

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1955)

**Artikel:** Die akzessorische Irrationalität der Gleichung fünften Grades.  
**Autor:** Howald, Mario  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23290>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die akzessorische Irrationalität der Gleichung fünften Grades

VON MARIO HOWALD, Basel

*Herrn Professor Andreas Speiser zum siebzigsten Geburtstag gewidmet*

## Einleitung

Bei der Rückführung der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf einparametrische Resolventen treten nach einem Satz von *Kronecker* (Nr. 5) unvermeidlich akzessorische Irrationalitäten auf. – Der Einblick in die Natur dieser Irrationalitäten ist *R. Brauer* gelungen (siehe: Ausblick). – *Felix Klein* rückt als Resolvente die Ikosaedergleichung in den Vordergrund und gibt in seinen „Vorlesungen über das Ikosaeder“ zwei daraus folgende Lösungsmethoden an. Innerhalb der „zweiten“ Methode – sie steht in Beziehung zum ternären Formenproblem des Ikosaeders – tritt als akzessorische Irrationalität  $\sqrt[5]{d}$  auf.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Radikanden  $d$  auf Grund der Darstellung in dem Lehrbuch von *A. Speiser* [1, p. 250 ff.].

Im Abschnitt I findet sich eine selbständige, kurze Darstellung der *Kleinschen* Auflösungstheorie für die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$G_5(x) \equiv x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

(die  $a_i$  sind – wenn nichts anderes gesagt wird – als Unbestimmte über dem Körper  $P_0$  der rationalen Zahlen aufzufassen, und die Wurzeln  $\alpha_i$  von  $G_5(x) = 0$  werden als verschieden vorausgesetzt).

Der Abschnitt II enthält die Ergebnisse (§ 1) meiner Untersuchung. Davon sei hier angeführt, daß  $d$  für den gewählten Ansatz im allgemeinen ein homogenes Polynom von 1830 Summanden von der Gestalt

$$\alpha_1^j \alpha_2^k \alpha_3^l \alpha_4^m \alpha_5^n \quad (j, \dots : \text{ganz, } \geq 0)$$

ist. Die überraschend einfache Methode, welche gestattet, das Riesenspolynom mit geringer Mühe zu überblicken, besteht im wesentlichen darin, daß man Symmetrien der Ikosaedergruppe voll ausnützt. Nicht unerwähnt soll bleiben, daß sich diese Methode aus der Bearbeitung von

Spezialfällen (S. 287, 1., 2.) erst allmählich ergab. Nun, da sie gefunden ist, scheint nichts näher zu liegen als gerade sie.

Rückblickend darf ich sagen : Die vorliegende Arbeit, die das Ergebnis einer Anregung durch Herrn Professor Speiser ist, wäre wohl niemals entstanden, wenn nicht zu meinem Vertrauen in das Ikosaeder noch die gütige Anteilnahme Herrn Professor Speisers hinzugekommen wäre. – Ich denke noch heute – nicht ohne Vergnügen – daran, wie Herr Professor Speiser mich einmal ermunterte, auf dem damals noch ungewissen Gebiet weiterzurechnen, indem er kein geringes Vorbild hinstellte : *Euler*.

## I. Über die Kleinsche Theorie der allgemeinen Gleichung fünften Grades

$$G_5(x) = 0$$

1. *Felix Klein* (1849 bis 1925) gibt dem *Abelschen* Beweis, „daß es unmöglich ist, die Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades auf eine Reihenfolge reiner Gleichungen zurückzuführen, seine positive Wendung. Die Aufgabe muß sein, die *Auflösung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe einer Ikosaedergleichung zu bewerkstelligen.*“ [2, p. 483.] – Die einparametrische Ikosaedergleichung vom 60. Grad

$$\frac{H^3(x)}{1728 f^5(x)} = X, \quad (1)$$

$$H(x) = -x^{20} - 1 + 228(x^{15} - x^5) - 494x^{10},$$

$$f(x) = x(x^{10} + 11x^5 - 1), \quad X: \text{ein Parameter}$$

läßt sich „als eine *Normalgleichung sui generis* ansehen, welche sich vermöge ihrer ausgezeichneten Eigenschaften als die nächste Verallgemeinerung der ‚reinen‘ Gleichungen

$$x^n = X \quad (2)$$

darstellt“ (l. c.). Denn die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung lassen sich durch die bekannten Ikosaedersubstitutionen aus einer beliebigen unter ihnen berechnen, „wie die  $n$  Wurzeln von (2) aus einer derselben durch die  $n$  Substitutionen  $x' = e^{\frac{2\pi ik}{n}} x$ “ (l. c.).

Ich verzichte – unter Hinweis auf *Kleins* „Ikosaederbuch“ [3] und die Darstellung in *Dickson-Bodewig* [4, p. 196 ff.] – darauf, hier die Ikosaedergleichung zu entwickeln. Die Ikosaedersubstitutionen hingegen seien noch näher charakterisiert.

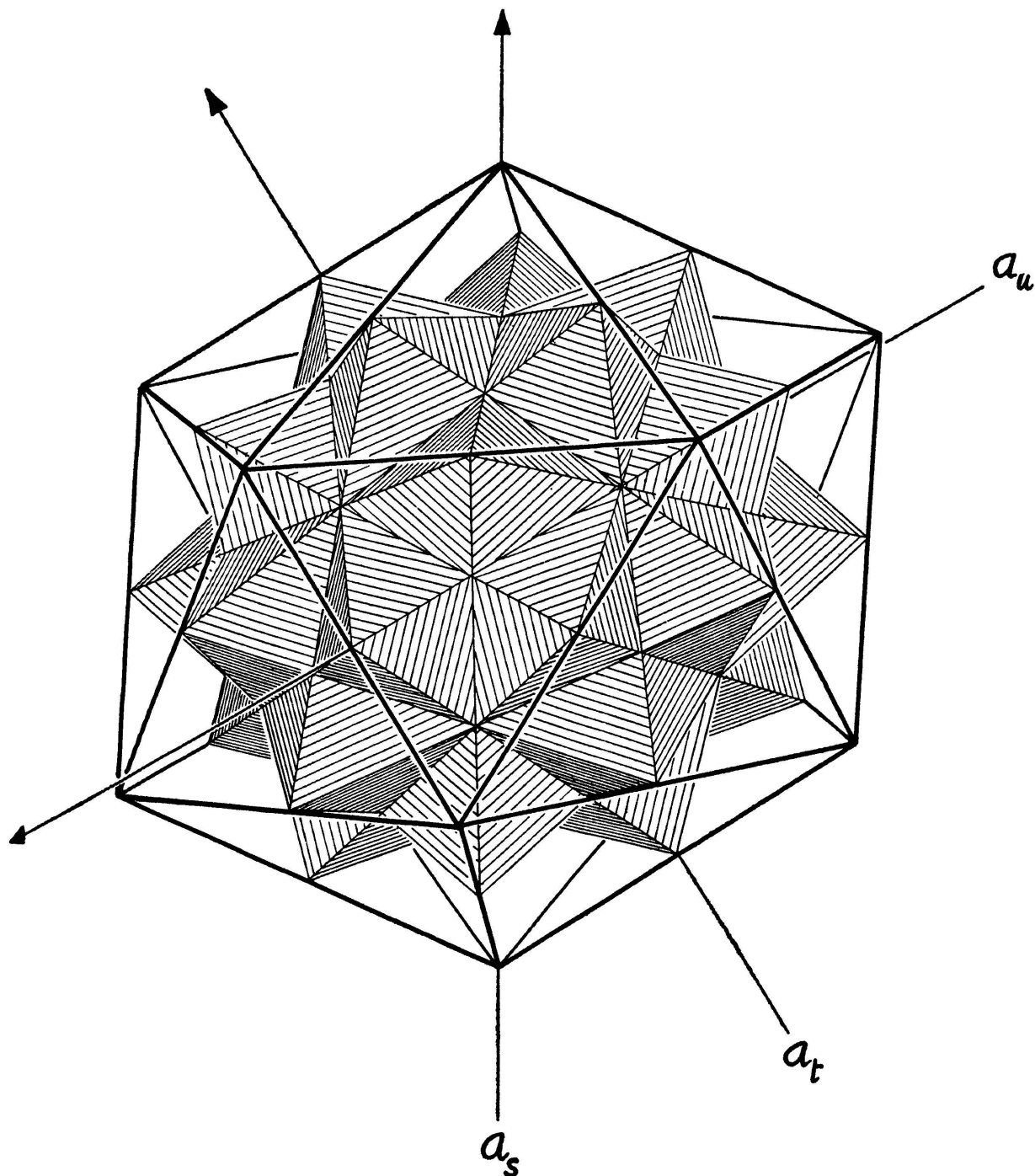
2. Alle automorphen Drehungen des Ikosaeders bilden die Ikosaedergruppe  $\mathfrak{G}_5$  von der Ordnung 60. Die Erzeugenden von  $\mathfrak{G}_5$  sind :

