{2}) \simeq 0,11 ;$$

tandis que (6) donne  $\omega_\beta \leq e^{-2/\pi}/2 \simeq 0,264$ .

Si  $\omega_\alpha \rightarrow 0$ , (5) donne  $\omega_\beta \leq e^{-\pi\bar{\mu}}(\omega_\alpha + O(\omega_\alpha^3))$ , évaluation meilleure que (6), d'autant plus que  $\bar{\mu}$  est plus grand.

### C. Théorème général de Phragmén-Lindelöf.

Soient (cf. fig. 1)  $G$  un domaine de Jordan (de frontière  $\Gamma$ ), qu'une coupure  $\theta_0$  partage en deux domaines  $G_0$  et  $G'_0$ ;  $p$  un point de  $G_0$ ;  $\{\theta_\lambda\}$  ( $0 < \lambda < \infty$ ,  $\lambda =$  paramètre continu ou discret) des coupures emboîtées intérieures à  $G'_0$  ( $\theta_\lambda$  sépare  $p$  de tous les  $\theta_{\lambda'}$ , où  $\lambda' > \lambda$ ) telles que  $\mu_{0\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} \rightarrow \infty$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$ . Les  $\theta_\lambda$  convergent vers un point  $E$  de  $\Gamma$ .

Soit  $u$  une fonction sous-harmonique dans  $G$ , telle que

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$$

pour chaque  $\zeta \in \Gamma - E$ . Je pose  $u_\lambda = \text{Max}_{z \in \theta_\lambda} u(z)$  et

$$\sigma_\kappa = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (u_\lambda e^{-\pi\mu_\kappa\lambda}) . \quad (7)$$

Si  $\sigma_0 \geq 0$ , alors

$$u(p) \leq \frac{8}{\pi} \sigma_0 e^{-2\pi\nu \left(\sin \frac{\pi\omega_p\theta_0}{2}\right)} \quad (8)$$

*Démonstration.* Il existe un  $\lambda$  aussi grand que l'on veut, tel que  $u_\lambda < (\sigma_0 + o(1))e^{\pi\mu_{0\lambda}}$ . En vertu de (2), on a

$$u(p) \leq u_\lambda \omega_{p\theta_\lambda} < (\sigma_0 + o(1))e^{\pi\mu_{0\lambda}} \cdot \frac{8}{\pi} e^{-\pi\mu_{0\lambda} - 2\pi\nu \left(\sin \frac{\pi\omega_p\theta_0}{2}\right)} \cdot (1 + o(1)),$$

d'où (8).

On peut aussi interpréter (8) de la façon suivante : Si

$$u_0 = \text{Max}_{z \in \theta_0} u(z) = 1 ,$$

alors, pour toute suite  $\{\theta_\lambda\}$  du type considéré,

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (u_\lambda e^{-\pi\mu_{0\lambda}}) \geq \pi/8 .$$

Que peut-on dire si  $\sigma_0 = 0$ ? Alors  $u \leq 0$  dans  $G_0$ . Mais on a vu (I, 3, C) que  $\mu_{0\lambda} = \mu_{\kappa\lambda} + O(1)$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\kappa$  restant fixe. Par conséquent les  $\sigma_\kappa$  sont soit tous nuls, soit tous différents de zéro.  $\sigma_0 = 0$  entraîne  $\sigma_\kappa = 0$  pour tous les  $\kappa$ , donc (en vertu de (8), où l'on remplacera l'indice 0 par  $\kappa$ )  $u \leq 0$  dans  $\bigcup_{\kappa} G_\kappa = G$ .

**Théorème 1.** Si  $\sigma_0 \leq 0$ , alors  $u \leq 0$  dans tout  $G$ .

La démonstration a été donnée pour le cas  $\sigma_0 = 0$ ; si  $\sigma_0 < 0$ , il

existe une suite partielle  $\{\lambda_i\} (\rightarrow \infty)$  telle que  $u_{\lambda_i} < 0$ ;  $u < 0$  dans les  $G_{\lambda_i}$ , donc dans  $\cup G_{\lambda_i} = G$ : Si  $\sigma_0 < 0$ , alors  $u < 0$  dans tout  $G$ .<sup>28)</sup>

**Théorème 2.**  $\sigma_0 > -\infty$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde: soit  $\sigma_0 = -\infty$ . Pour tous  $M > 0$  et  $A > 0$ , il existe alors un arc  $\theta_\lambda$  tel que  $\lambda > A$  et  $u_\lambda e^{-\pi\mu_0\lambda} < -M$ . En vertu de (3),

$$u(p) \leq u_\lambda \omega_{p\theta_\lambda} < -M \cdot e^{\pi\mu_0\lambda} \cdot e^{-\pi\mu_0\lambda + O(1)} = -M \cdot e^{O(1)},$$

donc  $u \equiv -\infty$  dans  $G_0$ ; cela contredit l'hypothèse que  $u$  est sous-harmonique.

