

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1955)

**Artikel:** Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre.  
**Autor:** Künzi, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23288>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# **Neue Beiträge zur geometrischen Wertverteilungslehre**

von HANS KÜNZI, Zürich

## **Inhaltsverzeichnis**

	Seite
§ 1. Problemstellung und Hilfssätze . . . . .	224
§ 2. Riemannsche Flächen mit $p$ einfacherperiodischen Enden . . .	234
§ 3. Riemannsche Flächen mit doppeltperiodischen Enden . . . .	241
§ 4. Riemannsche Flächen mit einfach- und doppeltperiodischen Enden . . . . .	247
§ 5. Riemannsche Flächen mit Viertelsenenden . . . . .	252

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit, die der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich als Habilitationsschrift vorgelegt wurde, stellt einen Beitrag zum Problem der geometrischen Wertverteilung dar.

Der erste Abschnitt vermittelt einen Einblick in die nähere Problemstellung und gibt Auskunft über die bereits bekannten Resultate des Untersuchungsgebietes.

Das zweite Kapitel bringt keine wesentlich neuen Resultate, sondern beschränkt sich auf eine neue Methode in der grundlegenden Behandlung Riemannscher Flächen mit einfacherperiodischen Enden.

Die eigentlichen Resultate der Arbeit sind im dritten und vierten Abschnitt enthalten.

Im letzten Teil wird noch auf ein Beispiel eines sogenannten Viertelsenedes hingewiesen. In einer folgenden Arbeit, die speziell solche Enden zum Gegenstand hat, soll näher auf diese Flächenklasse eingegangen werden.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. *Hans Wittich* für die Anregung zu diesen Untersuchungen, mit denen ich im Winter 1951 in seinem Institut in Karlsruhe begann, meinen aufrichtigen Dank aussprechen.

Herrn Prof. Dr. *Albert Pfluger* danke ich für die wertvollen Ratschläge bei der weiteren Ausführung meiner Arbeit.

Ebenso gebührt mein Dank den Herren Prof. Dr. *Rolf Nevanlinna* und Prof. Dr. *Walter Säxer* für das ständige Interesse, das sie meinen Arbeiten schenken.

## § 1. Problemstellung und Hilfssätze

### Die Aufgabe der geometrischen Wertverteilung

In der folgenden Arbeit interessieren wir uns für die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen einer bestimmten Klasse Riemannscher Flächen, die wir durch ihre Streckenkomplexe vorgeben. Im allgemeinen wollen wir uns an die Bezeichnungen von *R. Nevanlinna* [15]<sup>1)</sup> halten. Es sei  $w = w(\zeta)$  eine in  $|\zeta| < \infty$  meromorphe Funktion, für welche man die folgenden Größen einführt:

$$\left. \begin{array}{l} N(\varrho, a) = \int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{n(t, a)}{t} dt \quad N_1(\varrho, a) = \int_{-\varrho}^{\varrho} \frac{n_1(t, a)}{t} dt \\ m(\varrho, w) = m(\varrho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(\varrho e^{i\varphi})| d\varphi \\ T(\varrho) = T(\varrho, w) = m(\varrho, \infty) + N(\varrho, \infty) \\ \\ \lambda = \limsup_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\log T(\varrho)}{\log \varrho} \\ \delta(a) = 1 - \limsup_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{N(\varrho, a)}{T(\varrho)} \\ \varepsilon(a) = \liminf_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{N_1(\varrho, a)}{T(\varrho)} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Dabei bezeichnet  $n(\varrho, a)$  die Anzahl der  $a$ -Stellen von  $w(\zeta)$  im Kreise  $|\zeta| < \varrho$  und  $n_1(\varrho, a)$  diejenigen der mehrfachen  $a$ -Stellen, wobei jede  $k$ -fache Stelle  $(k-1)$ -mal gezählt wird.  $T(\varrho)$  heißt Charakteristik von  $w(\zeta)$  und gibt die Ordnung der meromorphen Funktion an. Der Defekt  $\delta(a)$  gibt uns ein Maß für die relative Dichte der  $a$ -Stellen. Bei positivem Defekt schließen wir auf eine spärliche Verteilung der betreffenden Stellen.  $\varepsilon(a)$  wird Verzweigungsindex der Stelle  $a$  genannt und gibt ein Maß für die mehrfach angenommenen Werte.

Aus den Nevanlinnaschen Hauptsätzen ergibt sich die *Defektrelation*

$$\sum_{\nu=1}^q \delta(a_\nu) + \sum_{\nu=1}^q \varepsilon(a_\nu) \leq 2 , \quad (1.3)$$

wo die Summation über eine beliebige Anzahl  $q$  von  $a$ -Stellen erstreckt wird.

---

<sup>1)</sup> Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Wollten wir jetzt, ausgehend von den explizite bekannten meromorphen Funktionen, die Wertverteilung angeben, so stießen wir auf die Tatsache, daß uns verhältnismäßig sehr wenig interessante Beispiele zur Verfügung stünden. Für die gebräuchlichen Funktionen, wie z. B. für die Exponentialfunktion oder die doppeltperiodische  $\wp$ -Funktion lassen sich diese Größen durch einfache Überlegungen sofort angeben.

Die neuere Forschung in dieser Richtung stellt sich das Problem, das *Oswald Teichmüller* [23] mit den folgenden Worten formulierte : „*Gegeben sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche  $\mathfrak{W}$  über der  $w$ -Kugel. Man kann diese bekanntlich eindeutig und konform auf den Einheitskreis  $|\zeta| < 1$ , auf die punktierte Ebene  $|\zeta| \neq \infty$  oder auf die volle  $\zeta$ -Kugel abbilden, so daß  $w$  eine eindeutige Funktion von  $\zeta$  wird :  $w = w(\zeta)$ . Von dieser eindeutigen Funktion ist die Wertverteilung zu untersuchen.*“

Zu diesem Hauptproblem der *geometrischen* Wertverteilungslehre, von dessen Lösung wir heute allerdings noch weit entfernt sind, lieferten in den letzten Jahren neben *R. Nevanlinna* [13], *Ahlfors* [3], *Elvving* [7], *Pfluger* [16], *Teichmüller* [20, 22, 23], *Ullrich* [24, 25, 26] und *Wittich* [29, 31], sowie die beiden jüngeren Mathematiker *Le-Van* [12] und *Pöschl* [17] interessante Beiträge.

In gewisser Beziehung mit diesen Betrachtungen steht der Fragenkreis des *Typenproblems*, da zunächst festzustellen ist, ob die gegebene Riemannsche Fläche dem *parabolischen Typus* angehöre.

Dazu dienen uns in erster Linie die Kriterien von *R. Nevanlinna* [14] und *Wittich* [27, 28]. In allen diesen Untersuchungen, wie auch in der vorliegenden Arbeit haben wir es mit Flächen  $\mathfrak{W}$  zu tun, die nur über endlich vielen Grundpunkten  $w = a_1, a_2, \dots, a_q$  der  $w$ -Kugel Verzweigungs- oder Randpunkte haben, so daß die Umkehrfunktion  $\zeta(w)$  sich auf der in  $a_1, a_2, \dots, a_q$  punktierten Kugel unbeschränkt analytisch fortsetzen läßt. Für diese spezielleren Flächen, denen wir uns hier zuwenden wollen, kann man nach *Ahlfors* [3] und *Wittich* [31] die nachstehenden einfacheren Beziehungen für *Defekt* und *Index* benützen :

$$\begin{aligned}\delta(a) &= 1 - \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{n(\varrho, a)}{n(\varrho)} , \\ \varepsilon(a) &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{n_1(\varrho, a)}{n(\varrho)} , \\ \lambda &= \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\log n(\varrho, a)}{\log \varrho} ,\end{aligned}$$

wo  $n(\varrho) = \max_{(a)} n(\varrho, a)$  und

$$n(\varrho) = n(\varrho, a) + O(1) \quad \text{für alle } a \neq a_k .$$

Die Grundpunkte  $a_1, a_2, \dots, a_q$  verbinden wir nun durch einen geschlossenen Weg  $L$ , der die Kugel in ein positiv umlaufenes Gebiet  $J$  (Innengebiet) und in ein negativ umlaufenes Gebiet  $A$  (Außengebiet) zerlegt. Stanzen wir die Kurve  $L$  durch die ganze Riemannsche Fläche, so zerfällt diese in Halbblätter  $J$  bzw.  $A$ .

$L$  erzeugt somit eine Polyederzerlegung der Fläche, wobei die Polyederflächen nicht kompakt sein müssen; einzelne oder sogar alle Ecken können mit Randpunkten (über den  $a_k$ ) inzidieren. Auf den Polyederflächen (Halbblättern) wird nun je ein Punkt (Knoten) ausgezeichnet. Gehören zwei solche Punkte zu Halbblättern, die längs einer oder mehrerer Polygonseiten zusammenhängen, so werden sie über jede solche Seite miteinander durch eine Kurve (Glied) verbunden. So entsteht ein zur Polyederzerlegung dualer Streckenkomplex, den man wegen des einfachen Zusammenhangs der Fläche so in eine  $\mathfrak{z}$ -Ebene ausbreiten kann, daß keine Überschneidungen der Glieder entstehen und die Knoten sich nicht im Endlichen häufen.

Ein solcher Streckenkomplex besteht aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Innenknoten (markiert durch Kreislein) und Außenknoten (markiert durch Kreuzlein). Ein Außenknoten ist durch ein Glied, das die Nummer  $i$  trägt, mit einem Innenknoten verbunden, wenn die Halbblätter der Riemannschen Fläche, welche Knoten repräsentieren, längs des Kurvenstückes zwischen  $a_i$  und  $a_{i+1}$  von  $L$  zusammenhängen. Bei einem Innenknoten ist die Nummernfolge der Glieder im positiven Drehsinn um den Knoten zu legen, bei einem Außenknoten hingegen im negativen.

Einem  $n$ -fachen Windungspunkt der Fläche entspricht im Streckenkomplex ein  $2n$ -Eck. Ein Zweieck ( $n = 1$ ) bedeutet schlichte Überdeckung des betreffenden Grundpunktes, und ein Unendlicheck weist auf einen logarithmischen Windungspunkt der Fläche hin (logarithmisches Elementargebiet).

Ist eine Riemannsche Fläche der obigen Art und eine Zerschneidungskurve  $L$  gegeben, so ist der Streckenkomplex  $\mathfrak{S}$  eindeutig bestimmt. Anderseits bestimmt ein Streckenkomplex  $\mathfrak{S}$  bei gegebenen Grundpunkten und gegebener Zerschneidungskurve eindeutig eine einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche  $\mathfrak{W}$  und damit eine erzeugende Funktion  $\zeta = \zeta(w)$ , die bis auf ganze lineare Transformationen vollständig be-

stimmt ist. Man vergleiche hiezu die einschlägigen Arbeiten von *Speiser* [18], *Nevanlinna* [13] und *Elfving* [7], sowie die neueren von *Drape* [6] und *Habsch* [8].

Zur Erläuterung geben wir hier als Beispiele die Streckenkomplexe der Flächen an, die der Reihe nach von der Exponentialfunktion, der Sinusfunktion und der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion erzeugt werden.

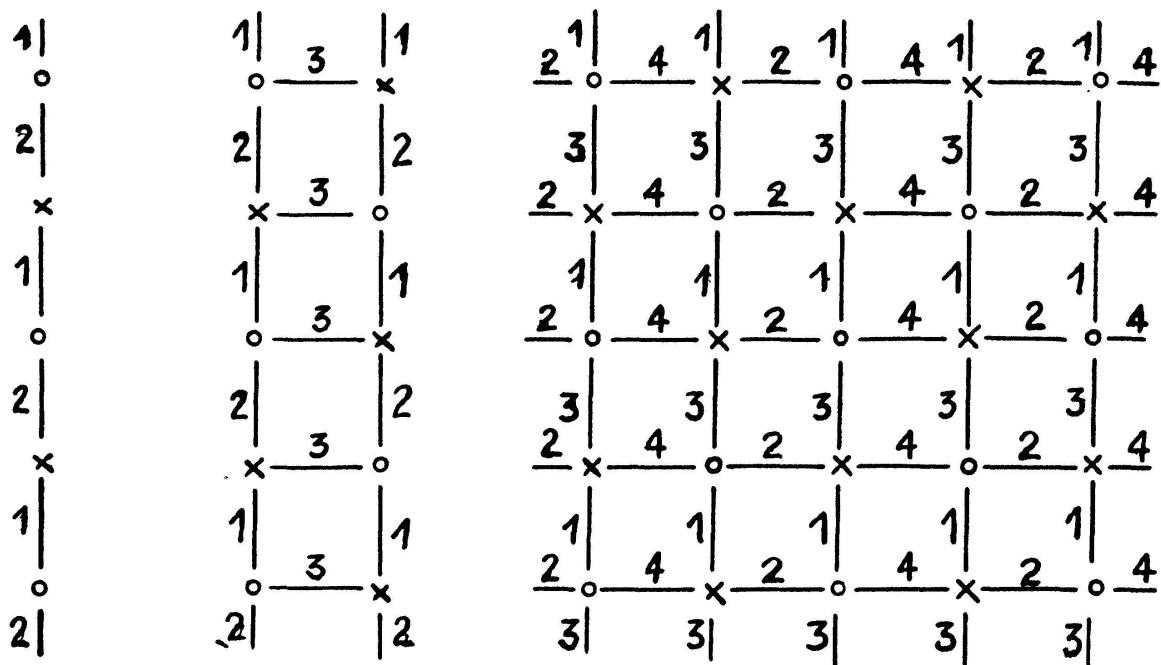


Fig. 1

Zusammenfassend lässt sich unsere gestellte Aufgabe wie folgt formulieren: Eine Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus, die nur über endlich vielen Grundpunkten verzweigt ist, sei durch ihren Streckenkomplex gegeben. Gesucht ist die Wertverteilung der erzeugenden Funktion.

In der vorliegenden Arbeit gelingt es uns, dieses Problem für bestimmte Klassen, die im folgenden Abschnitt definiert werden, vollständig zu lösen.

Der Streckenkomplex mit endlich vielen einfachperiodischen Enden

Gegeben sei ein endlicher Streckenkomplex  $\mathfrak{s}$ , bei dem also die Anzahl der Innenknoten (= Anzahl der Außenknoten) endlich ist. Fig. 2a.

Sind die Grundpunkte und die Zerschneidungskurve in der  $v$ -Ebene gegeben, so definiert  $s$  eine einfachzusammenhängende geschlossene Riemannsche Fläche, deren erzeugende Funktion  $v = R(u)$  rational ist. Durch die Substitution  $u = e^\xi$  entsteht eine periodische Funktion  $w = R(e^\xi)$ . Sie ist die erzeugende Funktion einer Riemannschen Fläche

$\mathfrak{W}$ , über der  $w$ -Ebene, deren Streckenkomplex  $\mathfrak{S}$  durch periodisches Fortsetzen eines endlichen Komplexes entsteht.

