Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 29 (1955)

Artikel: Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales.

Autor: Ostrowski, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23291

Note sur les dérivées uniformes et les différentielles totales

par ALEXANDRE OSTROWSKI, Bâle

Dans une communication parue dans ce journal en 1943[1]), j'ai introduit la notion d'une *dérivée partielle uniforme* qui a trouvé des différentes applications[2]), en particulier à là solution du problème des différentielles totales.

Il est évident que pour qu'une fonction $f(x, y)$ (nous nous bornons ici au cas de deux variables indépendantes) possède dans un point $P_0(x_0, y_0)$ une différentielle totale «au sens de Stolz», l'existence de $f'_x(P_0), f'_y(P_0)$ ne suffit pas. Le problème à résoudre consiste à décomposer la condition d'existence de la différentielle totale en deux conditions, indépendantes l'une de l'autre (autant que possible) et qui se rapportent au comportement de $f(P)$, l'une au «voisinage» de $x = x_0$ et l'autre au «voisinage» de $y = y_0$. —

Il y a quelques jours, mon attention a été attiré, grâce à une communication aimable de M. *Fréchet*, à un mémoire de M. *F. Severi* de 1935[3]), qui m'avait malheureusement échappé lors de la publication de ma note citée et dans lequel M. *Severi* (parmi un très grand nombre d'autre résultats importants) établit des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une différentielle totale dans un point en utilisant la notion de la *dérivée partielle généralisée* (derivata parziale generalizzata) qu'il a introduite dans ce but.

Donc, la première solution du problème des différentielles totales remonte à M. *Severi*, ce que je me dépêche de reconnaître.

En plus, ma notion de la dérivée uniforme est apparantée à la dérivée généralisée de M. *Severi*. De l'autre côté, il me semble que dans les con-

---

1) *Alexandre Ostrowski*, Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, Comm. Math. Helv. 15 (1942/43), pp. 222–225.

2) Cf. *Alexandre Ostrowski*, Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires, Comm. Math. Helv. 15 (1942/43), pp. 265–286; *Rolf Conzelmann*, Beiträge zur Theorie der singulären Integrale bei Funktionen von mehreren Variablen, Comm. Math. Helv. 19 (1946/47), pp. 279–315.

3) *Francesco Severi*, Sulla differenziabiltà totale delle funzioni di più variabili reali, Annali di Matematica pure ed applicata, 4, tomo 13 (1935), pp. 1–35.

ditions de M. *Severi* l'indépendance des deux conditions se rapportant à x et à y est *partiellement* réalisée, tandis que dans mes conditions cette indépendance est presque complètement réalisée et même peut l'être totalement au prix de détruire la symétrie.

Considérons l'expression

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} . \tag{1}$$

Je définis la dérivée uniforme en $P_0(x_0, y_0)$ par rapport à x comme la limite de l'expression (1), $P(x, y)$ tendant à P_0 de sorte que l'on ait

$$| y - y_0 | \leqq | x - x_0 | . \tag{2}$$

M. *Severi* définit la dérivée partielle généralisée en P_0 par rapport à x comme la limite de l'expression (1), quand la demi-droite P_0P (d'origine P_0) tend vers une demi-droite λ quelconque d'origine P_0, mais différente de $x = x_0$ et si cette limite ne dépend pas de λ. Il est presque immédiat que cette définition est équivalente à la suivante: la dérivée partielle généralisée par rapport à x est égale à la limite de l'expression (1) pour $P \to P_0$, $P \neq P_0$ parcourant le domaine

$$| y - y_0 | \leqq C | x - x_0 | , \tag{3}$$

si cette limite existe pour *chaque* constante $C > 0$.

Maintenant, la condition nécessaire et suffisante de M. *Severi* consiste en ce que les deux dérivées partielles généralisées doivent exister en P_0. Il est évident que les domaines du plan sur lesquels portent ces deux conditions prises individuellement contiennent comme partie commune les angles

$$c | x - x_0 | \leqq | y - y_0 | \leqq C | x - x_0 | ,$$

pour chaque couple de constante c, C avec $0 < c < C$. Quant à ma condition qui consiste en l'existence des deux dérivées partielles uniformes en P_0, les domaines du plan en question n'ont en commun que les droites

$$| y - y_0 | = | x - x_0 | .$$

D'ailleurs il serait facile de modifier mes conditions de sorte que les domaines en question n'aient des points en commun. Il suffirait par exemple pour une constante positive fixe quelconque c de remplacer la condition $| y - y_0 | \leqq | x - x_0 |$ dans la définition de la dérivée partielle uniforme par rapport à x par la condition $| y - y_0 | \leqq c | x - x_0 |$ et la condition $|x - x_0| \leqq |y - y_0|$ dans la définition de la dérivée uniforme par rapport à y par $c|x - x_0| < |y - y_0|$. Mais alors on aurait l'inconvenient que les définitions des dérivées uniformes par rapport à x et à y ne restent plus symétriques.

En tout cas, il est évident que l'existence des deux dérivées partielles *uniformes* en P_0 est équivalente à l'existence simultanée des deux dérivées partielles généralisées en P_0.

(Reçu le 5 mars 1955)