

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1955)

Artikel: Die Grundgleichungen der Flächentheorie. I.
Autor: Scherrer, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-23285>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Grundgleichungen der Flächentheorie I

von W. SCHERRER, Bern

§ 1. Einleitung

Die Bewegung eines starren Körpers bildet den anschaulichen Kern der Euklidischen Geometrie. In der analytischen Methodik steht daher die Bewegung eines orthonormierten Dreibeins im Zentrum.

Die konsequente Verwertung dieses kinematischen Gesichtspunktes gibt dem Darboux'schen Standardwerk über Flächentheorie das Gepräge.

Die neuere Entwicklung der elementaren Flächentheorie zeigt, daß die Darstellung an Geschlossenheit gewinnt, wenn man nicht nur in Vektoren denkt — wie dies Darboux schon getan hat — sondern auch lückenlos mit Vektoren rechnet.

Eine elementare Illustration dazu liefert die heute im Unterricht eingebürgerte vektorielle Theorie der Raumkurven. Einen weiteren eindrucksvollen Beleg für die Vorteile dieser Methodik bildet die Darstellung einer Fläche durch das auf ihre Krümmungslinien bezogene orthonormierte Dreibein, wie man sie in dem Lehrbuch von Blaschke findet. Dasselbst findet man auch einen Hinweis darauf, daß es für die Behandlung von Kurven auf der Fläche oft nützlich ist, normierte Dreibeine mit einem schiefen Winkel zu verwenden.

Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist es nun, zu zeigen, daß es auch vorteilhaft ist, die ganze Darstellung einer Fläche auf ein normiertes Dreibein mit *einem* schiefen Winkel zu gründen. Man erhält dann eine jedem Parameternetz anpaßbare Darstellung, bei welcher jede auftretende Grundgröße eine unmittelbare geometrische Bedeutung besitzt.

Man gewinnt so mühelos viele Ergebnisse und Relationen, zu deren Herleitung in den traditionellen Lehrgängen meist besondere Zurüstungen erforderlich sind; außerdem ergibt sich dabei, wie ich hoffe, einiges Neue.

Hinweise auf Einzelprobleme findet der Leser in der Schlußbetrachtung § 9.

§ 2. Flächenstreifen

Ist auf der Fläche

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) \tag{1}$$

mit der Normalen

$$\mathfrak{N} = \frac{[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]}{|[\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v]|} \quad (2)$$

eine Kurve

$$\mathfrak{x}(t) \equiv \mathfrak{x}[u(t), v(t)] \quad (3)$$

gegeben, so erhalten wir ihre Bogenlänge s aus der Differentialgleichung

$$\dot{s}^2 = E^2 \dot{u}^2 + 2EG \cos \theta \dot{u} \dot{v} + G^2 \dot{v}^2 . \quad (4)$$

Dabei wurde gesetzt

$$E^2 \equiv \mathfrak{x}_u^2 , \quad EG \cos \theta \equiv \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v , \quad G^2 \equiv \mathfrak{x}_v^2 , \quad (5)$$

und der Punkt bedeutet die Ableitung nach dem Kurvenparameter t . Die rechte Seite von (4) stellt bekanntlich die sogenannte *erste Hauptform* der Fläche dar und θ ist offenbar der Zwischenwinkel der Parameterlinien.

Führen wir nun die Bogenlänge s als Kurvenparameter ein und symbolisieren wir die Ableitung nach ihr durch einen Strich, so wird der von der Kurve (3) getragene Flächenstreifen üblicherweise analytisch dargestellt durch das orthonormierte Dreibein aus Tangentenvektor \mathfrak{t} , Normalenvektor \mathfrak{N} und „Seitenvektor“ \mathfrak{s} :

$$\mathfrak{t} \equiv \mathfrak{x}' , \quad \mathfrak{N} \equiv \mathfrak{N}(s) , \quad \mathfrak{s} \equiv [\mathfrak{t}, \mathfrak{N}] . \quad (6)$$

Die Ableitungsgleichungen dieses Dreibeins haben notwendigerweise die Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}' &= x_g \mathfrak{t} - \tau_g \mathfrak{N} \\ \mathfrak{t}' &= -x_g \mathfrak{s} + x_n \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N}' &= \tau_g \mathfrak{s} - x_n \mathfrak{t} \end{aligned} \quad (7)$$

Die hier auftretenden skalaren Kombinationszahlen x_g , x_n und τ_g sind durch das System (7) als orthogonale Invarianten definiert und heißen bekanntlich geodätische Krümmung, Normalschnittkrümmung und geodätische Torsion.

Nebenbei bemerkt ist hier zu beachten, daß man im System (7) von der Bezugnahme auf die Fläche absehen und statt dessen x_g , x_n und τ_g als Funktionen von s vorgeben kann. Dann definiert dasselbe einen freien Flächenstreifen.

Der Nutzen des Systems (7) liegt vor allem in dem Umstande, daß sämtliche in ihm auftretende Größen eine unmittelbare geometrische Bedeutung haben. Der Gedanke liegt also nahe, das System gerade auf die Parameterlinien anzuwenden, indem man zum Beispiel etwa \mathfrak{t} mit

$\frac{x_v}{G}$ identifiziert. Dann aber erweist sich das System insofern als dem Parameternetz schlecht angepaßt, als für $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ der Seitenvektor s nicht mit $\frac{x_u}{E}$ zusammenfällt.

Um hier nun den erforderlichen Spielraum zu gewinnen, empfiehlt es sich, den Seitenvektor s in (6) durch den schiefen Vektor

$$r = \cos \theta t + \sin \theta s \quad (8)$$

zu ersetzen, wobei nun θ denjenigen Winkel bedeutet, um den man r in der Ebene (s, t) in positivem Sinne drehen muß, bis er mit t zusammenfällt.