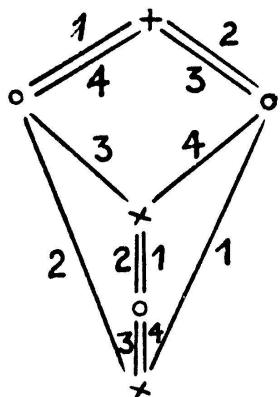


Fig. 2a

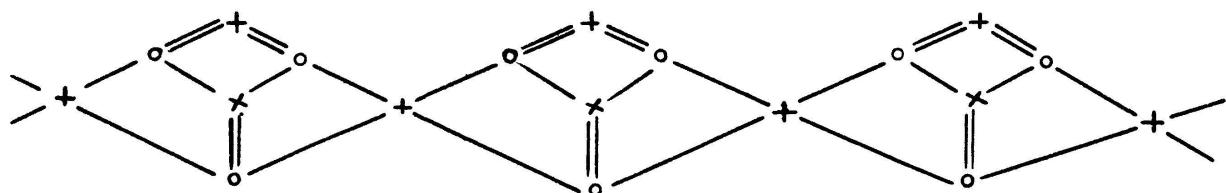
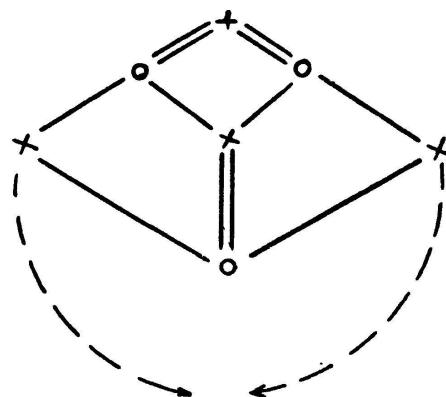


Fig. 2b

Dabei ist aber zu berücksichtigen, über welchen Grundpunkten in der  $v$ -Ebene die beiden logarithmischen Windungspunkte liegen. Es ist möglich, daß diese durch die Funktion  $w = R(e^\zeta)$  in eine schlichte Stelle oder in einen algebraischen Windungspunkt der  $v$ -Ebene zu liegen kommen. Die beiden logarithmischen Windungspunkte liegen getrennt oder über demselben Grundpunkt, je nachdem  $R(0) = R(\infty)$  oder  $R(0) \neq R(\infty)$  ist<sup>2)</sup>.

Eine Hälfte eines solchen periodischen Komplexes, bezeichnet man als *einfachperiodisches Ende*. Weist dieses einfacherperiódische Ende keine algebraischen Windungspunkte auf, liegen also in ihm nur Zweiecke, so sprechen wir von einem *logarithmischen Ende*. (Fig. 3.)

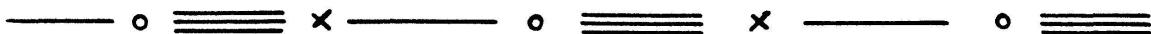


Fig. 3

Heften wir  $p$  derartige einfacherperiódische Enden an einen endlichen Kern, der aus endlich vielen Knoten besteht, dann entsteht ein Streckenkomplex mit  $p$  *einfacherperiódischen Enden*. (Vergl. Fig. 4)

<sup>2)</sup> Vergleiche Ullrich [24].

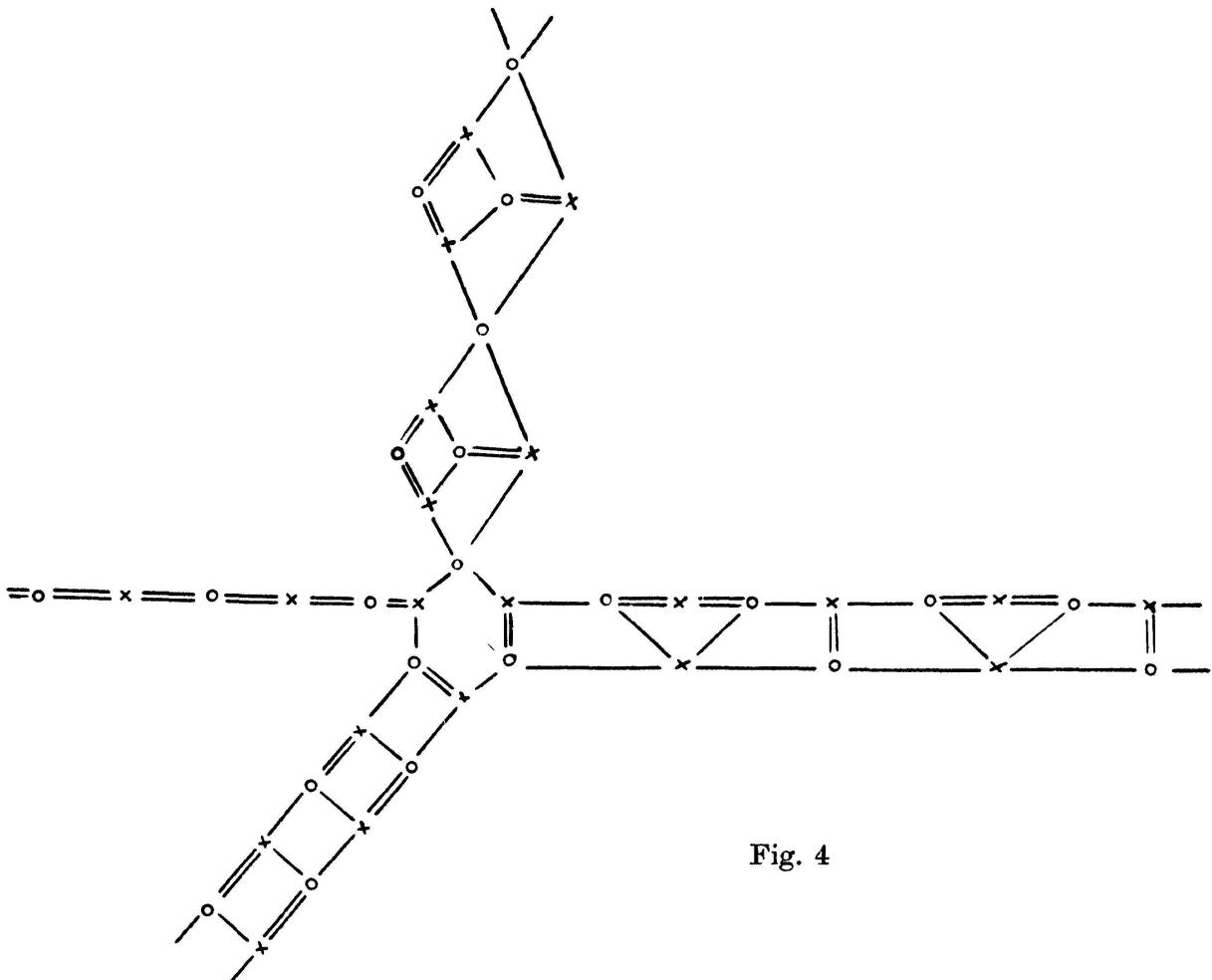


Fig. 4

Streckenkomplexe mit  $p$  einfachperiodischen Enden haben auch  $p$  logarithmische Elementargebiete. Die entsprechenden logarithmischen Windungspunkte  $a^{(\mu)}$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) liegen, eventuell mehrfach, über den Grundpunkten  $a_1, \dots, a_q$ .

Die Wertverteilung bei derartigen Riemannschen Flächen wurde von *Ullrich* [24], *Wittich* [29, 31], *Le-Van* [12] und *Pöschl* [17] untersucht.

Die von *Nevanlinna* [13] und *Ahlfors* [3] früher betrachteten Streckenkomplexe unterscheiden sich dadurch von den obigen, daß sie keine algebraischen Windungspunkte aufweisen. Nach dem *Wittichschen Typenkriterium* [28] gehören diese Flächen mit endlich vielen einfachperiodischen Enden stets zum parabolischen Typus. Nach dem Randstellensatz von *Denjoy-Ahlfors* [1, 5] weiß man, daß die erzeugende Funktion einer Riemannschen Fläche des parabolischen Typus mit  $p$  logarithmischen Windungspunkten mindestens vom Mitteltypus der Ordnung  $p/2$  ist. Durch das periodische Einbauen unendlich vieler algebraischer Windungspunkte haben *Wittich* [31], *Le-Van* [12] und *Pöschl* [17] gezeigt, daß die Ordnung auch größer als  $p/2$  sein kann ; diese Ordnungserhöhung

ist im allgemeinen auf den asymmetrischen Aufbau in den einzelnen periodischen Enden zurückzuführen.

Sämtliche uns interessierenden Wertverteilungsgrößen wie *Ordnung*, *Defekt* und *Index* lassen sich explizit vollständig berechnen.

### Streckenkomplexe mit doppeltpериодischen Enden

Eine weitere Klasse von Streckenkomplexen führen wir mit Hilfe der doppeltpериодischen Funktionen

$$w = R_1[\wp(u)] + \wp'(u) \cdot R_2[\wp(u)] \quad (1.5)$$

ein. Neben den beiden rationalen Funktionen  $R_1$  und  $R_2$  kenne man noch die Lage der vier Grundpunkte  $a_1, \dots, a_4$  der algebraischen Windungspunkte von der  $\wp(u)$  Funktion in der  $w$ -Ebene. Solche doppeltpериодische Funktionen erzeugen bekanntlich einen Streckenkomplex mit einer *doppeltpериодischen Struktur* (vgl. Fig. 5a und 5b).

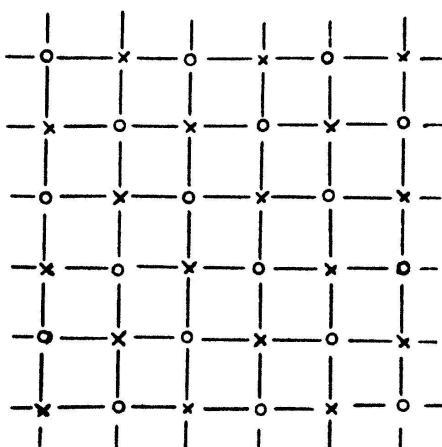


Fig. 5a

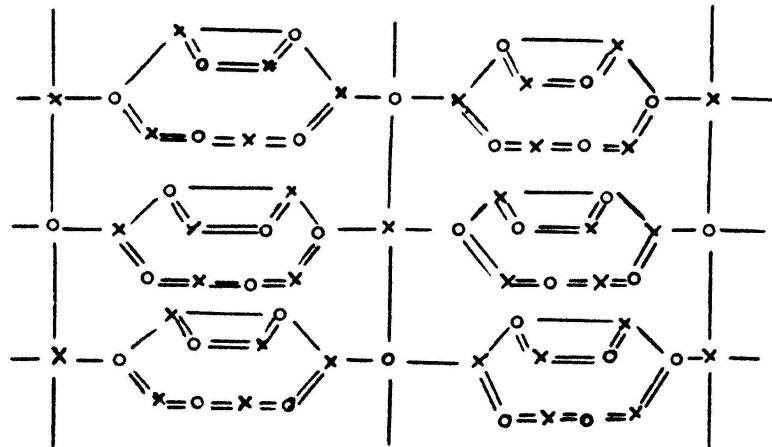


Fig. 5b

Von einem derartigen Streckenkomplex interessieren wir uns im weiteren nur noch für die eine Hälfte, indem die andere durch gewisse Doppelbindungen längs einer vertikalen Gliedfolge ersetzt wird (vgl. Fig. 6a und 6b).

Analog zu den einfacherperiodischen Enden nennen wir eine solche Hälfte eines doppeltpериодischen Komplexes ein *doppeltpериодisches Ende* (vgl. Fig. 6a und 6b). Neben unendlich vielen algebraischen Elementargebieten tritt hier nur ein logarithmisches Elementargebiet auf.

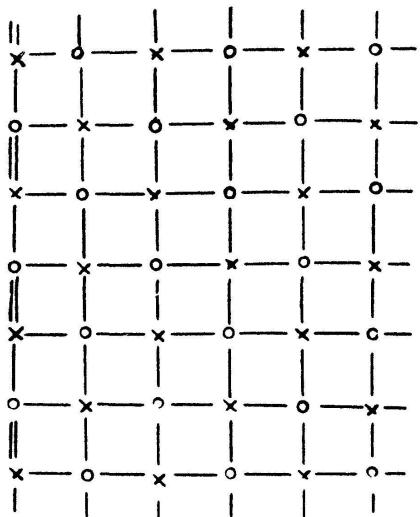


Fig. 6a

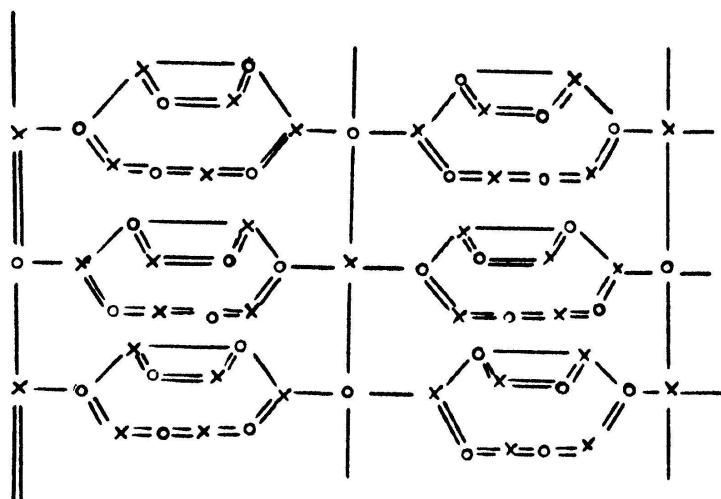


Fig. 6b

Die erzeugenden Funktionen Riemannscher Flächen mit solchen *doppeltperiodischen Enden* sind, wie auch aus den Komplexen hervorgeht, *einfachperiodisch* und können aus den Funktionen

$$v = v(u) , \quad u = e^{\zeta} , \quad w(\zeta) = v(e^{\zeta}) \quad (1.6)$$

aufgebaut werden.

Dabei zeigt Ullrich [25], daß die äußeren Funktionen  $v(u)$  eine Fläche ohne logarithmischen Windingpunkt erzeugen und gebrochene Funktionen der Ordnung null sind. Fig. 7 gibt den zu Fig. 6a entsprechenden Komplex der Funktion  $v(u)$  wieder.

Eine endliche Anzahl von doppeltperiodischen Enden können wir wieder durch einen Kern miteinander verbinden und erhalten so die *Streckenkomplexe mit endlich vielen doppeltperiodischen Enden*. Ein einfaches Beispiel zeigt uns die Figur 8.