D. En particulier, si les  $\theta_\lambda$  sont des segments verticaux  $x = \lambda$ ,  $E$  étant à l'infini (cas limite de  $A$ ), (8) est valable *a fortiori* avec, au lieu de  $\sigma_0$ ,  $\bar{\sigma}_0 = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (u_\lambda e^{-\pi\bar{\mu}(0,\lambda)})$ ,  $\geq 0$  par hypothèse. Comme  $|\sigma_0| \leq |\bar{\sigma}_0|$ , le théorème 1 devient: Si  $\bar{\sigma}_0 \leq 0$ , alors  $u \leq 0$  dans tout  $G$  (et  $u < 0$  si  $\bar{\sigma}_0 < 0$ ). C'est une forme connue du théorème de *Phragmén-Lindelöf*. — Par contre, on n'a pas le droit de remplacer  $\sigma_0$  par  $\bar{\sigma}_0$  dans le théorème 2.

De façon analogue, il est facile d'appliquer l'inégalité (8) et de formuler la théorème 1 pour le cas où les  $\theta_\lambda$  sont des arcs de cercles concentriques. On obtient les théorèmes connus.

E. Revenons à la figure 4, considérée sous A. Le segment  $\alpha$  sépare  $G$  en  $G_2$  (adjacent à  $\beta$ ) et  $G_1$ . Il existe un  $x_0$  ( $a < x_0 < b$ ) tel que  $\bar{\mu}(a, x_0) = \bar{\mu}(x_0, b) = \bar{\mu}/2$ ; en vertu de (5), on a, en tout point  $z_0 \in \theta_{x_0}$ ,  $\omega_{z_0\alpha G_2} \leq \bar{\omega}$  et  $\omega_{z_0\beta G_2} \leq \bar{\omega}$ , où  $\bar{\omega}$  est défini par  $\nu(\sin \pi \bar{\omega}/2) = \bar{\mu}/4$ ; donc  $\omega_{z_0, \alpha \cup \beta, G_2} \leq 2\bar{\omega}$ ; d'où l'inégalité

$$\nu\left(\sin \frac{\pi \omega_{z_0, \alpha \cup \beta, G_2}}{4}\right) \geq \frac{\bar{\mu}}{4}. \quad (9)$$

Il existe donc toujours une transversale verticale  $\theta_{x_0}$  telle que chacun de ses points satisfasse (9)<sup>29)</sup>.

L'inégalité (9) n'est pas la meilleure possible, car (5) ne l'est pas<sup>30)</sup>.

<sup>28)</sup> Rappelons que (3') est valable ici, et montre aussi directement que le point-frontière  $E$ , singulier pour  $u$ , influe sur  $u(p)$  soit pour tout  $p \in G$ , soit pour aucun  $p \in G$ .

<sup>29)</sup> Comme je le montre dans une autre publication ([9], formule (1)), il existe dans le quadrilatère  $G_2$  une coupure  $\gamma$  (pas nécessairement verticale) séparant  $\alpha$  de  $\beta$  et en tout point de laquelle on a (relativement à  $G_2$ )  $\omega_{\alpha \cup \beta} \leq \bar{\omega}$ , c'est-à-dire

$$\nu(\sin \pi \omega_{\alpha \cup \beta}/2) \geq \bar{\mu}/4, \quad (\bar{9})$$

et cette évaluation est exacte. Il est intéressant de constater que la borne pour  $\omega$  dans ( $\bar{9}$ ) est deux fois plus petite (meilleure) que dans (9).

<sup>30)</sup> Cependant, dans tout le domaine  $0 < \omega \leq 1$  qui nous intéresse, (9) est plus précise que l'inégalité de *Nevanlinna* ([16], p. 73):  $\ln \omega_{\alpha \cup \beta} \leq -(2/\pi) \bar{\mu} + \ln 2$ . Dans le cas limite  $\bar{\mu} \rightarrow \infty$  notamment, (9) donne

$$\ln \omega_{\alpha \cup \beta} \leq -(\pi/2) \bar{\mu} + \ln(16/\pi) + o(1). \quad (9')$$

#### § 4. Variation d'une fonction harmonique dans des domaines simplement connexes emboîtés

A. Soient  $G$  un domaine simplement connexe ;  $p$  et  $q$  deux points intérieurs ;  $u$  une fonction harmonique dans  $G$ .

On démontre facilement (application conforme de  $G$  sur un cercle et usage de l'intégrale de *Poisson*) l'inégalité

$$|u(p) - u(q)| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \text{Var}_G u \cdot \arcsin \text{Th } h_{pqG}, \quad (10)$$

où  $\text{Var}_G u = \sup_G u - \inf_G u$ .

B. Considérons deux domaines emboîtés  $G \subset G'$  simplement connexes, de frontières disjointes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ . J'écris  $\mu$  pour  $\mu_{\Gamma\Gamma'}$ . — Soit  $u$  harmonique dans  $G'$ .