Drehung  $S$  um  $a_s$  durch  $\frac{2\pi}{5}$  (vgl. Fig.),

Drehung  $T$  um  $a_t$  durch  $\pi$ .

Nimmt man noch die Drehung  $U = S^2 T S^3 T S^2 T$  um  $a_u$  durch  $\pi$  hinzu, so läßt sich  $\mathfrak{G}_i$  durch das Schema darstellen:

$$S^\mu, S^\mu T S^\nu, S^\mu U, S^\mu T S^\nu U \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots, 4) \quad [3, \text{p. 26}].$$



Schrägbild eines Ikosaeders mit fünf Oktaedern und drei Drehachsen

Die Tatsache, daß die 30 Kantenmitten des Ikosaeders – je zu sechst genommen – Ecken von 5 Oktaedern sind, macht folgende Aussage geometrisch anschaulich: die  $\mathfrak{G}_i$  ist einstufig isomorph zur alternierenden

Gruppe  $\mathfrak{A}_{60}$  von 5 Elementen, und zwar gilt (wenn  $1, 2, \dots, 5$  die Nummern der Elemente sind) :

$$S = (12345), \quad T = (12)(34), \quad U = (14)(23) .$$

Den Ikosaederdrehungen lassen sich in bekannter Weise unimodulare, linear-gebrochene Transformationen der *Gaußschen* Ebene zuordnen.

Die Erzeugenden der nicht-homogenen Substitutionsgruppe  $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$  sind :

$$S: z' = \varepsilon z, \quad (\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}); \quad T: z' = \frac{-\frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}} z + \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}}}{\frac{\varepsilon^2 - \varepsilon^3}{\sqrt{5}} z + \frac{\varepsilon - \varepsilon^4}{\sqrt{5}}};$$

$$U: z' = -\frac{1}{z} .$$

Schreibt man die vorigen Substitutionen homogen, so sind die Erzeugenden der homogenen Substitutionsgruppe  $\mathfrak{G}_{120}^{(2)}$  :

$$S: \begin{aligned} z'_1 &= \pm \varepsilon^3 z_1 \\ z'_2 &= \pm \varepsilon^2 z_2 \end{aligned} \quad T: \begin{aligned} \sqrt{5} z'_1 &= \mp (\varepsilon - \varepsilon^4) z_1 \pm (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_2 \\ \sqrt{5} z'_2 &= \pm (\varepsilon^2 - \varepsilon^3) z_1 \pm (\varepsilon - \varepsilon^4) z_2 \end{aligned}$$

$$U: \begin{aligned} z'_1 &= \mp z_2 \\ z'_2 &= \pm z_1 \end{aligned} .$$

**3.** Für die weitere Betrachtung ist erforderlich, von den beiden Lösungsmethoden für  $G_5(x) = 0$ , die *Felix Klein* vorschlägt, die „zweite“ zu skizzieren [3, p. 239 ff.]; sie geht in drei Schritten vor :

1. a) Man konstruiert aus den Wurzeln  $\alpha_i$  von  $G_5(x) = 0$  eine „Wurzel“  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  der Ikosaedergleichung; das heißt eine Größe, die sich nach  $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$  substituiert (wenn  $\alpha_i$  den Permutationen von  $\mathfrak{A}_{60}$  unterworfen werden).
- b) Durch Einsetzung dieser „Wurzel“ in (1) wird der Parameter  $X$  als Funktion der Koeffizienten  $a_i$  und der  $\sqrt{D} = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)$  von  $G_5(x) = 0$  berechnet; so gewinnt man die Ikosaedergleichung als Resolvente für  $G_5(x) = 0$ .
2. Man berechnet eine Wurzel  $x$  (die „Ikosaederirrationalität“) der so erhaltenen speziellen Ikosaedergleichung. Dieser – transzendente – Teil der Lösung gelingt mit Hilfe hypergeometrischer Reihen („wie die transzendente Auflösung der Gleichung  $x^n = X$  durch die binomische Reihe“ [2, p. 483]); man vergleiche hierzu [3, p. 62 ff.,

81]. – Dieser Teil kann auch mit Hilfe der elliptischen Funktionen bewältigt werden [3, p. 126 ff., 131].

3. Aus der gewonnenen Ikosaederirrationalität werden rückwärts die  $\alpha_i$  bestimmt [3, p. 248 ff.]. Dieser dritte Teil ist – wie der erste – algebraischer Natur.

Im weiteren wird uns nur der Teilschritt 1a beschäftigen.

4. Man adjungiere  $\sqrt{D}$  zu  $P_0(a_1, \dots, a_5)$ . In bezug auf

$$P_0(a_1, \dots, a_5, \sqrt{D})$$

wird die Galoische Gruppe von  $G_5(x) = 0$  die Gruppe  $\mathfrak{A}_{60}$ .  $\sqrt{D}$  ist eine natürliche Irrationalität für  $G_5(x) = 0$ , da sie ein Polynom in den  $\alpha_i$  ist, dessen Wert aber nicht in  $P_0(a_1, \dots, a_5)$  liegt.

