

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1955)

Artikel: Zur Minkowskischen Dimensions- und Maßbestimmung beschränkter Punktmengen des euklidischen Raumes.
Autor: Debrunner, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23289>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 25.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Minkowskischen Dimensions- und Maßbestimmung beschränkter Punktmenge des euklidischen Raumes

Seinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. W. Scherrer zum
sechzigsten Geburtstag zugeeignet

VON H. DEBRUNNER, Bern

In der Punktmengelehre hat sich der Übergang von einer Menge A zur äußeren Parallelmenge A_ρ im Abstand ρ als eine der fruchtbarsten Operationen erwiesen. Schon *G. Cantor* versuchte zur Volumenmessung von A das Volumen der einfacher strukturierten Menge A_ρ heranzuziehen und untersuchte auch Anwendungen auf den Dimensionsbegriff¹⁾. Ins Zentrum rückte diese Begriffsbildung, als *H. Minkowski*²⁾ das Verhalten des Volumens $V(A_\rho)$ als Funktion des Parallelradius ρ — wie es für konvexe Körper etwa durch den bekannten Steinerschen Satz zum Ausdruck kommt — zur Definition von Maßzahlen ausnutzte, und als mit der Lösung isoperimetrischer Fragen und in der Theorie der konvexen Körper Disziplinen entstanden, die die Anwendbarkeit der so definierten Mengenfunktionale in ein glänzendes Licht stellten.

Insbesondere erwies es sich als möglich, durch den Vergleich des asymptotischen Verhaltens von $V(A_\rho)$ mit linearen und quadratischen Funktionen von ρ im Raum die unterdimensionalen Maßzahlen Länge und Flächeninhalt zu gewinnen und zugleich gewissen Aufschluß über die dimensionelle Struktur von A zu erhalten. In konsequenter Weiterverfolgung dieser Gedankengänge definierte *G. Bouligand*³⁾ Dimensionszahlen durch die Wachstumsordnung des Volumens $V(A_\rho)$ und gelangte

¹⁾ letzteres in unveröffentlichten Arbeiten; nach einer Bemerkung von *G. Bouligand*.

²⁾ *H. Minkowski*, Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen, Jahresber. Deutsch. Math. Verein 9, 115–121, 1901 = Ges. Abhandlungen I, 122–127 (1911).

³⁾ *G. Bouligand*, Dimension, étendue, densité, C. R. Acad. Sci. Paris 180 (2) 245–248, 1925. — Sur l'aire d'un domaine plan, Bull. Sci. Math. 52, 55–63, 1928. — Ensembles impropres et nombre dimensionnel, ibid. 52, 320–344, 361–376, 1928. — Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble fermé, ibid. 53, 185–192, 1929. — Sur la construction de Cantor-Minkowski, Ann. Soc. Polon. Math. 9, 21–31, 1931.

damit zu einer kontinuierlichen Dimensionsskala, ähnlich wie auch *F. Hausdorff*⁴⁾ aus dem Caratheodoryschen Maßbegriff eine kontinuierliche Dimensionsskala entwickelt hatte.

Die Realisierung solcher nach dem Verfahren von *Cantor-Minkowski* gebildeten nichtganzen Dimensionszahlen untersuchte kürzlich *H. Hadwiger*⁵⁾; er erbrachte den Nachweis, daß im k -dimensionalen euklidischen Raum zu jeder reellen Zahl μ im Intervall $0 < \mu < k$ Mengen dieser Dimension existieren, und daß dabei noch untere und obere Maßzahlen α und β im Intervall $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ vorgeschrieben werden können. Die Untersuchung der Grenzfälle $0, k$ bzw. ∞ als Werte der Dimensions- und Maßzahlen bildete den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit. Dabei erwies sich die von *G. Bouligand* vorgesehene Aufspaltung der Dimensionszahl μ in eine untere $\underline{\mu}$ und eine obere $\bar{\mu}$ als dem Problem angemessen. Die derart erweiterte Fragestellung „Gibt es Mengen, für die die Potenzfunktionen $\underline{M} \varrho^{k-\underline{\mu}}$ und $\bar{M} \varrho^{k-\bar{\mu}}$ exakte Grenzen des asymptotischen Verhaltens der Parallelvolumenfunktion für $\varrho \rightarrow 0$ bilden?“ wird im folgenden durch einen umfassenden Existenzsatz (§ 5) beantwortet. Der Beweis stützt sich ganz auf die Verhältnisse bei linearen Mengen, indem im eindimensionalen Raum das asymptotische Verhalten der Parallelvolumenfunktion vollständig charakterisiert werden kann (§ 6). Verschiedene der folgenden Überlegungen und Konstruktionen lehnen sich eng an solche in den zitierten Arbeiten von *G. Bouligand* und *H. Hadwiger* an; der veränderten Begriffsbildungen wegen ließ sich die Wiedergabe nicht umgehen, doch befließigt sie sich möglicher Knappheit.

§ 1. Untere und obere Minkowskische Dimension und Maßzahl

Es sei A eine beschränkte, nichtleere, aber sonst beliebige Punktmenge des k -dimensionalen ($k \geq 1$) euklidischen Raumes R_k . A_ϱ bedeute die äußere Parallelmenge im Abstand $\varrho > 0$ von A , d. i. die Menge aller Punkte P , für die $\overline{PQ} < \varrho$ für ein $Q \in A$. Mit deren Jordanschem Inhalt⁶⁾ $V(A_\varrho)$ bilde man für beliebige reelle Zahlen τ die „charakteristischen Quotienten“

$$q_\tau(A, \varrho) = \frac{V(A_\varrho)}{\varrho^{k-\tau}} \quad (1)$$

⁴⁾ *F. Hausdorff*, Dimension und äußeres Maß, *Math. Ann.* 79, 157–179, 1918.

⁵⁾ *H. Hadwiger*, Zur Minkowskischen Dimensions- und Maßbestimmung beschränkter Punktfolgen des euklidischen Raumes, *Math. Nachr.* 4, 202–212, 1950.

⁶⁾ $V(A_\varrho)$ existiert für $\varrho > 0$, wie *F. Behrend*, *Math. Ann.* 111, 289–292, 1935 nachgewiesen hat.

und bestimme die Hauptlimites

$$\underline{q}_\tau(A) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} q_\tau(A, \varrho) \quad (2)$$

$$\bar{q}_\tau(A) = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} q_\tau(A, \varrho) , \quad (3)$$

wobei auch der uneigentliche Wert $+\infty$ zugelassen sei. Als *untere* bzw. *obere Minkowskische Dimension* $\underline{\mu}(A)$ bzw. $\bar{\mu}(A)$ der Menge A bezeichnen wir die Zahlen

$$\underline{\mu}(A) = \inf \tau [\underline{q}_\tau(A) = 0] ^7) \quad (4)$$

$$\bar{\mu}(A) = \inf \tau [\bar{q}_\tau(A) = 0] . \quad (5)$$

Mühe los bestätigt man die Beziehung

$$0 \leq \underline{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(A) \leq k . \quad (6)$$

Mit der für $\varkappa \geq 0$ definierten Hilfszahl

$$\omega_\varkappa = \frac{\pi^{\frac{\varkappa}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{\varkappa}{2}\right)} , \quad (7)$$

die für ganzzahliges \varkappa das Volumen der \varkappa -dimensionalen Einheitskugel angibt, bilden wir für jedes τ im Intervall $0 \leq \tau \leq k$ die Zahl

$$M_\tau(A, \varrho) = \frac{q_\tau(A, \varrho)}{\omega_{k-\tau}} \quad (8)$$

und deren Hauptlimites

$$\underline{M}_\tau(A) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} M_\tau(A, \varrho) = \frac{\underline{q}_\tau(A)}{\omega_{k-\tau}} \quad (9)$$

$$\bar{M}_\tau(A) = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} M_\tau(A, \varrho) = \frac{\bar{q}_\tau(A)}{\omega_{k-\tau}} . \quad (10)$$

Für diese Zahlen gelten (gleich wie für $\underline{q}_\tau(A)$ und $\bar{q}_\tau(A)$) die Beziehungen

$$0 \leq \underline{M}_\tau(A) \leq \bar{M}_\tau(A) \leq \infty \quad (11)$$

$$\underline{M}_\tau(A) = 0 \quad [\tau > \underline{\mu}(A)] , \quad (12)$$

⁷⁾ In eckigen Klammern werden zu beachtende Nebenbedingungen angeführt. Infimum bzw. Supremum sind größte untere bzw. kleinste obere Schranke, bei endlichen Mengen also kleinstes bzw. größtes Element.

$$\overline{M}_\tau(A) = 0 \quad [\tau > \overline{\mu}(A)] , \quad (13)$$

$$\underline{M}_\tau(A) = \infty \quad [\tau < \underline{\mu}(A)] , \quad (14)$$

$$\overline{M}_\tau(A) = \infty \quad [\tau < \overline{\mu}(A)] . \quad (15)$$

Positive endliche Werte sind allein für $\tau = \underline{\mu}(A)$ bzw. $\tau = \overline{\mu}(A)$ möglich. Diese Werte

$$\underline{M}(A) = \underline{M}_{\underline{\mu}}(A) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V(A_\varrho)}{\omega_{k-\underline{\mu}} \varrho^{k-\underline{\mu}}} \quad (16)$$

$$\overline{M}(A) = \overline{M}_{\overline{\mu}}(A) = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V(A_\varrho)}{\omega_{k-\overline{\mu}} \varrho^{k-\overline{\mu}}} \quad (17)$$

bezeichnen wir als *untere* bzw. *obere Minkowskische Maßzahlen* der Menge A .⁸⁾

Eine Menge A , für die

$$\underline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A) = \mu , \quad \underline{M}(A) = \overline{M}(A) = M \quad (19)$$

gilt, heiße *im Minkowskischen Sinne μ -dimensional meßbar*.