En vertu du § 1,  $\nu(\text{Th } h') \geq \nu(\text{Th } h) + \mu$ . Si les points  $p$  et  $q$  sont dans  $G$ , nous avons donc, grâce à (10),

$$\nu \left( \sin \frac{\pi \cdot |u(p) - u(q)|}{2 \cdot \text{Var}_{G'} u} \right) \geq \mu + \nu(\text{Th } h_{pqG}). \quad (11)$$

Si  $h_{pqG}$  est inconnu, cette inégalité fournit le *théorème général* suivant :

*Soit  $E$  un continu dans  $G'$ , et soit  $\mu$  le module du domaine doublement connexe composante de  $G' - E$  ; alors, pour toute fonction  $u$  harmonique dans tout  $G'$ ,*

$$\nu \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\text{Var}_E u}{\text{Var}_{G'} u} \right) \right) \geq \mu.$$

L'analogie avec le théorème général (III, 2, C) est frappante. On voit que *le quotient des variations prend la place de la mesure harmonique*.

C. Soit  $u$  une fonction harmonique dans tout le plan ouvert. — Supposons que l'on ait une famille de domaines simplement connexes  $G_\lambda$  ( $0 \leq \lambda < \infty$ ) emboîtés ( $G_\lambda \subset G_{\lambda'}$  si  $\lambda < \lambda'$ ), dont la réunion soit le plan ouvert. Soit  $\Gamma_\lambda$  le contour de  $G_\lambda$ , et appelons  $\mu_{\infty\lambda}$  le module du domaine doublement connexe de contours  $\Gamma_\infty$  et  $\Gamma_\lambda$ . Je pose

$$\sigma_\infty = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} (\text{Var}_{G_\lambda} u \cdot e^{-2\pi\mu_{\infty\lambda}}). \quad (12)$$

Lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\mu_{0\lambda} \rightarrow \infty$ . Les inégalités trouvées ci-dessus donnent alors, si  $p$  et  $q \in G_0$ ,

$$|u(p) - u(q)| \leq \frac{8}{\pi} \sigma_0 \cdot e^{-2\pi\nu(\text{Th } h_{pqG_0})}, \quad (13)$$

et

$$\text{Var}_{G_0} u \leq \frac{8}{\pi} \sigma_0.$$

**Théorème.** Si  $\sigma_0 = 0$ ,  $u$  est constante.

Ces inégalités et ce théorème sont formellement très analogues au théorème général de *Phragmén-Lindelöf* (III, 3, C). Ce n'est pas un pur hasard : comme me l'a fait remarquer dans une conversation le Prof. *Kaplan*, le théorème classique de *Phragmén-Lindelöf* (pour le demi-plan) peut être démontré à l'aide d'une propriété bien connue sur la croissance des fonctions entières. Cette observation est à l'origine du présent paragraphe. — De même, le théorème 1 (III, 3, C) peut être déduit du théorème ci-dessus.

D. Si nous opérons le passage à la limite  $q \rightarrow p$  dans  $A$ , nous obtenons de (10), en désignant par  $R(p, G')$  le *rayon conforme*<sup>31)</sup> de  $G'$  en  $p$ ,

$$|\text{grad } u(p)| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\text{Var}_{G'} u}{R(p, G')} . \quad (10')$$

Cette inégalité est valable *a fortiori* si l'on remplace le rayon conforme  $R(p, G')$  par le rayon intérieur  $r(p, G')$  (cf. § 6, A).

Le même passage à la limite donne, à partir de (13), si  $p \in G_0$ ,

$$|\text{grad } u(p)| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{R(p, G_0)} \cdot \sigma_0 . \quad (13')$$

## § 5. Evaluation par défaut de la distance hyperbolique

A. Soit (fig. 5)  $G$  un domaine de Jordan, que deux coupures disjointes  $\alpha$  et  $\beta$  partagent en trois domaines  $G_1$  (adjacent à  $\alpha$ ),  $G_2$  (adj. à  $\alpha$  et  $\beta$ ),  $G_3$  (adj. à  $\beta$ ). Appelons  $\Gamma$  la frontière de  $G$ ,  $\Gamma_i$  celle de  $G_i$ . Soient  $p \in G_1$  et  $q \in G_3$ . Je me propose d'évaluer par défaut  $h = h_{pqG}$  (ou par excès  $g = g_{pqG}$ ), connaissant  $\omega_1 = \omega_{p\alpha G_1}$ ,  $\mu_2 = \mu_{\alpha\beta G_2}$  et  $\omega_3 = \omega_{q\beta G_3}$ .<sup>32)</sup>

Soit  $\{\gamma\}$ , resp.  $\{\gamma_1\}$ ,  $\{\gamma_2\}$ ,  $\{\gamma_3\}$ , la famille des coupures dans  $G$ , resp.  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , séparant  $p$  de  $q$ , resp.  $p$  de  $\alpha$ ,  $\alpha$  de  $\beta$ ,  $\beta$  de  $q$ . Alors  $\{\gamma\} \supset \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\} \cup \{\gamma_3\}$ ; donc, selon (I, 2, D, f),

$$M\{\gamma\} \geq M\{\gamma_1\} + M\{\gamma_2\} + M\{\gamma_3\} .$$

<sup>31)</sup> C'est le rayon  $R$  du cercle  $|w| < R$ , image conforme de  $G'$  par une application  $w(z)$  telle que  $w(p) = 0$  et  $w'(p) = 1$ .