Vereinfachen wir noch unsere Bezeichnungen gemäß

$$x_g \rightarrow \gamma, \quad x_n \rightarrow x, \quad \tau_g \rightarrow \tau \quad (9)$$

und führen wir überdies die Hilfsgröße

$$\Gamma \equiv \gamma - \theta' \quad (10)$$

ein, so ergibt die Umrechnung vom System (6) auf das System

$$r, \quad t, \quad \mathfrak{N} = \frac{[r, t]}{\sin \theta} \quad (11)$$

an Stelle der Gleichungen (7) folgende Gleichungen :

$$\begin{aligned} r' &= -\Gamma \cotg \theta r + \frac{\Gamma}{\sin \theta} t + (x \cos \theta - \tau \sin \theta) \mathfrak{N} \\ t' &= -\frac{\gamma}{\sin \theta} r + \gamma \cotg \theta t + x \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N}' &= \frac{\tau}{\sin \theta} r - (x + \tau \cotg \theta) t \end{aligned} \quad (12)$$

Das Dreibein (11) ist nach Definition *rechtsgeschraubt*. Es kann aber unter Umständen zweckdienlich sein, dasselbe *linksgeschraubt* anzusetzen, und zwar unter Beibehaltung der Normalen \mathfrak{N} . Zu diesem Zwecke müssen offenbar im Vektorprodukt (11) die Faktoren r und t vertauscht werden, während gleichzeitig der Winkel θ in $-\theta$ umzuschlagen hat.

Also : Die den Gleichungen (12) entsprechenden Gleichungen für ein *linksgeschraubtes* System

$$r, \quad t, \quad \mathfrak{N} = \frac{[t, r]}{\sin \theta} \quad (13)$$

ergeben sich aus (12), indem man die Substitution

$$\theta \rightarrow -\theta \quad (14)$$

ausführt.

§3. Die Ableitungsgleichungen einer Fläche

Das System (12) wenden wir jetzt an auf die Parameterlinien eines beliebigen Netzes. Für die Krümmungsgrößen der u -Linien ($v = \text{konst}$) setzen wir in Analogie zu (9), § 2

$$x_{g_1} \equiv \gamma_1, \quad x_{n_1} \equiv x_1, \quad \tau_{g_1} \equiv \tau_1 \quad (1)$$

und für die Krümmungsgrößen der v -Linien entsprechend

$$x_{g_2} \equiv \gamma_2, \quad x_{v_2} \equiv x_2, \quad \tau_{g_2} \equiv \tau_2. \quad (2)$$

Für die invarianten Ableitungen nach den Bogenlängen der u - respektive v -Linien haben wir also nach (5), § 2 einzuführen die Operatoren

$$D_u \equiv \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial u}, \quad D_v \equiv \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (3)$$

Als ein dem Parameternetz angepaßtes Dreibein erhalten wir nun schließlich die Vektoren

$$\mathbf{r} \equiv D_u \mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \equiv D_v \mathbf{x}, \quad \mathfrak{N} \equiv \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{t}]}{\sin \theta}. \quad (4)$$

Das System (12) von § 2 liefert nun bei Anwendung auf die v -Linien gemäß (2) § 2 den richtigen Umlaufsinn und führt so auf das nachgestellte System (7). Bei Anwendung auf die u -Linien aber vertauschen die Vektoren \mathbf{r} und \mathbf{t} ihre Rollen und mit ihnen auch alle Indizes 1 und 2. Dadurch schlägt aber auch der Umlaufsinn des Systems um, und nach der Schlußbemerkung von § 2 haben wir also überdies θ in $-\theta$ überzuführen, um aus dem nachgestellten System (7) das vorausgestellte System (6) zu erhalten.

Speziell für die der Definition (10) von § 2 entsprechenden Hilfsgrößen Γ_1 und Γ_2 gelten daher die Definitionen

$$\Gamma_1 \equiv \gamma_1 + D_u \theta, \quad \Gamma_2 \equiv \gamma_2 - D_v \theta. \quad (5)$$

Als Ableitungsgleichungen ergeben sich also folgende Systeme:

$$\begin{aligned} D_u \mathbf{r} &= -\gamma_1 \cotg \theta \mathbf{r} + \frac{\gamma_1}{\sin \theta} \mathbf{t} + x_1 \mathfrak{N} \\ D_u \mathbf{t} &= -\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} \mathbf{r} + \Gamma_1 \cotg \theta \mathbf{t} + (x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) \mathfrak{N} \\ D_u \mathfrak{N} &= -(x_1 - \tau_1 \cotg \theta) \mathbf{r} - \frac{\tau_1}{\sin \theta} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
D_v \mathbf{r} &= -\Gamma_2 \cotg \theta \mathbf{r} + \frac{\Gamma_2}{\sin \theta} \mathbf{t} + (x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) \mathfrak{N} \\
D_v \mathbf{t} &= -\frac{\gamma_2}{\sin \theta} \mathbf{r} + \gamma_2 \cotg \theta \mathbf{t} + x_2 \mathfrak{N} \\
D_v \mathfrak{N} &= \frac{\tau_2}{\sin \theta} \mathbf{r} - (x_2 + \tau_2 \cotg \theta) \mathbf{t}
\end{aligned} \tag{7}$$

Da diese beiden Systeme explizite den Winkel θ und nach der Definition (3) der Operatoren D_u und D_v überdies die Größen E und G enthalten, muß für ihre rechnerische Handhabung mindestens die erste Hauptform vorgegeben sein.

Mit dieser Vorgabe wollen wir uns aber auch begnügen und nun prüfen, welchen Einfluß diese Vorgabe auf die in den rechten Seiten enthaltenen Krümmungsgrößen $\gamma_1, \gamma_2, x_1, x_2, \tau_1, \tau_2$ hat.

Berechnet man die Skalarprodukte $\mathbf{r}D_u \mathbf{t}$ und $\mathbf{t}D_v \mathbf{r}$ einmal gestützt auf (4) in Verbindung mit (5) § 2, ein andermal aber gestützt auf die rechten Seiten von (6) und (7), so ergibt der Vergleich die Beziehungen

$$\Gamma_1 = \cotg \theta \frac{D_u G}{G} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{D_v E}{E}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{D_u G}{G} - \cotg \theta \frac{D_v E}{E}. \tag{8}$$

In Verbindung mit (5) kennen wir daher die geodätischen Krümmungen γ_1 und γ_2 der Parameterlinien.

Dasselbe Verfahren auf die Skalarprodukte $\mathbf{t}D_u \mathbf{r}$ und $\mathbf{r}D_v \mathbf{t}$ liefert direkt die γ_1 und γ_2 , also nichts Neues.