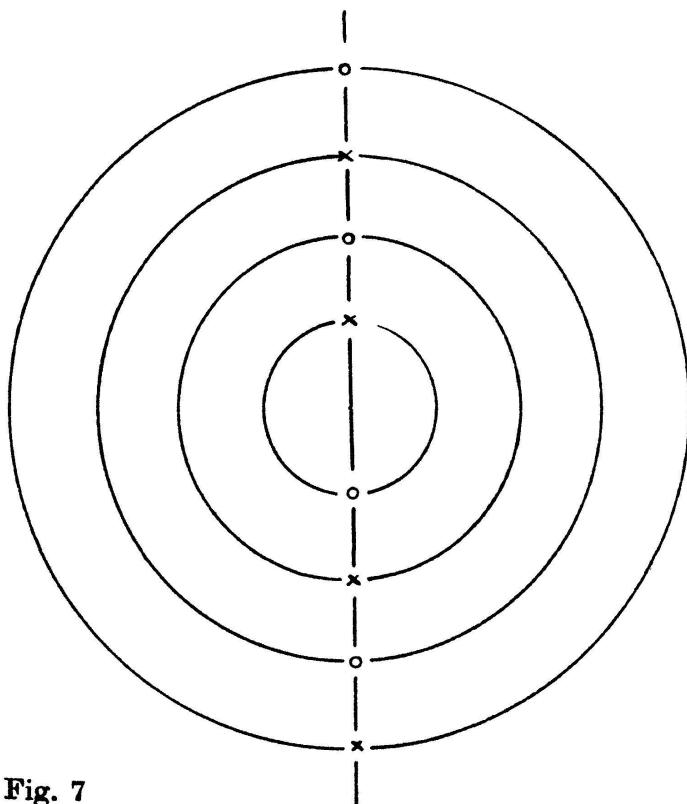


Fig. 7

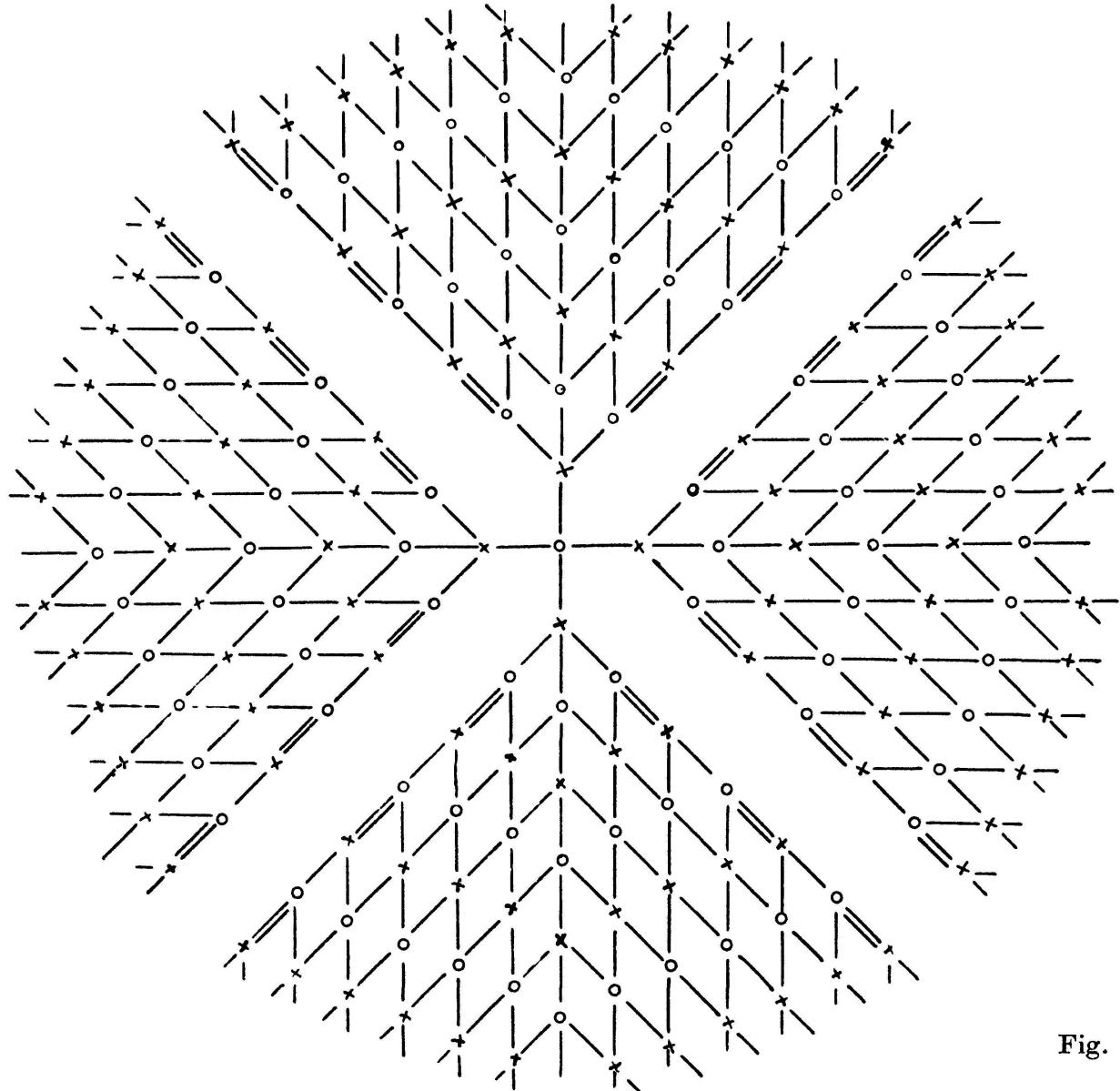


Fig. 8

Weiter betrachten wir die Klasse der Streckenkomplexe, bei denen von einem Kern  $p$  einfachperiodische und  $q$  doppeltperiodische Enden ausgehen. Diese allgemeine Klasse von Streckenkomplexen gehört zum Hauptgegenstand unserer Untersuchungen.

Besonders interessiert uns der Einfluß der doppeltperiodischen Enden auf die einfachperiodischen, der, wie sich herausstellen wird, für die Wertverteilungstheorie von Interesse sein kann. (Vergleiche hiezu meine früher erschienenen Arbeiten in den Comptes Rendus [9, 10].)

### Hilfsmittel

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in unseren folgenden Untersuchungen bilden die *quasikonformen Abbildungen*, welche besonders von *Ahlfors* [4], *Teichmüller* [19, 21] und *Wittich* [30] für funktionentheoreti-

sche Untersuchungen herangezogen wurden. Diese sind eineindeutige, stetige und stückweise stetig differenzierbare Abbildungen eines Gebietes der  $\zeta = \xi + i\eta$ -Ebene auf ein Gebiet der  $w = u + iv$ -Ebene. Bei konformen Abbildungen ist  $dw/d\zeta$  von  $\arg d\zeta$  unabhängig. Im allgemeineren Fall einer differentialgeometrischen Abbildung wird aber  $dw/d\zeta$  eine Funktion von  $\arg d\zeta$ .

Der sogenannte Dilatationsquotient wird durch

$$D_{w/\zeta} = D_{\zeta/w} = \frac{\text{Max} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|}{\text{Min} \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|} \quad (1.7)$$

erklärt.

Eine einfache Rechnung ergibt für den so eingeführten Verzerrungsquotienten

$$D = K + \sqrt{K^2 - 1} \quad (1.8)$$

mit

$$2K = \frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|u_x v_y - u_y v_x|}.$$

Im Falle  $D \equiv 1$  ist die Abbildung konform. Ist bei einer quasikonformen Abbildung der  $\zeta$ -Ebene auf die  $w$ -Ebene die Abweichung von der Konformität verhältnismäßig klein, was sich durch die Konvergenz des Integrals

$$\iint_{|\zeta|>r} (D_{w/\zeta} - 1) \frac{d\xi d\eta}{|\zeta|^2} \quad (1.9)$$

ausdrücken lässt, so geht nach dem Verzerrungssatz von *Teichmüller-Wittich* ein Kreis mit großem Radius im Bilde in eine *kreisähnliche Kurve* über, das heißt es existiert eine positive Konstante  $\alpha$ , so daß

$$|w| = \alpha \cdot |\zeta| \cdot \{1 + o(1)\} \quad (1.10)$$

ist für  $|\zeta| \rightarrow \infty$ .

Eine solche quasikonforme Abbildung nennen wir im  $\infty$  *kreisähnlich*.

Zur Berechnung der Wertverteilungsgrößen werden wir die Riemannsche Fläche in endlich viele Teilstücke zerschneiden. Diese uniformisieren wir für sich und heften die Bilder der Teilstücke aneinander, indem wir die richtige Ränderzuordnung mit Hilfe einer kreisähnlichen quasikonformen Abbildung erzwingen. Auf diese Weise erhalten wir ein quasikonformes, schlichtes  $z$ -Bild der Riemannschen Fläche. Dieses ist nach bekannten Sätzen auch quasikonform und kreisähnlich zum konformen  $\zeta$ -Bild der Riemannschen Fläche.

Nach (1.10) entspricht in der  $z$ -Ebene für große Werte von  $r$  einem Kreis  $|z| = r$  in der  $\zeta$ -Ebene eine kreisähnliche Jordankurve  $|\zeta| = \varrho \{1 + o(1)\}$ . Betrachten wir auf der  $w$ -Ebene einen bestimmten Wert  $a$ , der in den Punkten  $z_1, z_2, \dots$  ( $|z_i| \leq r$ ) bzw.  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  ( $|\zeta_i| \leq \varrho$ ) angenommen wird, so erkennt man, daß die Wertverteilungsgrößen  $N(r, a)$ ,  $N_1(r, a)$  und  $T(r)$  bezogen auf die  $z$ -Ebene asymptotisch den entsprechenden Größen  $N(\varrho, a)$ ,  $N_1(\varrho, a)$  und  $T(\varrho)$  für die  $\zeta$ -Ebene gleich werden.

Wir schließen daraus, daß sich diese Wertverteilungsgrößen statt in der konform abgebildeten  $\zeta$ -Ebene auch in der quasikonformen  $z$ -Ebene berechnen lassen. Davon wird in den folgenden Rechnungen häufig Gebrauch gemacht.

In den nächsten Abschnitten können wir stets erreichen, daß nur gewisse Streifengebiete quasikonform aufeinander abgebildet werden. In diesem Falle ist die Konvergenz von (1.9) bereits gesichert, wenn der Dilatationsquotient im Streifen überall endlich bleibt.

## § 2. Riemannsche Flächen mit $p$ einfacherperiodischen Enden

*Le-Van* [12] und *Pöschl* [17] haben in ihren zitierten Arbeiten die Wertverteilung für Funktionen, deren zugehörige Streckenkomplexe endlich viele einfacherperiodische Enden aufweisen, ausführlich dargestellt. Da aber die dort verwendeten Methoden der Aufschneidung Riemannscher Flächen, sowie der folgenden quasikonformen Verheftung für allgemeinere Flächenklassen, wie wir sie im nächsten und übernächsten Abschnitt untersuchen werden, ungünstig ist, so wollen wir hier eine neue und wesentlich allgemeinere Darstellung für den Fall von ausschließlich endlich vielen einfacherperiodischen Enden entwickeln. Diese Methode läßt sich dann auch für Funktionen mit doppeltperiodischen Enden verwenden, und hat gegenüber der alten noch den Vorteil, daß die nötigen Hilfsabbildungen wesentlich einfacher werden.

Zur Uniformisierung einer derartigen Fläche mit  $p$  einfacherperiodischen Enden, die durch den Streckenkomplex, die Zerschneidungskurve, sowie die Grundpunkte eindeutig bestimmt ist, schlagen wir den folgenden Weg in drei Schritten ein :

**Die Abbildung des Kerngebietes.** Aus dem Streckenkomplex eliminieren wir durch eine geschlossene Kurve  $C_s$ , den Kern, der aus endlich vielen Innen- bzw. Außenknoten besteht. Ihm entspricht, wie schon früher erwähnt wurde, auf der Riemannschen Fläche ein kompaktes Teilgebiet, das von der geschlossenen Bildkurve  $C_w$  berandet wird. Da für die später

vorzunehmende Wertverteilung ein derartiger Teil der Fläche bedeutungslos ist, so brauchen wir uns dafür nicht weiter zu interessieren.

**Die logarithmischen Elementargebiete.** Einem logarithmischen Elementargebiet im Streckenkomplex entspricht ein logarithmischer Windungspunkt der Riemannschen Fläche über einem Grundpunkt  $a_\nu$ . Zu diesem gehört für genügend kleines  $t$  ein über  $|w - a_\nu| < t$  gelegenes maximal zusammenhängendes Stück der Fläche, ein sogenanntes Windungselement, das durch den Logarithmus konform auf eine Halbebene abgebildet wird. Dadurch erhalten wir als Bilder der  $p$  Windungselemente  $p$  Halbebenen.

**Die Streifenumgebungen der einfachperiodischen Enden.** Nachdem wir das Kerngebiet und die logarithmischen Windungselemente aus der Riemannschen Fläche  $\mathfrak{W}$  herausgeschnitten haben, erübrigt sich noch, die restlichen Gebiete zu uniformisieren. Diesen Gebieten entsprechen im topologischen Bild des Streckenkomplexes  $p$  Halbstreifen, welche die einfachperiodischen Enden umgeben. Diese restlichen Teilgebiete der Riemannschen Fläche uniformisieren wir mit den zu  $w_\mu = R_\mu(e^{\xi_\mu})$  gehörenden Umkehrfunktionen ( $\mu = 1, \dots, p$ ).

Diese  $p$  Halbstreifen  $\mathfrak{S}_{\xi_\mu}$  müssen mit den  $p$  Halbebenen  $z_\mu$  längs ihrer Berandungen so verheftet werden, wie dies durch die Urbilder der entsprechenden Begrenzungskurven auf der Riemannschen Fläche vorgegeben ist.

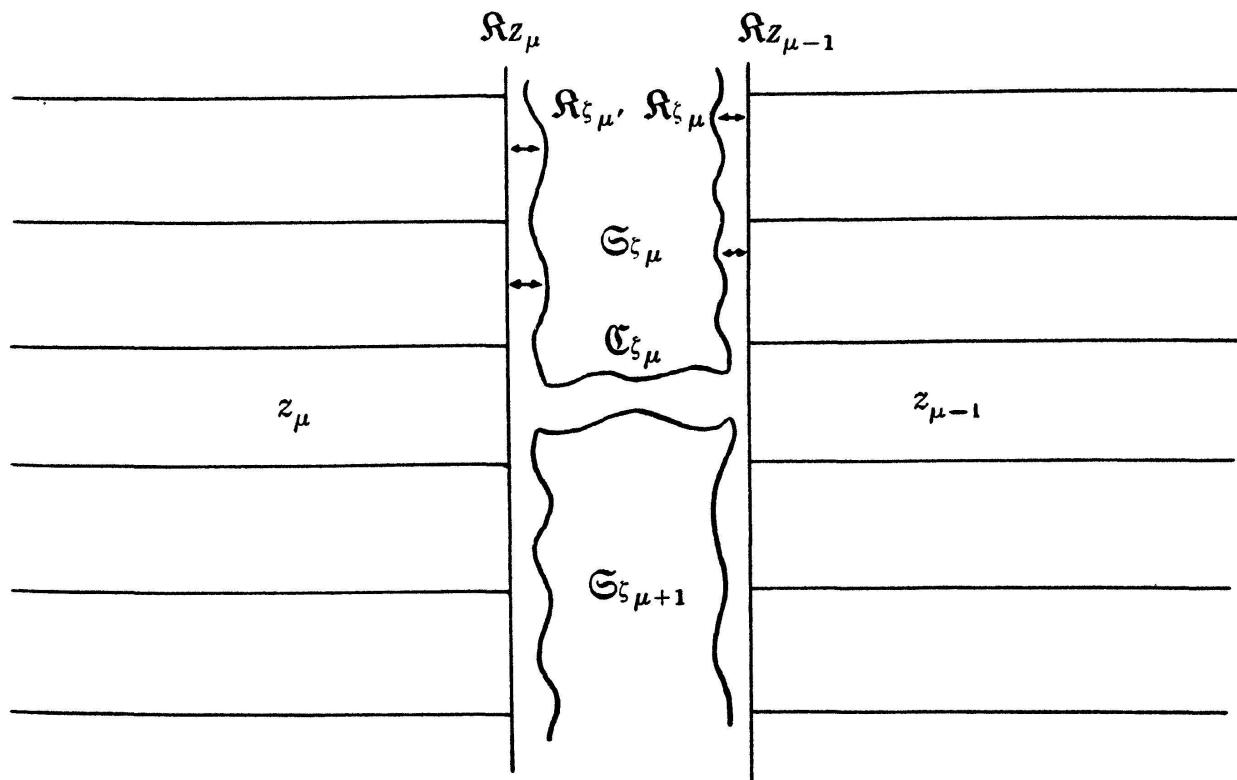


Fig. 9

Auf diese Weise erhalten wir als Bild der Fläche  $\mathfrak{W}$  wiederum eine Riemannsche Fläche mit  $p$  halben Blättern, die wir durch eine Wurzelabbildung in die schlichte Ebene  $z \neq \infty$  überführen.

