

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1955)  
  
**Artikel:** Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten.  
**Autor:** Hopf, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23283>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schlichte Abbildungen und lokale Modifikationen 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten

von HEINZ HOPF, Zürich

*Meinem verehrten Kollegen und Freund M. Plancherel  
zum siebenzigsten Geburtstag gewidmet*

## § 1. Einleitung

1. Diese Arbeit betrifft eine der zahlreichen Erscheinungen in der Theorie der analytischen Funktionen von zwei oder mehr komplexen Variablen, welche in der Theorie für eine einzige Variable kein Analogon haben: für  $m \geq 2$  gibt es analytische Abbildungen durch  $m$  Funktionen von  $m$  Variablen, bei welchen zwar für fast alle Bildpunkte die Urbilder nur aus endlich vielen Punkten bestehen, auf einige Ausnahmepunkte aber ganze analytische Flächen — die *Ausnahmemengen* — abgebildet werden. Das einfachste Beispiel ist die Abbildung des komplexen  $(x_1, x_2)$ -Zahlenraumes  $X$  in den  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraum  $Y$ , die durch

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 x_2 \quad (1)$$

gegeben ist: die Ebene  $x_1 = 0$  ist Ausnahmemenge, der Punkt  $y_1 = y_2 = 0$  der zugehörige Ausnahmepunkt, im übrigen ist die Abbildung eindeutig. Ähnliche Fälle liegen in der komplexen algebraischen Geometrie vor, wenn Flächen  $X$  durch rationale Transformationen so auf Flächen  $Y$  abgebildet sind, daß einzelne Kurven  $C$  von  $X$  in Punkte übergehen; dabei haben wir  $X$  und  $Y$  als komplexe Mannigfaltigkeiten von 4 reellen Dimensionen, die  $C$  als analytische Flächen von 2 reellen Dimensionen aufzufassen<sup>1)</sup>.

Unsere nachstehende Untersuchung wird sich nur auf den folgenden,

---

<sup>1)</sup> Unsere „Abbildungen“ sollen immer *eindeutig* sein. Bei der Heranziehung von Beispielen aus der algebraischen Geometrie ist Vorsicht am Platze, da man dort das Wort „Abbildung“ auch für Korrespondenzen gebraucht, die in keiner der beiden Richtungen eindeutig sind.



besonders einfachen Fall beziehen: *erstens wird die Abbildung „schlicht“* — in einem sogleich noch zu präzisierenden Sinne — *und zweitens wird  $m = 2$  sein*<sup>2)</sup>. Ferner werden wir uns weniger für die mögliche Verteilung der Ausnahmepunkte interessieren als für das Verhalten der Abbildung  $f$  in einem einzelnen solchen Punkt  $a$  und seiner Umgebung; daher dürfen wir (wenigstens vorläufig) annehmen, daß der Bildraum die Umgebung eines Punktes  $a$  im  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraum ist. Dagegen wollen wir die Ausnahmemenge  $A = f^{-1}(a)$  und ihre Umgebung nicht nur lokal, sondern im Großen studieren, und daher werden wir für die Räume  $X$ , die abgebildet werden, von vornherein beliebige komplexe Mannigfaltigkeiten zulassen, nicht nur Teilgebiete des Zahlenraumes<sup>3)</sup>. Die Situation, die wir betrachten, ist also die folgende:

Die 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit  $X$  ist durch die analytische Abbildung  $f$  in den komplexen  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraum abgebildet;  $f$  ist nicht konstant, das heißt, die Bildmenge  $f(X)$  besteht nicht nur aus einem einzigen Punkt.  $a$  ist ein fester Punkt aus  $f(X)$  und  $A = f^{-1}(a)$  sein Urbild in  $X$ ; die Menge  $X - A$  wird durch  $f$  eineindeutig abgebildet.

Dann sagen wir:  $f$  ist *schlicht* — oder auch, um deutlicher zu sein:  $f$  ist „*schlicht bis auf  $a$* “. Wenn  $A$  nur aus einem Punkt besteht, so ist  $f$  „*ausnahmslos schlicht*“; wenn  $A$  wenigstens zwei Punkte enthält, so ist  $A$  „*Ausnahmemenge*“, und  $a$  ist „*Ausnahmepunkt*“ von  $f$ .

2. Wir werden später die Ausnahmemengen  $A$  eingehend untersuchen; die einfachsten Eigenschaften wollen wir aber schon jetzt, zur vorläufigen Orientierung, feststellen.

Daß  $A$  abgeschlossen ist, folgt bereits aus der Stetigkeit von  $f$ . Die Menge  $A$  ist durch die beiden analytischen Gleichungen  $y_1(x) = a_1$ ,

<sup>2)</sup> Die Voraussetzung  $m = 2$  wird erst im § 3 wesentlich gebraucht werden.

<sup>3)</sup> Wie üblich verstehen wir unter einer  $n$ -dimensionalen (topologischen) Mannigfaltigkeit  $M^n$  einen zusammenhängenden Hausdorffschen Raum mit abzählbarer Umgebungsbasis, in dem die Punkte Umgebungen besitzen, welche mit dem Innengebiet der  $n$ -dimensionalen euklidischen Vollkugel homöomorph sind.  $M^{2m}$  heißt „komplex“ — genauer: „ist mit einer komplex-analytischen Struktur versehen“ —, wenn in den euklidischen Umgebungen der Punkte komplexe Parametersysteme  $(z_1, \dots, z_m)$ ,  $(w_1, \dots, w_m), \dots$  so eingeführt sind, daß die beim Übereinandergreifen solcher Systeme entstehenden Parametertransformationen analytisch sind. Der Begriff der Analytizität von Abbildungen einer komplexen  $M^{2m}$  in eine andere — also auch der Begriff der analytischen Funktion auf einer  $M^{2m}$  — ist in bezug auf spezielle lokale komplexe Parametersysteme erklärt, aber infolge der Analytizität der Parametertransformationen von den speziell benutzten Systemen unabhängig. — Jedes Teilgebiet einer komplexen  $M^{2m}$  ist selbst eine komplexe  $M^{2m}$ . — Die komplexen  $M^2$  sind die Riemannschen Flächen. — Literatur zur Einführung: z. B. [1].

$y_2(x) = a_2$  definiert, wobei  $a_1, a_2$  die Koordinaten von  $a$  im  $(y_1, y_2)$ -Raum sind und  $x$  den variablen Punkt in  $X$  bezeichnet; folglich ist  $A$  eine „analytische Menge“, das heißt:  $A$  besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen analytischen irreduziblen Flächen, die sich nirgends häufen (in  $X$ ), und vielleicht noch aus isolierten Punkten. Wir zeigen aber sogleich: isolierte Punkte treten nicht auf; mit anderen Worten: Wenn  $A$  einen isolierten Punkt  $p$  enthält, so ist  $A = p$ , die Abbildung  $f$  also ausnahmslos schlicht.

*Beweis.* Der Punkt  $p$  besitzt eine Umgebung  $U$ , in welcher er der einzige Urbildpunkt von  $a$  und in welcher  $f$  daher eineindeutig und folglich gebietstreu ist; mithin enthält das Bild  $f(U)$  eine volle Umgebung von  $a$ , und folglich besitzt jeder Punkt  $p' \in A$  eine Umgebung  $U'$  mit  $f(U') \subset f(U)$ ; folglich gibt es zu jedem Punkt  $x' \in U'$  einen Punkt  $x \in U$  mit  $f(x) = f(x')$ ; da  $f$  nicht konstant ist, dürfen wir  $x' \in X - A$  und damit auch  $x \in X - A$  annehmen; aus der Eineindeutigkeit von  $f$  in  $X - A$  folgt  $x' = x$ . Da dies für beliebig kleine Umgebungen  $U, U'$  von  $p, p'$  gilt, ist  $x' = x$  unverträglich mit  $p' \neq p$ ; es ist also  $p' = p$ , das heißt  $A = p$ .