Zu (8) notieren wir noch die gelegentlich benötigte Auflösung

$$\frac{D_u G}{G} = -\Gamma_1 \cotg \theta + \frac{\Gamma_2}{\sin \theta}, \quad \frac{D_v E}{E} = -\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} + \Gamma_2 \cotg \theta. \tag{9}$$

Die Skalarprodukte $\mathfrak{N}D_u \mathbf{r}$ und $\mathfrak{N}D_v \mathbf{t}$ lassen wir auf der Seite, da ihre doppelte Auswertung die Vorgabe der zweiten Hauptform erfordern würde.

Dagegen benötigen wir die leicht ersichtliche Symmetrierelation $\mathfrak{N}D_u \mathbf{t} = \mathfrak{N}D_v \mathbf{r}$, welche mit den rechten Seiten von (6) und (7) die Relation

$$x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta = x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta \tag{10}$$

ergibt.

Zusammenfassend ergibt sich das Resultat: Nach Vorgabe der ersten Hauptform sind die geodätischen Krümmungen γ_1 und γ_2 gemäß (5) und (8) bestimmt, während zwischen den Normalschnittkrümmungen x_1 und x_2 und den geodätischen Torsionen τ_1 und τ_2 nur noch die Relation (10) besteht.

Nachträglich ziehen wir nun noch für Identifikationszwecke die zweite Hauptform heran :

$$\mathfrak{N}\ddot{x} \equiv L \dot{u}^2 + 2M \dot{u} \dot{v} + N \dot{v}^2 \quad (11)$$

respektive

$$L \equiv \mathfrak{N} x_{uu} , \quad M \equiv \mathfrak{N} x_{uv} , \quad N \equiv \mathfrak{N} x_{vv} \quad (12)$$

Gestützt auf (4), (6) und (7) erhält man

$$\left. \begin{aligned} L &= E^2 x_1 \\ M &= EG(x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) = EG(x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) \\ N &= G^2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

In Verbindung mit (5) § 2 ergeben sich aus den klassischen Formeln

$$K = \frac{LN - M^2}{E^2 G^2 \sin^2 \theta} \quad (14)$$

und

$$H = \frac{E^2 N - 2EG \cos \theta M + G^2 L}{2E^2 G^2 \sin^2 \theta} \quad (15)$$

für die Gaußsche Krümmung K und die mittlere Krümmung H die Werte

$$K = x_1 x_2 + \tau_1 \tau_2 + (x_1 \tau_2 - x_2 \tau_1) \cotg \theta \quad (16)$$

und

$$H = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) \cotg \theta . \quad (17)$$

§ 4. Die Integrabilitätsbedingungen

Aus den Definitionen (3) von § 3 folgt

$$D_u D_v \equiv \frac{1}{EG} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{D_u G}{G} D_v \quad (1)$$

$$D_v D_u \equiv \frac{1}{GE} \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} - \frac{D_v E}{E} D_u \quad (2)$$

Also haben wir den Kommutator

$$D_v D_u - D_u D_v \equiv \frac{D_u G}{G} D_v - \frac{D_v E}{E} D_u . \quad (3)$$

Nach (9), § 3 können wir dafür schreiben

$$D_v D_u - D_u D_v \equiv \left(\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} - \Gamma_2 \cotg \theta \right) D_u + \left(\frac{\Gamma_2}{\sin \theta} - \Gamma_1 \cotg \theta \right) D_v . \quad (4)$$

Jetzt sind wir in der Lage, die Integrabilitätsbedingungen für die Ableitungsgleichungen (6) und (7) des vorausgehenden Paragraphen aufzustellen. Wir haben einfach für jeden Vektor \mathfrak{v} des Dreibeins $(\mathfrak{r}, \mathfrak{t}, \mathfrak{N})$ die Relation

$$(D_v D_u - D_u D_v) \mathfrak{v} = D_v(D_u \mathfrak{v}) - D_u(D_v \mathfrak{v}) \quad (5)$$

auszuwerten. Dabei gelangen rechts zweimal die Ableitungsgleichungen zur Anwendung, links aber zuerst der Kommutator (4) und hierauf einmal die Ableitungsgleichungen.

Damit ist der Gang der Rechnung vorgezeichnet. Es genügt, den ganzen Prozeß am Vektor \mathfrak{r} durchzuführen. Das Resultat des analogen Prozesses für den Vektor \mathfrak{t} erhält man auf Grund der in den Ableitungsgleichungen liegenden Symmetrie: Man vertauscht die Vektoren \mathfrak{r} und \mathfrak{t} , sowie die Indizes 1 und 2 und führt θ in $-\theta$ über. Der Prozeß für den Vektor \mathfrak{N} schließlich liefert keine neuen Relationen mehr.

Wir notieren die Resultate in der Reihenfolge, wie sie sich ergeben, wenn man nacheinander die Komponenten in \mathfrak{r} , \mathfrak{t} und \mathfrak{N} vergleicht: Wir erhalten so die Integrabilitätsbedingungen in einer ersten Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D_v \Gamma_1 - D_u \gamma_2 - \left[\left(\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} - \Gamma_2 \cotg \theta \right) \Gamma_1 + \left(\frac{\Gamma_2}{\sin \theta} - \Gamma_1 \cotg \theta \right) \gamma_2 \right]}{\sin \theta} &= K \\ \frac{D_v \gamma_1 - D_u \Gamma_2 - \left[\left(\frac{\Gamma_2}{\sin \theta} - \Gamma_1 \cotg \theta \right) \Gamma_2 + \left(\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} - \Gamma_2 \cotg \theta \right) \gamma_1 \right]}{\sin \theta} &= K \end{aligned} \right\} (6)$$

und

$$\left. \begin{aligned} D_v x_1 - \cos \theta D_u x_2 + \sin \theta D_u \tau_2 &= \left(\frac{\Gamma_1}{\sin \theta} - \Gamma_2 \cotg \theta \right) (x_1 - x_2) + \Gamma_2 (\tau_1 - \tau_2) \\ D_u x_2 - \cos \theta D_v x_1 - \sin \theta D_v \tau_1 &= \left(\frac{\Gamma_2}{\sin \theta} - \Gamma_1 \cotg \theta \right) (x_1 - x_2) + \Gamma_1 (\tau_2 - \tau_1) \end{aligned} \right\} (7)$$

Das System (6) stellt die *Gaußsche Gleichung* in zwei verschiedenen Gestalten dar, denn die Differenz der linken Seiten verschwindet identisch mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) von § 3 und die Kommutatorgleichung (4) dieses Paragraphen.