**Die Uniformisierung.** Für die weiteren Rechnungen beschränken wir uns auf ein bestimmtes einfachperiodisches Ende  $e_\mu$ , das an zwei logarithmische Windungspunkte  $a^{(\mu-1)}$  und  $a^{(\mu)}$  grenzt. Dabei normieren wir die betreffende Abbildungsfunktion  $R_\mu(e^{\xi\mu})$  so, daß der Halbstreifen  $\mathfrak{S}_{\xi\mu}$  (Fig. 9) einen positiven Imaginärteil aufweist. Diese beiden logarithmischen Windungspunkte uniformisieren wir durch

$$z_{\mu-1} = \log(w - a^{(\mu-1)}) , \quad z_\mu = -\log(w - a^{(\mu)}) \quad (2.1)$$

in die beiden Halbebenen

$$\Re z_{\mu-1} \geq -\log t = l > 0 \quad \text{und} \quad z_\mu \leq \log t = -l < 0 . \quad (2.1')$$

Nach der obigen Normierung interessieren uns von den beiden Halbebenen  $z_{\mu-1}$  und  $z_\mu$  lediglich die beiden Viertelsebenen mit positivem Imaginärteil. Der Einfachheit halber führen wir eine neue Bezeichnung ein und schreiben für  $\Im z_{\mu-1} > 0$  fortan  $Z_\mu$  und für  $\Im z_\mu > 0$  entsprechend  $Z_{\mu'}$ . Die Begrenzungsgeraden dieser Gebiete, die parallel zur imaginären Achse verlaufen, heißen entsprechend  $\Re z_\mu$  und  $\Re z_{\mu'}$ .

Durch die Umkehrfunktion  $w_\mu = R_\mu(e^{\xi\mu})$  wird die Umgebung des periodischen Endes  $e_\mu$  in den Halbstreifen  $\mathfrak{S}_{\xi\mu}$  abgebildet.  $\mathfrak{S}_{\xi\mu}$  wird begrenzt von den beiden Kurven  $\Re z_\mu$  und  $\Re z_{\mu'}$ , sowie dem Teilstück der Kernkurve  $\mathfrak{C}_{\xi\mu}$ .

Zur weiteren Untersuchung halten wir nochmals fest, daß durch die äußere Funktion  $v = R_\mu(u)$  über der  $v$ -Ebene eine Riemannsche Fläche mit endlich vielen algebraischen Windungspunkten bestimmt wird. Die Funktion  $w = R_\mu(e^{\xi\mu})$  weist zwei logarithmische Windungspunkte  $a^{(\mu-1)}$  und  $a^{(\mu)}$  auf. Dem Punkt  $u = 0$  entspricht jetzt ein Punkt  $p$  in  $a^{(\mu-1)}$  der  $v$ -Ebene und dem Punkt  $u = \infty$  ein Punkt  $q$  in  $a^{(\mu)}$ . In der Umgebung von  $u = 0$  finden wir für die Funktion  $v = R_\mu(u)$  die Entwicklung

$$v - a^{(\mu-1)} = u^{\omega\mu} (c + o(1)) , \quad c \neq 0 \quad (2.2)$$

und entsprechend gilt für die Umgebung  $u = \infty$

$$v - a^{(\mu)} = u^{-\omega\mu'} (c' + o(1)) . \quad (2.2')$$

$\omega_\mu$  bzw.  $\omega_{\mu'}$  geben hier die Vielfachheiten der Stellen  $p$  bzw.  $q$  für die Funktionen  $v = R_\mu(u)$  an. Die Größen  $\omega_\mu$  und  $\omega_{\mu'}$  müssen nach dieser

Festlegung mit der Anzahl der Innenknoten (= Anzahl der Außenknoten) der rechten bzw. der linken Berandung<sup>3)</sup> einer Periode des Endes  $e_\mu$  übereinstimmen.

Aus der Abbildungsfunktion für den Streifen ergibt sich, daß dieser durch die Translation  $2\pi i$  (abgesehen von einem beschränkten Stück) in sich transformiert wird. An Stelle des Halbstreifens  $\mathfrak{S}_{\xi_\mu}$  betrachten wir den vollständigen Streifen  $\mathfrak{S}_{\xi_\mu}^*$ . Dieser läßt sich konform durch eine Funktion  $\bar{Z}_\mu = \bar{Z}_\mu(\xi_\mu)$  in einen Parallelstreifen der Breite  $2l$  überführen, so daß die drei Punkte  $\xi_\mu = 0$ ,  $2\pi i$  und  $\infty$  in sich übergehen. Wie man leicht einsieht, hat diese Funktion  $\bar{Z}_\mu = \bar{Z}_\mu(\xi_\mu)$  einen periodischen Charakter in dem Sinne, daß

$$\bar{Z}_\mu + 2\pi i = \bar{Z}_\mu(\xi_\mu + 2\pi i)$$

erfüllt ist.

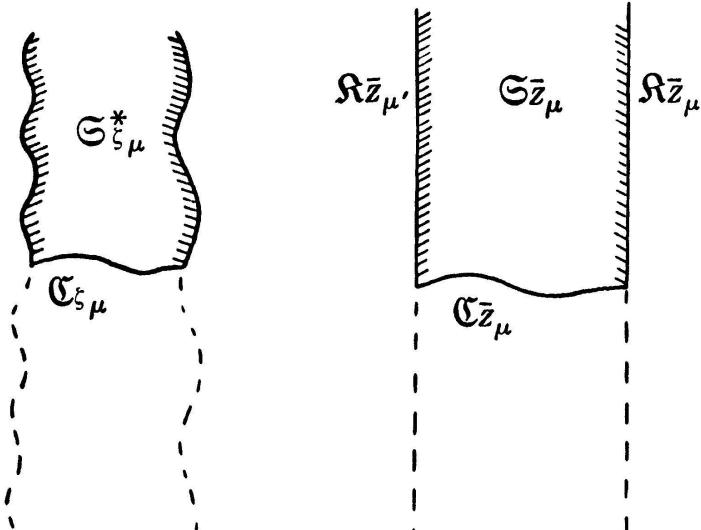


Fig. 10

Von diesem Parallelstreifen interessiert uns wieder nur diejenige Hälfte mit positivem Imaginärteil, die wir mit  $\mathfrak{S}_{\bar{z}_\mu}$  bezeichnen.  $\mathfrak{S}_{\bar{z}_\mu}$  ist das Bild von  $\mathfrak{S}_{\xi_\mu}$  und wird, neben einem Kurvenstück, das als Bild der Kernkurve zu betrachten ist, von den beiden parallelen Geraden  $\Re z_\mu$  und  $\Re z_\mu'$ , begrenzt.

Die drei Gebiete  $Z_\mu$ ,  $\mathfrak{S}_{\bar{z}_\mu}$  und  $Z_{\mu'}$  werden jetzt längs

ihrer parallelen Begrenzungsgeraden miteinander verheftet. Auf Grund der Beziehungen (2.2) und (2.2') ist aber vor dieser Verheftung die Ähnlichkeitstransformation

$$Z_\mu^* = Z_\mu, \quad \bar{Z}_\mu^* = \omega_\mu \bar{Z}_\mu, \quad Z_{\mu'}^* = \frac{\omega_\mu}{\omega_{\mu'}} Z_{\mu'}, \quad (2.3)$$

erforderlich. Dadurch gehe  $\mathfrak{S}_{\bar{z}_\mu}$  über in  $\mathfrak{S}_{\bar{z}_\mu}^*$  mit den Begrenzungsgeraden  $\Re z_\mu^*$  und  $\Re z_{\mu'}^*$ .

Die beiden parallelen Geraden  $\Re z_\mu$  und  $\Re z_\mu^*$  sind eindeutig analytisch (abgesehen von einem endlichen Stück) aufeinander bezogen. Explizit kennen wir die Funktion, die  $\Re z_\mu$  in  $\Re z_\mu^*$  überführt. Sie sei komplex gegeben durch

$$\bar{Z}_\mu^* = \mathfrak{H}_\mu(Z_\mu)$$

<sup>3)</sup> Die rechte bzw. linke Berandung eines Endes wird vom Kern aus bestimmt.

und reell durch

$$\bar{Y}_\mu^* = \mathfrak{h}_\mu(Y_\mu) . \quad (2.4)$$

Da die Aufschneidungskurve  $\Re_w$  auf der Riemannschen Fläche durch keinen der Grundpunkte verläuft, folgt für den Differentialquotienten der monotonen Funktion  $\mathfrak{h}_\mu$  die für uns wichtige Eigenschaft

$$\infty > c_1 > \frac{d\bar{Y}_\mu^*}{dY_\mu} > c_2 > 0 . \quad (2.5)$$

Zur Verheftung bilden wir den Halbstreifen  $l \leq \Re Z_\mu \leq 2l$  der Viertelsebene  $Z_\mu$  quasikonform so auf sich ab, daß die folgende Ränderzuordnung entsteht :

Auf

$$\Re Z = l \rightarrow \tilde{Z}_\mu = \mathfrak{h}_\mu(Y_\mu)$$

und auf

$$\Re Z_\mu = 2l \rightarrow \tilde{Z}_\mu = Z_\mu .$$

Diese Abbildung erfolgt durch

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\mu &= X_\mu \\ \tilde{Y}_\mu &= \mathfrak{h}_\mu(Y_\mu) + [Y_\mu - \mathfrak{h}_\mu(Y_\mu)] \frac{X - l}{l} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eine einfache Rechnung bestätigt, daß der zur Streifenabbildung gehörige Dilatationsquotient  $Dz_\mu/\tilde{z}_\mu$  im ganzen Streifen endlich bleibt.

Der Streifen  $\tilde{Z}_\mu$  wurde so auf sich abgebildet, daß man jetzt die beiden Gebiete  $\Im \tilde{z}_\mu$  und  $\Re Z_\mu > 2l$  mit  $\tilde{Z}_\mu$  längs  $\Re \tilde{Z}_\mu = l$  und  $2l$  zu einem Gebiet zusammenlegen kann.

Führt man eine entsprechende quasikonforme Abbildung für einen Streifen in  $Z_\mu^*$ , durch, so läßt sich auch diese Viertelsebene mit dem obigen Gebiet zu einer Halbebene  $Z_\mu^*$  verheften. Dasselbe Verfahren wiederholen wir für alle  $Z_\mu, Z_{\mu'},$  und  $\Im \tilde{z}_\mu$  mit  $\mu = 1, \dots, p$  und erhalten dadurch  $p$  Halbebenen  $Z_\mu^*$ .

Diese  $p$  Halbebenen sind jetzt längs der negativen und der positiven reellen Achse miteinander zu verheften.

Wegen (2.3) müssen wir zuerst die einzelnen Halbebenen den folgenden Ähnlichkeitstransformationen unterwerfen :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_1 &= Z_1^* , \quad \hat{Z}_2 = \frac{\omega_1}{\omega_{1'}} Z_2^* \\ \hat{Z}_3 &= \frac{\omega_1}{\omega_{1'}} \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_3^* ; \dots \\ \hat{Z}_\mu &= \frac{\omega_1}{\omega_{1'}} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_{3'}} \cdots \frac{\omega_{\mu-1}}{\omega_{\mu-1'}} Z_\mu^* . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jetzt lassen sich diese  $p$  Exemplare von Halbebenen abwechselungsweise über die negative und die positive reelle Achse zu einer Riemannschen Fläche  $Z = X + iY$  verheften. Zuletzt müssen noch die beiden freien Ufer

$$Z = X \quad \text{und} \quad Z = AX e^{p\pi i}$$

identifiziert werden, mit

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_p}{\omega_{1'} \cdot \omega_{2'} \cdots \omega_{p'}} . \quad (2.8)$$

Für diese letzte Zuordnung bedienen wir uns der Spiralabbildung

$$Z = z^{a+ib} = z^\sigma \quad (\sigma = a + ib) \quad (2.9)$$

und beachten die Identifizierungsvorschrift :

$$Z = X \rightarrow z = r e^{i\Phi}$$

und

$$Z = AX e^{ip} \rightarrow z = r e^{i(\Phi+2\pi)} ,$$

woraus folgt :

$$z^\sigma = X ; \quad z^\sigma \cdot e^{2\pi i \sigma} = AX e^{ip\pi}$$

$$\sigma = a + ib = \frac{p}{2} - i \frac{\log A}{2\pi} ,$$

das heißt

$$a = \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad b = - \frac{\log A}{2\pi} .$$

Setzen wir diese Größen in (2.9) ein, so heißt die gesuchte Abbildung

$$Z = z^{\frac{p}{2}} \left( 1 - i \frac{2}{p} \frac{\log A}{2\pi} \right) . \quad (2.9')$$

Damit ist die Riemannsche Fläche quasikonform uniformisiert und nach (1.10) existiert auch eine asymptotische Gleichung

$$\text{für } |z| \rightarrow \infty. \quad |\zeta| = \alpha |z| \{1 + o(1)\} \quad (2.10)$$

Dies berechtigt uns, wie einleitend erwähnt, die Wertverteilungsgrößen zuerst in der  $z$ -Ebene auszurechnen und dann durch (2.10) ins konforme  $\zeta$ -Bild zu übertragen.

#### Die Wertverteilung <sup>4)</sup>

Betrachten wir in der  $z$ -Ebene einen Kreis mit dem Radius  $|z| = r$ , so entspricht diesem in  $Z$  auf Grund der obigen Spiralabbildung ein

---

<sup>4)</sup> Die Wertverteilung dieser speziellen Funktionsklasse wurde von Pöschl [17] eingehend behandelt. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Resultate.

Kurvenstück einer logarithmischen Spirale zwischen

$$r^{\beta \frac{p}{2}} \quad \text{und} \quad Ar^{\beta \frac{p}{2}} \cdot e^{p\pi i}$$

mit

$$\beta = 1 + \left( \frac{2}{p} \cdot \frac{\log A}{2\pi} \right)^2. \quad (2.11)$$

Für die Schnittpunkte mit den Geraden

$$\arg Z = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots, p-1)$$

erhalten wir

$$|Z| = A^{\frac{n}{p}} \cdot r^{\beta \frac{p}{2}}.$$

In den vorgenommenen Abbildungen blieben die Geraden  $\Im Z_\mu = 0$  unverändert. Die obigen Schnittpunkte in der  $Z$ -Ebene übertragen wir in die  $Z_\mu$ -Ebenen und dividieren wegen (2.7) und (2.3) diese Abszissen jeweils durch  $\omega_\mu$ .