Diese Definitionen rechtfertigen sich dadurch, daß sie bei Mengen von hinreichend normaler Struktur Werte liefern, die mit den nach andern üblichen Verfahren gebildeten entsprechend benannten Werten übereinstimmen. So sind (als elementarstes Beispiel) j -dimensionale Würfel ($0 < j \leq k$, j ganz) der Kantenlänge L im R_k nach obigen Definitionen j -dimensional meßbar und ihre Minkowskischen Maßzahlen betragen L^j . Andererseits existieren Mengen, für welche untere und obere Minkowskische Dimension bzw. Maßzahl nicht zusammenfallen. Um den vollen Spielraum realisierbarer Werte anzugeben, bezeichnen wir mit $(\underline{\mu}, \underline{M}; \overline{\mu}, \overline{M})_k$ die Klasse aller Mengen A des R_k , für die $\underline{\mu}(A) = \underline{\mu}$, $\underline{M}(A) = \underline{M}$, $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}$, $\overline{M}(A) = \overline{M}$, und suchen im folgenden (§ 5) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Wertequadrupel $\underline{\mu}, \underline{M}, \overline{\mu}, \overline{M}$ mit nichtleerer Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \overline{\mu}, \overline{M})_k$. Vorbereitend soll zunächst das Verhalten der Dimensions- und Maßzahlen bei verschiedenen Mengenoperationen untersucht werden.

§ 2. Das Verhalten bei kartesischer Produktbildung

Satz 1. *Sind R_{k_1} und R_{k_2} zwei zueinander orthogonale komplementäre Unterräume des R_{k_0} und gehören die beschränkten, nichtleeren Mengen A^i*

⁸⁾ Die von *H. Hadwiger*, loc. cit. Fußnote 5 betrachteten Dimensions- und Maßzahlen stimmen mit $\underline{\mu}(A)$, $\underline{M}_{\underline{\mu}}(A)$, $\overline{M}_{\overline{\mu}}(A)$ bzgl. berein.

des R_{k_i} bezüglich zu den Klassen $(\underline{\mu}_i, \underline{M}_i; \bar{\mu}_i, \bar{M}_i)_k$ ($i = 0, 1, 2$) und ist A^0 kartesisches Produkt von A^1 und A^2 ,

$$A^0 = A^1 \times A^2, \quad (20)$$

so gilt für die Dimensionszahlen:

$$\underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2 \leq \underline{\mu}_0 \leq \left\{ \begin{array}{l} \underline{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 \\ \bar{\mu}_1 + \underline{\mu}_2 \end{array} \right\} \leq \bar{\mu}_0 \leq \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2. \quad (21)$$

Zusatz. Für $\underline{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 = \mu_2$ ist daher

$$\underline{\mu}_0 = \underline{\mu}_1 + \mu_2, \quad \bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_1 + \mu_2. \quad (22)$$

Weiter gilt in diesem Fall

$$\frac{\omega_{k_1-\underline{\mu}_1} \omega_{k_2-\underline{\mu}_2}}{\sqrt{2}^{k_0-\underline{\mu}_0} \omega_{k_0-\underline{\mu}_0}} \underline{M}_1 \underline{M}_2 \leq \underline{M}_0 \leq \frac{\omega_{k_1-\underline{\mu}_1} \omega_{k_2-\underline{\mu}_2}}{\omega_{k_0-\underline{\mu}_0}} \underline{M}_1 \bar{M}_2 \quad (23)$$

$$\frac{\omega_{k_1-\bar{\mu}_1} \omega_{k_2-\underline{\mu}_2}}{\sqrt{2}^{k_0-\bar{\mu}_0} \omega_{k_0-\bar{\mu}_0}} \bar{M}_1 \underline{M}_2 \leq \bar{M}_0 \leq \frac{\omega_{k_1-\bar{\mu}_1} \omega_{k_2-\underline{\mu}_2}}{\omega_{k_0-\bar{\mu}_0}} \bar{M}_1 \bar{M}_2. \quad (24)$$

Beweis. Leicht einzusehen ist die Beziehung

$$A^0 \subset A^1_{\varrho} \times A^2_{\varrho} \subset A^0_{\varrho \vee 2}, \quad (25)$$

wenn beachtet wird, daß alle sich auf A^i beziehenden Operationen im R_{k_i} vorzunehmen sind. Für die (k_i -dimensionalen) Parallelvolumina $V(A^i_{\varrho})$ folgt daraus

$$V(A^0_{\varrho}) \leq V(A^1_{\varrho}) V(A^2_{\varrho}) \leq V(A^0_{\varrho \vee 2}). \quad (26)$$

Der Übergang zu den charakteristischen Quotienten und von diesen zu deren Hauptlimites ergibt, falls man analog zu der wegen der Komplementarität gültigen Beziehung $k_0 = k_1 + k_2$ auch $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$ setzt:

$$\sqrt{2}^{\tau_0-k_0} \underline{q}_{\tau_1}(A^1) \underline{q}_{\tau_2}(A^2) \leq \underline{q}_{\tau_0}(A^0) \leq \left\{ \begin{array}{l} \underline{q}_{\tau_1}(A^1) \bar{q}_{\tau_2}(A^2) \\ \bar{q}_{\tau_1}(A^1) \underline{q}_{\tau_2}(A^2) \end{array} \right\} \leq \sqrt{2}^{k_0-\tau_0} \bar{q}_{\tau_0}(A^0) \leq \sqrt{2}^{k_0-\tau_0} \bar{q}_{\tau_1}(A^1) \bar{q}_{\tau_2}(A^2) \quad (27)$$

Aus diesen Ungleichungen ⁹⁾ läßt sich leicht auf (21) schließen: Für jede Wahl von $\tau_1 < \bar{\mu}_1$, $\tau_2 < \underline{\mu}_2$ wird nach der (11)–(15) vorhergehenden Bemerkung $\underline{q}_{\tau_0}(A^0) = \infty$, somit ist $\underline{\mu}_0 \geq \tau_1 + \tau_2$, also auch $\underline{\mu}_0 \geq \underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2$. In gleicher Weise bestätigt man die übrigen Teilbeziehungen von

⁹⁾ Ausdrücke, in denen ein Produkt $0 \cdot \infty$ vorkommt, sind als hinfällig anzusehen.

(21). Die Ungleichungen (23) und (24) des Zusatzes folgen bei Berücksichtigung von (9) und (10) aus (27), wenn die τ durch μ ersetzt werden, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Die Aussage von Satz 1 läßt sich wesentlich verschärfen, wenn die zur Zylinderbildung dienenden Mengen kongruent sind; diesen Sachverhalt beschreibt

Satz 2. Ist $k = mn$ ($1 \leq m, n \leq k$; m, n ganz) und spannen die m paarweise orthogonalen Unterräume R_n^i ($i = 1, \dots, m$) der Dimension n den R_k auf, sind weiter A^i ($i = 1, \dots, m$) untereinander kongruente Mengen der Klasse $(\underline{\mu}_1, \underline{M}_1; \bar{\mu}_1, \bar{M}_1)_n$ des R_n^i , so gehört das kartesische Produkt $A = A^1 \times \dots \times A^m$ zur Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_k$, wo abkürzend

$$\underline{\mu} = m \underline{\mu}_1, \quad \bar{\mu} = m \bar{\mu}_1 \quad (28)$$

$$\underline{M} = \underline{\lambda} \underline{M}_1^m \left[\frac{\omega_{n-\underline{\mu}_1}^m}{\sqrt{m^{k-\underline{\mu}} \omega_{k-\underline{\mu}}}} \leq \underline{\lambda} \leq \frac{\omega_{n-\underline{\mu}_1}^m}{\omega_{k-\underline{\mu}}} \right] \quad (29)$$

$$\bar{M} = \bar{\lambda} \bar{M}_1^m \left[\frac{\omega_{n-\bar{\mu}_1}^m}{\sqrt{m^{k-\bar{\mu}} \omega_{k-\bar{\mu}}}} \leq \bar{\lambda} \leq \frac{\omega_{n-\bar{\mu}_1}^m}{\omega_{k-\bar{\mu}}} \right] \quad (30)$$

gesetzt ist.