Das System (7) stellt die *Codazzischen Gleichungen* dar.

Führt man jetzt in diesen Gleichungen die Relationen (9) aus § 3 ein, so gelangt man durch elementare, zum Teil partielle Umformungen zu folgenden vereinfachten Gleichungen:

$$\frac{(E \Gamma_1)_v - (G \gamma_2)_u}{EG \sin \theta} = K, \quad \frac{(E \gamma_1)_v - (G \Gamma_2)_u}{EG \sin \theta} = K \quad (8)$$

und

$$\left. \begin{aligned} & (E x_1)_v - [G(x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta)]_u \\ & = EG \{ \Gamma_2 \tau_1 - \gamma_1(x_2 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta) \} \\ & (G x_2)_u - [E(x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta)]_v \\ & = EG \{ \Gamma_1 \tau_2 - \gamma_2(-x_1 \sin \theta + \tau_1 \cos \theta) \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Um die Integrabilitätsbedingungen jederzeit gebrauchsfertig zur Verfügung zu haben, notiere ich an dieser Stelle noch einmal die zu ihrer Handhabung unerläßlichen aber schon früher aufgestellten Definitionen und Relationen:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \cotg \theta \frac{D_u G}{G} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{D_v E}{E} \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{D_u G}{G} - \cotg \theta \frac{D_v E}{E} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\gamma_1 = \Gamma_1 - D_u \theta \qquad \gamma_2 = \Gamma_2 + D_v \theta \quad (11)$$

$$x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta = x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta . \quad (12)$$

$$K \equiv x_1 x_2 + \tau_1 \tau_2 + (x_1 \tau_2 - x_2 \tau_1) \cotg \theta . \quad (13)$$

$$H \equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2) - \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau_2) \cotg \theta . \quad (14)$$

§ 5. Kurven auf der Fläche

Wir betrachten jetzt beliebige Kurven auf der Fläche bezogen auf ihre Bogenlänge s als Parameter:

$$\mathbf{x}(s) \equiv \mathbf{x}[u(s), v(s)] . \quad (1)$$

Ihr Tangentenvektor sei bezeichnet mit \mathfrak{T} , so daß nach früher getroffenen Festsetzungen gilt

$$\mathfrak{T} \equiv \mathbf{x}' = E u' \mathbf{r} + G v' \mathbf{t} . \quad (2)$$

Bezeichnen wir mit α denjenigen Winkel, um den man den Vektor \mathbf{r} in positivem Sinne drehen muß, bis er mit \mathfrak{T} zusammenfällt, so gilt nach der Geometrie des schiefwinkligen Dreiecks

$$\mathfrak{T} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \mathbf{r} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \mathbf{t} . \quad (3)$$

Der Vergleich mit (2) ergibt daher

$$E u' = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \quad G v' = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} . \quad (4)$$

Wie in § 2 bezeichne ich geodätische Krümmung, Normalschnittkrüm-

mung und geodätische Torsion unserer Kurve (1) mit γ , x und τ . Der Unterschied gegenüber der Situation in § 2 besteht nur darin, daß an Stelle von t und θ daselbst jetzt \mathfrak{I} und α zu treten haben. Statt der Definitionen (10) in § 2 erscheint daher die Definition

$$\Gamma \equiv \gamma - \alpha' \quad (5)$$

und das System (12) von § 2 muß ersetzt werden durch

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}' &= -\Gamma \cotg \alpha \mathbf{r} + \frac{\Gamma}{\sin \alpha} \mathfrak{I} + (x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \mathfrak{N} \\ \mathfrak{I}' &= -\frac{\gamma}{\sin \alpha} \mathbf{r} + \gamma \cotg \alpha \mathfrak{I} + x \mathfrak{N} \\ \mathfrak{N}' &= \frac{\tau}{\sin \alpha} \mathbf{r} - (x + \tau \cotg \alpha) \mathfrak{I} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ist nun $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u, v)$ ein beliebiges Vektorfeld auf der Fläche, so gilt auf unserer Kurve (1)

$$\mathbf{v}(s) \equiv \mathbf{v}[u(s), v(s)] \quad (7)$$

und aus (4) folgt unmittelbar nach den früheren Festsetzungen

$$\mathbf{v}' = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} D_u \mathbf{v} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} D_v \mathbf{v} . \quad (8)$$

Diese Relation wenden wir nun an auf die Vektoren \mathbf{r}' und \mathfrak{N}' in der ersten und dritten Gleichung von (6). Hierauf eliminieren wir in den genannten Gleichungen \mathfrak{I} mit Hilfe von (3), und die invarianten Ableitungen $D_u \mathbf{r}$, $D_u \mathfrak{N}$, $D_v \mathbf{r}$, $D_v \mathfrak{N}$ mit Hilfe der Ableitungsgleichungen (6) und (7) von § 3, worauf der Komponentenvergleich folgende Relationen liefert :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \gamma_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \Gamma_2 \\ x \cos \alpha - \tau \sin \alpha &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} x_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} (x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) \\ x \sin \alpha + \tau \cos \alpha &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \tau_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} (x_2 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Gleichwertig mit (9) sind die Relationen

$$\left. \begin{aligned} \Gamma + \theta' &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \gamma_2 + \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \Gamma_1 \\ x \cos(\theta - \alpha) + \tau \sin(\theta - \alpha) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} x_2 + \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} (x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) \\ -x \sin(\theta - \alpha) + \tau \cos(\theta - \alpha) &= \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \tau_2 + \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} (-x_1 \sin \theta + \tau_1 \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Man erhält dieselben, wenn man in der ganzen Konstruktion nicht den Vektor r , sondern den Vektor t als Richtungsbasis wählt. Doch kann man (10) auch ohne Rechnung erhalten, indem man — gestützt auf die vorhandenen Symmetrien — in (9) r und t , sowie die Indizes 1 und 2 vertauscht und gleichzeitig θ in $-\theta$, sowie α in $-(\theta - \alpha)$ überführt.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung ist es zweckmäßig, aus (9) und (10) je die beiden ersten Gleichungen auszuwählen und in einer besonderen Tafel zusammenzustellen. Eliminiert man dabei noch Γ mit Hilfe von (5), so ergibt sich folgendes Resultat :