<sup>32)</sup> Considérons  $p$  et  $q$  comme deux prisonniers, dans les cellules  $G_1$  (de porte  $\alpha$ ) et  $G_3$  (de porte  $\beta$ ),  $G_2$  étant le corridor de la prison. Il est intuitif qu'il sera difficile aux prisonniers d'entrer en contact ( $h$  grand) si le corridor est long et étroit ( $\mu_2$  grand) et si chacun d'eux est maintenu éloigné de la porte de sa cellule ( $\omega_1$  et  $\omega_3$  petits).

En remplaçant ces longueurs extrémales réciproques par leurs valeurs, données par (II, 13), (II, 12) et (I, 3, a), nous pouvons mettre cette inégalité sous la forme

$$\nu(e^{-2h}) = \frac{1}{8\nu(e^{-q})} \geq \nu\left(\sin \frac{\pi\omega_1}{2}\right) + \frac{\mu_2}{2} + \nu\left(\sin \frac{\pi\omega_3}{2}\right). \quad (14)$$

B. Cas où  $\mu_2$  et  $\omega_3$  sont quelconques, inconnus (on s'en désintéresse)<sup>33</sup> :  $\nu$  étant décroissante, (14) donne  $e^{-2h} \leq \sin \frac{\pi\omega_1}{2}$ . Ce n'est pas autre chose que la solution d'un problème de Carleman-Milloux<sup>34</sup>.

Cas limite  $\omega_1 \rightarrow 0$  : (14) donne

$$g \leq \pi \omega_1 + O(\omega_1^3) \quad ^{35}) . \quad (14')$$

Lorsque ( $G$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $q$  restant fixes)  $p$  tend vers un point intérieur à l'arc  $\Gamma_1 - \alpha$ ,  $M\{\gamma_1\} \rightarrow \infty$ , mais  $M(\{\gamma\} - \{\gamma_1\})$  reste borné supérieurement ; d'où (I, 2, D, e)  $M\{\gamma\} = M\{\gamma_1\} + O(1)$ , c'est-à-dire  $g = \omega_1 \cdot e^{O(1)}$ .

C. Cas limite  $\omega_1 \rightarrow 0$  et  $\omega_3 \rightarrow 0$  :

$$g \leq \frac{\pi^2}{8} \omega_1 \omega_3 e^{-\pi\mu_2} + O(\omega_1^3 \omega_3) + O(\omega_1 \omega_3^3) \quad ^{36}) \quad (14'')$$

Si  $p$  et  $q$  tendent vers des points-frontière intérieurs aux arcs  $\Gamma_1 - \alpha$ , resp.  $\Gamma_3 - \beta$ ,

$$g = \omega_1 \omega_3 e^{O(1)} . \quad (15)$$

En effet, soit  $\{\xi\} = \{\gamma\} - \{\gamma_1\} - \{\gamma_3\}$  ; en vertu de (I, 2, D, e),  $M\{\gamma_1\} + M\{\gamma_3\} \leq M\{\gamma\} \leq M\{\gamma_1\} + M\{\gamma_3\} + M\{\xi\}$ . Lors du passage à la limite,  $M\{\xi\}$  reste borné. En utilisant (II, 12') et (II, 13''), on obtient alors (15).

*Remarque.* Un raisonnement élémentaire de théorie du potentiel, calqué sur celui qui conduit à l'inégalité (4) d'Ostrowski, montre que

$$g \leq \omega_1 \cdot \text{Max}_{s \in \alpha} \omega_{s, \beta, G_1 \cup G_2} \cdot \text{Max}_{t \in \beta} g_{tqG} . \quad (4')$$

<sup>33</sup>) L'ancien prisonnier  $q$  est maintenant en liberté ; la prison ne comprend que la cellule où est enfermé  $p$ .

<sup>34</sup>) Cf. *Nevanlinna* [16], p. 104, où le problème traité est plus général. La solution indiquée (exacte) est équivalente à notre inégalité.

<sup>35</sup>) Si  $G_1$  est convexe et si  $\alpha$  est vu de  $p$  sous un angle euclidien  $\psi_1 \rightarrow 0$ , l'inégalité de Carleman  $\omega_1 \leq \psi_1/\pi$  permet de conclure de (14') que  $g \leq \psi_1 + O(\psi_1^3)$ .