Beweis. Analog zu (25) gilt im vorliegenden Fall

$$A_\varrho \subset A_\varrho^1 \times \dots \times A_\varrho^m \subset A_{\varrho\sqrt{m}}. \quad (31)$$

Wird $V(A_\varrho)$ k -dimensional, $V(A_\varrho^i)$ n -dimensional gemessen, so folgt mit Hilfe der vorausgesetzten Kongruenz

$$V(A_\varrho) \leq \{V(A_\varrho^1)\}^m \leq V(A_{\varrho\sqrt{m}}) \quad (32)$$

und mit $\tau = m \tau_1$

$$q_\tau(A, \varrho) \leq \{q_{\tau_1}(A^1, \varrho)\}^m \leq \sqrt{m^{k-\tau}} q_\tau(A, \varrho\sqrt{m}). \quad (33)$$

Dasselbe gilt für jeden der Hauptlimites, woraus sich durch geläufige Schlußweise (28) ergibt. Für $\tau_1 = \underline{\mu}_1$ bzw. $\tau_2 = \bar{\mu}_2$ lassen sich daraus mittels (9) und (10) sofort die Ungleichungen (29) und (30) gewinnen, w. z. b. w.

Wir werden Satz 2 im folgenden nur für den Fall linearer Mengen, also für $n = 1$, $m = k$, anzuwenden haben.

Ein interessanter Spezialfall von Satz 1 liegt vor, wenn eine Menge, etwa A^2 , lediglich aus dem auch zum R_{k_1} gehörigen Ursprung O_2 des R_{k_2} besteht. Dann ist nämlich A^0 mit A^1 identisch, und die Beziehungen bei

kartesischer Produktbildung lassen sich als Beziehungen bei der Ausmessung einer und derselben Menge in verschiedenen Einbettungsräumen interpretieren. Hier gilt

Satz 3. *Ist A eine beschränkte, nichtleere Menge in einem Unterraum R_{k_1} des R_{k_0} [$0 < k_1 < k_0$], die zugleich zu den Klassen $(\underline{\mu}_1, \underline{M}_1; \bar{\mu}_1, \bar{M}_1)_{k_1}$ und $(\underline{\mu}_0, \underline{M}_0; \bar{\mu}_0, \bar{M}_0)_{k_0}$ gehört, so ist*

$$\underline{\mu}_0 = \underline{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_1 \quad (34)$$

$$\underline{M}_0 = \underline{\lambda} \underline{M}_1 \quad \left[1 \leq \underline{\lambda} \leq \frac{\omega_{k_1 - \underline{\mu}_1} \omega_{k_0 - k_1}}{\omega_{k - \underline{\mu}_0}} \right] \quad (35)$$

$$\bar{M} = \bar{\lambda} \bar{M}_1 \quad \left[1 \geq \bar{\lambda} \geq \frac{\omega_{k_1 - \bar{\mu}_1} \omega_{k_0 - k_1}}{\sqrt{2}^{k_0 - \bar{\mu}_0} \omega_{k_0 - \bar{\mu}_0}} \right]. \quad (36)$$

Zusatz. *Für*

$$\underline{\mu}_1 = \bar{\mu}_1 = \mu, \quad \underline{M}_1 = \bar{M}_1 = M \quad (37)$$

ist auch

$$\underline{\mu}_0 = \bar{\mu}_0 = \mu, \quad \underline{M}_0 = \bar{M}_0 = M. \quad (38)$$

Beweis. Die Beziehungen (34), (35) und (36) folgen weitgehend aus dem Zusatz zu Satz 1; denn für die Menge $O_2 = R_{k_2} \cdot R_{k_1}$ gilt ja $\underline{\mu}_2 = \bar{\mu}_2 = 0$, $\underline{M}_2 = \bar{M}_2 = 1$. Es bleibt einzig $\bar{\lambda} \leq 1 \leq \underline{\lambda}$ nachzuweisen. Dazu gehen wir aus von einer (25) verschärfenden Integralrelation. Sind nämlich die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, so durchdringt ein zum R_{k_1} parallel geführter Trägerraum im Abstand σ von A^2 die Menge A_ϱ^0 in einer zu $A_{\sqrt{\varrho^2 - \sigma^2}}^1 \subset R_{k_1}$ kongruenten Menge, so daß

$$V(A_\varrho^0) = \int_{A_\varrho^2} V(A_{\sqrt{\varrho^2 - \sigma^2}}^1) dV_2 \quad (39)$$

resultiert, wo dV_2 das Volumendifferential des R_{k_2} bezeichnet. Für $A^2 = O_2$ ist σ der Abstand von O_2 , also beträgt dV_2 als k_2 -dimensionale Kugelschale

$$dV_2 = k_2 \omega_{k_2} \sigma^{k_2 - 1} d\sigma. \quad (40)$$

Dies in (39) eingesetzt ergibt bei Umformung gemäß (1) und (8) und Substitution von $t = \sigma \varrho^{-1}$

$$\begin{aligned} M_\tau(A^0, \varrho) &= \frac{k_2 \omega_{k_2} \omega_{k_1 - \tau}}{\omega_{k_0 - \tau}} \int_0^1 M_\tau(A^1, \varrho \sqrt{1 - t^2}) \sqrt{1 - t^{2k_1 - \tau}} t^{k_2 - 1} dt \\ &= \frac{k_2 \omega_{k_2} \omega_{k_1 - \tau}}{\omega_{k_0 - \tau}} M^* \int_0^1 \sqrt{1 - t^{2k_1 - \tau_1}} t^{k_2 - 1} dt \\ &= M^*, \quad \left[\inf_{0 \leq \varrho' \leq \varrho} M_\tau(A^1, \varrho') \leq M^* \leq \sup_{0 \leq \varrho' \leq \varrho} M_\tau(A^1, \varrho') \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Dabei wird für die letzten Umformungen der erweiterte erste Mittelwertsatz der Integralrechnung herangezogen und das Integral mit Berücksichtigung von (7) ausgewertet. Für $\tau = \underline{\mu}_0$ bzw. $\tau = \overline{\mu}_0$ ergibt sich hieraus $\underline{M}_0 \geq \underline{M}_1$, $\overline{M}_0 \leq \overline{M}_1$, d. h. $\underline{\lambda} \geq \overline{\lambda} \geq \bar{\lambda}$.

Für μ -dimensional meßbare Mengen behauptet der Zusatz außer der schon durch (34) bewiesenen Invarianz der Dimensionszahlen auch die der Maßzahlen bei Einbettung in einen höher-dimensionalen Raum. In der Tat: die gleichzeitige Berücksichtigung von (11), (35) und (36) ergibt $\underline{M}_1 \leq \underline{M}_0 \leq \overline{M}_0 \leq \overline{M}_1$, woraus die Behauptung abgelesen werden kann¹⁰).

Man könnte vermuten, daß stets $\underline{\lambda} = \overline{\lambda} = 1$ gilt, daß also die Minkowskischen Maßzahlen vom Einbettungsraum unabhängig sind. Die Durchrechnung am Beispiel des Cantorschen triadischen Diskontinuums D vom Durchmesser 1 zeigt aber das Gegenteil. D gehört nämlich zu den Klassen $(\mu, \underline{M}; \mu, \overline{M})_1$ und $(\mu, \underline{\lambda} \underline{M}; \mu, \overline{\lambda} \overline{M})_3$, wobei sich folgende Werte ergeben:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309\dots; \\ \overline{M} &= 2^{2-\mu} \pi^{\frac{\mu-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-\mu}{2}\right) = 1,911\dots; \\ \underline{M} &= \frac{1}{2} \mu^{-\mu} (1-\mu)^{\mu-1} \cdot \overline{M} = 0,966\dots \overline{M}; \\ \underline{\lambda} &= 1,006\dots; \\ \overline{\lambda} &= 0,9822\dots \end{aligned}$$

Die Relation (39) läßt sich auch bei der Auswertung eines weiteren wichtigen Spezialfalles von Satz 1 heranziehen. Bedeutet nämlich $A^1 = E_{k_1}$ den Einheitswürfel des R_{k_1} , so ergeben sich nach dem Zusatz die Dimensionszahlen der Zylindermenge $A^0 = E_{k_1} \times A^2$ zu $\underline{\mu}_0 = k_1 + \underline{\mu}_2$, $\overline{\mu}_0 = k_1 + \overline{\mu}_2$. Darüber hinaus läßt sich dann in (39) $V(A_{\sqrt{\varrho^2 - \sigma^2}}^1)$ nach dem Steinerschen Satz über Parallelmengen konvexer Körper abschätzen, nach unten durch 1, nach oben durch $1 + O(\varrho)$; also ist

$$V(A_{\varrho}^2) \leq V(A_{\varrho}^0) \leq V(A_{\varrho}^2)(1 + O(\varrho)). \quad (42)$$

Der Übergang zu den charakteristischen Quotienten und den Minkowskischen Maßzahlen ergibt dann $\underline{M}_0 = \underline{M}_2$, $\overline{M}_0 = \overline{M}_2$. Dies beweist den

¹⁰) Einer brieflichen Mitteilung von Herrn M. Kneser zufolge bleibt die Minkowskische Meßbarkeit einer unterdimensionalen Menge des R_k auch bei Ausmessung in einem sie enthaltenden Unterraum erhalten. Die Eigenschaft Minkowski-meßbar zu sein ist demnach überhaupt unabhängig von der Dimension des Einbettungsraumes.