Es soll nun nach 1a)  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  konstruiert werden. Hierzu benutzt *Felix Klein* die Tatsache, daß  $\mathfrak{G}_i$  sich als ternäre Substitutionsgruppe  $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$  von der Ordnung 60 darstellen läßt. Die Erzeugenden  $S, T, U$  von  $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$  kann man [1, p. 254] mit Hilfe der quadratischen Form

$$f_1(z_1, z_2) = A_1 z_1^2 + 2A_0 z_1 z_2 - A_2 z_2^2 \quad (3)$$

finden, indem man auf  $z_1, z_2$  die Substitutionen  $S, T, U$  von  $\mathfrak{G}_{120}^{(2)}$  ausübt. Es gehe durch eine solche Substitution  $f_1$  über in

$$f'_1(z_1, z_2) = A'_1 z_1^2 + 2A'_0 z_1 z_2 - A'_2 z_2^2 .$$

Die Rechnung ergibt :

$$S: \begin{cases} A'_0 = A_0 \\ A'_1 = \varepsilon \cdot A_1 \\ A'_2 = \varepsilon^4 \cdot A_2 \end{cases} \quad T: \begin{cases} A'_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (A_0 + A_1 + A_2) \\ A'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_0 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_1 + (\varepsilon^4 + \varepsilon)A_2) \\ A'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2A_0 + (\varepsilon^4 + \varepsilon)A_1 + (\varepsilon^2 + \varepsilon^3)A_2) \end{cases} \quad (4)$$

$$U: \begin{cases} A'_0 = -A_0 \\ A'_1 = -A_2 \\ A'_2 = -A_1 \end{cases} .$$

Die Determinante  $d = A_0^2 + A_1 A_2$  von  $f_1(z_1, z_2)$  bildet mit drei weiteren Invarianten [3, p. 215, 218] das volle Invariantensystem der  $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$ . Das ternäre Formenproblem lautet: aus beliebigen (aber mit einer

Syzygie verträglichen) Werten der vier erwähnten Invarianten, die 60 zugehörigen Wertsysteme der  $A_0, A_1, A_2$  zu bestimmen [3, p. 219].

Aus  $f_1 = 0$  folgt :

$$x = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}}{A_1} .$$

$x$  substituiert sich nach  $\mathfrak{G}_{60}^{(1)}$ , wenn  $A_0, A_1, A_2$  die Gruppe  $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$  erfahren [1, p. 255]. Nun bleibt nur noch der letzte Schritt zu tun :  $A_0, A_1, A_2$  als Funktionen der  $\alpha_i$  so zu konstruieren, daß sie  $\mathfrak{G}_{60}^{(3)}$  erfahren, wenn die  $\alpha_i$  die Permutationen von  $\mathfrak{A}_{60}$  erleiden. Dies gelingt [1, p. 253, 254] ; das Ergebnis lautet :

$$\begin{aligned} \sqrt{5} A_0 &= \sqrt{5} u_\infty + u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \\ \sqrt{5} A_1 &= 2(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \varepsilon^4 u_4) \\ \sqrt{5} A_2 &= 2(u_0 + \varepsilon^4 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \varepsilon^2 u_3 + \varepsilon u_4) \end{aligned} \quad (5)$$

(die Numerierung der  $u_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) ist entgegengesetzt zu der in [1]).

Dabei haben die Symbole  $u_\infty, u_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, 4$ ) folgende Bedeutung :

$$u_\infty = w_1 - w_2, \quad u_\mu = w_{2\mu+3} - w_{2\mu+4} \quad (\mu = 0, \dots, 4) . \quad (6)$$

Hierin bedeutet  $w_1$  eine beliebige über  $P_0(a_1, \dots, a_5)$  rationale Funktion der  $\alpha_i$ , die zu der durch  $S$  erzeugten Untergruppe  $\mathfrak{Z}_5$  von  $\mathfrak{A}_{60}$  gehört ; die  $w_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, 12$ ) gehen aus  $w_1$  hervor durch die Anwendung von

$$E, U, T, UT, TS, UTS, \dots, TS^4, UTS^4 ,$$

welche Repräsentanten der 12 rechtseitigen Nebenklassen nach  $\mathfrak{Z}_5$  in  $\mathfrak{A}_{60}$  sind ; genauer gesagt :

$$\begin{aligned} E : w_1, \quad U : w_1 \rightarrow w_2, \\ TS^\mu : w_1 \rightarrow w_{2\mu+3}, \quad UTS^\mu : w_1 \rightarrow w_{2\mu+4} \\ (\mu = 0, 1, \dots, 4) . \end{aligned} \quad (7)$$

5. Man beachte :

1. Zur Konstruktion der  $A_0, A_1, A_2$  ist die numerische Irrationalität  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$  erforderlich.
2. Zur Konstruktion von  $x(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  ist zudem die Irrationalität  $\sqrt{d} = \sqrt{A_0^2 + A_1 A_2}$  nötig.

Beide Irrationalitäten sind der  $G_5(x) = 0$  akzessorisch: sie liegen nicht in  $P_0(a_1, \dots, a_5, \sqrt{D})$  und sind nicht ganze rationale Funktionen der Wurzeln  $\alpha_i$  von  $G_5(x) = 0$ .

Die numerische Irrationalität  $\varepsilon$  erhält weiter keine Beachtung; man denkt sie sich zum Grundkörper von Anfang an adjungiert.

Interessanter ist  $\sqrt{d}$ . Von dieser akzessorischen Irrationalität sagt der von *Leopold Kronecker* (1823 bis 1891) im Jahr 1861 aufgestellte und von *Felix Klein* 1877 (zur Geschichte: [2, p. 503]) bewiesene Satz: sie ist unumgänglich, da die erreichte Resolvente (die Ikosaedergleichung) einparametrig ist. Die *Kroneckersche* Formulierung des Satzes [5, p. 612]:

„Aber erst vor kurzem ist es mir gelungen, die Hauptfrage zu erledigen und festzustellen, daß die Reduktion der algebraischen Funktion:  $W$  auf Funktionen *einer* Variablen und deshalb überhaupt die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit Hilfe von algebraischen Funktionen *einer* Variablen unmöglich ist, wenn dabei jener oben angeführte und für die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelzeichen geltende Satz *Abels* bestehen bleiben soll.“ Der erwähnte Satz von *Abel* ist in der *Kroneckerschen* Mitteilung folgendermaßen wiedergegeben [5, p. 609]: „Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, daß sich alle algebraischen Funktionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Funktionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.“

Nun gehe ich zu der eigentlichen Aufgabe über:  $d$  für eine bestimmte Wahl von  $w_1(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  explizit darzustellen. Aus dem Bisherigen wird ersichtlich, daß  $d$  in  $P_0(a_1, \dots, a_5, \sqrt{D}, \varepsilon)$  liegt. Es wird sich zeigen (Nr. 7), daß  $d$  in  $P_0(a_1, \dots, a_5, \sqrt{D}, \sqrt{5})$  enthalten ist.

## II. Berechnung der akzessorischen Irrationalität $\sqrt{d}$ im Fall

$$w_1 = \Sigma \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t .$$

### § 1. Vorblick und Ergebnisse

6. Im ersten Abschnitt hat sich als Determinante einer quadratischen Form (3) ergeben:

$$d = A_0^2 + A_1 A_2 .$$

Diese bleibt ungeändert, wenn  $A_0, A_1, A_2$  die ternären Ikosaedersubstitutionen (4) erfahren. Mit Hilfe der Formeln (5), (6), (7) konstruiert man  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  aus den fünf Wurzeln  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) von  $G_5(x) = 0$  so, daß  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  ungeändert bleibt, wenn  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5$  der alternierenden Gruppe  $\mathfrak{A}_{60}$  von 5 Elementen unterworfen werden.