Damit ist gezeigt: Die Menge  $A = f^{-1}(a)$  besteht entweder aus einem einzigen Punkt, oder sie ist eine 2-dimensionale analytische Menge ohne isolierte Punkte.

**3.** Unsere Abbildungen  $f$  lassen sich in zwei Klassen einteilen: wir nennen  $f$  „vollständig“ oder „unvollständig“, je nachdem  $a$  innerer Punkt oder Randpunkt der Bildmenge  $f(X)$  ist. Während nämlich jeder von  $a$  verschiedene Bildpunkt  $y = f(x)$  innerer Punkt von  $f(X)$  ist, weil  $f$  in der Umgebung von  $x$  eineindeutig, also gebietstreu ist, sind für  $a$  selbst beide Fälle möglich: die durch (1) gegebene Abbildung ist unvollständig, da der Punkt  $y_1 = y_2 = 0$  auf der Ebene  $y_1 = 0$  der einzige Punkt ist, der zu  $f(X)$  gehört; dagegen wird in § 2, Nr. 1, ein Beispiel einer vollständigen Abbildung angegeben werden (auch die erwähnten Transformationen in der algebraischen Geometrie sind vollständig). Übrigens ist natürlich jede ausnahmslos schlichte Abbildung vollständig, da sie auch in der Umgebung des Punktes  $f^{-1}(a)$  eineindeutig, also gebietstreu ist; diese Tatsache ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, dessen (rein topologischer) Beweis so einfach ist, daß wir ihn sogleich hier angeben wollen: Wenn  $A$  kompakt ist, so ist  $f$  vollständig.

*Beweis.* Die kompakte Menge  $A$  in der Mannigfaltigkeit  $X$  besitzt eine offene Umgebung  $U$ , deren abgeschlossene Hülle  $\bar{U}$  ebenfalls kom-

pakt ist; dann ist auch die Begrenzung  $U^* = \overline{U} - U$  kompakt und folglich die Bildmenge  $f(U^*)$  abgeschlossen; da der Punkt  $a$  nicht zu dieser Menge gehört, besitzt er eine Umgebung  $V$ , die fremd zu  $f(U^*)$  ist; dann ist der Durchschnitt  $V \cap f(\overline{U})$  gleich dem Durchschnitt  $V \cap f(U)$  und ebenso

$$(V - a) \cap f(\overline{U}) = (V - a) \cap f(U - A) .$$

Diese Menge, die wir  $W$  nennen, ist, da  $f(\overline{U})$  infolge der Kompaktheit von  $\overline{U}$  abgeschlossen ist, abgeschlossen in  $V - a$ ; da  $U - A$  offen und  $f$  in  $U - A$  eineindeutig ist, ist  $f(U - A)$  offen, also auch  $W$  offen (in  $V - a$  und sogar im ganzen  $y$ -Raum). Da wir  $V - a$  als zusammenhängend annehmen dürfen und da  $W$  offenbar nicht leer ist, folgt aus der Abgeschlossenheit und Offenheit von  $W$  in  $V - a$ , daß  $W = V - a$  ist. Es ist also  $V - a \subset f(U - A) \subset f(X)$  und mithin  $a$  innerer Punkt von  $f(X)$ .

4. Wir werden uns besonders für die *vollständigen* schlichten Abbildungen interessieren. Ein wesentlicher Grund hierfür ist der, daß diese Abbildungen eng mit *Modifikationen* komplexer Mannigfaltigkeiten im Sinne von *H. Behnke* und *K. Stein* zusammenhängen [2]. Der Übergang von einer komplexen Mannigfaltigkeit  $Y$  zu einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  durch eine „Modifikation“ bedeutet, zunächst grob gesprochen, folgenden Prozeß: Man nimmt aus  $Y$  eine Teilmenge  $B$  heraus und setzt in das dadurch entstandene Loch eine Punktmenge  $A$  so ein, daß, ohne Änderung der analytischen Struktur von  $Y - B$ , die Mannigfaltigkeit  $X$  entsteht; genau:  $X$  und  $Y$  sind komplexe Mannigfaltigkeiten,  $A$  und  $B$  sind abgeschlossene Teilmengen von  $X$  bzw.  $Y$ ; es existiert eine eineindeutige analytische Abbildung  $f$  von  $X - A$  auf  $Y - B$ , derart, daß folgende Bedingung erfüllt ist: wenn ein Punkt  $x \in X - A$  gegen  $A$  strebt, so strebt  $f(x)$  gegen  $B$  (diese Bedingung besagt, daß man  $A$  wirklich in dasjenige Loch eingesetzt hat, welches durch Tilgung von  $B$  aus  $Y$  entstanden ist).

Wir werden es nur mit dem einfachsten Spezialfall zu tun haben, nämlich mit den „*lokalen*“ Modifikationen: das sind diejenigen, bei denen  $B$  nur aus einem einzigen Punkt  $a$  besteht. Dann bedeutet die soeben formulierte Annäherungsbedingung einfach folgendes: Wenn wir für die Punkte  $x \in A$  die Abbildung  $f$  durch  $f(x) = a$  definieren, dann ist die nunmehr in ganz  $X$  erklärte, in  $X - A$  analytische und eineindeutige Abbildung  $f$  überall in  $X$  *stetig*.

Nun gilt aber folgender Satz von *Radó-Behnke-Stein-Cartan*<sup>4)</sup>: „Ist  $y$  eine in der komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  (beliebiger Dimension) stetige Funktion, welche überall dort, wo sie nicht verschwindet, analytisch ist, dann ist  $y$  überall in  $X$  analytisch.“ Wenden wir diesen Satz auf die beiden Funktionen  $y_1, y_2$  an, welche für jeden Punkt  $x \in X$  die Koordinaten des Bildpunktes  $f(x)$  angeben (wobei  $a$  die Koordinaten  $0, 0$  habe), so ergibt sich: unsere Abbildung  $f$  von  $X$  auf  $Y$  ist überall in  $X$  *analytisch*. Daß  $f$  schlicht (bis auf  $a$ ) und vollständig ist, ist unmittelbar aus der Definition von  $f$  zu ersehen. — Umgekehrt ist von vornherein folgendes klar: wenn eine vollständige, bis auf  $a$  schlichte Abbildung von  $X$  in  $Y$  vorliegt, so ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, welche durch eine lokale Modifikation von  $Y$  im Punkte  $a$  entsteht, nämlich durch diejenige, welche  $a$  durch die Menge  $A = f^{-1}(a)$  ersetzt. Wir dürfen also sagen:

*Die lokalen Modifikationen von  $Y$  im Punkte  $a$  sind identisch mit den Umkehrungen der vollständigen, bis auf  $a$  schlichten Abbildungen von Mannigfaltigkeiten  $X$  in die Mannigfaltigkeit  $Y$ . In diesem Sinne ist jede Untersuchung der vollständigen schlichten Abbildungen gleichbedeutend mit einer Untersuchung der lokalen Modifikationen.*

Eine solche Untersuchung — immer für den Fall von 4 Dimensionen — bildet den Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

5. Unser Hauptergebnis besteht in der Feststellung, daß eine gewisse spezielle lokale Modifikation, die wir den „ $\sigma$ -Prozeß“ nennen, in folgendem Sinne die *einzig* lokale Modifikation (4-dimensionaler Mannigfaltigkeiten) ist: *Es gibt außer dem  $\sigma$ -Prozeß keine anderen lokalen Modifikationen mit kompakten Mengen  $A = f^{-1}(a)$  als diejenigen, welche durch mehrmalige Wiederholung des  $\sigma$ -Prozesses entstehen*; und auch bei nichtkompakten  $A$  werden die Modifikationen weitgehend durch die Iterationen des  $\sigma$ -Prozesses beherrscht. Gleichzeitig werden wir auch für unvollständige schlichte Abbildungen zu einigen Aussagen gelangen, die nicht trivial sind.