Satz 4. Ist E_{k_1} der Einheitswürfel eines Unterraumes R_{k_1} des R_k , $A \in (\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_{k_2}$ eine beschränkte, nichtleere Menge eines zum R_{k_1} orthogonalen komplementären Unterraumes R_{k_2} , so gehört die Zylindermenge $A \times E_{k_1}$ zur Klasse $(\underline{\mu} + k_1, \underline{M}; \bar{\mu} + k_1, \bar{M})_k$.

§ 3. Das Verhalten bei Mengenaddition

Satz 5. Ist die Entfernung $\delta(A, B)$ der beschränkten, nichtleeren Mengen A und B des R_k positiv, so gilt für jede im Intervall $0 \leq \tau \leq k$ liegende reelle Zahl τ

$$\underline{M}_\tau(A) + \underline{M}_\tau(B) \leq \underline{M}_\tau(A+B) \leq \left\{ \begin{array}{l} \underline{M}_\tau(A) + \bar{M}_\tau(B) \\ \bar{M}_\tau(A) + \underline{M}_\tau(B) \end{array} \right\} \leq \bar{M}_\tau(A+B) \leq \bar{M}_\tau(A) + \bar{M}_\tau(B)$$

(43)

und es ist

$$\bar{\mu}(A+B) = \sup \{ \bar{\mu}(A), \bar{\mu}(B) \}$$

(44)

$$\sup \{ \underline{\mu}(A), \underline{\mu}(B) \} \leq \underline{\mu}(A+B) \leq \inf \{ \sup [\underline{\mu}(A), \bar{\mu}(B)], \sup [\bar{\mu}(A), \underline{\mu}(B)] \}.$$

(45)

Zusatz. Falls $\bar{\mu}(B) \leq \underline{\mu}(A)$ oder $\bar{\mu}(A) \leq \underline{\mu}(B)$ ist, gilt daher neben (44) auch

$$\underline{\mu}(A+B) = \sup \{ \underline{\mu}(A), \underline{\mu}(B) \}.$$

(46)

Der Beweis ergibt sich aus der Bemerkung, daß für $2\varrho < \delta(A, B)$

$$V[(A+B)_\varrho] = V(A_\varrho) + V(B_\varrho).$$

(47)

Daraus schließt man in geläufiger Weise erst auf (43), von hier auf (44) und (45).

§ 4. Das Verhalten bei Ähnlichkeitstransformation

Satz 6. Ist λA eine zur beschränkten, nichtleeren Menge A des R_k im Verhältnis $\lambda : 1$ [$0 < \lambda < \infty$] homothetische Menge, so gilt

$$\underline{\mu}(\lambda A) = \underline{\mu}(A) \qquad \bar{\mu}(\lambda A) = \bar{\mu}(A)$$

(48)

$$\underline{M}(\lambda A) = \lambda^\mu \underline{M}(A) \qquad \bar{M}(\lambda A) = \lambda^\mu \bar{M}(A).$$

(49)

Beweis. Die Funktionalbeziehung

$$V[(\lambda A)_{\lambda\varrho}] = \lambda^k V(A_\varrho)$$

(50)

zieht für die charakteristischen Quotienten

$$q_\tau(\lambda A, \varrho) = \lambda^\tau q_\tau(A, \lambda^{-1}\varrho)$$

(51)

nach sich. Von hier aus gewinnt man (48) und (49) durch Anwendung der Definitionen.

§ 5. Der Hauptsatz

Die Fragestellung nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen den Minkowskischen Dimensions- und Maßzahlen und nach den realisierbaren Werten wird beantwortet durch den

Hauptsatz 7. *Ist A eine beschränkte, nichtleere Menge der Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_k$ des R_k , so gilt für die Minkowskischen Dimensions- und Maßzahlen eine der folgenden Beziehungen:*

α)	$0 < \underline{\mu} = \bar{\mu} = k$	$0 < \underline{M} = \bar{M} < \infty$	
β)	$0 = \underline{\mu} = \bar{\mu} < k$	$0 < \underline{M} = \bar{M} < \infty$	$\underline{M} = \bar{M} = \text{positiv ganz}$
γ)	$0 < \underline{\mu} = \bar{\mu} = k$	$0 = \underline{M} = \bar{M}$	
δ)	$0 = \underline{\mu} = \bar{\mu} < k$	$\underline{M} = \bar{M} = \infty$	
ε)	$0 < \underline{\mu} < \bar{\mu} = k$	$0 \leq \underline{M} \leq \infty$	$\bar{M} = 0$
ζ)	$0 = \underline{\mu} < \bar{\mu} = k$	$\underline{M} = \infty$	$\bar{M} = 0$
η)	$0 = \underline{\mu} < \bar{\mu} < k$	$\underline{M} = \infty$	$0 \leq \bar{M} \leq \infty$
θ)	$0 < \underline{\mu} = \bar{\mu} < k$	$0 \leq \underline{M} \leq \bar{M} \leq \infty$	
ι)	$0 < \underline{\mu} < \bar{\mu} < k$	$0 \leq \underline{M} \leq \infty$	$0 \leq \bar{M} \leq \infty$

Umgekehrt ist bei beliebig vorgegebenen $\underline{\mu}$, \underline{M} , $\bar{\mu}$, \bar{M} , sofern nur eine der Beziehungen α) bis ι) erfüllt ist, die Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_k$ nicht leer, das heißt es existiert eine Menge A des R_k , deren untere und obere Dimensions- und Maßzahlen mit den vorgegebenen Werten bzgl. übereinstimmen.

Beweis. Jede beschränkte, nichtleere Menge A des R_k gehört entweder zum System \mathfrak{A} der Punktmengen X mit endlichem äußern Jordanschen Inhalt $\bar{V}(X) > 0$, zum System \mathfrak{B} der endlichen Punktmengen oder schließlich zum System \mathfrak{C} der nichtendlichen Jordanschen Nullmengen. Wir unterscheiden demnach drei Fälle:

a) Es sei $A \in \mathfrak{A}$ und $\bar{V}(A) = M > 0$. Für $\tau = k$ fällt die Bestimmung von $\underline{M}_\tau(A)$ und $\bar{M}_\tau(A)$ zusammen mit der von Cantor¹¹⁾ vorgeschlagenen Inhaltsbestimmung, die aber stets den Wert $\bar{V}(A)$ liefert¹²⁾. Daher findet man $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A) = k$, $\underline{M}(A) = \bar{M}(A) = M > 0$. Umgekehrt gibt es in \mathfrak{A} zu beliebig vorgegebenem M aus dem Intervall

¹¹⁾ G. Cantor, Über unendliche Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. 23, 473 bis 479, 1884.

¹²⁾ Vgl. Enzykl. II/C 9a, 966.

$0 < M < \infty$ Mengen mit $\bar{V}(A) = M$, zum Beispiel Würfel der Kantenlänge $M^{\frac{1}{k}}$. Damit ist für Mengen des Systems \mathfrak{A} der Hauptsatz bewiesen, sowie der Existenzbeweis unter Voraussetzung von α) erbracht.

b) Es sei A eine Menge von n Punkten, also $A \in \mathfrak{B}$. Die Anwendung der Definitionen liefert $\underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A) = 0$, $\underline{M}(A) = \bar{M}(A) = n$. Für endliche Mengen ist daher Bedingung β) erfüllt, umgekehrt ist auch der Existenzbeweis unter Voraussetzung von β) erbracht.

c) Ist $A \in \mathfrak{C}$, so ist $\underline{M}_0(A) = \bar{M}_0(A) = \infty$, $\underline{M}_k(A) = \bar{M}_k(A) = 0$. Die Beziehungen γ) bis ι) erschöpfen dann alle Möglichkeiten, die bei Beachtung der notwendigen Bedingungen (6) und (11) denkbar sind. Umgekehrt wird ein gemäß γ) bis ι) vorgegebenes Wertequadrupel $\underline{\mu}, \underline{M}, \bar{\mu}, \bar{M}$ auch durch eine Menge $A \in \mathfrak{C}$ realisiert. Für $k = 1$ (lineare Mengen) wird dies in § 6 nachgewiesen. Dies vorausgesetzt, kann der allgemeine Nachweis wie folgt geführt werden.