Die ersten beiden Schritte (§ 2), um Genaueres über die Gestalt von  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  zu ermitteln, sind: Darstellung von  $d$  mit Hilfe

1. der  $u_\infty, u_\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, 4$ ):  $d(u)$ ,
2. der  $w_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, 12$ ):  $d(w)$ .

Betrachtet man die Substitutionen der  $w_\nu$  und der  $u_\infty, u_\mu$  unter den Erzeugenden von  $\mathfrak{A}_{60}$ :

$$S = (12345), \quad T = (12)(34), \quad U = (14)(23),$$

so ergibt sich:

1.  $5d(u) = 5U_1 + 2\sqrt{5}U_2$ ,
2.  $5d(w) = 5(W_1 - 2W_2) + 2\sqrt{5}(W_3 - W_4)$ ,

wo  $U_1, U_2, W_1, W_2, W_3, W_4$  *einzelnen* invariant sind gegen  $\mathfrak{A}_{60}$ .

Um weiter zu dringen (§ 3), wähle ich

$$w_1 = \sum \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t \quad (p, \dots, t: \text{ganz, } \geq 0),$$

wobei die Summe über die 5 Glieder zu erstrecken ist, die aus dem hingeschriebenen durch Anwendung von  $S^\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, 4$ ) hervorgehen. Auf Grund der Unterinvarianten  $W$  gewinnt man leicht einen Überblick (Nr. 11) über die nunmehr vorliegenden Verhältnisse. Es ergeben sich vier Fälle ( $d(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  sei wie  $d(u)$  in zwei Teile zerlegt):

1.  $p, q, r, s, t$  alle voneinander verschieden;  $d$  zerfällt in
  - 15 verschiedene symmetrische Polynome (450 Glieder),
  - 23 verschiedene alternierende Polynome (1380 Glieder),
  - deren Grad  $2(p + q + r + s + t)$  ist;
2.  $p, q, r$  verschieden,  $s = t$ ;  $d$  zerfällt in
  - 15 verschiedene symmetrische Polynome (Gesamtzahl:  $10 + 2 \cdot 5 = 20$ ; Gliederzahl:  $540 + 2 \cdot 180 = 900$ )
  - 10 verschiedene (paarweise verwandte, Nr. 11, b) alternierende Polynome ( $10 \cdot 60 = 600$  Glieder),
  - insgesamt: 30 Polynome (1500 Glieder);
3.  $p$ ;  $q = r, s = t$ ;  $d$  zerfällt in
  - 8 verschiedene symmetrische Polynome (Gesamtzahl:  $2 \cdot 7 + 1 = 15$ ;  $2 \cdot 175 + 120 = 470$  Glieder),
  - 2 verschiedene (verwandte) alternierende Polynome (Gesamtzahl: 3;  $3 \cdot 60 = 180$  Glieder),
  - insgesamt: 18 Polynome (650 Glieder);

4.  $p \neq q$ ,  $r = s = t$ ;  $d$  zerfällt in  
 5 verschiedene symmetrische Polynome, insgesamt:  $2 \cdot 5 = 10$   
 symmetrische Polynome (300 Glieder).

Schließlich (§ 4) führe ich die Rechnung für

1.  $p = 2$ ,  $q = 1$ ,  $r = s = t = 0$
2.  $p = 3$ ,  $q = 2$ ,  $r = 1$ ,  $s = t = 0$

bis zur Darstellung von  $d$  mit Hilfe der Koeffizienten  $a_i$  von  $G_5(x) = 0$ .  
 Die Ergebnisse sind beziehungsweise:

$$1. \quad 5d = (5 - 2\sqrt{5})(-8a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 16a_1^2a_4 + 38a_1a_2a_3 - 12a_2^3 + 40a_2a_4 - 45a_3^2); \quad (8)$$

$$2. \quad 5d = 5 \cdot (2a_2^4a_4 - 2a_2^3a_3^2 - 10a_2^2a_3a_5 - 8a_2^2a_4^2 + 20a_2a_3^2a_4 - 9a_3^4) + 2\sqrt{5} \cdot (a_2^4a_4 + a_2^3a_3^2 + 5a_2^2a_3a_5 - 4a_2^2a_4^2 - 14a_2a_3^2a_4 + 9a_3^4) \quad (9)$$

(hier wurde die Gleichung in der Gestalt  $x^5 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$  angenommen).

Für beide Fälle werden numerische Beispiele angeführt (die auch zu Kontrollzwecken verwendet wurden):

zu 1):

$$\begin{aligned} x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 &= 0 \\ \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 3 \\ 5d &= (5 - 2\sqrt{5}) \cdot 2464; \end{aligned}$$

zu 2):

$$\begin{aligned} \text{a) } x^5 - 5x^3 + 4x &= 0 \\ \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 0 \\ d &= 360 \cdot (5 + \sqrt{5}); \\ \\ \text{b) } x^5 - 23x^3 + 6x^2 + 112x - 96 &= 0 \\ \alpha_1 &= 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = -3, \quad \alpha_4 = 4, \quad \alpha_5 = -4 \\ 5d &= 5 \cdot 11654856 + 2\sqrt{5} \cdot 4147524. \end{aligned}$$

An Hand dieser numerischen Beispiele sieht man leicht, daß  $\sqrt{d}$  im allgemeinen irrational ist über  $P_0(a_1, \dots, a_5, \sqrt{D}, \sqrt{5})$ . Da  $a_i$  und  $\sqrt{D}$  in diesen Fällen rational sind, muß nur nachgewiesen werden, daß  $\sqrt{d}$  irrational ist über  $P_0(\sqrt{5})$ . Dies ist getan, wenn feststeht, daß  $d$  nicht das Quadrat einer Zahl  $r$  aus  $P_0(\sqrt{5})$  ist. Zum Beispiel:

$$d = 36 \cdot (50 + 10\sqrt{5});$$

wäre  $d = r^2$ , so müßte die Norm von  $50 + 10\sqrt{5}$

$$(50 + 10\sqrt{5})(50 - 10\sqrt{5}) = 2000$$

eine Quadratzahl sein; dies ist aber nicht so.

**§ 2. Darstellung von  $d$  als Polynom in den  $u_\infty, u_\mu$  einerseits und den  $w_\nu$  andererseits.**

7. Setzt man in  $d = A_0^2 + A_1 A_2$  für  $A_0, A_1, A_2$ , die Ausdrücke (5) ein, so folgt nach kurzer Rechnung:

$$5d(u) = 5U_1 + 2\sqrt{5}U_2, \quad (10)$$

wo

$$\begin{aligned} U_1 &= u_\infty^2 + u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \\ U_2 &= U_{21} + U_{22} - U_{23} \\ U_{21} &= u_\infty(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ U_{22} &= u_0 u_1 + u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_4 + u_4 u_0 \\ U_{23} &= u_0 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_4 + u_3 u_0 + u_4 u_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Diese Gliederung berücksichtigt das Verhalten der  $u_\infty, u_\mu$  gegenüber  $S, T, U$ . Zur Begründung seien zunächst (in Zyklenschreibweise) die Substitutionen der  $w_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, 12$ ) angegeben. Ich setze

$$w_1 = \sum_{\mu=0}^4 \varphi_\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_5). \quad (12)$$

Dabei bedeutet  $\varphi_0(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  irgendeine (nicht zyklische) über  $P_0$  rationale Funktion der  $\alpha_i$ , aus der  $\varphi_\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  durch die Operationen  $S^\mu$  ( $\mu = 0, 1, \dots, 4$ ) hervorgehen. Aus  $w_1$  mögen nach (7) die  $w_\nu$  gebildet sein. Unter der Voraussetzung, daß in  $\varphi_0$  die Anordnung der Variablen-Indizes sich in die natürliche Ordnung 1, 2, 3, 4, 5 höchstens unter Umkehrung des Durchlaufungssinnes einordnen läßt, ergibt sich folgendes Verhalten der  $w_\nu$  gegenüber  $S, T, U$ :

1. Anwendung von  $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ :

$(w_1)$  definitionsgemäß

$(w_2)$  da  $U = (14)(23)$  in der Anordnung 1, 2, 3, 4, 5 lediglich den Durchlaufungssinn ändert (Figur)

$(w_3 w_5 w_7 w_9 w_{11})$  definitionsgemäß.