Der  $\sigma$ -Prozeß spielt übrigens in der algebraischen Geometrie eine wichtige Rolle; er liegt vor, wenn eine Fläche birational so transformiert wird, daß ein Punkt  $a$  in eine Kurve  $A$  übergeht, die Transformation aber sonst in der Umgebung von  $a$  eineindeutig ist. Auch in der Funktionentheorie mit zwei komplexen Variablen ist er neuerdings mit Erfolg verwendet worden [5]. Wir werden ihn im § 2 ausführlich darstellen. Im

---

<sup>4)</sup> Der Satz ist (in anderer Formulierung) von *T. Radó* [3] für eine Variable, also für 2 Dimensionen, aufgestellt und dann von *H. Behnke* und *K. Stein* [2] auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension übertragen worden. Die oben benutzte elegante Formulierung stammt von *H. Cartan*, der auch einen ganz neuen Beweis angegeben hat [4].

§ 3 werden wir dann mit Hilfe lokaler funktionentheoretischer Betrachtungen leicht zu unseren Resultaten gelangen.

Ich habe den obigen Satz von der Einzigkeit des  $\sigma$ -Prozesses, also unseren Hauptsatz, schon früher ohne Beweis veröffentlicht [1], und *F. Hirzebruch* hat den Satz bereits gelegentlich benutzt [5]. Daß der  $\sigma$ -Prozeß in der algebraischen Geometrie eine alte und bewährte Operation ist, war uns von vornherein bekannt; aber erst später hat mich Herr *Zariski* darauf aufmerksam gemacht, daß auch der Einzigkeitssatz nicht neu ist: er deckt sich mit dem „Lemma“ im Abschnitt 24 der berühmten Arbeit [6]; dort handelt es sich zwar um algebraische Mannigfaltigkeiten und birationale Transformationen, aber da die Betrachtungen gerade in dem betreffenden Abschnitt lokalen Charakter haben, behalten sie ihre Gültigkeit auch für die funktionentheoretische Situation, die wir hier vor uns haben. Ein Teil des nachstehenden Textes kann also als eine funktionentheoretische Darstellung und Beleuchtung des Zariskischen Lemmas aufgefaßt werden.

Gerade in diesen Tagen (Juli 1954) habe ich die große Abhandlung „Über meromorphe Modifikationen“ von *W. Stoll* erhalten [7], die, wie Herr Stoll darin schreibt, durch mündliche Mitteilungen von mir, welche den Inhalt meiner vorliegenden Arbeit betrafen, angeregt worden ist; sie enthält sehr starke Verallgemeinerungen unserer Resultate und unserer Methode (ebenfalls bei Beschränkung auf 4 Dimensionen). Es freut mich, daß meine hier vorliegende Arbeit bereits vor ihrem Erscheinen auf so interessante Weise fortgesetzt worden ist und daß ihre Lektüre als Einführung in das Studium der viel schwierigeren Untersuchungen von *Stoll* dienen kann.

## § 2. Der $\sigma$ -Prozeß und seine Iterationen

1.  $V$  sei ein Gebiet des komplexen  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraumes, welches den Punkt  $a = (0, 0)$  enthält.  $S$  sei eine komplexe projektive Gerade (also äquivalent der Riemannschen Zahlkugel) mit Koordinaten  $s_1 : s_2$ . Das cartesische Produkt  $P = V \times S$  besitzt eine komplexe Struktur, die in natürlicher Weise durch die Strukturen von  $V$  und von  $S$  induziert ist;  $P$  ist Summe der durch  $s_1 \neq 0$  bzw.  $s_2 \neq 0$  bestimmten Teilgebiete  $P_1$  bzw.  $P_2$ , in denen

$$y_1, y_2, s = s_2 s_1^{-1} \quad \text{bzw.} \quad y_1, y_2, s' = s_1 s_2^{-1}$$

analytische Parameter sind.



Das Gebilde  $V^*$ , das in  $P$  durch die Gleichung

$$y_1 s_2 - y_2 s_1 = 0 \quad (2)$$

bestimmt ist, ist eine 4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit: in dem Teil  $V_1^* = V^* \cap P_1$  sind  $y_1, s$ , in dem Teil  $V_2^* = V^* \cap P_2$  sind  $y_2, s'$  analytische Parameter; in  $V_1^*$  ist  $y_2 = y_1 s$ , in  $V_2^*$  ist  $y_1 = y_2 s'$ , in  $V_1^* \cap V_2^*$  ist  $s' = s^{-1}$ .

Die natürliche, durch  $(y_1, y_2, s_1 : s_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  gegebene Projektion von  $P$  auf  $V$  bewirkt eine analytische Abbildung  $\varphi$  von  $V^*$  auf  $V$ ; bei ihr ist, wie aus (2) ersichtlich, das Urbild eines von  $a = (0, 0)$  verschiedenen Punktes  $y = (y_1, y_2)$  der Punkt  $(y_1, y_2, y_1 : y_2)$  von  $V^*$ , das Urbild des Punktes  $a = (0, 0)$  aber die aus den Punkten  $(0, 0, s_1 : s_2)$  mit beliebigen  $(s_1 : s_2) \in S$  bestehende Sphäre (= komplexe Zahlkugel)  $\sigma$ .

$\varphi$  ist also — in der Terminologie aus § 1 — eine vollständige, bis auf den Punkt  $a$  schlichte Abbildung von  $X = V^*$  auf  $Y = V$  mit der Ausnahmemenge  $A = \sigma = \varphi^{-1}(a)$ . Die Umkehrung  $\varphi^{-1}$  ist eine lokale Modifikation von  $V$ , welche den Punkt  $a$  durch die Sphäre  $\sigma$  ersetzt; diese Modifikation nennen wir den  $\sigma$ -Prozeß.

2. Wir wollen die Beziehungen zwischen  $V$  und  $V^*$  näher betrachten. Zunächst bemerken wir noch: in jedem der Teile  $V_i^*$ ,  $i = 1$  oder  $i = 2$ , ist die Fläche  $y_i = 0$  die Sphäre  $\sigma$  ohne den Punkt  $s_i = 0$ .

Es sei  $C$  eine analytische Fläche (= „komplexe Kurve“) in  $V$ , die den Punkt  $a$  enthält und dort „regulär“ ist; das heißt:  $C$  ist durch  $f(y_1, y_2) = 0$  gegeben, wobei  $f$  regulär analytisch,  $f(0, 0) = 0$  und  $\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}\right) \neq (0, 0)$  in  $a$  ist. Sei etwa  $\frac{\partial f}{\partial y_2} \neq 0$ ; dann wird  $C$  durch eine Gleichung

$$y_2 = a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \dots \quad (3)$$

dargestellt; die in  $V_1^*$  durch

$$s = a_1 + a_2 y_1 + \dots \quad (3^*)$$

dargestellte Fläche  $C^*$  wird, da  $y_1 s = y_2$  ist, durch  $\varphi$  auf  $C$  abgebildet; es ist natürlich,  $C^*$  als „Urbild“  $\varphi^{-1}(C)$  zu bezeichnen — indem wir dies tun, ergänzen wir das von vornherein wohldefinierte Urbild  $\varphi^{-1}(C - a)$  durch Hinzunahme des auf  $\sigma$  gelegenen Punktes mit  $s = a_1$ .