$$\left. \begin{aligned} \gamma - \alpha' &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \gamma_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \Gamma_2 \\ \gamma - \alpha' + \theta' &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \Gamma_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \gamma_2 \\ x \cos \alpha - \tau \sin \alpha &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} x_1 + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} (x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) \\ x \cos(\theta - \alpha) + \tau \sin(\theta - \alpha) &= \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} (x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} x_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen von (11) berechnen wir schließlich noch die expliziten Werte der Normalschnittkrümmung x und der geodätischen Torsion τ zu

$$x = \frac{\sin(\theta - \alpha) \cos \alpha x_1 + \cos(\theta - \alpha) \sin \alpha x_2}{\sin \theta} + \frac{\sin(\theta - \alpha) \sin \alpha}{\sin \theta} (\tau_1 - \tau_2), \quad (12)$$

$$\tau = \frac{\sin(\theta - \alpha) \cos \alpha \tau_1 + \cos(\theta - \alpha) \sin \alpha \tau_2}{\sin \theta} - \frac{\sin(\theta - \alpha) \sin \alpha}{\sin \theta} (x_1 - x_2). \quad (13)$$

Wegen (12) § 4 kann (13) auch ersetzt werden durch

$$\tau = \frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \cdot \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} - \frac{\cos(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}. \quad (14)$$

§ 6. Integralsätze

Verbindet man die Integrabilitätsbedingungen (8) und (9) von § 4 mit den Formeln (11) von § 5, so erhält man mühelos die Integralformel von Bonnet und zwei weitere Integralformeln.

Wir betrachten ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld auf der Fläche. Seine Komponenten bezogen auf das Parameternetz seien $X(u, v)$ und $Y(u, v)$, so daß also

$$d\Phi \equiv X(u, v) du + Y(u, v) dv \quad (1)$$

eine lineare Differentialform darstellt.

Der Integralsatz von Gauß hat dann die Gestalt

$$\oint X du + Y dv = \iint (Y_u - X_v) dudv . \quad (2)$$

Aus den Relationen (11) und (4) von § 5 entnehmen wir nun ohne weiteres folgende drei Differentialformeln :

$$\left. \begin{aligned} \gamma ds &= E\gamma_1 du + G\Gamma_2 dv + d\alpha \\ &= E\Gamma_1 du + G\gamma_2 dv + d\alpha - d\theta \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$(x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) ds = E x_1 du + G(x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) dv , \quad (4)$$

$$[x \cos (\theta - \alpha) + \tau \sin (\theta - \alpha)] = E(x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) du + G x_2 dv . \quad (5)$$

Umläuft also unsere Kurve ein einfach zusammenhängendes Flächenstück in positivem Sinne, so erfährt der Winkel α die Variation 2π , während die Variation des Winkels θ Null ist.

Wir können weiter annehmen, daß in jedem einzelnen Falle der Winkel θ positiv bewertet sei und dementsprechend das positive Flächenelement

$$do = EG \sin \theta dudv \quad (6)$$

einführen.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt nun die Anwendung der Formeln (1) bis (5) auf die Integrabilitätsbedingungen (8) und (9) von § 4 unmittelbar folgende Integralformeln :

$$\oint \gamma ds = 2\pi - \int K do \quad (7)$$

$$\oint (x \cos \alpha - \tau \sin \alpha) ds = \int \frac{\gamma_1 (x_2 \sin \theta + \tau_2 \cos \theta) - \Gamma_2 \tau_1}{\sin \theta} do \quad (8)$$

$$\oint [x \cos (\theta - \alpha) + \tau \sin (\theta - \alpha)] ds = \int \frac{\gamma_2 (x_1 \sin \theta - \tau_1 \cos \theta) + \Gamma_1 \tau_2}{\sin \theta} do . \quad (9)$$

Die Integralformel (7) von Bonnet ist absolut invariant gegenüber beliebigen Transformationen des Parameternetzes. Die Integralformeln (8) und (9) aber sind *halbinvariant* in folgendem Sinne : Die Formel (8) ist unabhängig von der Wahl der v -Linien, die Formel (9) ist unabhängig von der Wahl der u -Linien, da das Entsprechende für die Differentialformen (4) und (5) gilt.

Zur geometrischen Interpretation der Differentialformen (4) und (5) mag folgender Hinweis dienlich sein : Ist

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(s) \quad (10)$$

ein beliebiger längs unserer Kurve erklärter stetig differenzierbarer Ein-

heitsvektor und δ derjenige Winkel, um den man \mathfrak{v} in positivem Sinne drehen muß, bis er mit dem Tangentenvektor \mathfrak{T} unserer Kurve zusammenfällt, so gilt

$$\mathfrak{v} = \sin \delta \mathfrak{s} + \cos \delta \mathfrak{T} \quad (11)$$

wo

$$\mathfrak{s} = [\mathfrak{T}, \mathfrak{N}] \quad (12)$$

der Seitenvektor unserer Kurve ist.

Andererseits gilt nach unseren Festsetzungen über den Flächenstreifen in § 2 $\mathfrak{N}' = \tau_g \mathfrak{s} - x_n \mathfrak{T}$ oder, in der vereinfachten Bezeichnung

$$\mathfrak{N}' = \tau \mathfrak{s} - x \mathfrak{T} . \quad (13)$$

Also folgt $\mathfrak{N}' \mathfrak{v} = \tau \sin \delta - x \cos \delta$ oder, wegen $\mathfrak{N} \mathfrak{v} = 0$

$$\mathfrak{N} \mathfrak{v}' = x \cos \delta - \tau \sin \delta . \quad (14)$$

Je nachdem man also \mathfrak{v} mit \mathfrak{r} oder \mathfrak{t} identifiziert, erhält man

$$\mathfrak{N} \mathfrak{r}' = x \cos \alpha - \tau \sin \alpha , \quad (15)$$

oder

$$\mathfrak{N} \mathfrak{t}' = x \cos (\theta - \alpha) + \tau \sin (\theta - \alpha) . \quad (16)$$

Die Beziehung (15) bestätigt man direkt an Hand von (6) in § 5 und (16) ist das Seitenstück zu (15) im Sinne der schon verschiedentlich erörterten Symmetrie im ganzen System.