$(w_4 w_6 w_8 w_{10} w_{12})$

2. Anwendung von  $T = (12)(34)$ :

$(w_1 w_3)$   $(w_2 w_4)$  definitionsgemäß

$$\begin{array}{ll}
(w_5 w_{11}) & \text{da } S(TS)T = TS^4 \\
(w_6 w_{12}) & S^4(UTS)T = UTS^4 \text{ (mit Hilfe der geo-} \\
& \text{metrisch evidenten Beziehung } US^4 = SU \\
& \text{auf Voriges zurückföhrbar)} \\
(w_7 w_8) & S^3(TS^2)T = UTS^2 \\
(w_9 w_{10}) & S^2(TS^3)T = UTS^3 .
\end{array}$$

3. Anwendung von  $U = (14)(23)$  :

$$\begin{array}{ll}
(w_1 w_2) & \text{definitionsgemäß} \\
(w_3 w_4) & \text{da } TU = UT \text{ (Ikosaeder !)} \\
(w_5 w_{12}) & (TS)U = UTS^4 \\
(w_6 w_{11}) & (UTS)U = TS^4 \\
(w_7 w_{10}) & (TS^2)U = UTS^3 \\
(w_8 w_9) & (UTS^2)U = TS^3 .
\end{array}$$

Aus diesen Permutationen ergibt sich wegen (6) weiterhin :

$$\begin{array}{ll}
S: & (u_\infty)(u_0 u_1 u_2 u_3 u_4) \\
T: & (u_\infty u_0)(u_1 u_4)(u_2 - u_2)(u_3 - u_3) \\
U: & (u_\infty - u_\infty)(u_0 - u_0)(u_1 - u_4)(u_2 - u_3) .
\end{array}$$

Damit wird ersichtlich :

$$\begin{array}{l}
U_1, U_{21}, U_{22}, U_{23} \text{ sind einzeln invariant gegenüber } S \text{ und } U , \\
U_1, U_2 \text{ sind je invariant gegenüber } T .
\end{array}$$

Man beachte noch, daß (11) zyklisch geschrieben ist ; dieses Prinzip wird im folgenden ausgiebig verwendet.

8. In (11) werden nun für  $u_\infty, u_\mu$  die Binome (6) eingesetzt. Das Ergebnis der einfachen Ausrechnung schreibe ich abgekürzt, indem ich von einem Zyklus nur den Anföhrer hinschreibe. Zudem stehen in eckiger Klammer Elemente (Zyklen), welche durch die Permutation  $U$  ineinander übergeföhrt werden. So ergibt sich :

$$\begin{array}{ll}
U_1 = W_1 - 2W_2 & \\
W_1 = [w_1^2 + w_2^2] + [w_3^2 + \dots + w_4^2 + \dots] & (12 \text{ Glieder}) \\
W_2 = [w_1 w_2] + [w_3 w_4 + \dots] & (6 \text{ Glieder})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
U_2 = W_3 - W_4 & \\
W_3 = [w_1 w_3 + \dots + w_2 w_4 + \dots] + [w_3 w_5 + \dots + w_4 w_6 + \dots] & \\
+ [w_3 w_8 + \dots] + [w_4 w_7 + \dots] & (30 \text{ Glieder}) \\
W_4 = [w_1 w_4 + \dots + w_2 w_3 + \dots] + [w_3 w_6 + \dots] & \\
+ [w_4 w_5 + \dots] + [w_3 w_7 + \dots + w_4 w_8 + \dots] & (30 \text{ Glieder}) ;
\end{array}$$

$$5d = 5(W_1 - 2W_2) + 2\sqrt{5}(W_3 - W_4) . \quad (13)$$

Da  $U_1$  und  $U_2$  je invariant sind gegen  $\mathfrak{A}_{60}$ , folgt:  $W_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) ist invariant gegen  $\mathfrak{A}_{60}$ . Daß  $W_\mu$ , als Polynom in den  $w_\nu$ , keine Unterinvariante bezüglich  $\mathfrak{A}_{60}$  enthält, ist leicht festzustellen: man übe auf die Elemente der ersten eckigen Klammer (des ersten Zyklus) die Substitution  $T$  aus; dadurch wird in jeder der übrigen Klammern ein Element erreicht.

### § 3. Darstellung von $d$ als Polynom in den $\alpha_i$ für den Fall $\varphi_0 = \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t$ .

9. Von nun an ist

$$\varphi_0 = \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r \alpha_4^s \alpha_5^t \quad (p, q, \dots, t: \text{ ganz } \geq 0) ,$$

wo  $\alpha_i$  die fünf *verschiedenen* Wurzeln von  $G_5(x) = 0$  sind. Höchstens drei der Exponenten  $p, q, \dots, t$  dürfen einander gleich sein, da sonst  $d \equiv 0$  ist; aus demselben Grund soll  $p = q, r = s = t$  ausgeschlossen bleiben. Zur *Abkürzung* soll im folgenden gelten:

$$(j, k, l, m, n) \equiv \alpha_1^j \alpha_2^k \alpha_3^l \alpha_4^m \alpha_5^n .$$

Damit wird

$$w_1 = \Sigma(p, q, r, s, t) , \quad (14)$$

wo über alle aus  $(p, q, r, s, t)$  durch wiederholte Anwendung von  $S = (tsrqp)$  hervorgehenden verschiedenen Glieder zu summieren ist. Bildet man nun  $d$  auf Grund dieser Wahl von  $w_1$ , so ergibt sich ein homogenes Polynom vom Grad  $2(p + q + r + s + t)$ . Aus (13) schließt man:  $d$  zerfällt in mindestens vier alternierende Polynome. Es wird sich zeigen, daß die Unterinvarianten  $W_\mu$  als Polynome *in den*  $\alpha_i$  noch weiter zerfallen. Die Methode, nach der ich zur endgültigen Gliederung von  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  verfare, sei gleich erläutert.