Aus der Darstellung (3\*) von  $C^*$  und daraus, daß  $\sigma$  durch  $y_1 = 0$  dargestellt wird, ist ersichtlich: Ist  $C$  eine reguläre,  $a$  enthaltende Fläche in  $V$ , so wird  $\sigma$  durch  $\varphi^{-1}(C)$  geschnitten, nicht berührt.

Daraus, daß die Koordinate  $s$  des Schnittpunktes gleich dem Werte  $a_1$  des Differentialquotienten  $dy_2 : dy_1$  von  $C$  in  $a$  ist, ist weiter ersichtlich : Wenn sich die regulären Flächen  $C_1, C_2$  in  $a$  schneiden, aber nicht berühren, so schneiden ihre Urbilder  $\varphi^{-1}(C_1)$  und  $\varphi^{-1}(C_2)$  die Sphäre  $\sigma$  in verschiedenen Punkten und treffen sich daher gegenseitig nicht. Durch den  $\sigma$ -Prozeß werden also die Schnittpunkte in  $a$  beseitigt.

Wenn sich dagegen  $C_1$  und  $C_2$  in  $a$  berühren, so haben sie in ihren Entwicklungen (3) denselben Anfangskoeffizienten  $a_1$ , und ihre Urbilder schneiden daher  $\sigma$  im gleichen Punkt. Indem wir jedem analytischen Flächenelement in  $a$  den Schnittpunkt von  $\sigma$  mit den Urbildern derjenigen  $C$  zuordnen, an welche dieses Flächenelement tangential ist, entsteht, wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, eine eindeutige Abbildung des Büschels der analytischen Flächenelemente in  $a$  auf die Sphäre  $\sigma$ . (Indem man unsere analytischen Flächen als „komplexe Kurven“ auffaßt, sagt man übrigens statt „analytisches Flächenelement“ häufig auch „komplexes Linienelement“.)

Dieser Zusammenhang mit den Flächenelementen legt es nahe, das Produkt  $P = V \times S$ , das wir in Nr. 1 herangezogen haben, als den Raum aller analytischen Flächenelemente in  $V$  zu deuten: man identifiziere den Punkt  $(y_1, y_2, s_1 : s_2)$  von  $P$  mit dem Flächenelement, das im Punkte  $(y_1, y_2)$  von  $V$  durch  $dy_1 : dy_2 = s_1 : s_2$  bestimmt ist. Statt (2) hat man dann als definierende Gleichung von  $V^*$ :

$$y_1 dy_2 - y_2 dy_1 = 0 ; \quad (2')$$

hieraus liest man ab:  $V^*$  besteht aus den Tangentialelementen der Flächen, deren Gleichungen  $c_1 y_1 - c_2 y_2 = 0$  lauten ( $c_1, c_2$  konstant, nicht beide 0); in der Sprache der affinen Geometrie der komplexen  $(y_1, y_2)$ -Ebene sind diese Flächen die Geraden des Büschels mit dem Zentrum  $a$ ; in jedem von  $a$  verschiedenen Punkt gehört genau ein Flächenelement, in  $a$  selbst gehören alle (analytischen) Flächenelemente zu  $V^*$ ; das Büschel dieser Flächenelemente in  $a$  stellt jetzt die Sphäre  $\sigma$  dar.

3. Da es für Anwendungen wichtig ist, die  $y_1, y_2$  nicht nur als Koordinaten in einem festen Zahlenraum, sondern als lokale Parameter auf einer 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit aufzufassen, ist es gut, sich davon zu überzeugen, daß der  $\sigma$ -Prozeß invariant gegenüber einer regulären Parametertransformation ist. Es sei also durch  $z_1 = z_1(y_1, y_2), z_2 = z_2(y_1, y_2)$  eine solche Transformation in der Umgebung von  $a$  gegeben; wir dürfen annehmen, daß in  $a$  auch  $z_1 = z_2 = 0$

ist. Der Raum  $P$  der Flächenelemente ändert sich nicht; aber in  $P$  hat man statt der durch (2') gegebenen Mannigfaltigkeit  $V^*$  jetzt die durch

$$z_1 dz_2 - z_2 dz_1 = 0 \quad (2'')$$

gegebene Mannigfaltigkeit  $W^*$  zu betrachten. Sie enthält, ebenso wie  $V^*$ , das Büschel  $\sigma$  der analytischen Flächenelemente in  $a$ . Nun existiert aber eine kanonische eindeutige Abbildung  $h$  von  $V^*$  auf  $W^*$ : auf  $\sigma$  ist  $h$  die Identität, und für ein Element  $y^*$  von  $V^*$  in einem von  $a$  verschiedenen Punkt ist  $h(y^*) = z^*$  das Element von  $W^*$  in demselben Punkt. Man zeigt leicht — ich übergehe den Beweis —, daß  $h$  analytisch ist.  $V^*$  und  $W^*$  haben also die gleiche analytische Struktur; und noch mehr: bezeichnen wir die bis auf  $a$  schlichte Abbildung von  $W^*$  auf  $V$ , die der alten Abbildung  $\varphi$  von  $V^*$  auf  $V$  analog ist, mit  $\psi$ , so ist, wie unmittelbar aus der Definition folgt,  $\varphi = \psi h$ .

In diesem Sinne sind also die Mannigfaltigkeit  $V^*$ , die Abbildung  $\varphi$  und damit auch die Modifikation  $\varphi^{-1}$  — also der  $\sigma$ -Prozeß — invariant gegenüber Parametertransformationen. Zugleich sieht man, daß die folgende Aussage einen invarianten, vom Parametersystem unabhängigen Sinn hat: *Der  $\sigma$ -Prozeß besteht darin, daß man den Punkt  $a$  durch das Büschel seiner analytischen Flächenelemente ersetzt.*

4. Wir wollen jetzt die topologische und die analytische Struktur von  $V^*$  untersuchen; dabei sei  $V$  durch

$$y_1 \bar{y}_1 + y_2 \bar{y}_2 < c, \quad 0 < c \leq \infty \quad (4)$$

gegeben; wie in Nr. 1 beschreiben wir  $V^*$  durch die Parameter  $y_1, y_2, s_1 : s_2$ , zwischen denen die Relation (2) besteht.

Wir ziehen eine komplexe projektive Ebene  $T$  mit Koordinaten  $t_1 : t_2 : t_3$  heran und bilden  $V^*$  durch

$$t_1 : t_2 : t_3 = s_1 : s_2 : \bar{y}_1 s_1 + \bar{y}_2 s_2 \quad (5)$$

in  $T$  ab; da  $s_1 : s_2 \neq 0 : 0$  ist, ist dies in der Tat eine Abbildung; wir nennen sie  $Q$ . Die Gleichungen (5) lassen sich mit Hilfe von (2) nach  $y_1, y_2, s_1 : s_2$  auflösen:

$$y_1 = t_1 \bar{t}_3 (t_1 \bar{t}_1 + t_2 \bar{t}_2)^{-1}, \quad y_2 = t_2 \bar{t}_3 (t_1 \bar{t}_1 + t_2 \bar{t}_2)^{-1}, \quad s_1 : s_2 = t_1 : t_2; \quad (5')$$

folglich ist  $Q$  eindeutig. Man liest aus (5) oder (5') ab: der durch  $y_1 = y_2 = 0$  charakterisierten Sphäre  $\sigma$  entspricht im Raum  $T$  die durch  $t_3 = 0$  gegebene Gerade  $\tau$ ; ferner, auf Grund von (4): das Bildgebiet  $Q(V^*) = T'$  in  $T$  ist durch

$$t_1 \bar{t}_1 + t_2 \bar{t}_2 > c^{-1} t_3 \bar{t}_3 \quad (4')$$



gegeben. Somit sieht man:  $V^*$  ist topologisch homöomorph einer Umgebung  $T'$  einer Geraden  $\tau$  in der komplexen projektiven Ebene  $T$ , wobei  $\tau$  der Sphäre  $\sigma$  entspricht.