<sup>36</sup>) Si  $G_1$  et  $G_3$  sont convexes et si l'on voit  $\alpha$  de  $p$  (resp.  $\beta$  de  $q$ ) sous un angle euclidien  $\psi_1 \rightarrow 0$  (resp.  $\psi_3 \rightarrow 0$ ), l'inégalité de Carleman permet de conclure de (14'') que

$$g \leq \frac{1}{8} \psi_1 \psi_3 e^{-\pi\mu_2} (1 + o(1)) .$$

Dans le cas limite  $\omega_1 \rightarrow 0$ ,  $\omega_3 \rightarrow 0$ , avec (pour simplifier)  $\mu_2$  inconnu ou nul, introduisons dans (4') l'évaluation de  $g_{tqG}$  donnée par (14') :  $g_{tqG} \lesssim \pi \omega_3$  (en négligeant les termes d'ordre supérieur) ; nous obtenons  $g = g_{pqG} \lesssim \pi \omega_1 \omega_3$ . La borne est plus faible que dans l'évaluation exacte  $g \lesssim (\pi^2/8) \omega_1 \omega_3$  (cf. (14'')). Comme au § 3, B, nous voyons qu'il y a lieu d'éviter autant que possible l'emploi d'inégalités du type (4) ou (4') : elles affaiblissent les évaluations.

D. *Cas où  $\omega_1$  et  $\omega_3$  sont quelconques, inconnues* : (14) donne le *théorème général* suivant :

*Deux continus disjoints  $A$  et  $B$  dans  $G + \Gamma$ , reliant  $\Gamma$  à  $p$ , resp. à  $q$ , déterminent dans  $G$  un quadrilatère de module*

$$\mu_{AB} \leq 2\nu(e^{-2h}) = 1/(4\nu(e^{-g})) .$$

*Cas limite  $\mu_2 \rightarrow \infty$  :  $h \geq (\pi/2) \mu_2 - \ln 2 + O(e^{-2\pi\mu_2})$ .*

*Si  $G_1$ ,  $G_3$ ,  $p$ ,  $q$  sont fixes et  $\mu_2 \rightarrow \infty$  (rétrécissement du corridor),  $h = (\pi/2) \mu_2 + O(1)$ .*

En effet,  $M(\{\gamma\} - \{\gamma_2\})$  reste borné, donc (I, 2, D, e)

$$M\{\gamma_2\} \leq M\{\gamma\} \leq M\{\gamma_2\} + O(1) ;$$

et, par (II, 13''), nous obtenons notre formule asymptotique.

E. L'évaluation (14) ne peut pas être améliorée, *la borne indiquée est exacte*. En effet, l'égalité a par exemple lieu dans (14) si  $\Gamma$  est une ellipse,  $\alpha$  et  $\beta$  des arcs d'hyperboles, ces trois coniques appartenant au même faisceau homofocal de foyers  $p$  et  $q$ . — Plus généralement, si l'on donne  $G^{pq}$  et des valeurs  $\omega_1^0$ ,  $\mu_2^0$  et  $\omega_3^0$  telles que le système  $(h, \omega_1^0, \mu_2^0, \omega_3^0)$  réalise l'égalité dans (14), on peut toujours construire des arcs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\omega_1 = \omega_1^0$ ,  $\mu_2 = \mu_2^0$  et  $\omega_3 = \omega_3^0$  :  $p$  et  $q$  déterminent sur la droite hyperbolique  $pq$  (relativement à  $G$ ) trois segments ; soient  $\xi$  celui qui joint  $p$  à  $\Gamma$  et  $\eta$  celui qui joint  $q$  à  $\Gamma$  ; j'appelle  $u$  la fonction harmonique dans  $G - \xi - \eta$  nulle sur  $\eta$ ,  $= 1$  sur  $\xi$  et dont la dérivée normale s'annule sur  $\Gamma$ . Pour que l'égalité soit valable dans (14), il faut et il suffit que  $\alpha$  et  $\beta$  soient des lignes de niveau de  $u$  ; il est facile de calculer lesquelles il faut choisir.

F. *Cas où l'on connaît une borne  $\bar{\omega}$  majorant à la fois  $\omega_1$  et  $\omega_3$ ,  $\mu^z$  étant inconnu ou nul* :

Je suppose  $\omega_1 \leq \bar{\omega}$  et  $\omega_3 \leq \bar{\omega}$  (par exemple  $\bar{\omega} = \text{Max}(\omega_1, \omega_3)$ ). (14) donne (cf. II, 2)  $8\nu(e^{-g}) \leq 8\nu(\cos \pi \bar{\omega}/2)$ , d'où,  $\nu$  étant décroissante,

$$\text{Th } h = e^{-g} \geq \cos(\pi \bar{\omega}/2) . \quad (16)$$



Ce résultat peut aussi être formulé de la façon suivante :

**Théorème.** *Etant donnés, dans un domaine de Jordan  $G$ , deux points  $p, q$ , il n'est pas possible de construire dans  $G$  une coupure  $\alpha$  séparant  $p$  de  $q$  telle que  $\omega_{p\alpha}$  et  $\omega_{q\alpha}$  (relativement aux domaines partiels) soient tous deux inférieurs à  $2/\pi \arccos e^{-\vartheta}$ .*

Il existe un et un seul arc  $\alpha$  réalisant  $\omega_{p\alpha} = \omega_{q\alpha} = 2/\pi \arccos e^{-\vartheta}$ , c'est la ligne de niveau  $u = 1/2$  de la fonction harmonique  $u$  considérée sous  $E$ .