In  $W_\mu$  komme das Glied  $(j, k, l, m, n)$  vor. Wegen der Invarianz von  $W_\mu$  gegen  $\mathfrak{A}_{60}$  müssen mit diesem Glied alle 60 durch Anwendung von  $\mathfrak{A}_{60}$  daraus hervorgehenden Glieder auch in  $W_\mu$  vorkommen. In bezug auf diese 60 Glieder müssen folgende Fälle unterschieden werden:

1)  $j, k, l, m, n$  sind alle voneinander verschieden: die 60 Glieder sind alle voneinander verschieden und bilden in ihrer Gesamtheit die zu  $(j, k, l, m, n)$  gehörenden „geraden“ Anordnungen, deren Summe ein alternierendes Polynom  $A(\alpha_1, \dots, \alpha_5)$  ist. – Durch Anwendung irgend-einer ungeraden Permutation (zum Beispiel einer Transposition) gehe  $A$  über in das Polynom  $A'$ , welches die Summe der zu  $(j, k, l, m, n)$  gehörenden „ungeraden“ Anordnungen ist. – Als alternierendes Polynom

ist  $A$  darstellbar in der Form

$$A = \frac{1}{2} (S_1 + S_2 \sqrt{D}) ,$$

wo  $S_1, S_2$  symmetrische Polynome in den  $\alpha_i$  sind ( $S_1 = A + A', S_2 \sqrt{D} = A - A'$ ) [6, p. 170].

2)  $j, k, l$  verschieden,  $m = n$ : die „geraden“ und „ungeraden“ Anordnungen sind nicht mehr unterscheidbar; die 60 Glieder bilden die Gesamtheit der nun noch möglichen  $\frac{5!}{2!}$  verschiedenen Anordnungen, deren Summe ein symmetrisches Polynom ist.

3) Die Fälle

$$\begin{aligned} j \neq k = l, m = n \\ j \neq k, l = m = n \\ j = k, l = m = n \\ j, k = l = m = n \end{aligned}$$

liefern ebenfalls symmetrische Polynome, deren Gliederzahlen allerdings kleiner als 60 sind: 30, 20, 10, 5.

10. Ich wende dies nun der Reihe nach auf  $W_\mu$  ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) an. Da  $W_\mu$  als Polynom in den  $w_\nu$  keine Unterinvariante bezüglich  $\mathfrak{A}_{60}$  enthält, kann alles aus seinem ersten Glied erschlossen werden:

$$\begin{aligned} 1) \quad W_1 &= w_1^2 + \dots \\ &= (2p, 2q, 2r, 2s, 2t) + 2[(p+t, q+p, r+q, s+r, t+s) \\ &\quad + (p+s, q+t, r+p, s+q, t+r)] + \dots \end{aligned}$$

Aus den drei hingeschriebenen Gliedern von  $w_1^2$  entsteht das ganze Polynom  $W_1$  durch Anwendung von  $\mathfrak{A}_{60}$ . Denn es ergibt sich auf Grund von Nr. 9, 1):  $W_1$  hat mindestens 180 Summanden. Daß  $W_1$  nicht mehr als 180 solcher Summanden enthalten kann, ist klar:  $W_1$  hat 12 Glieder von der Form  $w_\nu^2$ , von denen jedes 15 Summanden liefert (vgl. Nr. 8).  $W_1$  wird also durch drei alternierende Polynome zu je 60 Gliedern gebildet.

$$2) \quad W_2 = w_1 w_2 + \dots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(s, r, q, p, t) + \dots$$

(Die Bedeutung von  $\Sigma$  ist aus einem Vergleich mit (14) ersichtlich.)

Man multipliziere den  $\nu$ -ten Summanden der ersten Summe mit dem  $\nu$ -ten Summanden der zweiten Summe ( $\nu = 1, 2, \dots, 5$ ). Aus den so erhaltenen fünf Produktgliedern schließt man mit Hilfe von Nr. 9, 3)

ähnlich wie bei  $W_1$ , daß  $W_2$  aus fünf symmetrischen Polynomen zu je 30 Summanden besteht.

$$3) \quad W_3 = w_1 w_3 + \dots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(q, p, s, r, t) + \dots .$$

Man multipliziere zuerst wie bei  $W_2$ , sodann – um Glieder aus *verschiedenen* alternierenden Polynomen zu erhalten – den  $\nu$ -ten Summanden der ersten Summe mit dem  $\mu$ -ten Summanden der zweiten Summe ( $\nu = 1, 2, \dots, 5; \mu = \nu + 1, \nu + 2, \dots, 5$ ). Dieses Vorgehen hat seinen Grund darin, daß infolge von  $T = (12)(34)$  Produktglieder wie  $(p, q, r, s, t) \cdot (p, t, r, q, s)$  und  $(t, p, q, r, s) \cdot (q, p, s, r, t)$  bei der Multiplikation auftreten; nach Nr. 11 a) gehören sie aber zum selben alternierenden Polynom. – Hat man die Multiplikation in der angegebenen Art ausgeführt, so sieht man leicht:  $W_3$  besteht aus fünf symmetrischen Polynomen zu je 30 Summanden und aus 10 alternierenden Polynomen zu je 60 Summanden.

$$4) \quad W_4 = w_1 w_4 + \dots = \Sigma(p, q, r, s, t) \cdot \Sigma(r, s, p, q, t) + \dots .$$

Man verfare wie bei  $W_3$  (hier wegen  $UT = (13)(24)$ ). Ergebnis:  $W_4$  zerfällt wie  $W_3$  und hat genau 750 Summanden.

11. Die explizite Darstellung von  $d$  für die vier in Nr. 6 erwähnten Fälle ergibt sich nun ohne weiteres auf Grund der in Nr. 10 skizzierten allgemeinen Gestalt von  $d$ . Bei der Durchführung sind folgende Bemerkungen nützlich: Sei  $S(j, k, l, m, n)$  (bzw.  $A(j, k, l, m, n)$ ) das symmetrische (bzw. alternierende) Polynom  $\Sigma \alpha_1^j \alpha_2^k \alpha_3^l \alpha_4^m \alpha_5^n$ , wo über alle verschiedenen Glieder zu summieren ist, die aus dem ersten durch Anwendung von  $\mathfrak{S}_{120}$  (bzw.  $\mathfrak{A}_{60}$ ) hervorgehen. Dann gilt:

- a)  $A(j, k, l, m, n) = A(k, j, m, l, n)$ , da die Anordnungen der Exponenten durch gerade Permutationen auseinander hervorgehen;
- b)  $A(j, k, l, m, n) \neq A(k, j, l, m, n)$ , da die Anordnungen der Exponenten durch ungerade Permutationen auseinander hervorgehen; ich nenne solche alternierende Polynome *verwandt* (im folgenden sind solche in eckigen Klammern zusammengefaßt);
- c)  $[A(j, k, l, m, n) + A(k, j, l, m, n)] = S(j, k, l, m, n)$ ,  
 $[A(j, k, l, m, n) - A(k, j, l, m, n)] = \sigma \cdot \sqrt{D}$   
 $(\sigma: \text{symmetrisches Polynom}).$

Da im folgenden lediglich die Fälle 2 und 4 von Nr. 6 weiter bearbeitet werden sollen, beschränke ich mich auf deren explizite Darstellung. Dabei ist  $d$  in der Gestalt (10) zugrunde gelegt.