Wir konstruieren zunächst eine meßbare Menge B der Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_k$. Dazu setzen wir

$$\underline{\mu} = k_1 + \nu \quad [0 \leq k_1 < k, k_1 \text{ ganz}, 0 \leq \nu \leq 1]^{13)} . \quad (52)$$

Nach Voraussetzung existiert dann eine lineare Menge B_1 der Klasse $(\nu, \underline{M}; \nu, \underline{M})_1$, und nach dem Zusatz zu Satz 3 gehört B_1 bei Einbettung in einen R_{k-k_1} zur Klasse $(\nu, \underline{M}; \nu, \underline{M})_{k-k_1}$. Für $k_1 = 0$ setzen wir $B = B_1$ und sind am Ziel; ist aber $k_1 > 0$, so gehört die Zylindermenge $B = B_1 \times E_{k_1}$ zur geforderten Klasse, wenn E_{k_1} den Einheitswürfel eines zum R_{k-k_1} orthogonalen komplementären R_{k_1} bedeutet (Satz 4).

Im weitern existiert eine Menge $C \in (0, \infty; \bar{\mu}, M^*)_k$, wo je nach den für A geforderten vorgegebenen Werten $\underline{\mu}$ und $\bar{\mu}$ gesetzt ist:

$$M^* = \begin{cases} \bar{M} & [\bar{\mu} < \bar{\mu}] \\ \bar{M} - \underline{M} & [0 < \underline{\mu} = \bar{\mu}] . \end{cases} \quad (53)$$

Nach Voraussetzung existiert nämlich auf einer Geraden G_1 eine Menge $C_1 \in \left(0, \infty; \frac{\bar{\mu}}{k}, M^{*1/k}\right)_1$, weil $0 \leq \frac{\bar{\mu}}{k} \leq 1$, $M^{*1/k} \geq 0$. Sind nun C_i ($i = 1, \dots, k$) zu C_1 kongruente Mengen auf paarweise orthogonalstehenden Geraden G_i , so ist nach Satz 2, den wir für $m = k$, $n = 1$ beanspruchen, die Zylindermenge $C' = C_1 \times \dots \times C_k$ in der Klasse

¹³⁾ Für $\underline{\mu} = 1, \dots, k - 1$ ist die Vorschrift nicht eindeutig. Hier muß $\nu = 0$ gesetzt werden, sobald $\underline{M} = \infty$, andernfalls $\nu = 1$.

$(0, \infty; \bar{\mu}, \lambda M^*)_k$, $[0 < \lambda < \infty]$, und nach Satz 6 ist die dilatierte Menge $C = \lambda^{-1/\bar{\mu}} C'$ von der geforderten Art. Für den ausgeschlossenen Fall $\bar{\mu} = 0$ sei C die leere Menge.

Mit Hilfe von (12) bis (15) berechnet man nun nach Satz 5, daß die Menge $A = B + C$, falls nur B und C in positiver Entfernung angeordnet sind, zur Klasse $(\underline{\mu}, \underline{M}; \bar{\mu}, \bar{M})_k$ gehört, womit der Existenzbeweis auch unter den Bedingungen γ) bis ι) erbracht ist.

§ 6. Lineare Mengen

Es sei A eine (beschränkte) abgeschlossene¹⁴⁾, nichtendliche Jordansche Nullmenge in einem R_1 , E das kleinste A enthaltende abgeschlossene Intervall. $E - A$ ist offen und wie A Jordan-meßbar, und es gilt

$$V(E - A) = V(E) > 0 . \quad (54)$$

$E - A$ läßt sich nach bekannten Überdeckungssätzen als Vereinigungsmenge von abzählbar vielen disjunkten offenen Intervallen E_λ darstellen :

$$E - A = \sum_1^\infty E_\lambda . \quad (55)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ haben nur endlich viele Intervalle E_λ einen Inhalt $V(E_\lambda)$ größer als ε ; die unter sich verschiedenen der Zahlen $V(E_\lambda)$ können daher in monoton fallender Folge angeordnet werden. Sei $(2 \varrho_\nu)$ diese Folge, wobei also

$$0 < \varrho_{\nu+1} < \varrho_\nu \quad [\nu = 1, 2, \dots] . \quad (56)$$

Weiter gebe die Zahl

$$a_\nu \text{ positiv ganz} \quad [\nu = 1, 2, \dots] \quad (57)$$

an, wie oftmals $2 \varrho_\nu$ als Intervalllänge unter den Zahlen $V(E_\lambda)$ auftritt; a_ν ist also die Vielfachheit, mit der $2 \varrho_\nu$ als Abstand aufeinanderfolgender Punkte von A vorkommt. Beide Folgen brechen nicht ab; andernfalls wäre mit der Anzahl der Intervalle E_λ auch die Menge der Begrenzungspunkte von $E - A$, also A , endlich. Aus (54) und (55) schließt man daher auf

$$V(E) = V(E - A) = \sum_1^\infty V(E_\lambda) = 2 \sum_1^\infty a_\nu \varrho_\nu \quad (15) . \quad (58)$$

¹⁴⁾ Die Beschränkung auf abgeschlossene Mengen ist unwesentlich. Mit einer beliebigen Menge ist auch deren abgeschlossene Hülle eine nichtendliche Jordansche Nullmenge, entsprechende Parallelmengen sind identisch, infolgedessen stimmen auch die Minkowskischen Dimensions- und Maßzahlen überein.

¹⁵⁾ Die mittlere Gleichung ist am einfachsten durch den Übergang zum Lebesgueschen Maß zu verifizieren.

Nun gilt für die Parallelmenge A_ϱ von A

$$A_\varrho = E_\varrho - \sum E_\lambda^{(\varrho)}, \quad (59)$$

wo $E_\lambda^{(\varrho)}$ ein zu E_λ konzentrisches abgeschlossenes Intervall vom Inhalt $V(E_\lambda) - 2\varrho$ bedeutet, falls $V(E_\lambda) \geq 2\varrho$, andernfalls aber leer ist. Mit $V(\varrho) = V(A_\varrho)$ erhält man daher

$$V(\varrho) = V(E) + 2\varrho - 2 \sum_1^n a_\nu (\varrho_\nu - \varrho) \quad [\varrho_{n+1} \leq \varrho \leq \varrho_n] \quad (60)$$

und die Anwendung von (58) ergibt, wenn noch

$$a_0 = 1 \quad (61)$$

gesetzt wird, das Resultat

$$V(\varrho) = 2\varrho \sum_0^n a_\nu + 2 \sum_{n+1}^\infty a_\nu \varrho_\nu \quad [\varrho_{n+1} \leq \varrho \leq \varrho_n]. \quad (62)$$

Die Funktion $V(\varrho)$ ist also stetig und aus linearen Funktionen zusammengestückt, wobei die geradzahigen Richtungskoeffizienten für $\varrho \rightarrow 0$ monoton gegen $+\infty$ streben. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich nun unmittelbar

Satz 8. *Ist A eine nicht endliche lineare Menge vom Jordanschen Inhalt Null, so gehört ihr eindimensionales Parallelvolumen $V(\varrho) = V(A_\varrho)$ zur Menge $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ der reellen Funktionen $\varphi(\varrho)$, für die ein $R > 0$ existiert, derart daß $\varphi(\varrho)$ im Intervall $0 \leq \varrho \leq R$ definiert ist und hier folgenden Bedingungen genügt:*

$$\varphi(\varrho') < \varphi(\varrho'') \quad [\varrho' < \varrho''] \quad (\text{Monotonie}) \quad (63)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \varrho' & \varphi(\varrho') & 1 \\ \varrho & \varphi(\varrho) & 1 \\ \varrho'' & \varphi(\varrho'') & 1 \end{array} \right| \leq 0 \quad [\varrho' \leq \varrho \leq \varrho''] \quad (\text{Konvexität von oben}) \quad (64)$$

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} \varphi(\varrho) = \varphi(0) = 0 \quad (65) \quad \lim_{\varrho \rightarrow +0} \frac{\varrho}{\varphi(\varrho)} = 0. \quad (66)$$

Wir vermerken noch den aus (63) bis (65) leicht folgenden

Zusatz.

Für $\varphi(\varrho) \in \mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ ist $\varphi(\varrho)$ stetig im Intervall $0 \leq \varrho \leq R$, $R > 0$. (67)

Bedeutsam ist nun, daß in gewissem Sinne auch die Umkehrung gilt, indem jede Funktion aus $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ einer im R_1 realisierten Parallelvolumenfunktion asymptotisch gleich ist. Etwas allgemeiner formulieren wir

Satz 9. *Gehören die Funktionen $f(\varrho)$ und $g(\varrho)$ zu der in Satz 8 erklärten Menge $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$, und ist zudem*

$$f(\varrho) \leq g(\varrho) \quad [0 \leq \varrho \leq R; R > 0] , \quad (68)$$

so existiert eine lineare Menge A , für deren eindimensionales Parallelvolumen $V(\varrho) = V(A_\varrho)$ gilt:

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} \frac{V(\varrho)}{f(\varrho)} = 1 \quad (69) \quad \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow +0} \frac{V(\varrho)}{g(\varrho)} = 1 , \quad (70)$$

Zusatz. *Es kann sogar die Existenz von $\varrho_1 > 0$ gefordert werden, wofür*

$$f(\varrho) \leq V(\varrho) \leq g(\varrho) + 2\varrho \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho_1] \quad (71)$$

gelten soll.