## § 6. Rayon intérieur, mesure harmonique et modules

A. Si  $p$  est un point intérieur d'un domaine  $G$ , j'appelle *rayon intérieur de  $G$  en  $p$*  le rayon  $r(p)$  du plus grand cercle de centre  $p$  dont tout l'intérieur soit dans  $G$ . — D'autre part, j'appelle toujours *rayon conforme de  $G$  en  $p$*  le rayon  $R(p)$  du cercle  $|w| < R$  sur lequel la surface universelle de recouvrement de  $G$  peut être appliquée conformément par une fonction  $w(z)$  telle que  $w(p_1) = 0$ ,  $w'(p_1) = 1$ ,  $p_1$  étant un des points „au-dessus de  $p$ “ sur cette surface<sup>37)</sup>.

On sait (conséquence du lemme de Schwarz) que  $r(p) \leq R(p)$ , d'où l'on déduit, pour un élément d'arc hyperbolique au point  $p$ ,

$$dh_p = ds/R(p) \leq ds/r(p) ,$$

où  $ds$  est la longueur euclidienne de cet élément d'arc. Si  $p$  et  $q$  sont deux points d'un domaine  $G$ ,

$$h_{pqG} \leq \int_{c_{pq}} \frac{|dz|}{r(z)} ,$$

l'intégrale portant sur un arc rectifiable quelconque  $c_{pq}$  joignant  $q$  à  $p$ .

B. Soit  $G_1$  un domaine simplement connexe (sur la sphère de Riemann) dont la frontière est une courbe de Jordan  $\Gamma_1$ , et sur lequel on a désigné un point intérieur  $p$  et un arc-frontière  $\alpha$ . Soit  $G$  le domaine simplement connexe de frontière  $\Gamma_1 - \alpha$ . Je définis le rayon intérieur  $r(z)$  relativement à  $G$  (et non à  $G_1$ !). Soit  $c$  un arc rectifiable quelconque joignant  $p$  à  $\alpha$  dans  $G_1$ ; alors

$$\omega_{p\alpha G_1} \geq 2/\pi \arcsin e^{-2 \int_c \frac{|dz|}{r(z)}} \quad (17)$$

---

<sup>37)</sup> Le terme „rayon intérieur“ a parfois été utilisé pour désigner notre rayon conforme : je mets en garde le lecteur contre toute confusion.



En effet, soit  $q$  l'extrémité de  $c$  sur  $\alpha$  ; on a

$$h_{pqG} \leq \int_c \frac{|dz|}{r(z)}$$

et, en vertu de (III, 5, B) ci-dessus, on trouve (17).

C. Soit (fig. 6)  $Q$  un quadrilatère ( $\beta' \alpha' \beta'' \alpha''$ ) (sur la sphère de Riemann) ; soit  $c$  un arc rectifiable dans  $Q$ , joignant  $\beta'$  à  $\beta''$ . — Appelons  $D$

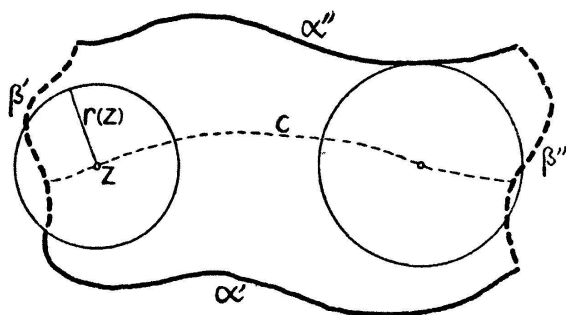


fig. 6

le domaine doublement connexe de contours  $\alpha'$  et  $\alpha''$  ; et  $U$  sa surface universelle de recouvrement. Le rayon intérieur  $r(z)$  de  $D$  en un point quelconque  $z$  de  $c$  est égal à la distance euclidienne de  $z$  à  $\alpha' \cup \alpha''$ . Donc

$$h_{c,U} = h_{c,D} \leq \int_c \frac{|dz|}{r(z)} ;$$

d'où, en vertu du théorème général (III, 5, D) ci-dessus (que nous appliquons au domaine simplement connexe  $U$ ),

$$\mu_{\beta' \beta'' Q} \leq 2\nu(e^{-2 \int_c \frac{|dz|}{r(z)}}) . \quad (18)$$

Grâce à (II, 9'), il en résulte l'inégalité élémentaire mais plus faible

$$\mu_{\beta' \beta'' Q} \leq \frac{2}{\pi} \int_c \frac{|dz|}{r(z)} + \frac{2}{\pi} \ln 2 \quad {}^{38}) . \quad (18')$$