Jede komplexe Mannigfaltigkeit besitzt eine natürliche, durch die komplexe Struktur ausgezeichnete Orientierung (cf. [1]). Wir behaupten: die Orientierung von  $V^*$  ist der Orientierung von  $T$  entgegengesetzt; mit anderen Worten: bei Benutzung der ausgezeichneten Orientierungen von  $V^*$  und von  $T$  hat die Abbildung  $Q$  den Grad  $-1$ . Wir betrachten, um dies zu zeigen, nur die Abbildung  $Q$  von  $V^* - \sigma$  auf  $T' - \tau$ ; in  $V^* - \sigma$  können wir  $y_1, y_2$  als Parameter benutzen, und in  $T' - \tau$  ist  $t_3 \neq 0$ , so daß wir  $t_3 = 1$  setzen können; dann wird  $Q^{-1}$  durch die beiden ersten Gleichungen in (5') mit  $t_3 = 1$  beschrieben, und das sind die Formeln für eine Inversion (Abbildung durch reziproke Radien), welche bekanntlich die Orientierung umkehrt (man kann auch die reelle Funktionaldeterminante ausrechnen und findet, daß sie negativ ist).

Die Gerade  $\tau$  in  $T$  besitzt die Selbstschnittzahl  $+1$ ; da  $Q$  die Orientierung umkehrt und  $\sigma$  in  $\tau$  überführt, folgt: die Sphäre  $\sigma$  besitzt in  $V^*$  die Selbstschnittzahl  $-1$ .<sup>5)</sup>

Der Unterschied zwischen den analytischen Strukturen der Mannigfaltigkeit  $V^*$  und des mit  $V^*$  homöomorphen Teilgebietes  $Q(V^*) = T'$  der projektiven Ebene  $T$  äußert sich aber nicht nur in der Verschiedenheit der Orientierungen, sondern noch deutlicher: in  $T'$  gibt es unendlich viele 2-dimensionale geschlossene analytische Flächen — „analytisch“ im Sinne der komplex-analytischen Struktur von  $T'$  —, nämlich die in  $T'$  gelegenen projektiven Geraden; in  $V^*$  aber ist  $\sigma$  die einzige geschlossene analytische Fläche. Beweis: sei  $\zeta$  eine geschlossene analytische Fläche in  $V^*$ ; da  $y_1$  und  $y_2$  reguläre analytische Funktionen sind und da  $\zeta$  geschlossen ist, sind  $y_1$  und  $y_2$  auf  $\zeta$  konstant (nach dem Maximumprinzip). Folglich wird  $\zeta$  durch  $\varphi$  auf einen Punkt  $y \in V$  abgebildet. Da  $\varphi$  in  $V^* - \sigma$  eineindeutig ist, muß  $\zeta$  daher auf  $\sigma$  liegen und folglich mit  $\sigma$  identisch sein.

Es sei noch bemerkt: Den von  $\tau$  verschiedenen komplexen projektiven Geraden in  $T'$  entsprechen in  $V^*$  geschlossene, mit Kugeln homöomorphe Flächen, welche zwar reell-analytisch sind, aber nicht analytisch im Sinne der komplexen Struktur von  $V^*$ , das heißt, nicht lokal durch

---

<sup>5)</sup> Die Selbstschnittzahl eines ( $m$ -dimensionalen) Zyklus  $\zeta$  in einer ( $2m$ -dimensionalen) Mannigfaltigkeit ist die Schnittzahl zweier Zyklen  $\zeta_1, \zeta_2$ , die mit  $\zeta$  homolog (also z. B. durch kleine Deformationen aus  $\zeta$  entstanden) und zueinander in allgemeiner Lage sind.

Gleichungen  $u_2 = f(u_1)$  darstellbar, wobei  $u_1, u_2$  komplex-analytische lokale Parameter in  $V^*$  sind.

5. Nachdem der  $\sigma$ -Prozeß in einem Punkt eines Gebietes  $V$  des  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraumes definiert ist, macht die Definition des  $\sigma$ -Prozesses in einem Punkt  $a$  einer beliebigen komplexen Mannigfaltigkeit  $Y$  keine Schwierigkeit: man nimmt eine Umgebung  $V$  von  $a$ , in der Parameter  $y_1, y_2$  gültig sind, interpretiert sie als Teilgebiet des  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraumes und geht wie früher durch den  $\sigma$ -Prozeß in  $a$  zu der Mannigfaltigkeit  $V^*$  über, die wie früher durch  $\varphi$  analytisch so auf  $V$  abgebildet ist, daß  $V^* - \sigma$  und  $V - a$  sich eineindeutig entsprechen und die Sphäre  $\sigma$  das Urbild des Punktes  $a$  ist; dann entfernt man  $a$  aus  $Y$  und identifiziert jeden Punkt  $y^*$  von  $V^* - \sigma$  mit seinem Bild  $\varphi(y^*)$ ; so entsteht eine komplexe Mannigfaltigkeit  $Y^* -$  von ihr sagen wir, daß sie durch den  $\sigma$ -Prozeß in  $a$  aus  $Y$  entstanden ist.

Es ist oft zweckmäßig, ein zweites Exemplar  $Y_0$  von  $Y$  heranzuziehen — also eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf welche  $Y$  durch einen fest gegebenen analytischen Homöomorphismus  $h$  abgebildet ist; dann liegt die folgende analytische Abbildung  $\varphi_1$  von  $Y^*$  auf  $Y_0$  vor: in  $Y^* - \sigma$  ist  $\varphi_1$  mit  $h$  identisch, und es ist  $\varphi_1(\sigma) = h(a) = a_0$ .

Die Abbildung  $\varphi_1^{-1}$ , welche somit  $Y_0 - a_0$  eineindeutig auf  $Y^* - \sigma$  abbildet, läßt sich, analog wie in Nr. 2, für reguläre Flächen  $C$  in  $Y_0$ , die den Punkt  $a_0$  enthalten, auch im Punkte  $a_0$  selbst erklären. Das Urbild  $\varphi_1^{-1}(C)$  einer regulären Fläche  $C$ , gleichgültig, ob sie  $a_0$  enthält oder nicht, ist dann eine ebenfalls reguläre und mit  $C$  homöomorphe Fläche in  $Y^*$ . Wenn  $a_0$  auf  $C$  liegt, so schneidet  $\varphi_1^{-1}(C)$  die Sphäre  $\sigma$  (ohne Berührung). Wenn  $C_1$  und  $C_2$  sich in  $a_0$  schneiden (nicht berühren), so treffen sich  $\varphi_1^{-1}(C_1)$  und  $\varphi_1^{-1}(C_2)$  in der Nähe von  $\sigma$  nicht.<sup>6)</sup>

6. Wir werden jetzt neue lokale Modifikationen von  $Y_0$  in  $a_0$  vornehmen, indem wir den  $\sigma$ -Prozeß iterieren. Wir ändern die soeben benutzte Bezeichnung, indem wir  $Y_1$  statt  $Y^*$  und  $\sigma_1$  statt  $\sigma$  sagen;  $\varphi_1$  ist also eine Abbildung von  $Y_1$  auf  $Y_0$ . Es sei  $a_1$  ein Punkt von  $\sigma_1$ ; indem wir in ihm den  $\sigma$ -Prozeß ausüben, gehen wir von  $Y_1$  zu einer Mannigfaltigkeit  $Y_2$  über. In  $Y_2$  ist  $\sigma_2$  die Sphäre, welche  $a_1$  ersetzt;  $\varphi_2$  ist die Abbildung von  $Y_2$  auf  $Y_1$ , welche  $Y_2 - \sigma_2$  eineindeutig auf  $Y_1 - a_1$  und  $\sigma_2$  auf  $a_1$  abbildet. Da  $\sigma_1$  eine reguläre Fläche in  $Y_1$  ist und  $a_1$  enthält, ist  $\varphi_2^{-1}(\sigma_1) = \sigma_1^2$  eine reguläre Sphäre in  $Y_2$ , welche die Sphäre  $\sigma_2$  in einem Punkte schneidet (nicht berührt) und mit ihr nur diesen einen

---

<sup>6)</sup> Definition der „regulären“ Fläche: § 2, Nr. 2.