Die Hauptaufgabe des Beweises besteht in der Konstruktion zweier unendlicher Folgen (a_ν) und (ϱ_ν) , die (56), (57) und (61) genügen, für die $\sum_0^\infty a_\nu \varrho_\nu$ konvergiert und für welche die nach Ansatz (62) gebildete Funktion $V(\varrho)$ die Beziehungen (69), (70) und (71) erfüllt. Mit derartigen Folgen konstruiert man nämlich die endlichen Mengen A_m , deren Punkte durch die Koordinaten

$$A_m : x = 2 \sum_0^\infty a_\mu \varrho_\mu + 2p\varrho_{m+1} \quad [p = 0, \dots, a_{m+1} - 1] \quad (72)$$

festgelegt sind, und stellt mit den Satz 8 vorangestellten Überlegungen fest, daß die (beschränkte) Vereinigungsmenge $A = \sum_0^\infty A_m$ für jedes $\varrho > 0$ das Parallelvolumen $V(A_\varrho) = V(\varrho)$ besitzt, womit den Forderungen von Satz 9 entsprochen ist.

Wir beginnen nun mit der Lösung der Hauptaufgabe, indem wir bei erfüllten Voraussetzungen von Satz 9 durch vollständige Induktion die Folgen (a_ν) , (ϱ_ν) und eine Hilfsfolge (α_ν) [$\nu = 0, 1, \dots$] definieren.

Zunächst setzen wir $a_0 = 1$ und bestimmen feste Werte α_0 , $\varrho_0 = \varrho_0^*$ so, daß simultan gilt

$$\alpha_0 > 0; 0 < \varrho_0 < R; \alpha_0 + 2\varrho_0 = f(\varrho_0); \alpha_0 + 2\varrho \geq f(\varrho) \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho_0]. \quad (73)$$

Diese Bedingungen sind erfüllbar, etwa in folgender Weise: Sei $0 < R' < R$ und $\alpha_0 = \sup \{f(\varrho) - 2\varrho\}$ für $0 \leq \varrho \leq R'$. Jedenfalls ist $\alpha_0 > 0$, weil (66) $\frac{\varrho}{f(\varrho)} \rightarrow 0$ fordert. Dieses Supremum wird aus Stetigkeitsgründen (vgl. (67)) angenommen, etwa für $\varrho = \varrho_0$, also

gilt $\alpha_0 = f(\varrho_0) - 2\varrho_0$. Dabei ist $\varrho_0 \leq R' < R$ und $\varrho_0 > 0$, letzteres weil nach (65) $f(\varrho) - 2\varrho = 0 \neq \alpha_0$ für $\varrho = 0$. Schließlich folgt aus der Supremumeigenschaft $f(\varrho) - 2\varrho \leq \alpha_0$ für $0 \leq \varrho \leq R'$, um so mehr für $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$.

Für $k = 0, \dots, n - 1$ seien nun ϱ_k, α_k und a_k bestimmt, derart, daß mit den Abkürzungen

$$s_k = \sum_0^k a_\nu \quad (74)$$

$$V_k(\varrho) = \alpha_k + 2s_k\varrho \quad (75)$$

gelte :

$$\alpha_k > 0 \quad (76)$$

$$\varrho_{k-1} > \varrho_k > 0 \quad (\varrho_{-1} = R) \quad (77)$$

$$V_k(\varrho) \geq f(\varrho) \quad \text{für} \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho_k . \quad (78)$$

Für $n = 1$ sind diese Bedingungen offensichtlich erfüllt. Wir bestimmen nun ϱ_n, α_n und a_n nach folgendem Verfahren : Für jedes α [$0 \leq \alpha < \alpha_{n-1}$] setzen wir

$$\varrho^a(\alpha) = \frac{\alpha_{n-1} - \alpha}{2a} [a = 1, 2, \dots]^{16} \quad (79)$$

und bestimmen damit

$$a(\alpha) = \inf a [a \in \mathfrak{N}_1(\alpha) \cdot \mathfrak{N}_2(\alpha)] , \quad (80)$$

wo $\mathfrak{N}_1(\alpha)$ die Menge der natürlichen Zahlen a ist, für die

$$\varrho^a(\alpha) < \varrho_{n-1} \quad (81)$$

und $\mathfrak{N}_2(\alpha)$ die Menge der natürlichen Zahlen a , für die

$$g(\varrho) < V_{n-1}(\varrho) \quad [0 \leq \varrho < \varrho^a(\alpha)] . \quad (82)$$

Dann setzen wir

$$\alpha_n = \inf \alpha [\alpha \in \mathfrak{N}] , \quad (83)$$

wo \mathfrak{N} die Menge der reellen α [$0 \leq \alpha \leq \alpha_{n-1}$] ist, wofür

$$f(\varrho) \leq \alpha + 2\varrho \{s_{n-1} + a(\alpha)\} \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho^{a(\alpha)}(\alpha)] \quad (84)$$

gilt. Mit

$$a_n = a(\alpha_n) \quad (85)$$

$$\varrho_n = \varrho^{a_n}(\alpha_n) \quad (86)$$

sind die Folgenglieder auch für $k = n$ definiert.

¹⁶⁾ Bei $\varrho^a(\alpha)$ ist a oberer Index. Gefahr für Verwechslung mit Potenzexponenten besteht nicht.

Wir untersuchen die Konstruktion schrittweise auf die Realisierungsmöglichkeit hin und vermerken erst die Beziehungen

$$0 < \varrho^a(\alpha) < \varrho^{a'}(\alpha) \quad [a' < a] \quad (87)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \varrho^a(\alpha) = 0 \quad (88)$$

Weiter haben wir nachzuweisen, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{N}_1(\alpha)$ und $\mathfrak{N}_2(\alpha)$ nicht leer ist, somit als Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element $a(\alpha)$ enthält. Nun ist aber $\mathfrak{N}_1(\alpha)$ nicht leer, sondern enthält für

$$N_1(\alpha) = \frac{\alpha_{n-1} - \alpha}{2\varrho_{n-1}}$$

alle $a > N_1(\alpha)$; $\mathfrak{N}_2(\alpha)$ ist nicht leer, weil nach (65) und (76) ein $\varepsilon > 0$ existiert, derart, daß $g(\varrho) < \alpha_{n-1} \leq V_{n-1}(\varrho)$ [$0 \leq \varrho \leq \varepsilon$], und wegen (88) gibt es dazu $N_2(\alpha)$, so daß $\varrho^{a(\alpha)} < \varepsilon$ [$a > N_2(\alpha)$]. Für

$$a > \sup \{N_1(\alpha), N_2(\alpha)\}$$

gilt demnach $a \in \mathfrak{N}_1(\alpha) \mathfrak{N}_2(\alpha)$. Für das eben als existierend nachgewiesene und selbst zu $\mathfrak{N}_1(\alpha)$ und $\mathfrak{N}_2(\alpha)$ gehörende Infimum vermerken wir die Relationen

$$1 \leq a(\alpha) \leq a(\alpha') \quad [\alpha' < \alpha] \quad (89)$$

$$\varrho^{a(\alpha')}(\beta) \leq \varrho^{a(\alpha)}(\beta) \quad [\alpha' < \alpha], \quad (90)$$

die sich aus (79), (80) und (87) ablesen lassen.

Um für (83) die Existenz des Infimums α_n nachzuweisen, zeigen wir, daß die mit (84) gebildete, jedenfalls beschränkte Menge nicht leer ist. In der Tat: Aus (75) und (78) schließen wir auf die Ungleichung

$$f(\varrho) < \alpha_{n-1} + 2\varrho(s_{n-1} + 1) \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho_{n-1}],$$

aus ihr folgt die Existenz einer Zahl $\alpha < \alpha_{n-1}$, für die noch

$$f(\varrho) \leq \alpha + 2\varrho(s_{n-1} + 1) \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho_{n-1}]$$

gilt, und mit Berücksichtigung von (89) und Inanspruchnahme von (81) für $a = a(\alpha)$ ist nun $a \in \mathfrak{N}$ zu erkennen.

Die n -ten Folgenglieder können demnach wie angegeben gebildet werden und zur vollständigen Konstruktion der Folgen bleibt nur noch zu zeigen, daß auch sie selbst den induktiven Voraussetzungen (76) bis (78) genügen.