D. Je vais résoudre ici un problème lié aux précédents, mais qui ne nécessite pas l'usage des méthodes développées dans ce travail.

a) Soit  $D$  un domaine doublement connexe, de contours  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  ; on peut définir dans  $D$  une métrique hyperbolique grâce à sa surface universelle de recouvrement. Soit  $\mu$  le module de  $D$ , et soit  $h_\gamma$  la longueur hyperbolique d'une courbe fermée rectifiable  $\gamma$  séparant  $\Gamma'$  de  $\Gamma''$  ;

$$\min_\gamma h_\gamma = \frac{\pi}{2\mu} . \quad (19)$$

<sup>38)</sup> Nevanlinna ([16], p. 79) donne une évaluation qui peut s'écrire sous la forme suivante :  $\mu_{\beta' \beta'' Q} < (\pi/2) \ln(4\pi) + \pi \int_c \frac{|dz|}{r(z)}$  ; elle est toujours moins forte que (18'), donc *a fortiori* que (18). — Ainsi que le montre une autre publication ([9], formules (1) et (4)), l'évaluation  $2 \int_c \frac{|dz|}{r(z)} > -\ln(2\pi(1-m_w))$  (Nevanlinna, *ibid.*) peut, en vertu de (18), être remplacée par la suivante :  $\int_c \frac{|dz|}{r(z)} \geq -\ln \operatorname{tg}((\pi/4)(1-m_w))$ , qui est toujours plus forte.

*Démonstration.* Je choisis comme domaine normal (représentant la configuration de  $D$ ) le cylindre obtenu à partir du rectangle  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 < y < \pi$  en identifiant chaque point-frontière  $iy$  avec le point-frontière  $a + iy$ ;  $a$  est déterminé par  $\mu = \pi/a$ . La surface universelle de recouvrement est la bande  $0 < y < \pi$ ; par la fonction  $w = e^z$ , je l'applique conformément sur le demi-plan supérieur;  $\gamma$  devient un arc  $\gamma'$  joignant les deux demi-cercles supérieurs  $|w| = 1$  et  $|w| = e^a$ . On a

$$dh = \frac{1}{2} \cdot \frac{|dw|}{v}; \quad h_\gamma = h_{\gamma'} = \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \frac{|dw|}{v} \geq \frac{1}{2} \int_1^{e^a} \frac{dr}{r} = h_{\gamma'_0} = \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2\mu}$$

( $\gamma'_0$  est le segment  $u = 0$ ,  $1 \leq v \leq e^a$ ). <sup>39)</sup> c. q. f. d.

b) Introduisons pour  $h_\gamma$  l'évaluation établie sous A : nous obtenons

$$\frac{\pi}{2\mu} \leq \oint_{\gamma} \frac{|dz|}{r(z)}. \quad (20)$$

*Remarque.* Coupons  $D$  par un arc  $\beta$  joignant  $\Gamma'$  à  $\Gamma''$ ;  $Q = (\beta' \Gamma' \beta'' \Gamma'')$ ; on déduit immédiatement de (I, 3, a et b) que

$$\mu_{\beta' \beta'' Q} = \frac{1}{\mu_{\Gamma' \Gamma'' Q}} \leq \frac{1}{\mu_D} \leq \frac{2}{\pi} \oint_{\gamma} \frac{|dz|}{r_D(z)}.$$

Comparons cette évaluation à (18), également applicable ici (en considérant  $Q$  sur une surface de recouvrement,  $\beta'$  et  $\beta''$  étant sur deux feuillets différents). (18) est formellement moins bonne, car  $\nu(r) > (1/2\pi) \ln 1/r$ ; mais il peut y avoir des points  $z \in \gamma$  où  $r_Q(z) > r_D(z)$ , ce qui parle pour (18).

## § 7. Remarque sur les théorèmes de Koebe et d'Ahlfors

On peut obtenir facilement les théorèmes de Koebe et d'Ahlfors à l'aide des résultats précédents. Voici les grandes lignes de la démonstration.

a) *Etant donnés sur la sphère de Riemann  $S$  trois points  $a$ ;  $b$ ;  $p \neq \infty$ , trouver une borne supérieure pour  $R(p, G)$  valable pour tout domaine simplement connexe  $G$  ne contenant pas les points  $a$  et  $b$  (Koebe).*

On ramène ce problème à celui qui est résolu en (III, 1, C), en enlevant de  $S$  un cercle infinitésimal de centre  $p$ .

<sup>39)</sup> On voit de plus qu'une seule courbe  $\gamma_0$  dans  $D$  réalise ce minimum.