Punkt gemeinsam hat. Die Vereinigung von  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2 = \sigma_2^2$  nennen wir  $\Sigma_2$ ; sie ist bei der Abbildung  $\Phi_2 = \varphi_1 \varphi_2$  von  $Y_2$  auf  $Y_0$  das Urbild des Punktes  $a_0$ , während  $Y_2 - \Sigma_2$  eineindeutig auf  $Y_0 - a_0$  abgebildet wird. Es liegt also eine lokale Modifikation von  $Y_0$  vor, welche  $a_0$  durch  $\Sigma_2$  ersetzt.

Jetzt sei  $a_2$  ein Punkt von  $\Sigma_2$ ; wir üben in ihm den  $\sigma$ -Prozeß aus und erhalten eine Mannigfaltigkeit  $Y_3$ , in welcher eine Sphäre  $\sigma_3$  den Punkt  $a_2$  ersetzt. Die zugehörige Abbildung von  $Y_3$  auf  $Y_2$  heiße  $\varphi_3$ ; um die Wirkung von  $\varphi_3^{-1}$  auf  $\Sigma_2$  zu erkennen, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem  $a_2$  nur auf einer der beiden Sphären  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  liegt oder der Schnittpunkt der beiden Sphären ist: im ersten Fall wird  $\Sigma_2$  durch  $\varphi_3^{-1}$  homöomorph abgebildet, und  $\sigma_3$  wird von einer der beiden Sphären  $\sigma_1^3 = \varphi_3^{-1}(\sigma_1^2)$  und  $\sigma_2^3 = \varphi_3^{-1}(\sigma_2^2)$  in einem Punkt geschnitten und ist zu der anderen fremd; im zweiten Fall sind die beiden Sphären  $\sigma_1^3$  und  $\sigma_2^3$  zueinander fremd, aber jede von ihnen schneidet  $\sigma_3$  in genau einem Punkt; in jedem Fall sind  $\sigma_1^3$ ,  $\sigma_2^3$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^3$  drei reguläre Sphären, deren Vereinigung wir  $\Sigma_3$  nennen.  $\Phi_3 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3$  ist eine Abbildung von  $Y_3$  auf  $Y_0$ , welche bis auf  $a_0$  schlicht ist; die Ausnahmemenge ist  $\Sigma_3$ ; die Mannigfaltigkeit  $Y_3$  ist durch Modifikation von  $Y_0$  in  $a_0$  entstanden.

So fahren wir fort:  $Y_{n-1}$ ,  $\Sigma_{n-1}$ ,  $\Phi_{n-1}$  seien schon konstruiert; dabei ist  $\Sigma_{n-1}$  die Vereinigung der Sphären  $\sigma_1^{n-1}, \dots, \sigma_{n-2}^{n-1}, \sigma_{n-1}^{n-1}$ ; wir vollziehen in einem Punkt  $a_{n-1}$  von  $\Sigma_{n-1}$  den  $\sigma$ -Prozeß; es entsteht  $Y_n$ ; das Urbild  $\Sigma_n = \varphi_n^{-1}(\Sigma_{n-1})$  besteht aus den  $n - 1$  Sphären  $\sigma_i^n = \varphi_n^{-1}(\sigma_i^{n-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , und der Sphäre  $\sigma_n = \sigma_n^n$ . Die Abbildung  $\Phi_n = \Phi_{n-1} \varphi_n$  von  $Y_n$  auf  $Y_0$  ist bis auf den Punkt  $a_0$  schlicht, die Ausnahmemenge ist  $\Sigma_n$ ;  $Y_n$  ist durch Modifikation in  $a_0$  aus  $Y_0$  entstanden. Diese lokale Modifikation möge ein „ $n$ -facher  $\sigma$ -Prozeß“ heißen.

Man bestätigt, durch Induktion nach  $n$ , leicht die folgenden Eigenschaften der  $\Sigma_n$ : je zwei der Sphären  $\sigma_i^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , deren Summe  $\Sigma_n$  ist, haben entweder keinen oder genau einen Punkt gemeinsam; ein gemeinsamer Punkt ist Schnittpunkt (nicht Berührungspunkt); ein Schnittpunkt gehört nur zwei Sphären an (wenn im Schnittpunkt von  $\sigma_i^{n-1}$  und  $\sigma_j^{n-1}$  der  $\sigma$ -Prozeß ausgeübt wird, so haben  $\sigma_i^n$  und  $\sigma_j^n$  keinen gemeinsamen Punkt). Die Zusammenhangsverhältnisse von  $\Sigma_n$  beschreiben wir am bequemsten, indem wir den „Nerven“ von  $\Sigma_n$  konstruieren: nämlich den Streckenkomplex  $N(\Sigma_n)$  mit  $n$  Eckpunkten  $e_1, \dots, e_n$ , in dem  $e_i$  mit  $e_j$  dann und nur dann durch eine Strecke verbunden ist, wenn  $\sigma_i^n$  und  $\sigma_j^n$  sich schneiden; wir behaupten: der Nerv ist ein „Baum“, das heißt, er ist zusammenhängend und enthält keinen zyklischen Streckenzug. In der Tat: für  $n = 1$  und  $n = 2$  ist dies trivial; es sei für  $n - 1$  bewiesen; liegt beim Übergang von  $Y_{n-1}$  zu  $Y_n$  der Punkt  $a_{n-1}$  auf nur

einer Sphäre  $\sigma_i^{n-1}$ , so hat man dem Komplex  $N(\Sigma_{n-1})$  einen Eckpunkt  $e_n$  hinzuzufügen und diesen durch eine Strecke mit  $e_i$  zu verbinden; ist  $a_{n-1}$  der Schnittpunkt zweier Sphären  $\sigma_i^{n-1}$  und  $\sigma_j^{n-1}$ , so hat man die Verbindung von  $e_i$  und  $e_j$  in  $N(\Sigma_{n-1})$  zu tilgen, aber den neuen Punkt  $e_n$  mit  $e_i$  und mit  $e_j$  zu verbinden (oder, was dasselbe ist: man hat  $e_n$  auf die Verbindungsstrecke von  $e_i$  und  $e_j$  zu setzen); in jedem Fall bleibt der Komplex zusammenhängend, und es entsteht kein Zyklus.

Auf Grund dieser speziellen Eigenschaften wollen wir die Gebilde  $\Sigma_n$  „Sphärenbäume“ nennen.

Was die Art der Einbettung von  $\Sigma_n$  in  $Y_n$  betrifft, so sei nur auf folgende Eigenschaft hingewiesen: die Sphäre  $\sigma_n^n$ , also die zuletzt eingesetzte der Sphären  $\sigma_i^n$ , hat die Selbstschnittzahl  $-1$ ; dies ergibt sich ohne weiteres aus Nr. 4. Übrigens ist es nicht schwer, zu zeigen, daß der topologische Typus von  $Y_n$  vollständig durch den topologischen Typus von  $Y_0$  und die Zahl  $n$  bestimmt ist; die analytische Struktur von  $Y_n$  dagegen hängt von der Wahl der Punkte  $a_i$  ab.