Die Differentialformen (4) und (5) liefern also das infinitesimale Maß für die senkrechte Abweichung der Koordinatenvektoren \mathfrak{r} und \mathfrak{t} von der Tangentialebene bei Verschiebung des Dreibeins $(\mathfrak{r}, \mathfrak{t}, \mathfrak{N})$ längs unserer Kurve.

Es ist instruktiv, daneben die Spezialisierung $\mathfrak{v} = \mathfrak{T}$ zu betrachten. Nach (6) § 2 folgt

$$\mathfrak{N} \mathfrak{T}' = x . \quad (17)$$

Aus (12) § 5 ersieht man, daß $x ds$ keine lineare Differentialform ist. Dagegen ergibt die Berechnung unter ständiger Beachtung von (4) § 5, daß $x ds^2$ eine quadratische Differentialform ist:

$$\left. \begin{aligned} x ds^2 = & E^2 x_1 du^2 + G^2 x_2 dv^2 \\ & + EG(x_1 \cos \theta + \tau_1 \sin \theta) dudv \\ & + EG(x_2 \cos \theta - \tau_2 \sin \theta) dudv \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Damit sind wir auf einem Umwege wieder zur Darstellung der zweiten Hauptform gemäß den Formeln (11) bis (13) von § 5 gelangt. In der Tat haben wir ja nach (11) § 3 für die Bogenlänge als Parameter

$$\mathfrak{N} \ddot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{N} \mathfrak{x}'' = \mathfrak{N} \mathfrak{T}' = x . \quad (19)$$

§ 7. Unabhängige Krümmungsgrößen

Die vier Linienkrümmungen x_1 , x_2 , τ_1 und τ_2 sind durch die Relation (10) von § 2 gebunden. Für gewisse Rechnungen empfiehlt es sich, diese Abhängigkeit zu beseitigen. Wir schreiben sie zu diesem Zwecke in der Gestalt

$$\tau_1 + \tau_2 = -(x_1 - x_2) \cotg \theta \quad (1)$$

und führen folgende unabhängige Krümmungsgrößen ein :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{2} (x_1 + x_2) \\ \mu &\equiv \frac{1}{2} (x_1 - x_2) \\ \nu &\equiv \frac{1}{2} (\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir nun

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \lambda + \mu \\ x_2 &= \lambda - \mu \\ \tau_1 &= \nu - \mu \cotg \theta \\ \tau_2 &= -\nu - \mu \cotg \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

und die Relation (1) ist identisch erfüllt.

Für die Normalschnittkrümmung x und die geodätische Torsion τ einer beliebigen Kurve auf der Fläche erhalten wir nun aus den Formeln (12) und (14) von § 5

$$\left. \begin{aligned} x &= \lambda - \nu \cotg \theta + \frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \mu + \frac{\cos(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \nu \\ \tau &= -\frac{\cos(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \mu + \frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{\sin \theta} \nu. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für die mittlere Krümmung H und die Gaußsche Krümmung K erhalten wir weiter aus (16) und (17) von § 3

$$\left. \begin{aligned} H &= \lambda - \nu \cotg \theta \\ K &= (\lambda - \nu \cotg \theta)^2 - \frac{\mu^2 + \nu^2}{\sin^2 \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Das System (5) gibt Anlaß, die Krümmungsgrößen λ , μ und ν soweit als möglich durch die absoluten Invarianten H und K auszudrücken. Dabei empfiehlt es sich, zur Vereinfachung der Schreibweise eine Hilfsinvariante J einzuführen gemäß

$$J^2 \equiv H^2 - K. \quad (6)$$

Jetzt kann (5) geschrieben werden in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} H &= \lambda - \nu \cotg \theta \\ J^2 &= \frac{\mu^2 + \nu^2}{\sin^2 \theta}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und (4) geht über in

$$\left. \begin{aligned} x &= H + \frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{\sin\theta} \mu + \frac{\cos(\theta - 2\alpha)}{\sin\theta} \nu \\ \tau &= -\frac{\cos(\theta - 2\alpha)}{\sin\theta} \mu + \frac{\sin(\theta - 2\alpha)}{\sin\theta} \nu. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die zweite Gleichung von (7) schließlich gibt Anlaß, einen Hilfswinkel ω einzuführen derart, daß (7) übergeht in

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= H + J \cos\theta \cos\omega \\ \mu &= J \sin\theta \sin\omega \\ \nu &= J \sin\theta \cos\omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

An Stelle von (3) erhalten wir damit das System

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= H + J \cos(\omega - \theta) & x_2 &= H + J \cos(\omega + \theta) \\ \tau_1 &= -J \sin(\omega - \theta) & \tau_2 &= -J \sin(\omega + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Das System (8) aber geht über in

$$\left. \begin{aligned} x &= H + J \cos(\omega - \theta + 2\alpha) \\ \tau &= -J \sin(\omega - \theta + 2\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Damit sind die nicht absolut invarianten Elemente in den Linienkrümmungen auf die Winkel ω , θ und α reduziert.

Aus (11) folgt die absolut invariante Relation

$$(x - H)^2 + \tau^2 = J^2, \quad (12)$$

die wegen (6) auch geschrieben werden kann in der Gestalt

$$x^2 + \tau^2 - 2Hx + K = 0. \quad (13)$$

§ 8. Die dritte Hauptform

Als „dritte Hauptform“ einer Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ bezeichnet man bekanntlich die erste Hauptform ihres Normalenbildes

$$\text{III} \equiv \mathfrak{N}^2. \quad (1)$$

Wir können jetzt die bekannte Tatsache, daß die drei Hauptformen einer Fläche

$$\left. \begin{aligned} \text{I} &\equiv \dot{\mathfrak{x}}^2 &= E^2 \dot{u}^2 + 2EG \cos\theta \dot{u}\dot{v} + G^2 \dot{v}^2 \\ \text{II} &\equiv -\mathfrak{N}\dot{\mathfrak{x}} &= L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 \\ \text{III} &\equiv \mathfrak{N}^2 &= e^2 \dot{u}^2 + 2eg \cos\vartheta \dot{u}\dot{v} + g^2 \dot{v}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

linear abhängig sind ohne jede Spezialisierung direkt berechnen.