Am leichtesten einzusehen, nämlich unmittelbar aus (81), (85), (86)

und (87) folgend, ist die (77) bestätigende Ungleichheit $0 < \varrho_n < \varrho_{n-1}$. Mit ihr und der aus (79) und (86) fließenden Beziehung

$$\alpha_{n-1} - \alpha_n = 2a_n \varrho_n \quad (91)$$

gehen wir in die für $k = n - 1$ als gültig vorausgesetzte Relation (78) und erkennen

$$f(\varrho_n) \leq V_{n-1}(\varrho_n) = V_n(\varrho_n) . \quad (92)$$

Wäre nun (78) für $k = n$ falsch, so existierte ein ϱ' , so daß $f(\varrho') > V(\varrho')$, und zwar infolge (65) und (92) im Intervallinnern, das heißt

$$0 < \varrho' < \varrho_n = \varrho^{a(\alpha_n)}(\alpha_n) .$$

Man könnte dann wegen (79) und (90) α' [$\alpha_n < \alpha' < \alpha_{n-1}$] so finden, daß $0 < \varrho' \leq \varrho^{a(\alpha_n)}(\alpha) \leq \varrho^{a(\alpha)}(\alpha)$ für jedes α [$\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha'$] erfüllt ist. Andererseits existierte α'' [$\alpha_n < \alpha'' < \alpha_{n-1}$] derart, daß, wie man mit (89) schließt, für jedes α [$\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha''$] gälte

$$f(\varrho') > V_n(\varrho') + (\alpha - \alpha_n) = \alpha + 2\varrho' \{s_{n-1} + a(\alpha_n)\} \geq \alpha + 2\varrho' \{s_{n-1} + a(\alpha)\} .$$

Für alle α [$\alpha_n \leq \alpha \leq \inf(\alpha', \alpha'')$] wäre dann (84) nicht erfüllt, das heißt $\alpha \notin \mathfrak{N}$, was mit (83) im Widerspruch steht. Also ist (78) auch für $k = n$ richtig. Um schließlich noch $\alpha_n > 0$ zu bestätigen, betrachten wir den Wert $\varrho^* = \varrho^{a(0)}(0)$, für den nach (79) $2\varrho^* a(0) = \alpha_{n-1}$ und nach (76), (79) und (81) $0 < \varrho^* < \varrho_{n-1}$ gilt. Für ϱ^* erhält man infolge der eben aufgeführten Beziehungen und der für $k = n - 1$ als richtig vorausgesetzten Ungleichheit (78)

$$f(\varrho^*) - 2\varrho^* (s_{n-1} + a(0)) = f(\varrho^*) - V_{n-1}(\varrho^*) \leq 0 .$$

Wir bestimmen nun

$$\varepsilon_1 = \sup_{0 \leq \varrho \leq \varrho^*} (f(\varrho) - 2\varrho \{s_{n-1} + a(0)\}) . \quad (93)$$

Wegen (66) ist $\varepsilon_1 > 0$; dieser positive Wert wird aus Stetigkeitsgründen auch angenommen, etwa für $\varrho = \varrho'$. Weil $\varrho = 0$ und nach der eben ausgeführten Rechnung auch $\varrho = \varrho^*$ beim Einsetzen nicht positive Werte liefern, fällt ϱ' mit keinem dieser Werte zusammen, so daß $0 < \varrho' < \varrho^* = \varrho^{a(0)}(0)$. Daraus folgt die Existenz von $\varepsilon_2 > 0$, derart, daß für $\alpha < \varepsilon_2$ nach (79) noch $\varrho' \leq \varrho^{a(0)}(\alpha)$. Für $0 < \alpha < \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ gilt dann wegen (90) $0 < \varrho' \leq \varrho^{a(0)}(\alpha) \leq \varrho^{a(\alpha)}(\alpha)$ und zugleich

$$f(\varrho) > \alpha + 2\varrho' \{s_{n-1} + a(0)\} \geq \alpha + 2\varrho \{s_{n-1} + a(\alpha)\} ,$$

also ist gemäß (94) $\alpha \notin \mathfrak{N}$. Dies zeigt, daß $\alpha_n = \inf_{\alpha \in \mathfrak{N}} \alpha \geq \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, w. z. b. w.

Wir kommen endlich zur Verifikation der Eigenschaften, die für die Folgen (a_ν) , (ϱ_ν) , bzw. für die gemäß (62) aus ihnen gebildete Funktion $V(\varrho)$ gefordert wurden, und wir beginnen mit dem Nachweis von (69).

Wir verweisen erst auf die Ungleichheit (78) und behaupten, daß sie scharf ist, daß also ϱ_n^* [$0 \leq \varrho_n^* \leq \varrho_n$] existiert, so daß $V_n(\varrho_n^*) = f(\varrho_n^*)$. Wäre nämlich im angegebenen Intervall stets $f(\varrho) < V_n(\varrho)$, dann müßte wegen der Stetigkeit dasselbe in einem größern Intervall $0 \leq \varrho \leq \varrho_n'$ [$\varrho_n < \varrho_n'$] gelten. Man könnte dann $\alpha_n' < \alpha_n$ angeben, so daß für $\alpha_n' \leq \alpha \leq \alpha_n$ gemäß (79) und (90) $\varrho^{a(\alpha)}(\alpha) \leq \varrho^{a(\alpha_n)}(\alpha) \leq \varrho_n'$ erfüllt wäre, weiter müßte, wieder aus Stetigkeitsgründen, ein α_n'' [$\alpha_n' \leq \alpha_n'' \leq \alpha_n$] existieren, derart, daß für $0 \leq \varrho \leq \varrho_n'$ sogar $f(\varrho) \leq V_n(\varrho) - (\alpha_n - \alpha_n'')$, das heißt bei Berücksichtigung von (89)

$$f(\varrho) \leq \alpha_n'' + 2\varrho(s_{n-1} + a_n) \leq \alpha_n'' + 2\varrho\{s_{n-1} + a(\alpha_n'')\}$$

zutrifft. Der Vergleich dieser Beziehungen mit (84) ergibt $\alpha_n'' \in \mathfrak{N}$, was wegen $0 < \alpha_n'' < \alpha_n$ einen Widerspruch zu (83) darstellt. Die Zahl ϱ_n^* , für die wie eben nachgewiesen $V_n(\varrho_n^*) = f(\varrho_n^*)$ gilt, kann nicht im Intervall $0 \leq \varrho_n^* < \varrho_{n+1} = \varrho^{a(\alpha_{n+1})}(\alpha_{n+1})$ liegen, sonst wäre hier wegen (68) $g(\varrho_n^*) \geq V_n(\varrho_n^*)$, im Widerspruch zu der bei der Bildung der $(n+1)$ -ten Folgenglieder beachteten Bedingung (82). Die bisherigen Ergebnisse können wie folgt zusammengefaßt werden: Es gilt (für $n = 0, 1, \dots$)

$$f(\varrho) \leq V_n(\varrho) \quad [\varrho_{n+1} \leq \varrho \leq \varrho_n] \quad (94)$$

und es existiert ϱ_n^* derart, daß

$$f(\varrho_n^*) = V_n(\varrho_n^*) \quad , \quad \varrho_{n+1} \leq \varrho_n^* \leq \varrho_n \quad . \quad (95)$$

Weist man dazu noch die Beziehungen

$$V_n(\varrho) = V(\varrho) \quad [\varrho_{n+1} \leq \varrho \leq \varrho_n] \quad (96)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_n^* = 0 \quad (97)$$

nach, so ist offenbar (78) erfüllt. Nun ist aber

$$f(\varrho_n^*) = V_n(\varrho_n^*) = \alpha_n + 2\varrho_n^* s_n \geq 2n\varrho_n^* \quad ,$$

also wegen der Monotonie auch $f(\varrho_0) \geq 2n\varrho_n^*$. Berücksichtigt man $0 < \varrho_{n+1} \leq \varrho_n^*$, so kann daraus (97) abgelesen werden. Weiter folgt auch

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, wie man mittels (65) aus $f(\varrho_n^*) = V_n(\varrho_n^*) \geq \alpha_n > 0$ entnimmt. Diese letzte Grenzbeziehung ergibt mit (91)

$$\alpha_n = \sum_{n+1}^{\infty} (\alpha_{\nu-1} - \alpha_{\nu}) = 2 \sum_{n+1}^{\infty} a_{\nu} \varrho_{\nu} . \quad (98)$$

Damit ist einerseits die Konvergenz von $\sum_0^{\infty} a_{\nu} \varrho_{\nu}$ klargestellt, andererseits zeigt sich nun durch Einsetzen in (75) und Vergleich mit (62) die Richtigkeit von (96).

Um die zweite geforderte Eigenschaft, nämlich (70), zu bestätigen, genügt es offenbar zu zeigen, daß

$$g(\varrho_n) \leq V(\varrho_n) \quad [n = 1, 2, \dots] \quad (99)$$

und

$$V(\varrho) \leq g(\varrho) + 2\varrho \quad [0 \leq \varrho \leq \varrho_1] \quad (100)$$

zutrifft, da aus (97) und (99) $\overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V(\varrho)}{g(\varrho)} \geq 1$ folgt, aus (66) und (100)

hingegen $\overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V(\varrho)}{g(\varrho)} = \overline{\lim}_{\varrho \rightarrow 0} \frac{V(\varrho)}{g(\varrho) + 2\varrho} \leq 1$.

