

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1955)

Artikel: Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales.
Autor: Ostrowski, Alexandre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23291>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales

par ALEXANDRE OSTROWSKI, Bâle

Dans une communication parue dans ce journal en 1943¹⁾, j'ai introduit la notion d'une *dérivée partielle uniforme* qui a trouvé des différentes applications²⁾, en particulier à la solution du problème des différentielles totales.

Il est évident que pour qu'une fonction $f(x, y)$ (nous nous bornons ici au cas de deux variables indépendantes) possède dans un point $P_0(x_0, y_0)$ une différentielle totale « au sens de Stolz », l'existence de $f'_x(P_0)$, $f'_y(P_0)$ ne suffit pas. Le problème à résoudre consiste à décomposer la condition d'existence de la différentielle totale en deux conditions, indépendantes l'une de l'autre (autant que possible) et qui se rapportent au comportement de $f(P)$, l'une au « voisinage » de $x = x_0$ et l'autre au « voisinage » de $y = y_0$. —

Il y a quelques jours, mon attention a été attiré, grâce à une communication aimable de M. *Fréchet*, à un mémoire de M. *F. Severi* de 1935³⁾, qui m'avait malheureusement échappé lors de la publication de ma note citée et dans lequel M. *Severi* (parmi un très grand nombre d'autres résultats importants) établit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une différentielle totale dans un point en utilisant la notion de la *dérivée partielle généralisée* (*derivata parziale generalizzata*) qu'il a introduite dans ce but.

Donc, la première solution du problème des différentielles totales remonte à M. *Severi*, ce que je me dépêche de reconnaître.

En plus, ma notion de la dérivée uniforme est apparantée à la dérivée généralisée de M. *Severi*. De l'autre côté, il me semble que dans les con-

¹⁾ *Alexandre Ostrowski*, Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, *Comm. Math. Helv.* 15 (1942/43), pp. 222–225.

²⁾ Cf. *Alexandre Ostrowski*, Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires, *Comm. Math. Helv.* 15 (1942/43), pp. 265–286; *Rolf Conzelmann*, Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen, *Comm. Math. Helv.* 19 (1946/47), pp. 279–315.

³⁾ *Francesco Severi*, Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali, *Annali di Matematica pure ed applicata*, 4, tomo 13 (1935), pp. 1–35.

ditions de M. *Severi* l'indépendance des deux conditions se rapportant à x et à y est *partiellement* réalisée, tandis que dans mes conditions cette indépendance est presque complètement réalisée et même peut l'être totalement au prix de détruire la symétrie.

Considérons l'expression

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} . \quad (1)$$

Je définis la dérivée uniforme en $P_0(x_0, y_0)$ par rapport à x comme la limite de l'expression (1), $P(x, y)$ tendant à P_0 de sorte que l'on ait

$$|y - y_0| \leq |x - x_0| . \quad (2)$$

M. *Severi* définit la dérivée partielle généralisée en P_0 par rapport à x comme la limite de l'expression (1), quand la demi-droite P_0P (d'origine P_0) tend vers une demi-droite λ quelconque d'origine P_0 , mais différente de $x = x_0$ et si cette limite ne dépend pas de λ . Il est presque immédiat que cette définition est équivalente à la suivante: la dérivée partielle généralisée par rapport à x est égale à la limite de l'expression (1) pour $P \rightarrow P_0$, $P \neq P_0$ parcourant le domaine

$$|y - y_0| \leq C |x - x_0| , \quad (3)$$

si cette limite existe pour *chaque* constante $C > 0$.

Maintenant, la condition nécessaire et suffisante de M. *Severi* consiste en ce que les deux dérivées partielles généralisées doivent exister en P_0 . Il est évident que les domaines du plan sur lesquels portent ces deux conditions prises individuellement contiennent comme partie commune les angles

$$c |x - x_0| \leq |y - y_0| \leq C |x - x_0| ,$$

pour chaque couple de constante c, C avec $0 < c < C$. Quant à ma condition qui consiste en l'existence des deux dérivées partielles uniformes en P_0 , les domaines du plan en question n'ont en commun que les droites

$$|y - y_0| = |x - x_0| .$$

D'ailleurs il serait facile de modifier mes conditions de sorte que les domaines en question n'aient des points en commun. Il suffirait par exemple pour une constante positive fixe quelconque c de remplacer la condition $|y - y_0| \leq |x - x_0|$ dans la définition de la dérivée partielle uniforme par rapport à x par la condition $|y - y_0| \leq c |x - x_0|$ et la

condition $|x - x_0| \leq |y - y_0|$ dans la définition de la dérivée uniforme par rapport à y par $c|x - x_0| < |y - y_0|$. Mais alors on aurait l'inconvénient que les définitions des dérivées uniformes par rapport à x et à y ne restent plus symétriques.

En tout cas, il est évident que l'existence des deux dérivées partielles *uniformes* en P_0 est équivalente à l'existence simultanée des deux dérivées partielles généralisées en P_0 .

(Reçu le 5 mars 1955)