So erhalten wir die Punkte

$$Z'_\mu = \frac{Z_\mu}{\omega_\mu}$$

mit den Werten :

$$Z'_\mu = (-1)^{\mu+1} \cdot \Pi_\mu \cdot r^{\beta \frac{p}{2}}; \quad (\mu = 1 \dots p) \quad (2.12)$$

dabei ist

$$\Pi_\mu = \frac{A^{\frac{\mu-1}{p}}}{A_\mu \cdot \omega_\mu} \quad \text{und} \quad A_\mu = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2 \dots \omega_{\mu-1}}{\omega_{1'} \cdot \omega_{2'} \dots \omega_{\mu'-1}}. \quad (2.13)$$

Für  $A_1$  setzen wir den Wert 1.

Nun werden mit  $g^\mu$  die Anzahl der in einer Periode des  $e_\mu$  auftretenden Innenknoten bezeichnet. Dann fixieren wir alle algebraischen Elementarpolygone einer Periode, deren  $2m$  Seiten von Gliedzyklen mit den Nummern  $k, k+1$  bezeichnet sind, und benennen diese Anzahl mit  $j$ . Die entsprechenden halben Seitenzahlen seien  $m_1, m_2, \dots, m_j$ . Mit diesen bilden wir die Ausdrücke

$$g^{(\mu)}(a_k) = \sum_{\nu=1}^j m_\nu \quad \text{und} \quad g_1^{(\mu)}(a_k) = \sum_{\nu=1}^j (m_\nu - 1). \quad (2.14)$$

Die durchgeführten Berechnungen erlauben uns, in den  $Z_\mu$ -Ebenen die Fundamentalgebiete abzuzählen und mittels der Verzerrungssätze die Wertverteilung im konformen  $\zeta = \varrho e^{i\zeta}$ -Bild vorzunehmen.

$$\begin{aligned}
n(\varrho) &= c \varrho^\lambda (1 + o(1)) \left( \sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} \Pi_\mu \right) \\
n(\varrho, a) &= n(\varrho) + O(1); \quad a \neq a_k \\
n(\varrho, a_k) &= c \varrho^\lambda (1 + o(1)) \left( \sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu \right) \\
n_1(\varrho, a_k) &= c \varrho^\lambda (1 + o(1)) \left( \sum_{\mu=1}^p g_1^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu \right)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

mit

$$c = \frac{1}{2\pi} \cdot \alpha^{-\beta \frac{p}{2}}.$$

Daraus gewinnen wir die Werte für Ordnung, Defekte und Indizes:

$$\begin{aligned}
\text{Ordnung } \lambda &= \beta \cdot \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \frac{2}{p} \left( \frac{\log A}{2\pi} \right)^2 \\
\text{Defekte } \delta(a_k) &= 1 - \frac{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu}{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} \Pi_\mu} \\
\text{Indices } \varepsilon(a_k) &= \frac{\sum_{\mu=1}^p g_1^{(\mu)}(a_k) \cdot \Pi_\mu}{\sum_{\mu=1}^p g^{(\mu)} \Pi_\mu}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

### § 3. Riemannsche Flächen mit doppeltperiodischen Enden<sup>5)</sup>

Als einfachstes Beispiel eines doppeltperiodischen Endes betrachten wir in diesem Abschnitt den Streckenkomplex der Figur 6a.

O. B. d. A. können wir die vier Grundpunkte  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) der Riemannschen Fläche  $\mathfrak{W}$  so normieren, daß  $\sum_{i=1}^3 a_i = 0$  und  $a_4 = \infty$  ist.  $a_1$  sei der Grundpunkt, über dem der einzige logarithmische Windungspunkt liege (vgl. Fig. 11). Mit  $\mathfrak{C}_w$  bezeichnen wir die Zerschneidungskurve der Riemannschen Fläche. Um  $a_1$  legen wir einen Kreis  $\mathfrak{K}_w$ , dessen Radius wir später näher festlegen.

Durch den sich unendlich oft überdeckenden Kreis  $\tilde{\mathfrak{K}}_w$  auf  $\mathfrak{W}$ , der  $\mathfrak{K}_w$  als Spur hat, wird ein logarithmisches Windungselement  $\mathfrak{L}_w$  abge-

---

<sup>5)</sup> Vgl. zu diesem Abschnitt meine frühere Arbeit: „Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem“ [11], wo eine andere (speziellere) Methode verwendet wurde.

trennt.  $\tilde{\mathfrak{R}}_w$  ist so gelegt, daß sein Bild im Streckenkomplex die vertikale Folge der Bindungen  $1 - 3 - 1 - 3 - 1 - 3 - \dots$  durchläuft und das Bildgebiet von  $\mathfrak{L}_w$  zu seiner Linken hat. Nachdem das Windungselement  $\mathfrak{L}_w$  aus  $\mathfrak{W}$  herausgeschnitten wurde, bleibt das Riemannsche

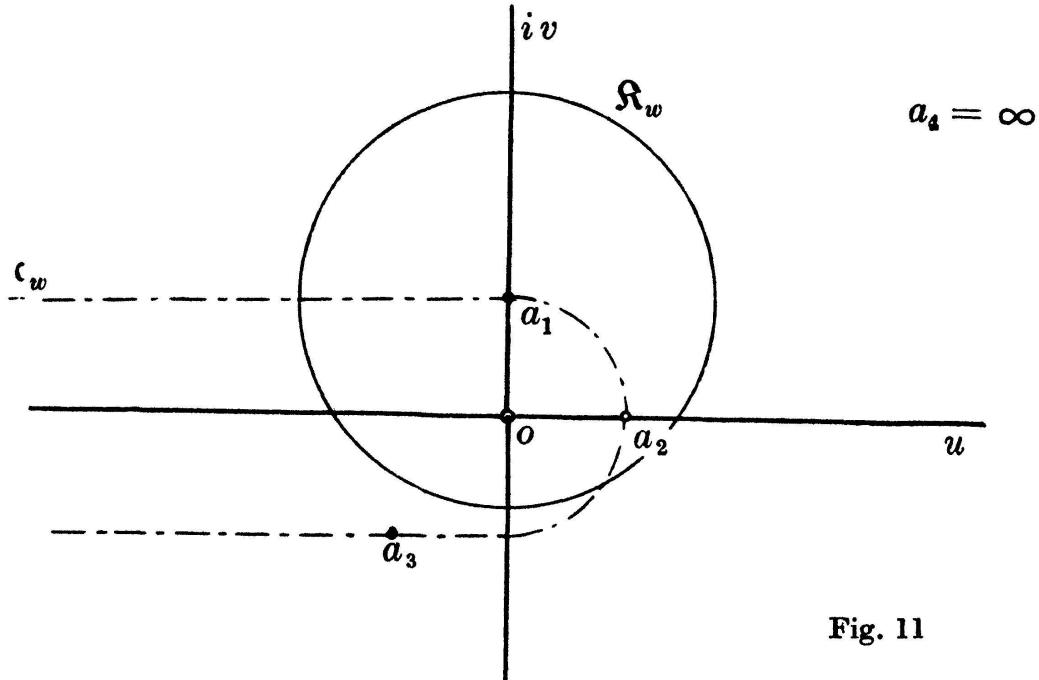


Fig. 11

Flächenstück  $\mathfrak{P}_w$  zurück, dem im Streckenkomplex der doppeltpериодische Teil rechts der Bindungen  $1 - 3 - 1 - 3 - 1 - 3 - \dots$  zugeordnet ist. Die Perioden  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  des Bildes von  $\mathfrak{P}_w$  normieren wir zu  $\Re \Omega_1 > 0$  und  $\Omega_2 = 2\pi i$ . Mit Hilfe einer Logarithmusfunktion, sowie der Umkehrung der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion lassen sich  $\mathfrak{L}_w$  und  $\mathfrak{P}_w$  in  $\mathfrak{L}_{Z_1}$  und  $\mathfrak{P}_Z$  einer  $Z_1$ - bzw.  $Z$ -Ebene abbilden.

Die partielle Uniformisierung führen wir in einem ersten Schritt aus, indem das logarithmische Windungselement  $\mathfrak{L}_w$  durch die Funktion

$$Z_1 = X_1 + iY_1 = \log(w - a_1) \quad (3.1)$$

in eine  $Z_1$ -Ebene auf  $\mathfrak{L}_{Z_1}$  abbilden wird.

Wird der Radius  $t$  von  $\tilde{\mathfrak{R}}_w$  größer als 1 gewählt, so erhalten wir als  $Z_1$ -Bild von  $\mathfrak{R}_w$  eine zur imaginären Achse  $Y_1$  parallele Gerade  $\mathfrak{R}_{Z_1}$ . Dem Element  $\mathfrak{L}_w$  entspricht dann die Halbebene

$$\Re Z_1 \leq \log t = c > 0 .$$

Im zweiten Schritt bilden wir  $\mathfrak{P}_w$  durch die Umkehrfunktion der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion in  $\mathfrak{P}_Z$  der  $Z$ -Ebene ab, mit

$$Z = X + iY = \int_{a_4}^w \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}} + k . \quad (3.2)$$

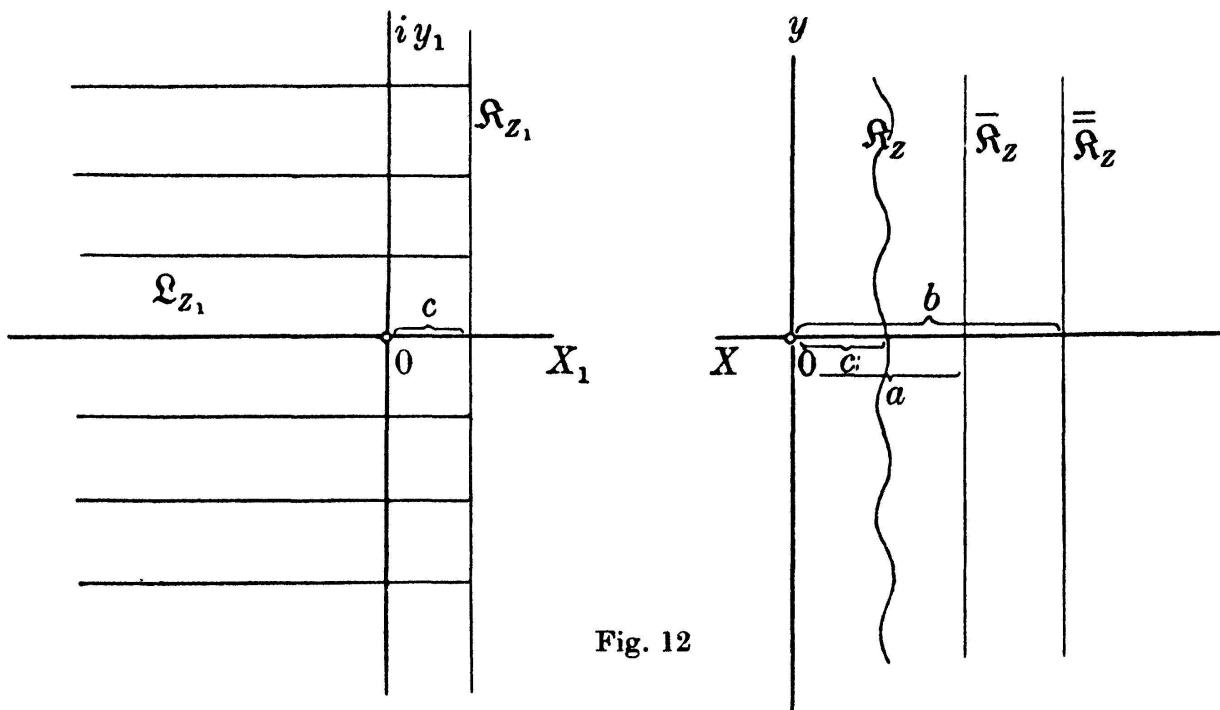
Die periodisch verlaufende Kurve  $\tilde{\mathfrak{R}}_z$  ist das Bild von  $\mathfrak{R}_w$  in der  $Z$ -Ebene. Die Konstante  $k$  wird so gewählt, daß  $\tilde{\mathfrak{R}}_z$  durch die Punkte  $2\pi ni + c$  geht ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$ ).

Durch die Abbildung von  $\tilde{\mathfrak{R}}_w$  auf  $\mathfrak{R}_{z_1}$  und  $\mathfrak{R}_z$  werden auch  $\mathfrak{R}_{z_1}$  und  $\mathfrak{R}_z$  vermittels

$$Z_1 = \log [\wp(Z) - a_1] \quad (3.3)$$

umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet. Da die Kurve  $\tilde{\mathfrak{R}}_w$  durch keinen der Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche verläuft, ist auf  $\mathfrak{R}_{z_1}$  stets

$$\frac{dZ_1}{dZ} \neq 0 \quad \text{und} \quad \infty. \quad (3.4)$$



Die beiden Gebiete  $\mathfrak{L}_{z_1}$  und  $\mathfrak{P}_z$  müssen noch längs ihrer Begrenzungslinien  $\mathfrak{R}_{z_1}$  und  $\mathfrak{R}_z$  punktweise auf Grund der Zuordnung auf der Riemannschen Fläche verheftet werden. Dazu dienen uns wieder die quasikonformen Abbildungen.

Im  $Z$ -Bild betrachten wir die zwei Streifen

$\mathfrak{S}_z$ , begrenzt durch  $\mathfrak{R}_z$  und  $\bar{\mathfrak{R}}_z$  mit  $\Re Z \leq a$

und

$\bar{\mathfrak{S}}_z$ , begrenzt durch  $\bar{\mathfrak{R}}_z$  und  $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}_z$  ( $a < \Re Z \leq b$ ).

In einem ersten Schritt bilden wir  $\mathfrak{S}_z$  durch die Funktion  $z = \mathfrak{h}(Z)$  konform auf einen Parallelstreifen mit  $c \leq \Re Z \leq a$  ab, so daß die drei

Randpunkte  $Z = a$ ,  $a + 2\pi i$  und  $\infty$  in sich übergehen. Dabei ist  $\mathfrak{h}(Z)$  eine periodische Funktion. Bei dieser Abbildung bleibt im ganzen Streifen der Differentialquotient  $dz/dZ \neq 0$  und  $\infty$ , insbesondere die Ableitung

$$\frac{d\mathfrak{h}(a + iy)}{dy} = \frac{d\mathfrak{h}(y)}{dy} \neq 0 \quad \text{und} \quad \infty. \quad (3.5)$$

auf dem Rande  $\bar{\mathfrak{R}}_z$ .

Im zweiten Schritt bilden wir  $\bar{\mathfrak{S}}_z$  quasikonform auf den Parallelstreifen  $\bar{\mathfrak{S}}_z$  ab, mit  $a \leq \Re z \leq b$  und der Ränderzuordnung :

$$\begin{aligned} \text{Auf } \bar{\mathfrak{R}}_z \text{ sei } z = Z, \\ \text{auf } \bar{\mathfrak{R}}_z \text{ sei } z = X \text{ und } y = \mathfrak{h}(y). \end{aligned}$$

Diese Abbildungsfunktion lautet

$$\begin{aligned} x &= X \\ y &= \mathfrak{h}(Y) + [Y - \mathfrak{h}(Y)] \frac{X - a}{b - a}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Gleich wie im zweiten Abschnitt folgt nach (1.8), daß im ganzen Streifengebiet der Dilatationsquotient  $D_{z/z}$  beschränkt bleibt.