Aus (10) § 7 und (13) § 3 erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} L &= E^2[H + J \cos(\omega - \theta)] \\ M &= EG[H \cos \theta + J \cos \omega] \\ N &= G^2[H + J \cos(\omega + \theta)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Weiter erhalten wir für (1) im Sinne von (2) wegen $\mathfrak{N}_u = ED_u \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_v = GD_v \mathfrak{N}$ gestützt auf (6) und (7) von § 3, sowie auf (10) § 7

$$\left. \begin{aligned} e^2 &= E^2[H^2 + J^2 + 2HJ \cos(\omega - \theta)] \\ eg \cos \vartheta &= EG[(H^2 + J^2) \cos \theta + 2HJ \cos \omega] \\ g^2 &= G^2[H^2 + J^2 + 2HJ \cos(\omega + \theta)] . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Aus (2) und (3) aber folgt

$$II \equiv HI + J[E^2 \cos(\omega - \theta) \dot{u}^2 + 2EG \cos \omega \dot{u} \dot{v} + G^2 \cos(\omega + \theta) \dot{v}^2]. \quad (5)$$

Analog folgt aus (2) und (4)

$$III \equiv (H^2 + J^2) I + 2HJ [E^2 \cos(\omega - \theta) \dot{u}^2 + 2EG \cos \omega \dot{u} \dot{v} + G^2 \cos(\omega + \theta) \dot{v}^2] . \quad (6)$$

Aus (5) und (6) aber folgt

$$III - 2HI \equiv (J^2 - H^2) I ,$$

also wegen (6) § 7

$$III \equiv -KI + 2HI . \quad (7)$$

Die Frage stellt sich jetzt, ob man durch lineare Kombination aus I und II ein reines Quadrat erzeugen könne, dessen Basis dann offenbar eine invariante Linearform sein muß.

Die Rechnung ergibt nach (5) :

$$I - \frac{II}{H - J} \equiv -\frac{2J}{H - J} \Phi^2 , \quad (8)$$

$$I - \frac{II}{H + J} \equiv \frac{2J}{H + J} \Psi^2 , \quad (9)$$

mit

$$\Phi \equiv E \cos\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \dot{u} + G \cos\left(\frac{\omega + \theta}{2}\right) \dot{v} , \quad (10)$$

und

$$\Psi \equiv E \sin\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \dot{u} + G \sin\left(\frac{\omega + \theta}{2}\right) \dot{v} , \quad (11)$$

wobei nun Φ und Ψ die gesuchten invarianten Linearformen sind.

Führt man durch

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad J = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad (12)$$

die beiden Hauptkrümmungen k_1 und k_2 der Fläche ein, so erhält man aus (8), (9), (10), (11) und (7) folgende Darstellung für die drei Hauptformen :

$$\left. \begin{aligned} \text{I} &\equiv \Phi^2 + \Psi^2 \\ \text{II} &\equiv k_1 \Phi^2 + k_2 \Psi^2 \\ \text{III} &\equiv k_1^2 \Phi^2 + k_2^2 \Psi^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Um eine geometrische Deutung der Linearformen Φ und Ψ zu erhalten, ziehen wir die Formeln (4) von § 5 heran. Dieselben lauten, wenn man sie auf einen beliebigen Parameter t bezieht

$$E \dot{u} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \sqrt{I} \quad ; \quad G \dot{v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \sqrt{I}. \quad (14)$$

Führt man (14) in (10) und (11) ein, so folgt

$$\Phi = \cos\left(\frac{\omega - \theta}{2} + \alpha\right) \sqrt{I} \quad ; \quad \Psi = \sin\left(\frac{\omega - \theta}{2} + \alpha\right) \sqrt{I}. \quad (15)$$

Setzt man diese Werte in (13) ein, so ergibt sich

$$\text{II} = \left[\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_1 - k_2}{2} \cos(\omega - \theta + 2\alpha) \right] I, \quad (16)$$

und

$$\text{III} = \left[\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \frac{k_1^2 - k_2^2}{2} \cos(\omega - \theta + 2\alpha) \right] I. \quad (17)$$

Wegen (12) ergeben sich daraus mit Rücksicht auf (11) § 7 die Formeln

$$II = x I \quad ; \quad III = (x^2 + \tau^2) I. \quad (18)$$

Die erste dieser Formeln ist wohlbekannt und wird gewöhnlich im Anschluß an die Definition der zweiten Hauptform hergeleitet.

Die beiden Linearformen geben offenbar wieder Anlaß zu zwei Integralsätzen, die wir schreiben wollen in der Gestalt

$$\oint \Phi dt = \iint S_1 EG \sin \theta du dv \quad (19)$$

und

$$\oint \Psi dt = \iint S_2 EG \sin \theta du dv. \quad (20)$$

wobei

$$S_1 \equiv \frac{\left[G \cos \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) \right]_u - \left[E \cos \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \right]_v}{EG \sin \theta} \quad (21)$$

und

$$S_2 \equiv \frac{\left[G \sin \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) \right]_u - \left[E \sin \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) \right]_v}{EG \sin \theta} \quad (22)$$

zwei absolute Invarianten der Fläche sind.