1)  $p, q, r$  verschieden,  $s = t$ :

$$U_1 = 2(S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - S_5) + S(2p, 2q, 2r, 2s, 2s) \\ - 2S(p+r, p+r, 2q, 2s, 2s) + 2A(p+s, p+q, q+r, r+s, 2s);$$

$$U_2 = S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S(p+q, p+q, 2r, 2s, 2s) \\ + S(2p, q+r, q+r, 2s, 2s) + S(2p, q+s, q+s, 2r, 2s) \\ + S(p+r, p+s, 2q, r+s, 2s) - 2S(p+r, p+r, q+s, q+s, 2s) \\ - S(2p, 2q, r+s, r+s, 2s) - S(p+s, p+s, 2q, 2r, 2s) \\ - S(p+q, p+r, q+r, 2s, 2s) \\ + [A(p+s, q+r, p+r, 2s, q+s) - \dots] \\ + [A(2s, p+r, p+q, r+s, q+s) - \dots] \\ + [A(2s, r+s, 2p, q+s, q+r) - \dots] \\ + [A(2r, q+s, 2s, p+s, p+q) - \dots] \\ - A(p+q, q+r, r+s, p+s, 2s);$$

hierin ist zu setzen:

$$S_1 = S(p+r, p+s, q+s, q+s, r+s) \\ S_2 = S(p+s, p+s, q+s, q+s, 2r) \\ S_3 = S(2p, q+s, q+s, r+s, r+s) \\ S_4 = S(p+s, p+s, q+r, q+r, 2s) \\ S_5 = S(p+q, p+q, r+s, r+s, 2s).$$

2)  $p \neq q, r = s = t$ :

Im vorigen ist  $r$  für  $s$  zu setzen; nun treten keine alternierenden Polynome mehr auf:

$$U_1 = -U_2 = 3S(2p, 2q, 2r, 2r, 2r) \\ + 2 \cdot [S(p+q, p+r, q+r, 2r, 2r) \\ - S(p+r, p+r, 2q, 2r, 2r) - S(2p, q+r, q+r, 2r, 2r) \\ - 3S(p+q, p+q, 2r, 2r, 2r)].$$

**§ 4. Darstellung von  $d$  mit Hilfe der Koeffizienten  $a_i$  von  $G_5(x) = 0$  für  $\varphi_0 = \alpha_1^2 \alpha_2, \varphi_0 = \alpha_1^3 \alpha_2^2 \alpha_3$ . Numerische Beispiele.**

12. Zunächst sei in Nr. 11, 2) gesetzt:

$$p = 2, \quad q = 1, \quad r = s = t = 0.$$

Es ergibt sich:

$$U_1 = -U_2 = 3S(4,2) + 2S(3,2,1) - 2S(4,1,1) - 6S(3,3) - 6S(2,2,2);$$

Gliederzahlen: je 130 für  $U_1$  und  $U_2$ .

Mit Hilfe der Tabellen von Faà di Bruno [7, p. 312] werden  $U_1, U_2$  als Polynome in den  $a_i$  ausgerechnet. Das Ergebnis ist in (8) zu finden.

Ein numerisches Beispiel :

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$$

hat als Wurzeln

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = -2, \quad \alpha_5 = 3 .$$

Nun wird  $d$  auf zwei Wegen ausgerechnet :

1) aus  $d(u)$ ; (10), (6), (14), (7) :

$$\begin{aligned} u_\infty &= 14 + 10, & u_0 &= 10 - 16, & u_1 &= -13 - 7, \\ u_2 &= 4 - 2, & u_3 &= -7 - 31, & u_4 &= 19 - 17; \\ U_1 &= -U_2 = 2464; \end{aligned}$$

2) aus  $d(a)$ ; (8) :

$$U_1 = -U_2 = 2464 .$$

13. Zu einem anderen Beispiel setze man in Nr. 11, 1)

$$p = 3, \quad q = 2, \quad r = 1, \quad s = t = 0 .$$

Dies ergibt :

$$U_1 = 2(S_1 + S_2 - 3S_3 - S_4 - 6S_5 - S_6) + S(6, 4, 2) - 6S(4, 4, 4) ;$$

$$\begin{aligned} U_2 &= S_1 - S_2 - 3S_3 - S_4 + 6S_5 + S_6 - S(6, 4, 1, 1) \\ &+ S(6, 3, 3) + 3S(6, 2, 2, 2) + S(5, 5, 2) - S(5, 4, 3) \\ &+ 2S(4, 4, 3, 1) - 2S(4, 4, 2, 2) - S(4, 3, 3, 2) \\ &+ [A(5, 4, 2, 1, 0) - \dots] + [A(6, 3, 2, 1, 0) - \dots] ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= S(4, 3, 2, 2, 1), & S_2 &= S(5, 3, 3, 1), & S_3 &= S(3, 3, 2, 2, 2), \\ S_4 &= S(6, 2, 2, 1, 1), & S_5 &= S(3, 3, 3, 3), & S_6 &= S(5, 5, 1, 1) . \end{aligned}$$

Für den alternierenden Teil  $A$  in  $U_2$  muß wegen Nr. 11, c) gelten :  $A = \sigma \cdot \sqrt{D}$ . Da  $\sqrt{D}$  in den  $\alpha_i$  den Grad 10 und  $A$  den Grad 12 haben, folgt :

$$\sigma = a \cdot S(2, 0, 0, 0, 0) + b \cdot S(1, 1, 0, 0, 0), \quad (a, b \text{ ganz}) .$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten  $a, b$  ist erforderlich, daß die ausmultiplizierte Gestalt von  $\sqrt{D}$  bekannt sei.

Diese Gestalt kann durch folgende Überlegung anschaulich werden : Der Summand  $\alpha_1^4 \alpha_2^3 \alpha_3^2 \alpha_4^1 \alpha_5^0$  kommt in  $\sqrt{D}$  ein einziges Mal vor ; damit auch  $A(4, 3, 2, 1, 0)$  (vgl. Nr. 9, 1). Da aber  $\sqrt{D}$  bei Transposition das Vorzeichen wechselt, muß mit  $A(4, 3, 2, 1, 0)$  notwendig auch  $-A(3, 4, 2, 1, 0)$  darin enthalten sein. Hiermit ist  $\sqrt{D}$  schon völlig ausgeschöpft : denn andere als die schon erwähnten Summanden müssen

mindestens zwei gleiche Exponenten aufweisen, und somit – wegen des Alternierens bei Transposition – in Paaren sich annullieren. Also ist schließlich :

$$\sqrt{D} = A(4, 3, 2, 1, 0) - A(3, 4, 2, 1, 0) .$$

Nun soll nach dem früher Gesagten  $A = \sigma \cdot \sqrt{D}$  sein. Führt man die Multiplikation rechts in ihren ersten Zügen durch und nützt dabei wie bisher die Tatsache aus, daß alternierende und symmetrische Polynome vorliegen, so ergibt ein einfacher Koeffizientenvergleich :

$$a = 1 , \quad b = 2 .$$

So folgt endlich :

$$A = \sqrt{D} \cdot S^2(1, 0, 0, 0, 0) .$$

Mit Hilfe der Tabellen von F. N. David und M. G. Kendall [8, p. 431 ff.] wird obige Darstellung von  $d$  in Potenzproduktsummen ersetzt durch eine solche in Potenzsummen :  $s_j \equiv S(j, 0, 0, 0, 0)$ . Zur Vereinfachung werde  $G_5(x) = 0$  in die Gestalt

$$x^5 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$$

gebracht ; so wird  $s_1 = 0$ , und es ergibt sich damit :

$$\begin{aligned} 10d = & 5 \cdot [5s_{10}s_2 - 6s_8s_2^2 - 4s_7s_3s_2 - 5s_6^2 + 6s_6s_4s_2 + 2s_6s_2^3 \\ & + 4s_6s_3^2 - s_5^2s_2 + 4s_5s_3s_2^2 - s_4s_3^2s_2 - 2s_4^2s_2^2 - s_3^4 - s_3^2s_2^3] \\ & + \sqrt{5} \cdot [5s_{10}s_2 - 10s_8s_2^2 - 5s_6^2 + 10s_6s_4s_2 + 4s_6s_2^3 - s_5^2s_2 \\ & + 4s_5s_3s_2^2 - 3s_4s_3^2s_2 - 4s_4^2s_2^2 + s_3^4 - s_3^2s_2^3] . \end{aligned}$$

Der letzte Schritt zum Ziel besteht nun noch darin, daß für die Potenzsummen Polynome in den Gleichungskoeffizienten  $a_i$  eingesetzt werden ; diese findet man mit Hilfe der Newtonschen Formeln. Die sich ergebende Gestalt von  $d$  ist in (9) angegeben.