<sup>40)</sup> Sario ([19], p. 29) a fait un premier pas dans cette direction en démontrant que  $e^{2\pi\mu} - 1 \geq \pi d/4L$ , où  $d \leq 2r(z)$  et  $L$  = longueur de  $\gamma$ .

b) On donne deux points  $a, b$  et un arc  $c$  (d'extrémités  $p$  et  $q$ ). Trouver une borne inférieure pour la longueur hyperbolique  $h_{c,G}$ , valable pour tout domaine simplement connexe  $G$  ne contenant pas les points  $a, b$ .

c) On donne quatre points  $a, b, p, q$ . Trouver une borne supérieure pour le module  $\mu(D_{ab}^{pq})$ , valable pour tout domaine doublement connexe  $D_{ab}^{pq}$  sur  $S$ , dont le complément est formé d'un continu  $E_{ab}$  contenant  $a$  et  $b$ , et d'un continu  $E_{pq}$  contenant  $p$  et  $q$ .

On passe de b) à c) en appliquant de nouveau le théorème général (III, 1, C).

d) Soient  $G$  la bande  $0 < y < \pi$ ;  $E_1$  un continu dans  $G$  joignant  $-\infty$  à un point  $z_1 = x_1 + iy_1$ ;  $E_2$  un continu dans  $G$  joignant  $+\infty$  à un point  $z_2 = x_2 + iy_2$ .  $E_1$  et  $E_2$  déterminent dans  $G$  un quadrilatère  $Q$ . Trouver une borne supérieure pour  $\mu_{E_1 E_2 Q}$ , ne dépendant que de  $\delta = x_2 - x_1 (\geq 0)$  (Ahlfors).

Solution :  $\mu_{E_1 E_2 Q} \leq \mu_\delta = 4\nu((1 + e^\delta)^{-1/2})$ . — On passe de c) à d) en posant le problème d'Ahlfors d'abord pour le demi-plan.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Ahlfors et A. Beurling, Conformal invariants and function theoretic null-sets. Acta Math. 83, 1950, p. 101–129.
- [2] A. Beurling, Etudes sur un problème de majoration. Thèse, Upsala 1933.
- [3] O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung. Teubner, 1909.
- [4] C. Gattegno et A. Ostrowski, Représentation conforme à la frontière, domaines généraux. Mém. Sc. Math. 109, 1949.
- [5] J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mém. Savants étrangers Acad. Sci. Inst. France, série 2, vol. 33, No. 4, 1908, p. 1–128.
- [6] J. Hadamard, Leçons sur le calcul des variations. Hermann, Paris 1910.
- [7] J. Hersch, Longueurs extrémales, mesure harmonique et distance hyperbolique. C. R. Acad. Sci. Paris 235, 1952, p. 569–571.
- [8] J. Hersch, Sur une forme générale du théorème de Phragmén-Lindelöf. C. R. Acad. Sci. Paris 237, 1953, p. 641–643.
- [9] J. Hersch, A propos d'un problème de variation de R. Nevanlinna. Ann. Acad. Sci. Fenn., sér. A1, Math.-Phys. 168, 1954.
- [10] J. Hersch, Contribution à la théorie des fonctions pseudo-analytiques. A paraître dans cette revue.
- [11] J. Hersch et A. Pfluger, Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris 234, 1952, p. 43–45.

- [12] *J. Hersch et A. Pfluger*, Principe de l'augmentation des longueurs extrémales. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 1953, p. 1205–1207.
- [13] *J. A. Jenkins*, Some problems in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 1949, p. 327–350.
- [14] *J. A. Jenkins*, Some results related to extremal length. Ann. Math. Studies **30**, 1953, p. 87–94.
- [15] *Z. Nehari*, Dirichlet's principle and some inequalities in the theory of conformal mapping. Ann. Math. Studies **30**, 1953, p. 167–175.
- [16] *R. Nevanlinna*, Eindeutige analytische Funktionen. Springer, 1936.
- [17] *G. Pólya*, Über analytische Deformationen eines Rechtecks. Ann. of Math. **34** II, 1933, p. 617–620.
- [18] *G. Pólya et G. Szegő*, Isoperimetric inequalities in mathematical physics. Ann. Math. Studies **27**, 1951.
- [19] *L. Sario*, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand. Thèse, Ann. Acad. Sci. Fenn., sér. A1, Math.-Phys. **50**, 1948.
- [20] *M. Schiffer*, On the modulus of doubly-connected domains. Quart. Jour. Math. **17**, 1946, p. 197–213.
- [21] *M. Schiffer*, Some recent developments in the theory of conformal mapping. Appendice du livre de *R. Courant*, Dirichlet's principle. Interscience publ., New York 1950.
- [22] *K. Strebel*, Eine Ungleichung für extremale Längen. Ann. Acad. Sci. Fenn., sér. A1, Math.-Phys. **90**, 1951.
- [23] *K. Strebel*, Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs. Comm. Math. Helv. **27**, 1953, p. 101–127.
- [24] *O. Teichmüller*, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung. Deutsche Math. **3**, 1938, p. 621–678.
- [25] *E. T. Whittaker et G. N. Watson*, Modern Analysis. 1927.

(Reçu le 24 mars 1954.)