In der  $z$ -Ebene lassen sich jetzt die beiden Streifen  $\mathfrak{S}_z$  und  $\bar{\mathfrak{S}}_z$  längs  $\Re z = a$  punktweise zu einem Parallelstreifen  $\hat{\mathfrak{S}}_z$  verheften ( $c \leq \Re z \leq b$ ).

Im dritten Schritt bilden wir diesen Streifen  $\hat{\mathfrak{S}}_z$  quasikonform in einen Parallelstreifen  $\mathfrak{S}_{Z_1}$  der  $Z_1$ -Ebene ab mit  $c \leq \Re Z_1 \leq c + d$  ( $d = b - c$ ), bei folgender Ränderzuordnung :

$$\text{Auf } \Re z = b \text{ sei } Z_1 = z,$$

und

$$\text{auf } \Re z = c \text{ sei } Z_1 = \mathfrak{k}(z).$$

Dabei gibt  $\mathfrak{k}(z)$  die Abbildung an, durch welche die Gerade  $\mathfrak{R}_z$  in  $\mathfrak{R}_{Z_1}$  mit  $\Re Z_1 = c$  übergeht. Die vorgenommenen Abbildungen ergeben ebenfalls  $dZ_1/dz \neq 0$  und  $\infty$ , besonders

$$\frac{d\mathfrak{k}(c + iy)}{dy} = \frac{d\mathfrak{k}(y)}{dy} \neq 0 \quad \text{und} \quad \infty. \quad (3.7)$$

Diese letzte Abbildung erhalten wir durch

$$\begin{aligned} X_1 &= x \\ Y_1 &= \mathfrak{k}(y) + [y - \mathfrak{k}(y)] \frac{x - c}{d}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

sie besitzt, gleich wie die Abbildung (3.6), beschränkte Dilatation.

Nach diesen drei Abbildungen lassen sich die Gebiete  $\Omega_{z_1}$ ,  $\mathfrak{S}_{z_1}$  und der Teil von  $\mathfrak{P}_z$  mit  $\Re Z > b$  längs ihrer Begrenzungsgeraden zu einer Ebene  $Z \neq \infty$  verheften.

### Die Wertverteilung der Funktion $w = w(\zeta)$ .

Die  $Z$ -Ebene ( $Z \neq \infty$ ) ist ein quasikonformes Bild der Riemannschen Fläche  $\mathfrak{W}$  über der  $w$ -Ebene. Mit  $\zeta \neq \infty$  bezeichnen wir wieder das konforme Bild von  $\mathfrak{W}$ , erzeugt durch die Umkehrfunktion von  $w = w(\zeta)$ . Wie in § 2 schließen wir, daß die Abbildung  $\zeta \rightarrow w \rightarrow Z$  quasikonformen Charakter hat. Der Dilatationsquotient  $D_{\zeta/Z}$  verschwindet in  $\Re Z < c$  und in  $\Re Z > d$  und bleibt im dazwischenliegenden Streifen beschränkt. Dadurch sind auch die Voraussetzungen für den Teichmüller-Wittichschen Verzerrungssatz erfüllt, und die Existenz einer Konstanten garantiert, so daß

$$|\zeta| = \alpha \cdot |Z| \{1 + o(1)\} \quad (3.9)$$

für  $|Z| \rightarrow \infty$  gilt.

Zur Bestimmung der Wertverteilungsgrößen zeichnen wir in der  $Z$ -Ebene einen Kreis mit dem Radius  $R$ . Die Hälfte dieses Kreises überdeckt eine Anzahl Periodenparallelogramme, die andere gewisse Periodenstreifen. Jeder Wert  $a$  im Periodenparallelogramm wird hier genau zweimal angenommen und im Streifen einmal. Da der Flächeninhalt eines Parallelogrammes  $2\pi\Re\Omega_1$  beträgt, so finden wir für die Anzahlfunktionen, die wir im quasikonformen Bild mit  $\nu(R, a)$  bzw.  $\nu_1(R, a)$  bezeichnen, die Werte :

$$\begin{aligned} \nu(R) &= \nu(R, a) = 2 \frac{\frac{1}{2}\pi R^2}{2\pi\Re\Omega_1} (1 + o(1)) \\ &= \frac{R^2}{4\Re\Omega_1} (1 + o(1)); \text{ (für alle } a\text{).} \\ \nu_1(R, a) &= \frac{R^2}{4\Re\Omega_1} (1 + o(1)); \text{ (für } a = a_1 \dots a_4\text{).} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ins konforme Bild übertragen ergibt

$$\begin{aligned} n(\varrho) &= n(\varrho, a) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{\varrho^2}{2\Re\Omega_1} (1 + o(1)) \\ n_1(\varrho, a) &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\varrho^2}{4\Re\Omega_1} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aus (3.10), (3.11) und (1.4) schließen wir für den Defekt

$$\delta(a) = 1 - \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{n(\varrho, a)}{n(\varrho)} = 0, \quad (3.12)$$

und zwar für jedes  $a$ .

Für die Verzweigungsindices folgt :

$$\varepsilon(a_k) = \lim \frac{n_1(\varrho, a_k)}{n(\varrho)} = \frac{1}{2} \quad (3.13)$$

$(k = 1, \dots, 4)$ .

Ordnung

$$\lambda = \lim \frac{\log n(\varrho)}{\log \varrho} = 2 . \quad (3.14)$$

Als Ergebnis halten wir fest : *Die erzeugende Funktion  $w = w(\zeta)$  der zum Streckenkomplex der Figur 6a gehörigen Riemannschen Fläche liefert uns ein Beispiel, bei dem trotz eines logarithmischen Windungspunktes in der Fläche die Funktion keinen Defekt aufweist.*

### Verallgemeinerung

Neben dem einfachen Beispiel, das wir in diesem Abschnitt untersuchten, lassen sich in gleicher Weise die allgemeineren doppeltperiodischen Enden, wie sie in § 1 eingeführt wurden, behandeln. Bei der partiellen Uniformisierung tritt an Stelle der  $\wp$ -Funktion eine elliptische Funktion der Form

$$f(u) = R_1[\wp(u)] + \wp'(u) \cdot R_2[\wp(u)] . \quad (3.17)$$

Zur Berechnung der Wertverteilungsgrößen bezeichnen wir mit  $G$  die Zahl der in einem Periodenparallelogramm vorhandenen Innenknoten bzw. Außenknoten. Betrachten wir weiter alle algebraischen Elementargebiete im Parallelogramm, deren  $2m$  Seiten von den Streckenzyklen  $k, k+1$  gebildet werden und benennen diese Zahl mit  $j$ . Die dazugehörigen halben Seitenzahlen seien  $m_1, m_2, \dots, m_j$ .

Dann bilden wir die Ausdrücke

$$G(a_k) = \sum_{\nu=1}^j m_{\nu} \quad \text{und} \quad G_1(a_k) = \sum_{\nu=1}^j (m_{\nu} - 1) \quad (3.18)$$

und erhalten für ein Ende die Anzahlfunktionen

$$\begin{aligned} v(R) &= G \frac{R^2}{4 \Re \Omega_1} (1 + o(1)) \\ v(R_1 a_k) &= G(a_k) \cdot \frac{R^2}{4 \Re \Omega_1} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$v_1(R_1 a_k) = G_1(a_k) \frac{R^2}{4 \Re \Omega_1} (1 + o(1)) .$$

Nach den gleichen Überlegungen, die in (2.3) bei den einfacherperiodischen Enden aufgestellt wurden, müssen wir bei den allgemeinen doppelperiodischen Enden, vor der Verheftung der beiden Halbebenen,  $\Omega_{z_1}$  mit  $1/\bar{\omega}$  multiplizieren.

$\bar{\omega}$  gibt die Anzahl der Innenknoten (= Anzahl der Außenknoten) an, die eine an das logarithmische Elementargebiet grenzende Periode beranden.

Für das obige Beispiel erhalten wir:  $G = 6$ ,  $\bar{\omega} = 2$ ,  $G_1(a_1) = 2$ ,  $G_1(a_2) = 2$ ,  $G_1(a_3) = 4$ ,  $G_1(a_4) = 4$ .

Damit sind  $\varepsilon(a_1) = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon(a_2) = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon(a_3) = \frac{2}{3}$ ,  $\varepsilon(a_4) = \frac{2}{3}$ . Weiter gilt:  $G(a_1) = G(a_2) = G(a_3) = G(a_4) = G = 6$

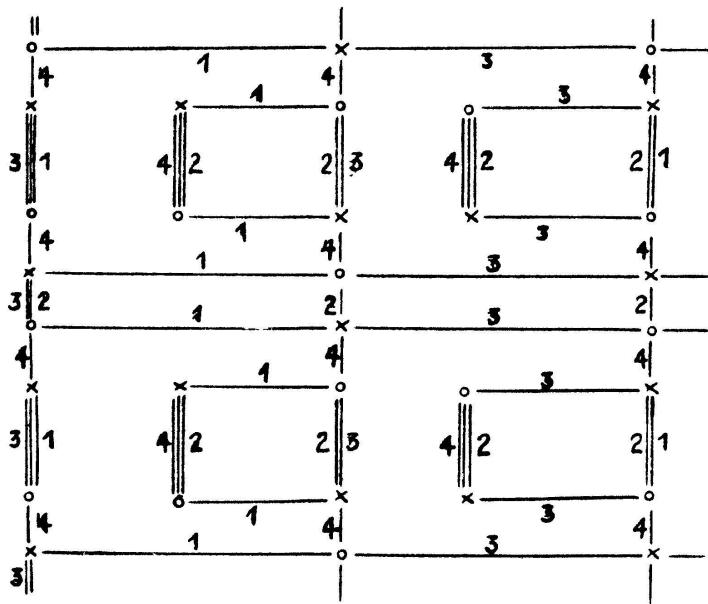


Fig. 13

Rein kombinatorisch ist aber ersichtlich, daß für jedes doppelperiodische Ende die Beziehung

$$G(a_k) = G \quad (k = 1 \dots p) \quad (3.19)$$

besteht.

#### § 4. Riemannsche Flächen mit einfach- und doppelperiodischen Enden

In diesem Kapitel interessieren wir uns für Streckenkomplexe, bei denen von einem Kern  $\mathfrak{K}$  aus  $p$  einfach- und  $q$  doppelperiodische Enden ausgehen.

Nach der schematisch gezeichneten Figur 14 werden die Enden fortlaufend im positiven Drehsinn numeriert. Das  $\mu$ -te Ende wird mit  $e_\mu$  wenn es einfacherperiodisch, mit  $\mathfrak{E}_\mu$  wenn es doppelperiodisch ist, bezeichnet. Da sich die erforderlichen Abbildungen nicht mehr gleich formal angeben lassen wie in den vorangegangenen zwei Abschnitten, denn hier spielt die vorgegebene Aufeinanderfolge von einfach- und doppelperiodischen Enden eine maßgebende Rolle, so beziehen wir uns zuerst auf das spezielle Beispiel der Figur 14. Die Perioden seien alle auf  $\Omega_1 > 0$  und  $\Omega_2 = 2\pi i$  normiert.

Die vorkommenden  $\omega_\mu$  bzw.  $\omega_\mu'$  der Figur 14 haben dieselbe Bedeutung wie in Kapitel 2.  $\bar{\omega}_\mu$  gibt entsprechend die Anzahl der berandenden Innenknoten einer Periode von  $\mathfrak{E}_\mu$  an. Zur Uniformisierung der zuge-

hörigen Riemannschen Fläche können wir jetzt die Methoden aus den Abschnitten 2 und 3 verwenden.

Logarithmische Elementargebiete und doppeltperiodische Enden werden in Halbebenen abgebildet und den einfachperiodischen Enden ent-

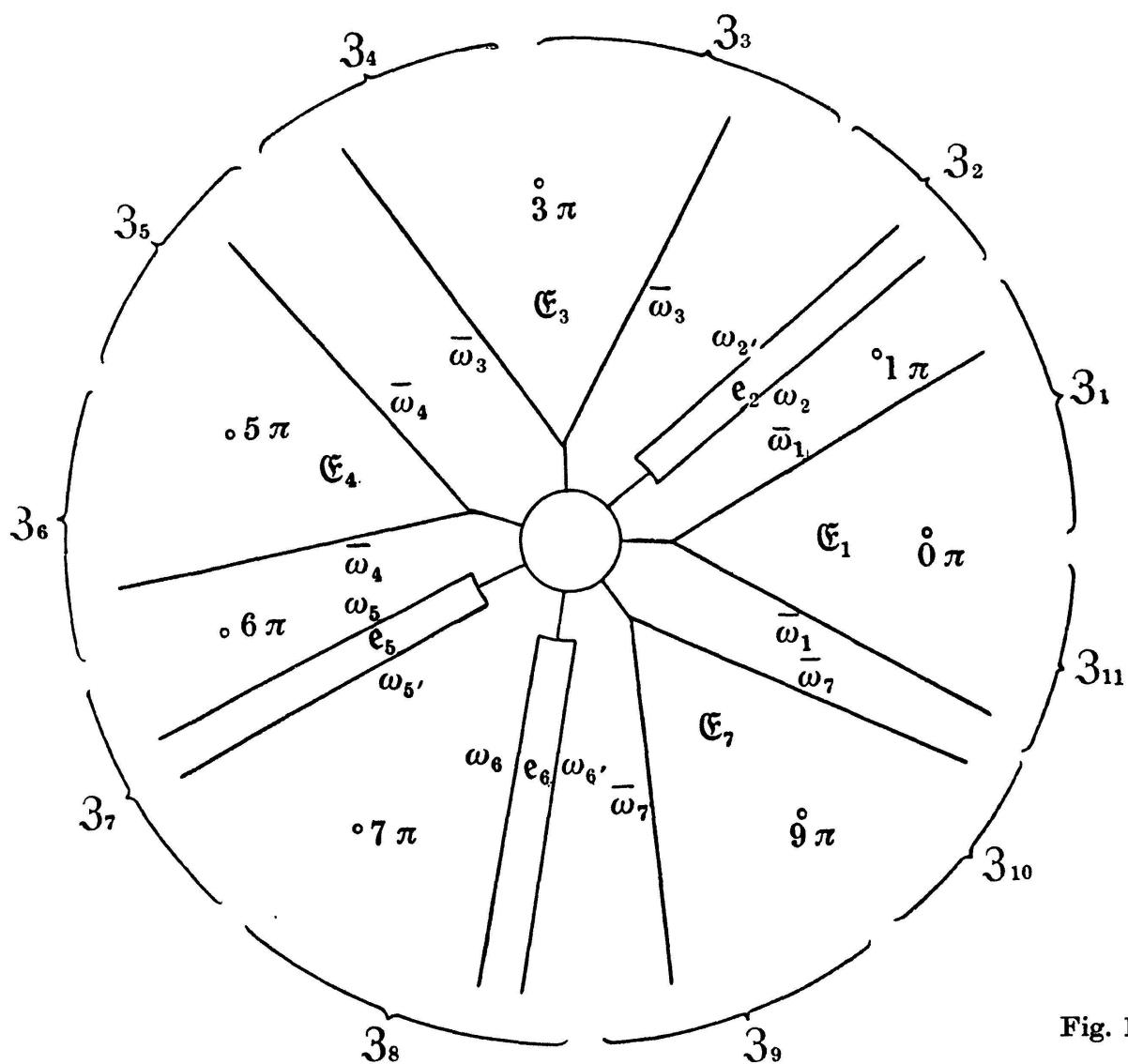


Fig. 14

sprechen wiederum bestimmte Halbstreifen, die mit den nötigen quasikonformen Abbildungen so in Parallelstreifen überzuführen sind, daß die Verheftung mit den bereits uniformisierten Halbebenen in richtiger Reihenfolge vorgenommen werden kann. Wie in § 2 fügen wir die uniformisierten Gebiete zu neuen Halbebenen zusammen. Eine Halbebene  $Z_\mu^*$  besteht entweder aus zwei Viertelsebenen, herrührend von je einer Hälfte von  $z_\mu$  und  $z_{\mu-1}$ , zwischen denen der Parallelstreifen  $\mathcal{G}z_\mu$  liegt, oder  $Z_\mu^*$  setzt sich zusammen aus einer Viertelsebene (der Hälfte von einem  $z_\mu$ ), die mit einer zweiten Viertelsebene verheftet ist, welche der Hälfte des Bildes eines doppeltperiodischen Endes entspricht. Bei einer

Halbebene  $Z_\mu^*$ , in der ein einfacher periodisches Ende liegt, brauchen wir die gleichen Abbildungen wie in § 2. Liegt in  $Z_\mu^*$  die Hälfte des Bildes eines doppeltperiodischen Endes  $\mathfrak{E}_\mu$ , so werden die Abbildungen nach § 3 verwendet und vor der Verheftung ist die andere Viertelsebene mit  $1/\bar{\omega}_\mu$  zu multiplizieren.