Zwei numerische Beispiele :

1. Auf Grund der in Nr. 6 unter 2a angegebenen speziellen Gleichung. Einerseits ist nach (9) :  $5d = 5 \cdot 1800 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 900$  ; andererseits folgt aus (10), (6), (14), (7) wegen  $w_1 = w_3 = -w_9 = -w_{10} = 10$ ,  $w_2 = w_4 = -w_7 = -w_8 = 40$ ,  $w_5 = w_6 = w_{11} = w_{12} = -20$  :

$$5d = 5 \cdot 1800 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 900 .$$

2. Auf Grund der in Nr. 6 unter 2b angegebenen speziellen Gleichung rechne man wie vorhin  $d$  zweimal aus. Beide Male ergibt sich :

$$5d = 5 \cdot 11654856 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4147524 .$$

## Ausblick

Innerhalb der *Kleinschen* „zweiten“ Auflösungsmethode (Nr. 3) wäre der nächste Schritt : den Parameter  $X$  zu berechnen. Vorderhand scheint die Rechnung hierzu umfangreich und unübersichtlich zu sein ; doch hat die Frage, *wie* sie zu bewältigen sein mag, nach dem Bisherigen etwas Verlockendes. – Mit diesem – noch auszuführenden – Schritt wäre die Brücke von der allgemeinen Gleichung fünften Grades zur Ikosaedergleichung konkret geschlagen.

Im Zusammenhang mit der Ikosaedergleichung möge hier noch auf eine Arbeit hingewiesen werden. Herr *Ott-Heinrich Keller* berechnet [9, p. 456 ff.] auf Grund seiner Umgestaltung einer *Hilbertschen* Formel die Diskriminante  $\Delta$  der Ikosaedergleichung ohne Kenntniss der Körperbasis :

$$\Delta = 5^{785} \cdot 3^{210} \cdot 2^{420} \cdot X^{40} \cdot (1 - X)^{30} .$$

Nach dem *Kroneckerschen* Satz ist der erwähnte Brückenschlag ohne akzessorische Irrationalität nicht möglich. Herr Professor *R. Brauer* gibt nun [10, p. 473 ff.] – unter anderem aus der Theorie der Algebren – einen Einblick in die Natur der akzessorischen Irrationalitäten, und zwar nicht nur für  $G_5(x) = 0$ . Er zeigt, daß die Auflösung einer in  $P_0$  rationalen Gleichung  $f(x) = 0$  dann und nur dann mit einem Formenproblem äquivalent ist – auf ein Formenproblem rückführbar ist – wenn unter gewissen aufzustellenden einfachen normalen Algebren eine vollständige Matrixalgebra vorkommt. Tritt keine solche vollständige Matrixalgebra auf, so kann die Rückführbarkeit durch Körpererweiterung erzwungen werden. Und zwar muß der Erweiterungskörper Zerfällungskörper einer der erwähnten Algebren sein ; diese *wird* dann eine vollständige Matrixalgebra. – Im Fall der  $G_5(x) = 0$  ist der Index der zugehörigen Algebren gleich 2 ; zur Rückführung auf die Ikosaedergleichung ist die Adjunktion einer Quadratwurzel zum Körper  $P_0(\sqrt{D}, \varepsilon)$  notwendig, die wegen der Einfachheit der alternierenden Gruppe von fünf Elementen akzessorische Irrationalität ist.

Herr Professor Brauer teilte mir in einem Brief (11. September 1953) mit, daß er selbst eine Arbeit verfaßt habe, von der aber nur ein ganz kurzer „Abstract“ [11, p. 625] veröffentlicht sei. In dieser Arbeit stellt Herr Professor Brauer auf Grund invarianten-theoretischer Überlegungen ein Polynom  $A$  in den  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ) von

$$a_0 x^5 + 5a_1 x^4 + 10a_2 x^3 + \dots = 0$$

auf, dessen Quadratwurzel als akzessorische Irrationalität verwendet werden kann.

#### LITERATUR

- [1] *A. Speiser*, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Springer, Berlin 1937.
- [2] *F. Klein*, Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften und sechsten Grades. – Ges. Abh. Bd. 2, p. 481 ff. Springer, Berlin 1922.
- [3] *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Teubner, Leipzig 1884.
- [4] *L. E. Dickson-Bodewig*, Höhere Algebra. Teubner, Leipzig und Berlin 1929.
- [5] *L. Kronecker*, Mittheilung über seine algebraischen Arbeiten in der Gesamtsitzung vom 27. Juni 1861. – Monatsberichte der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1861, 1. Hälfte, p. 609–617. (Auch in: *J. Reine Angew. Math.* Bd. 59, Berlin 1861, p. 306 ff.)
- [6] *N. Tschebotarow*, Grundzüge der Galoischen Theorie. Noordhoff, Groningen 1950.
- [7] *F. Faà di Bruno*, Einleitung in die Theorie der binären Formen. Teubner, Leipzig 1881.
- [8] *F. N. David and M. G. Kendall*, Tables of symmetric Functions (Part I). *Biometrika*, Vol. 36, London 1949, p. 431 ff.
- [9] *O.-H. Keller*, Eine Bemerkung zur Berechnung der Diskriminante imprimitiver Gleichungen, insbesondere der Ikosaedergleichung. *Math. Ann.* Bd. 116, Berlin 1939, p. 456–462.
- [10] *R. Brauer*, Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen. *Math. Ann.* Bd. 110, Berlin 1935, p. 473–500.
- [11] *R. Brauer*, On algebraic equations of the fifth and sixth degrees. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 42, 1936, p. 625.

Zu Rate wurden gezogen:

- H. S. M. Coxeter*, Regular Polytopes. Methuen, London 1948.
- R. Fricke*, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2. Vieweg, Braunschweig 1926.
- O. Haupt*, Einführung in die Algebra, Bd. 1, 2. AVG, Leipzig 1929.
- F. Klein*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2. Springer, Berlin 1922.
- Tr. Nagell*, Introduction to Number Theory. Almqvist & Wiksell, Stockholm 1951.
- E. Pascal*, Repertorium der höheren Mathematik, 1. Bd., 1. H., p. 168 ff. Teubner, Leipzig und Berlin 1910.
- H. Weber*, Lehrbuch der Algebra Bd. 1–3. Vieweg, Braunschweig 1899–1912.

(Eingegangen den 16. März 1954.)