7. Die  $n$ -fachen  $\sigma$ -Prozesse sind Beispiele lokaler Modifikationen und die Sphärenbäume Beispiele von Ausnahmemengen  $A$  bei schlichten Abbildungen im Sinne des § 1. Daß es, wenn man sich auf kompakte Mengen  $A$  beschränkt, keine anderen analogen Beispiele gibt, wird im § 3 bewiesen werden. Wir wollen jetzt aber noch Beispiele angeben, bei denen die Mengen  $A$  nicht kompakt sind; dabei werden wir einiges nur skizzieren.

(a) Man konstruiere zunächst  $Y_n$  durch einen  $n$ -fachen  $\sigma$ -Prozeß und tilge dann eine abgeschlossene echte Teilmenge  $F$  aus  $\Sigma_n$ ; die Mannigfaltigkeit  $Y^* = Y_n - F$  ist durch Modifikation von  $Y_0$  in  $a_0$  entstanden; die zugehörige Ausnahmemenge  $A = \Sigma_n - F$  ist nicht kompakt. Zum Beispiel kann man  $F$  so wählen, daß die Sphären  $\sigma_1^n, \dots, \sigma_{n-1}^n$  zu  $F$  gehören und  $A$  also nur aus einem Teil von  $\sigma_n^n$  besteht.

Auch in allen diesen Mannigfaltigkeiten  $Y^*$  gibt es 2-dimensionale Zyklen (geschlossene Flächen), die allerdings im allgemeinen nicht komplex-analytisch sind, mit der Selbstschnittzahl  $-1$ . In der Tat: wir dürfen annehmen, daß  $A$  einen nicht leeren Teil von  $\sigma_n^n$  enthält (also  $F$  nicht  $\sigma_n^n$  umfaßt; denn andernfalls brauchten wir statt  $Y_n$  nur ein  $Y_k$  mit  $k < n$  zu betrachten); nach Nr. 4 ist die Umgebung von  $\sigma_n^n$  in  $Y_n$  homöomorph mit der Umgebung  $T'$  einer projektiven Geraden  $\tau$  in der komplexen projektiven Ebene, wobei sich  $\sigma_n^n$  und  $\tau$  entsprechen; daher enthält  $Y^*$  ein Gebiet  $G$ , das homöomorph ist mit einem Gebiet  $T''$ , welches aus  $T'$  durch Tilgung eines abgeschlossenen echten Teiles von  $\tau$  entsteht; in  $T''$  gibt es noch ganze projektive Geraden (die den stehen-

gebliebenen Rest von  $\tau$  schneiden); diese Geraden sind geschlossene Flächen, deren Selbstschnittzahl, wie aus Nr. 4 hervorgeht,  $-1$  ist.

(b) Der Begriff des  $n$ -fachen  $\sigma$ -Prozesses läßt sich leicht zu dem Begriff des unendlich-fachen  $\sigma$ -Prozesses erweitern: wir definieren für jedes  $n$  wie in Nr. 6 die Mannigfaltigkeiten  $Y_n$  mit den Sphärenbäumen  $\Sigma_n$  und den Abbildungen  $\varphi_n$  von  $Y_n$  auf  $Y_{n-1}$ ; zur Vermeidung von Komplikationen setzen wir aber fest, daß der Punkt  $a_n$ , den wir auf  $\Sigma_n$  zu wählen haben, immer auf der Sphäre  $\sigma_n^n$  und auf keiner anderen der Sphären  $\sigma_i^n$  liegen soll (die Nerven  $N(\Sigma_n)$  sind dann einfache Streckenzüge). Die Folge der Mannigfaltigkeiten  $Y_n$  mit den Abbildungen  $\varphi_n$  definiert einen Limesraum, den „ $R_n$ -adischen Limes“ im Sinne von *H. Freudenthal* [8]; die Punkte dieses Limesraumes  $L$  sind die Folgen

$$\{p\} = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, \dots),$$

wobei immer  $p_n \in Y_n$  und  $p_{n-1} = \varphi_n(p_n)$  ist; die Topologie in  $L$  ist in naheliegender Weise erklärt; durch  $\Phi\{p\} = p_0$  ist eine stetige Abbildung von  $L$  auf  $Y_0$  gegeben. In unserem Falle ist  $L - \{a\} = Y_\infty$  eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer, in natürlicher Weise induzierten analytischen Struktur und  $\Phi$  eine analytische Abbildung, die bis auf den Punkt  $a_0$  schlicht ist; die zugehörige Ausnahmemenge  $A$  ist ein „unendlicher Sphärenbaum“  $\Sigma_\infty = \lim \Sigma_n - \{a\}$ . Die Mannigfaltigkeit  $Y_\infty$  ist durch lokale Modifikation von  $Y_0$  entstanden, wobei der Punkt  $a_0$  durch die nicht-kompakte Menge  $\Sigma_\infty$  ersetzt worden ist.

(c) Wenn man bereits eine lokale Modifikation von  $Y$  mit einer nicht-kompakten Ausnahmemenge  $A$  in der modifizierten Mannigfaltigkeit  $Y^*$  hat, so kann man folgendermaßen zu einer neuen Modifikation von  $Y^*$  und damit von  $Y$  übergehen: man nimmt auf  $A$  eine divergente (das heißt keinen Häufungspunkt besitzende) Punktfolge  $p_1, p_2, \dots$  und übt in jedem Punkt  $p_i$  den  $\sigma$ -Prozeß aus.

Diese Ausübung des  $\sigma$ -Prozesses in allen Punkten einer divergenten Folge läßt sich folgendermaßen verallgemeinern: Es sei  $M$  eine beliebige abgeschlossene Punktmenge in der 4-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $Z$ ; für jeden Punkt  $p$  von  $M$  definieren wir den „ $\sigma$ -Prozeß relativ zu  $M$ “ so: man übt erst den gewöhnlichen  $\sigma$ -Prozeß in  $p$  aus und entfernt dann aus der Sphäre  $\sigma$  alle etwa auf ihr liegenden Häufungspunkte der Menge  $\varphi^{-1}(M - p)$ . Der Begriff der gleichzeitigen Ausübung dieser relativen  $\sigma$ -Prozesse in allen Punkten von  $M$  hat einen naheliegenden Sinn; dabei entsteht, wie man sich leicht überlegt, ein zusammenhängender Hausdorffscher Raum mit 4-dimensional euklidischen Umgebungen und einer komplex-analytischen Struktur; dieser Raum ist also eine



4-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit im üblichen Sinne<sup>3)</sup>, falls er eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt; dies ist aber, wie man ebenfalls leicht sieht, gesichert, falls die Menge  $M$  abzählbar ist. Für abzählbare abgeschlossene Mengen  $M$  führt also der soeben skizzierte „ $\sigma$ -Prozeß“ in der Menge  $M$  von der Mannigfaltigkeit  $Z$  wieder zu einer komplexen Mannigfaltigkeit  $Z^*$ .<sup>7)</sup>

Neue lokale Modifikationen von  $Y$  erhält man nun dadurch, daß man erstens von  $Y$  durch irgendeine lokale Modifikation, zum Beispiel den gewöhnlichen  $\sigma$ -Prozeß, zu einer Mannigfaltigkeit  $Z$  übergeht und dann in einer abzählbaren abgeschlossenen Teilmenge  $M$  der Ausnahmemenge  $A$ , gleichgültig ob  $A$  kompakt ist oder nicht, den  $\sigma$ -Prozeß ausübt.

Durch Kombination der unter (a), (b), (c) skizzierten Methoden erhält man sehr viele und mannigfache lokale Modifikationen mit nicht-kompakten Mengen  $A$ ; aber alle diese Beispiele beruhen auf dem  $\sigma$ -Prozeß; daß dies im Wesen der Sache liegt, wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen.