In Figur 14, dem topologischen Bild der Riemannschen Fläche, sind die beschriebenen Zusammenfassungen wiederum schematisch angegeben ( $Z_\mu^* \leftrightarrow \mathfrak{Z}_\mu$ ).

Allgemein nimmt ein Streckenkomplex mit  $p$  einfach und  $q$  doppelt-periodischen Enden bei der oben angegebenen Abbildungsvorschrift  $p + 2q$  Halbebenen  $Z_\mu^*$  in Anspruch.

Zur Verheftung dieser  $p + 2q$  Halbebenen, abwechselungsweise über die negative und positive reelle Achse, müssen diese zuerst entsprechend (2.7) abgebildet werden durch :

$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_1}\right)$	$\mathfrak{E}^1$	$Z_1^*$	$\hat{Z}_1 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_1 Z_1^*$
	$e_2$	$Z_2^*$	$\hat{Z}_2 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} Z_2^*$
$\mathfrak{E}_3$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_3}\right)$	$Z_3^*$	$\hat{Z}_3 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_3 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_3^*$
$\mathfrak{E}_3$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_3}\right)$	$Z_4^*$	$\hat{Z}_4 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_3 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_4^*$
$\mathfrak{E}_4$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_4}\right)$	$Z_5^*$	$\hat{Z}_5 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_4 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_5^*$
$\mathfrak{E}_4$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_4}\right)$	$Z_6^*$	$\hat{Z}_6 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_4 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_6^* \quad (4.1)$
$\frac{\omega_5}{\omega_{5'}}$	$e_5$	$Z_7^*$	$\hat{Z}_7 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} Z_7^*$
	$e_6$	$Z_8^*$	$\hat{Z}_8 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} \frac{\omega_5}{\omega_{5'}} Z_8^*$
$\mathfrak{E}_7$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_7}\right)$	$Z_9^*$	$\hat{Z}_9 = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_7 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} \frac{\omega_5}{\omega_{5'}} \frac{\omega_6}{\omega_{6'}} Z_9^*$
$\mathfrak{E}_7$	$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_7}\right)$	$Z_{10}^*$	$\hat{Z}_{10} = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_7 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} \frac{\omega_5}{\omega_{5'}} \frac{\omega_6}{\omega_{6'}} Z_{10}^*$
$\mathfrak{E}_1$	$\frac{1}{\bar{\omega}_1}$	$Z_{11}^*$	$\hat{Z}_{11} = \frac{1}{\bar{\omega}_1} \bar{\omega}_1 \frac{\omega_2}{\omega_{2'}} \frac{\omega_5}{\omega_{5'}} \frac{\omega_6}{\omega_{6'}} Z_{11}^*$ .

Fig. 15

Die Ausdrücke in Klammern der Figur 15 geben die Faktoren an, mit denen die betreffenden Viertelsebenen vor der Verheftung multipliziert werden mußten.

Jetzt lassen sich die  $p + 2q$  Halbebenen zu einer Fläche mit  $p + 2q$  Halbblättern zusammenheften, die noch längs der beiden freien Ufern zu identifizieren ist. Dies erfolgt wieder durch eine passende Spiralabbildung, die die Fläche in eine schlichte  $z$ -Ebene überführt. Für diese Spiralabbildung benutzen wir nochmals den bekannten Ansatz

$$Z = z^{a+ib}$$

und finden für die beiden Konstanten die Werte

$$a = \frac{p + 2q}{2} \quad \text{und} \quad b = -\frac{\log A}{2\pi} \quad (4.2)$$

mit

$$A = \frac{\omega_2}{\omega_2'} \frac{\omega_5}{\omega_5'} \frac{\omega_6}{\omega_6'} .$$

Legen wir in der  $z$ -Ebene den Kreis mit dem Radius  $|z| = r$ , so entspricht nun diesem in der  $Z$ -Ebene eine Spirale. Die Schnittpunkte mit den Geraden

$$\arg Z = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots, p + 2q - 1)$$

berechnen sich zu

$$|Z| = r^{\beta \frac{p+2q}{2}} A^{\frac{n}{p+2q}} \quad (4.3)$$

mit

$$\beta = 1 + \left( \frac{2}{p + 2q} \frac{\log A}{2\pi} \right)^2 .$$

Übertragen wir diese Punkte in die  $Z_\mu^*$ -Ebenen, so erhalten wir  $p + 2q$  Werte dafür, von denen uns aber für die Wertverteilung nur diejenigen interessieren, welche entweder in einer Viertelsebene liegen, in die die Hälfte eines doppeltperiodischen Endes abgebildet ist, oder solche, in einer Viertelsebene, auf die ein Bildstreifen eines einfachperiodischen Endes folgt. Für unser Beispiel ergeben sich die Werte :

$$\begin{array}{ll} Z_1 = B\Pi_1 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} & Z_7 = B\Pi_7 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} \\ Z_2 = -B\Pi_2 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} & Z_8 = -B\Pi_8 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} \\ Z_4 = -B\Pi_4 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} & Z_{10} = -B\Pi_{10} r^{\beta \frac{p+2q}{2}} \\ Z_6 = -B\Pi_6 r^{\beta \frac{p+2q}{2}} & \end{array} \quad (4.5)$$

mit

$$\Pi_\mu = \frac{A^{\frac{\mu-\alpha}{p+2q}}}{A_\mu} \quad \text{und} \quad B = \bar{\omega}_1, \quad A_1 = 1.$$

Für die Berechnung der  $A_\nu$  gilt die folgende Regel : 1. Befindet sich der Punkt  $\mathfrak{Z}$  (Bildpunkt eines  $Z_\mu$  in der Ebene des Streckenkomplexes) in einem Ende  $\mathfrak{E}_\nu$ , dem die einfachperiodischen Enden  $e_{x_1}, e_{x_2}, \dots, e_{x_\mu}$  vorangehen, so ist

$$A_\mu = \frac{\omega_{x_1} \cdot \omega_{x_2} \dots \omega_{x_\mu}}{\omega'_{x_1} \cdot \omega'_{x_2} \dots \omega'_{x_\mu}} \bar{\omega}_\mu.$$

2. Befindet sich der Punkt  $\mathfrak{Z}$  in einem logarithmischen Elementargebiet vor dem einfachperiodischen Ende  $e_\mu$ , dem die Enden  $e_{x_1}, e_{x_2}, \dots, e_{x_\mu}$  vorangehen, dann ist

$$A_\mu = \frac{\omega_{x_1} \cdot \omega_{x_2} \dots \omega_{x_\mu}}{\omega'_{x_1} \cdot \omega'_{x_2} \dots \omega'_{x_\mu}}.$$

Für die Anzahlfunktionen in den  $Z_\mu^*$ -Ebenen erhalten wir allgemein :

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{B}{2\pi} \left( \sum_{e_\mu} g^{(\mu)} \cdot \frac{\Pi_\mu}{\omega_\mu} \right) \cdot r^{\beta \frac{p+2q}{2}} + \frac{B}{4\Re \Omega_1} \left( \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G^{(\mu)} \Pi_\mu \right) \cdot r^{\beta(p+2q)} \\ v(r) &= v(r, a) + O(1) \quad [a \neq a_k] \\ v(r, a_k) &= \frac{B}{2\pi} \left( \sum_{e_\mu} g^{(\mu)}(a_k) \frac{\Pi_\mu}{\omega_\mu} \right) r^{\beta \frac{p+2q}{2}} + \frac{B}{4\Re \Omega_1} \left( \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu \right) \cdot r^{\beta(p+2q)} \\ v_1(r, a_k) &= \frac{B}{2\pi} \left( \sum_{e_\mu} g_1^{(\mu)}(a_k) \frac{\Pi_\mu}{\omega_\mu} \right) \cdot r^{\beta \frac{p+2q}{2}} + \frac{B}{4\Re \Omega_1} \left( \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G_1^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu \right) \cdot r^{\beta(p+2q)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

In diesen Formeln können die Glieder, die zu den einfachperiodischen Enden gehören gegenüber denjenigen, die den doppeltpériodischen Enden entsprechen, vernachlässigt werden.

Beim Übergang nach (1.10) von der  $z$ -Ebene ins konforme Bild der  $\zeta$ -Ebene dürfen wir schreiben :

$$\begin{aligned} n(\varrho) &= C \cdot \varrho^\lambda (1 + o(1)) \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G^{(\mu)} \Pi_\mu \\ n(\varrho, a) &= n(\varrho) + O(1) \\ n(\varrho, a_k) &= C \cdot \varrho^\lambda (1 + o(1)) \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu \\ n_1(\varrho, a_k) &= C \cdot \varrho^\lambda (1 + o(1)) \sum_{\mathfrak{E}_\mu} G_1^{(\mu)}(a_k) \Pi_\mu. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Konstante hat den Wert

$$C = \frac{B}{4\Re \Omega_1} \alpha^{-\beta(p+2q)}.$$

Daraus gewinnen wir die Wertverteilungsgrößen, nämlich die

$$\text{Ordnung} \quad \lambda = \beta(p + 2q) \geq p + 2q \quad (4.8)$$

und die

$$\text{Indices } \varepsilon(a_k) = \frac{\sum_{\mu} G_1^{(\mu)}(a_k) \Pi_{\mu}}{\sum_{\mu} G^{(\mu)} \Pi_{\mu}}. \quad (4.9)$$

Wegen  $G^{(\mu)} = G^{(\mu)}(a_k)$  nach (3.19) verschwinden sämtliche Defekte, also

$$\text{Defekte} \quad \delta(a_k) = 0. \quad (4.10)$$

Zusammenfassend halten wir fest :

1. Eine erzeugende Funktion  $w = w(\zeta)$  einer Riemannschen Fläche mit  $p$  einfach- und  $q$  doppelperiodischen Enden weist keine Defekte auf, trotz dem Vorhandensein von  $p + q$  logarithmischen Windungspunkten.
2. Die einfachperiodischen Enden fallen nur für die Ordnung  $\lambda$  sowie für die Verzweigungsindices maßgebend ins Gewicht.

## § 5 Riemannsche Flächen mit Viertelsenden

Als letztes Beispiel betrachten wir die Riemannsche Fläche, deren Streckenkomplex in Fig. 16a wiedergegeben ist.

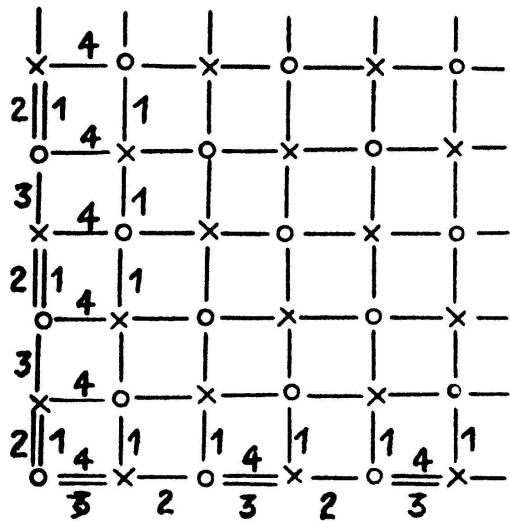


Fig. 16a

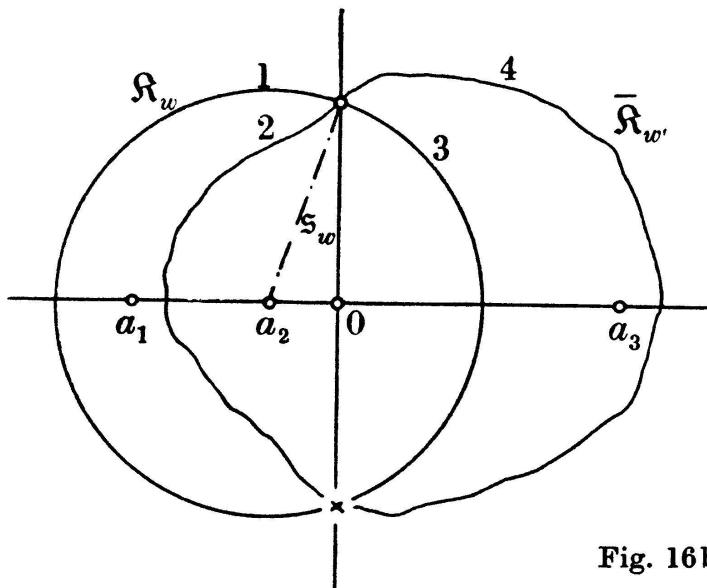


Fig. 16b

Ein solcher Streckenkomplex erscheint als die „Hälfte“ eines doppelperiodischen Endes. Aus diesem Grunde bezeichnen wir ihn als ein *Viertelsende*.

Bei unserem Beispiel beschränken wir uns der Einfachheit halber auf ein Rechtecksgitter mit den beiden Perioden  $\Omega_2 = 2\pi i$  und  $\Omega_1 > 0$ . Nach Weierstraß normieren wir die Grundpunkte  $a_1, \dots, a_4$  durch  $\sum_{i=1}^3 a_i = 0$  und  $a_4 = \infty$ . Der logarithmische Windungspunkt liege in  $a_2$  (vgl. Fig. 16 b). Durch den sich unendlich oft überdeckenden Kreis  $\tilde{\mathfrak{K}}_w$  auf der Riemannschen Fläche  $\mathfrak{W}$ , der  $\mathfrak{K}_w$  als Spur hat, wird das Windungselement  $\mathfrak{W}_1$ , das zu  $a_2$  gehört herausgeschnitten. In  $\mathfrak{K}_w$  legen wir die Bindungen 1 und 3 fest.