Nun ergibt sich aus (82) $g(\varrho) < V_{n-1}(\varrho)$ [$0 \leq \varrho < \varrho_n$]; berücksichtigt man noch die Stetigkeit und (96), so ist (99) offenbar erfüllt. (100) ist wegen (97) und der in (95) an zweiter Stelle angeführten Relation erfüllt, wenn wir für $n = 1, 2, \dots$ nur

$$V(\varrho) \leq g(\varrho) + 2\varrho \quad [\varrho_n^* \leq \varrho \leq \varrho_{n-1}^*] \quad (101)$$

nachweisen können. Nun gilt infolge (95), (96) und (68)

$$V(\varrho_{n-1}^*) = V_{n-1}(\varrho_{n-1}^*) = f(\varrho_{n-1}^*) \leq g(\varrho_{n-1}^*) \leq g(\varrho_{n-1}^*) + 2\varrho_{n-1}^* \quad (102)$$

$$V(\varrho_n^*) = V_n(\varrho_n^*) = f(\varrho_n^*) \leq g(\varrho_n^*) \leq g(\varrho_n^*) + 2\varrho_n^* . \quad (103)$$

Zeigen wir

$$V(\varrho_n) = V_n(\varrho_n) \leq g(\varrho_n) + 2\varrho_n , \quad (104)$$

so ist (101) eine Folge dieser drei Ungleichungen, ist doch $V(\varrho)$ zwischen ϱ_{n-1}^* und ϱ_n und ebenso zwischen ϱ_n und ϱ_n^* linear, die Funktion $g(\varrho) + 2\varrho$ aber gleich wie $g(\varrho)$ konvex von oben. Mit der gleichen Schlußweise, angewandt auf $V_n(\varrho)$ und $g(\varrho) + 2\varrho$ wird (104) zurückgeführt auf (103) und auf den Nachweis der Existenz von ϱ'_n ($n = 1, 2, \dots$), so daß

$$V_n(\varrho'_n) \leq g(\varrho'_n) + 2\varrho'_n ; \quad \varrho_n^* \leq \varrho_n \leq \varrho'_n \quad (105)$$

gilt. Diese letzte Existenzaussage bleibt uns also zu verifizieren. Der Beweis verläuft getrennt, je nachdem bei der Konstruktion der n -ten Folgenglieder bei (80) bis (82) $a_n - 1 \notin \mathfrak{N}_1(\alpha_n)$ oder $1 < a_n - 1 \notin \mathfrak{N}_2(\alpha_n)$ eintritt. Im ersten Fall wird (105) durch $\varrho'_n = \varrho_{n-1}^*$ erfüllt. Für diesen Wert gilt nämlich $\varrho_n \leq \varrho_{n-1}^* \leq \varrho_{n-1}$, dazu die Abschätzung

$$V_n(\varrho_{n-1}^*) \leq V_{n-1}(\varrho_{n-1}^*) + 2\varrho_{n-1}^* , \quad (106)$$

die man aus der direkt aus der Definition (75) entspringenden Gleichung $V_n(\varrho_{n-1}^*) = V_{n-1}(\varrho_{n-1}^*) + 2a_n\varrho_{n-1}^* - (\alpha_{n-1} - \alpha_n)$ herleiten kann. Für $a_n = 1$ braucht dazu nur an $\alpha_n < \alpha_{n-1}$ erinnert zu werden; ist hingegen $0 < a_n - 1 \notin \mathfrak{N}_1(\alpha_n)$, so bedeutet dies nach (81)

$$\varrho_{n-1}^* \leq \varrho_{n-1} \leq \varrho^{a_n-1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2(a_n - 1)}$$

oder nach geringer Umrechnung $2a_n\varrho_{n-1}^* - (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \leq 2\varrho_{n-1}^*$. Die derart bestätigte Ungleichung (106) kann jetzt mittels (102), also $V_{n-1}(\varrho_{n-1}^*) \leq g(\varrho_{n-1}^*)$, verschärft werden, so daß (105) für den Wert $\varrho'_n = \varrho_{n-1}^*$ resultiert. Im zweiten Fall, wo $0 < a_n - 1 \notin \mathfrak{N}_2(\alpha_n)$ vorausgesetzt wird, existiert nach (82) ϱ'_n , so daß $V_{n-1}(\varrho'_n) \leq g(\varrho'_n)$, $\varrho_n \leq \varrho'_n < \varrho^{a_n-1}(\alpha_n)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} V_n(\varrho'_n) &= V_{n-1}(\varrho'_n) - \{\alpha_{n-1} - \alpha_n - 2a_n\varrho'_n\} \\ &\leq g(\varrho'_n) + 2\varrho'_n - \{\alpha_{n-1} - \alpha_n - 2(a_n - 1)\varrho'_n\} ; \end{aligned}$$

dabei ist der in der letzten Klammer stehende Ausdruck positiv, weil

$$2(a_n - 1)\varrho'_n < 2(a_n - 1)\varrho^{a_n-1}(\alpha_n) = 2(a_n - 1)\frac{\alpha_{n-1} - \alpha_n}{2(a_n - 1)} = \alpha_{n-1} - \alpha_n .$$

Also ist auch hier die Beziehung (105) erfüllt und damit der Beweis für (70) vervollständigt.

Als Korollar ergibt sich nun aus den Relationen (100) einerseits, (78) und (96) andererseits noch die Zusatzforderung (71), womit der Beweis zu Satz 9 abgeschlossen ist.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_\mathfrak{A}$ die Menge der Funktionen

$$\varphi(\varrho) \equiv a = \text{konstant} \quad [0 < a < \infty] , \quad (107)$$

mit $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ die Menge der Funktionen

$$\varphi(\varrho) = 2n\varrho \quad [n \text{ positiv ganz}] \quad (108)$$

und hat $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ die in Satz 8 präziserte Bedeutung, während \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} die

zu Beginn des Beweises zu Hauptsatz 7 eingeführten Mengensysteme seien, so können wir unser Resultat zusammenfassen in

Satz 10. *Zu einer für $\varrho > 0$ definierten Funktion $f(\varrho)$ existiert dann und nur dann eine nichtleere beschränkte Punktmenge A des R_1 , für deren eindimensionales Parallelvolumen*

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} \frac{V(A_\varrho)}{f(\varrho)} = 1 \quad (109)$$

erfüllt ist, wenn es eine Funktion $\varphi(\varrho) \in \mathfrak{F}_\mathfrak{A} + \mathfrak{F}_\mathfrak{B} + \mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ gibt, derart daß

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varphi(\varrho)}{f(\varrho)} = 1, \quad (110)$$

und zwar ist A in \mathfrak{A} , \mathfrak{B} oder \mathfrak{C} , je nachdem $\varphi(\varrho)$ zu $\mathfrak{F}_\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{F}_\mathfrak{C}$ bzgl. gehört, und umgekehrt.

Der Beweis führt diese Aussagen auf die in § 5 a), b), Satz 8 und Satz 9 (wo $f(\varrho) \equiv g(\varrho)$ zu wählen ist) dargelegten Verhältnisse zurück. Die Ausführung der Einzelheiten bietet keinerlei Schwierigkeit und darf hier übergangen werden.

Es bleibt uns jetzt noch Satz 9 in der Weise für Potenzfunktionen auszuwerten, daß die zum Beweis des Hauptsatzes 7, Fall c) gemachte Voraussetzung verifiziert wird. Es sei also ein Wertequadrupel $\underline{\mu}$, \underline{M} , $\overline{\mu}$, \overline{M} vorgegeben, das eine der Bedingungen $\gamma)$ bis $\iota)$ von Satz 7 für $k = 1$ erfüllt. Wir setzen

$$f(\varrho) = F(\varrho) \varrho^{1-\underline{\mu}} \quad g(\varrho) = G(\varrho) \varrho^{1-\overline{\mu}}, \quad (111)$$

dabei bedeute

$$F(\varrho) = \begin{cases} |\log \varrho|^{-1} & [\underline{M} = 0] \\ \omega_{1-\underline{\mu}} \underline{M} & [0 < \underline{M} < \infty] \\ |\log \varrho| & [\underline{M} = \infty] \end{cases} \quad (112)$$

$$G(\varrho) = \begin{cases} |\log \varrho|^{-1} & [\overline{M} = 0] \\ \omega_{1-\overline{\mu}} \overline{M} & [0 < \overline{M} < \infty] \\ |\log \varrho| & [\overline{M} = \infty]. \end{cases}$$

Die Beziehungen $\gamma)$ bis $\iota)$ bewirken, daß die Voraussetzungen von Satz 9 durch $f(\varrho)$ und $g(\varrho)$ befriedigt werden. Deshalb existiert eine Menge A , für die (69) und (70) gelten, eine kleine Umrechnung zeigt aber die Gleichwertigkeit dieser Limesrelationen mit $\underline{\mu}(A) = \underline{\mu}$, $\underline{M}(A) = \underline{M}$, $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}$, $\overline{M}(A) = \overline{M}$, w. z. b. w.

(Eingegangen den 3. September 1953.)