Um ihren Zusammenhang mit den bekannten Invarianten zu ermitteln, führen wir (12) in die Formeln (10) von § 7 ein und erhalten :

$$\cos \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{x_1 - k_2}{k_1 - k_2}} ; \quad \cos \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{x_2 - k_2}{k_1 - k_2}} , \quad (23)$$

$$\sin \left(\frac{\omega - \theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{k_1 - x_1}{k_1 - k_2}} ; \quad \sin \left(\frac{\omega + \theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{k_1 - x_2}{k_1 - k_2}} . \quad (24)$$

Wählt man die Krümmungslinien als Parameternetz, so gilt $\theta = \omega = \frac{\pi}{2}$ und mit Rücksicht auf (9) und (5) von § 3 folgt

$$S_1 = \gamma_1 , \quad S_2 = \gamma_2 . \quad (25)$$

Zum Schluß möge noch eine rationale Formel Platz finden, die den Zusammenhang zwischen dem Netzwinkel θ und seinem sphärischen Abbild ϑ liefert. Aus (4) findet man ohne Schwierigkeit

$$eg \sin \vartheta = EG(H^2 - J^2) \sin \theta . \quad (26)$$

Unter Beachtung von (12) ergibt sich daher weiter in Verbindung mit (4)

$$\cotg \vartheta = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} \right) \cotg \theta + \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right) \frac{\cos \omega}{\sin \theta} . \quad (27)$$

§ 9. Schlußbetrachtung

In einem zweiten Teil beabsichtige ich, einige ausgedehntere Anwendungen der hier entwickelten Grundgleichungen zu behandeln. An dieser Stelle begnüge ich mich, an zwei wohlbekannten Sätzen die Anwendung des nun geometrisch interpretierbaren Formalismus zu illustrieren.

Satz 1 (Liouville). *Trägt eine Fläche zwei einparametrische Scharen von geodätischen Linien, die sich unter konstantem Winkel schneiden, so ist die Gaußsche Krümmung Null.*

Beweis. Wir wählen die beiden Scharen als Koordinatennetz und finden alle erforderlichen Hilfsmittel in § 4. Nach Voraussetzung gilt

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \theta = \text{konst.}$$

Aus Gleichung (11) folgt daher auch

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$$

und die Gleichung (6) ergibt unmittelbar $K = 0$, w. z. b. w.

Satz 2. *Auf einer Fläche $K = -1$ bilden die Asymptotenlinien ein Tschebyschew-Netz.*

Beweis. Wir wählen die Asymptotenlinien als Koordinaten-Netz und finden wiederum die nötigen Hilfsmittel in § 4. Nach Konstruktion gilt

$$x_1 = x_2 = 0$$

und nach Voraussetzung ist $K = -1$. Aus den Gleichungen (12) und (13) folgt daher leicht

$$\tau_1 = -\tau_2 = \varepsilon; \quad \varepsilon^2 = 1,$$

und aus den Codazzischen Gleichungen (7) ergibt sich unmittelbar

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.$$

Aus (10) folgt daher weiter

$$E = E(u), \quad G = G(v)$$

und die Skalentransformationen

$$\bar{u} = \int E(u) du, \quad \bar{v} = \int G(v) dv$$

liefern $\bar{E} = \bar{G} = 1$, w. z. b. w.

Abschließend will ich zur besseren Orientierung des Lesers auf eine Reihe von bestimmten klassischen Problemen hinweisen, an denen man die Nützlichkeit der im Vorausgehenden entwickelten Methodik erproben kann.

1. *Die Bestimmung einer Fläche auf Grund ihrer ersten Hauptform (4) § 2 nach Vorgabe einer Raumkurve.* Alle Hilfsmittel finden sich in § 4. Man wähle das Parameternetz so, daß in ihm die vorgegebene Raumkurve auf die u -Linie $v = 0$ bezogen ist. Hierauf stelle man x_2 und τ_2 mit Hilfe der Relationen (12) und (13) explizite durch die Größen x_1, τ_1, θ und K dar. Führt man nun die gefundenen Ausdrücke in die Codazzischen Gleichungen (7) ein, so verwandeln sich dieselben in ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Funk-

tionen x_1 und τ_1 und die eindeutige Bestimmung der letzteren folgt aus klassischen Sätzen über partielle Differentialgleichungen.

2. *Verbiegung einer Fläche unter Erhaltung ihrer Krümmungslinien.*

Wir haben $\tau_1 = \tau_2 = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Gleichung (12) ist erfüllt und (13) liefert $x_2 = \frac{K}{x_1}$. Die Codazzischen Gleichungen ergeben ein totales System 1. Ordnung für x_1 . Seine Integrabilitätsbedingungen liefern diejenigen speziellen Flächen, für welche die verlangte Verbiegung möglich ist (Gesimsflächen).

3. *Die Verbiegung von Minimalflächen.* Man wähle ein isothermes Netz. Wegen $\theta = \frac{\pi}{2}$ liefert (12) $\tau_2 = -\tau_1$ und wegen $H = 0$ liefert (14) $x_2 = -x_1$. Die Gleichung (13) wird daher befriedigt durch den Ansatz

$$x_1 = \sqrt{-K} \cos \varphi ; \quad \tau_1 = \sqrt{-K} \sin \varphi$$

und die Codazzischen Gleichungen liefern ein totales System für φ . Aus demselben kann man direkt ersehen, daß eine einparametrische Schar von Biegungen möglich ist.

4. *Die Bestimmung derjenigen Flächen, welche zwei Geradenscharen enthalten.* Die Durchführung der Aufgabe gestaltet sich umfangreich, ist aber sehr instruktiv, weil der ganze Apparat in Bewegung gesetzt werden muß. Dank der durchgehenden Invarianz bringt die explizite Lösung die bekannte Beweglichkeit des Stangenmodells direkt zum Ausdruck.

Eine letzte Bemerkung. Die beiden invarianten linearen Differentialformen (10) und (11) in § 8 sind hier vermutlich zum erstenmal allgemein und explizite durch die Größen E , G , θ und ω dargestellt. Sie nehmen eine zentrale Stellung ein und eröffnen einen neuen Zugang zu den Krümmungsgrößen. Ganz allgemein habe ich festgestellt, daß man durch n invariante lineare Differentialformen in einer n -dimensionalen Koordinatenmannigfaltigkeit eine absolut invariante Differentialgeometrie erhält, die eine Mittelstellung zwischen der Euklidischen und der Riemannschen Geometrie einnimmt. Dieselbe liefert in ganz natürlicher Weise eine einheitliche Feldtheorie, welche besonders günstige Verhältnisse schafft für die Bedürfnisse der Feldphysik. Darüber werde ich an anderer Stelle berichten.*

(Eingegangen den 9. Juni 1953.)

*) Vgl. dazu: Grundlagen zu einer linearen Feldtheorie. Z. Physik **138**, 16 (1954).
Zur linearen Feldtheorie I. Z. Physik **139**, 44 (1954).