Schneiden wir das Windungselement um  $a_2$  durch die Kurve  $\tilde{\mathfrak{K}}_w$  heraus, die  $\bar{\mathfrak{K}}_w$  zur Spur hat (durch  $\bar{\mathfrak{K}}_w$  sind die Bindungen 2 und 4 bestimmt), so bezeichnen wir dieses Element mit  $\mathfrak{W}_2$ .  $\mathfrak{W}_1$  wird durch den Logarithmus in eine Halbebene  $\mathfrak{L}_{Z_1}$  uniformisiert mit der Begrenzungsgeraden  $\mathfrak{K}_{Z_1}$ .

$\mathfrak{W}_2$  bilden wir ebenfalls durch den Logarithmus in ein Gebiet  $\mathfrak{L}_{Z_2}$  ab, das von  $\bar{\mathfrak{K}}_{Z_2}$  begrenzt wird (vgl. Fig. 17).

Die Abbildungsfunktionen werden so normiert, daß sowohl  $\mathfrak{K}_{Z_1}$  und  $\bar{\mathfrak{K}}_{Z_2}$  durch die Punkte  $Z_1 = 0$  bzw.  $Z_2 = 0$  verlaufen. Diese Nullpunkte entsprechen in der  $w$ -Ebene dem Schnittpunkt von  $\mathfrak{K}_w$  und  $\bar{\mathfrak{K}}_w$ .

Die beiden Gebiete  $\mathfrak{L}_{Z_1}$  und  $\mathfrak{L}_{Z_2}$  werden jetzt von den Punkten  $Z_1 = 0$  und  $Z_2 = 0$  aus durch je einen geraden Schnitt längs  $s_{Z_1}$  bzw.  $s_{Z_2}$  in je zwei Teilgebiete getrennt. Auf der  $w$ -Ebene entspricht den beiden

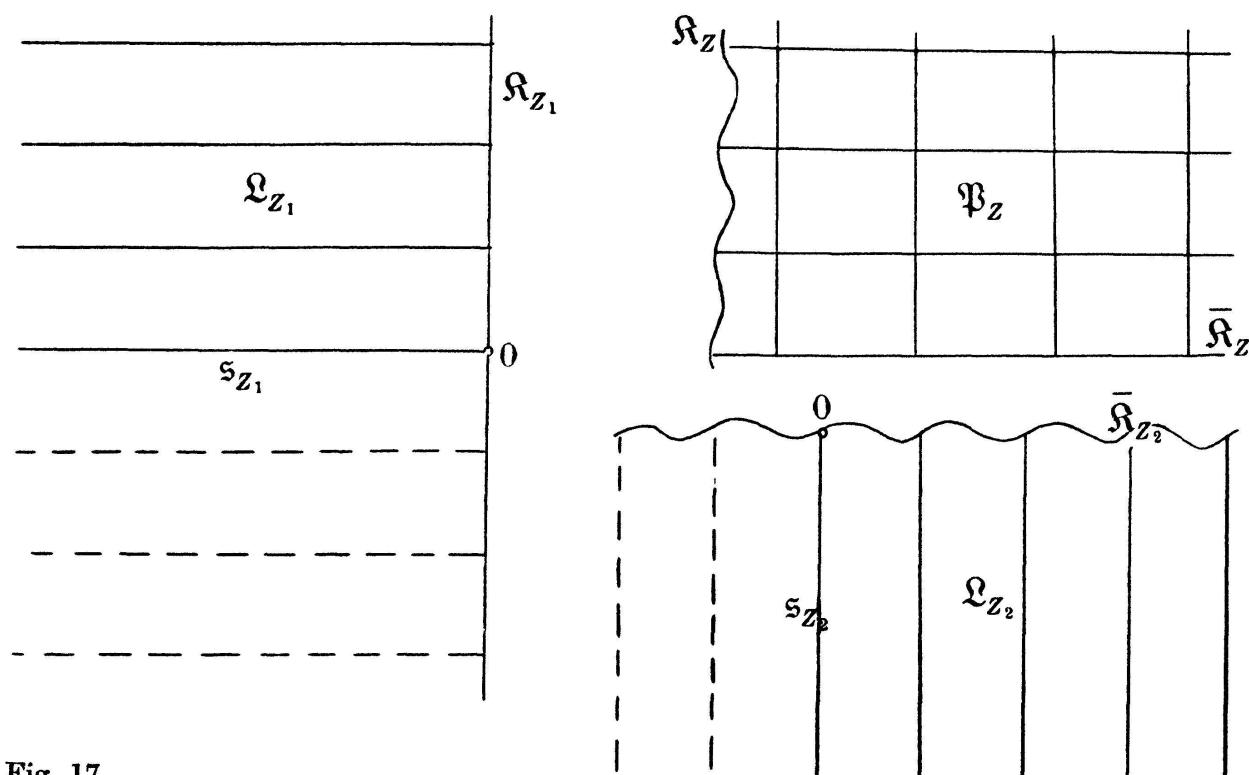


Fig. 17

Schnitten das Geradenstück  $s_w$  von  $a_2$  aus zum Innenknoten. Von den beiden Gebieten  $\Omega_{z_1}$  und  $\Omega_{z_2}$  betrachten wir im weiteren nur noch je eine Hälfte (vgl. Fig. 17), behalten aber die Gebietsbezeichnung  $\Omega_{z_1}$  und  $\Omega_{z_2}$  für diese Viertelsebenen bei. Die Kurve  $\bar{\mathfrak{K}}_w$  wurde der Form nach so gewählt, daß der restliche Teil der Fläche  $\mathfrak{W}$ , nämlich der doppelperiodische  $\mathfrak{P}_w$ , durch das Integral erster Gattung so in eine  $Z$ -Ebene abgebildet wird, daß das Bild von  $\bar{\mathfrak{K}}_w$  in eine Gerade  $\bar{\mathfrak{K}}_z$  übergeht.

$\Omega_{z_1}$  und  $\mathfrak{P}_z$  müssen längs ihrer freien Ufer  $\mathfrak{K}_{z_1}$  und  $\mathfrak{K}_z$  verheftet werden, ebenfalls  $\mathfrak{P}_z$  und  $\Omega_{z_2}$  längs  $\mathfrak{K}_z$  und  $\mathfrak{K}_{z_2}$  (vgl. Fig. 17). Um diese Verheftung auszuführen, können wir uns genau derselben quasikonformen Abbildungen bedienen wie in § 3. Zusätzlich müssen wir aber  $\Omega_{z_2}$  noch mit dem Faktor  $\frac{\Omega_1}{2\pi}$  multiplizieren, damit die entsprechenden Perioden von  $\Omega_{z_2}$  und  $\mathfrak{P}_z$  übereinstimmen.

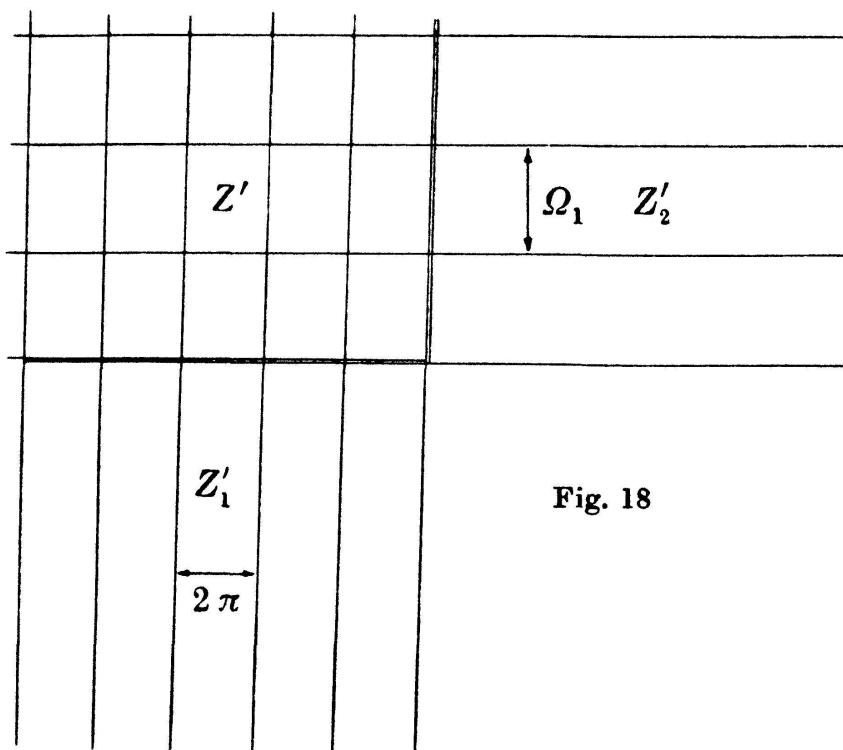


Fig. 18

Durch die Spiralabbildung

$$Z = z^{a+ib}$$

bilden wir das  $3/4$  Blatt in eine  $z$ -Ebene ( $z \neq \infty$ ) ab. Dazu gehört die folgende Identifizierungsvorschrift :

$$Z = X \rightarrow z = re^{i\phi}$$

$$Z = AXe^{ip\frac{\pi}{2}} \rightarrow z = re^{i(\phi+2\pi)}$$

Hier ist  $A = \frac{\Omega_1}{2\pi}$  und  $p$  bezeichnet die Anzahl der Viertelsebenen, also in unserem Beispiel wäre  $p = 3$ . Die Ausrechnung ergibt dann für

$$a = \frac{p}{4} = (3/4) \quad \text{und} \quad b = -\frac{\log A}{2\pi} .$$

Damit heißt die gesuchte Abbildung

$$Z = z^{a+ib} = z^{\frac{p}{4}\left(1-i\frac{4}{p}\frac{\log A}{2\pi}\right)} , \quad (5.1)$$

das gibt für unseren Fall

$$Z = z^{\frac{3}{4}\left(1-i\frac{4}{3}\frac{\log \Omega_1}{2\pi}\right)} . \quad (5.1')$$

Legen wir in der  $z$ -Ebene einen Kreis vom Radius  $|z| = r$ , so gehen die Schnittpunkte mit  $\arg Z = n\pi/2$  und der Bildspirale über in

$$|Z| = r^{\beta \frac{p}{4}} \cdot A^{\frac{n}{p}} \cdot e^{in\frac{\pi}{2}} \quad (5.2)$$

mit

$$\beta = 1 + \left(\frac{4}{p} \cdot \frac{\log A}{2\pi}\right)^2 .$$

Übertragen wir diese Punkte in die  $Z'_1$ ,  $Z'_2$  und  $Z'$  Viertelsebenen ( $Z' = iZ$ ), so erhalten wir :

$$\begin{aligned} Z'_2 &= ir^{\frac{3}{4}\beta} A^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2\pi}{\Omega_1} \\ Z' &= -r^{\frac{3}{4}\beta} \cdot A^{\frac{2}{3}} \\ Z'_1 &= -i r^{\frac{3}{4}\beta} \cdot A . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Beachten wir, daß im Viertelskreis mit dem Radius  $R$  in der  $Z$  Ebene  $\frac{R^2}{2\Omega_1}$  Periodenrechtecke liegen, so folgt entsprechend wie in § 3, daß die Wertverteilungsgrößen sich ausdrücken durch :

$$\begin{aligned} \delta(a) &= 0 \\ \varepsilon(a_i) &= \frac{1}{2} \quad (i = 1, \dots, 4) \\ \lambda &= 3/2 \cdot \beta . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zusammenfassend gilt :

1. Die Ordnung  $\lambda = \frac{3}{2} \cdot \beta$  eines Viertelsendes unterscheidet sich gegenüber der Ordnung eines doppeltperiodischen Endes ( $\lambda = 2$ ) und kann jeden Wert größer als  $3/2$  annehmen.
2. Dieser Streckenkomplex des Viertelsendes liefert ein Beispiel, für den die Ordnung der erzeugenden Funktion abhängig ist von der Lage der Grundpunkte, denn durch eine Grundpunktverschiebung ändert sich  $\Omega_1$  und damit auch die Ordnungsabhängige  $\beta$ .

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. Ahlfors, Über die asymptotischen Werte der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Ann. Acad. Fennicae A 32, Nr. 6 (1929).
- [2] L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. Acta Soc. Sci. Fennicae N. S. 1, Nr. 9 (1930).
- [3] L. Ahlfors, Über eine in der neuen Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzenter Funktionen. Acta Math. 58 (1932).
- [4] L. Ahlfors, Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math. 65 (1935).
- [5] A. Denjoy, Sur les fonctions entières de genre fini. C. R. Acad. Sci. Paris 145 (1907) p. 106.
- [6] E. Drape, Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplexe. Deutsche Math. I (1936), Heft 6.
- [7] G. Elfving, Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fennicae N. S. 2, Nr. 3 (1934).
- [8] H. Habsch, Die Theorie der Grundkurven und das Äquivalenzenproblem bei der Darstellung Riemannscher Flächen. Mitt. Math. Sem. Univ. Gießen (1952).
- [9] H. Künzi, Représentation et répartition des valeurs des surfaces de Riemann à extrémités bipériodiques. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), p. 793.
- [10] H. Künzi, Surfaces de Riemann avec un nombre fini d'extrémités simplement et doublement périodiques. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952), p. 1660.
- [11] H. Künzi, Über ein Teichmüllersches Wertverteilungsproblem. Arch. Math. 3 (1953).
- [12] T. Le-Van, Über das Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Comment. Math. Helv. 23 (1949).
- [13] R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta Math. 58 (1932).
- [14] R. Nevanlinna, Ein Satz über offene Riemannsche Flächen. Ann. Acad. Sci. Fenn. 54 (1940).

- [15] *R. Nevanlinna*, Eindeutige analytische Funktionen. 2. Auflage. Springer (1953).
- [16] *A. Pfluger*, Zur Defektrelation ganzer Funktionen endlicher Ordnung. Comment. Math. Helv. 19 (1946).
- [17] *K. Pöschl*, Über die Wertverteilung der erzeugenden Funktionen Riemannscher Flächen mit endlich vielen periodischen Enden. Math. Ann. 123 (1951).
- [18] *A. Speiser*, Über Riemannsche Flächen. Comment. Math. Helv. 2 (1930).
- [19] *O. Teichmüller*, Eine Anwendung quasikonformer Abbildungen auf das Typenproblem. Deutsche Math. 2 (1937).
- [20] *O. Teichmüller*, Eine Umkehrung des zweiten Hauptsatzes. Deutsche Math. 2 (1937).
- [21] *O. Teichmüller*, Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Deutsche Math. 3 (1938).
- [22] *O. Teichmüller*, Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Deutsche Math. 4 (1939).
- [23] *O. Teichmüller*, Einfache Beispiele zur Wertverteilungslehre. Deutsche Math. 7 (1944).
- [24] *E. Ullrich*, Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. 1, Nr. 9 (1936).
- [25] *E. Ullrich*, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 46 (1936).
- [26] *E. Ullrich*, Flächenbau und Wertverteilung. 9. Congr. Math. scand. Helsinki (1938).
- [27] *H. Wittich*, Ein Kriterium zur Typenbestimmung von Riemannschen Flächen. Monatsh. Math. Phys. 44 (1936).
- [28] *H. Wittich*, Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Ann. 122 (1939).
- [29] *H. Wittich*, Über die Wachstumsordnung einer ganzen transzententen Funktion. Math. Z. 51 (1947).
- [30] *H. Wittich*, Zum Beweise eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. 51 (1949).
- [31] *H. Wittich*, Über den Einfluß algebraischer Windungspunkte auf die Wachstumsordnung. Math. Ann. 122 (1950).

(Eingegangen den 9. Dezember 1953)