### § 3. Die Rolle des $\sigma$ -Prozesses für beliebige lokale Modifikationen und schlichte Abbildungen

1. Die Umgebung  $U$  des Punktes  $o = (0, 0)$  im komplexen  $(x_1, x_2)$ -Zahlenraum sei durch die analytische Abbildung  $f$ :

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

in den  $(y_1, y_2)$ -Zahlenraum abgebildet, und es sei  $f(o) = a = (0, 0)$ . Die Abbildung sei eineindeutig in  $U - H$ , wobei  $H$  eine den Punkt  $o$  enthaltende, analytische Menge ist, die entweder nur aus  $o$  besteht oder aus endlich vielen analytischen Flächen  $H_i$ , von denen jede durch eine irreduzible Gleichung  $h_i(x_1, x_2) = 0$  (mit  $h_i(0, 0) = 0$ ) gegeben ist.<sup>8)</sup> Die Urbildmenge  $f^{-1}(a) = A$  besteht entweder nur aus dem Punkt  $o$  oder aus endlich vielen irreduziblen Flächen  $C_j$ ; da auf ihnen  $f$  konstant ist, sind sie unter den  $H_i$  enthalten. Die Funktionaldeterminante von

<sup>7)</sup> Durch Ausübung des  $\sigma$ -Prozesses in nicht-abzählbaren abgeschlossenen Mengen  $M$  können komplexe „Mannigfaltigkeiten“ ohne abzählbare Basis entstehen; man vergleiche hierzu die Arbeit [9].

<sup>8)</sup> Die algebraischen Begriffe „irreduzibel“, „Primfaktor“, „größter gemeinsamer Teiler“, die hier und im folgenden auftreten, beziehen sich auf den Ring  $R$  der Funktionen  $f(x_1, x_2)$ , die in hinreichend kleinen Umgebungen von  $o$  regulär sind. Die Einheiten in  $R$  sind die Funktionen, die in  $o$  nicht verschwinden; jedes Element von  $R$  ist Produkt irreduzibler Elemente, und diese Produktdarstellung ist eindeutig bis auf Faktoren, die Einheiten sind; je zwei Elemente  $f_1, f_2$  haben einen größten gemeinsamen Teiler  $t$ , der bis auf Einheitsfaktoren bestimmt ist; ist  $t$  selbst Einheit, so darf man  $t = 1$  setzen, und  $f_1, f_2$  sind „teilerfremd“.

$y_1, y_2$  nach  $x_1, x_2$  heiße  $D$ ; die meromorphe Funktion  $f_1 f_2^{-1}$  heiße  $q$ . Ferner soll unter  $U'$  eine hinreichend kleine, in  $U$  enthaltene Umgebung von  $o$  verstanden werden.

**Lemma.** *Unter den genannten Voraussetzungen ist  $f$  eineindeutig in  $U' - A$ , also in  $U'$  „schlicht bis auf  $a$ “; und es gilt weiter: wenn  $f$  ausnahmslos schlicht in  $U'$ , wenn also  $A = o$  ist, so ist  $D(0, 0) \neq 0$ , und  $o$  ist Unbestimmtheitsstelle der Funktion  $q$ ; wenn  $A$  Ausnahmemenge ist, also aus einer oder einigen der Flächen  $H_i$  besteht, so ist  $D(0, 0) = 0$ , und  $o$  ist nicht Unbestimmtheitsstelle von  $q$  (cf. [10], p. 60–61).*

Bemerkungen: (a) Das Lemma enthält den bekannten Satz ([10], p. 19): wenn  $f$  in der Umgebung von  $o$  ausnahmslos schlicht ist, so ist  $D \neq 0$ . – (b) Aus dem Lemma ist ersichtlich: Die Eigenschaften, durch die wir im § 1 die „bis auf  $a$  schlichten“ Abbildungen definiert haben, können durch die schwächeren Voraussetzungen des Lemmas ersetzt werden (also ohne daß die Konstanz von  $f$  auf der Ausnahmemenge gefordert wird).

*Beweis des Lemmas:* Es sei  $t(x_1, x_2)$  der größte gemeinsame Teiler von  $f_1, f_2$ , also

$$f_1(x_1, x_2) = t(x_1, x_2) \cdot g_1(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) = t(x_1, x_2) \cdot g_2(x_1, x_2) \quad (6)$$

mit teilerfremden  $g_1, g_2$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall I:  $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$ ;

Fall II:  $g_i(0, 0) \neq 0$  für wenigstens einen der Indizes  $i = 1, 2$ .

Es liege zunächst der Fall I vor: Sind  $\varrho, \varrho'$  verschiedene Zahlen, so sind  $\varrho g_1 + g_2, \varrho' g_1 + g_2$  teilerfremd; daraus folgt: zu jeder der oben genannten irreduziblen Funktionen  $h_i$  gibt es höchstens eine Zahl  $\varrho_i$ , so daß  $h_i$  Teiler von  $\varrho_i g_1 + g_2$  ist; wir können daher  $\varrho$  so wählen, daß  $\varrho g_1 + g_2$  zu allen  $h_i$  teilerfremd ist. Es sei  $p(x_1, x_2)$  ein Primfaktor von  $\varrho g_1 + g_2$ ; dann fllt die durch  $p = 0$  bestimmte irreduzible Fläche  $P$  mit keiner der Flächen  $H_i$  zusammen, und folglich wird  $P$  durch  $f$  schlicht abgebildet, und zwar, da auf  $P$  die Gleichung  $\varrho g_1 + g_2 = 0$  gilt, auf ein Gebiet der Ebene  $y_2 = -\varrho y_1$ ; in dieser Ebene ist  $y_1$  ein regulärer Parameter. Andererseits besitzt  $P$  eine Parameterdarstellung  $x_1 = u(z), x_2 = v(z)$ , wobei  $u, v$  eindeutige analytische Funktionen in der Ebene des lokal uniformisierenden Parameters  $z$  sind und eine Umgebung des Punktes  $z = 0$  eineindeutig auf eine Umgebung von  $o$  auf der Fläche  $P$  bezogen wird. Durch Vermittlung der Fläche  $P$  und der Abbildung  $f$  wird somit  $y_1$  eine schlichte Funktion von  $z$ ; es ist dies die Funktion

$$y_1(z) = t(u(z), v(z)) \cdot g_1(u(z), v(z)) ; \quad (7)$$

infolge ihrer Schlichkeit ist

$$y_1'(0) \neq 0 . \quad (8)$$

Da wir uns im Fall I befinden, haben die Taylorschen Reihen von  $g_1$  und  $g_2$  keine konstanten Glieder, sie beginnen also mit

$$g_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \dots, \quad g_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2 + \dots . \quad (9)$$

Berechnet man  $y_1'(0)$  aus (7) und der ersten Gleichung (9), so erhält man

$$y_1'(0) = t(0, 0) \cdot (au'(0) + bv'(0)) . \quad (10)$$

Hieraus und aus (8) folgt erstens:  $t(0, 0) \neq 0$ ; wir dürfen also  $t \equiv 1$ ,  $f_1 = g_1$ ,  $f_2 = g_2$  setzen;  $f_1, f_2$  sind somit teilerfremd, und daher ist der Punkt  $o$  eine Unbestimmtheitsstelle der Funktion  $q = f_1 f_2^{-1}$ .

Zweitens folgt aus (10) und (8): Es ist  $(a, b) \neq (0, 0)$ , das heißt, es verschwinden nicht beide linearen Glieder in der Entwicklung (9) von  $g_1$ . Nun ist aber die Funktion  $g_1$  nicht bevorzugt vor irgendeiner linearen Verbindung  $g^* = \lambda g_1 + \mu g_2$ , wobei  $\lambda, \mu$  beliebige Zahlen, nicht beide gleich 0, sind; denn Voraussetzungen und Behauptungen unseres Lemmas bleiben ungeändert, wenn man mit  $y_1, y_2$  eine reguläre homogene affine Transformation vornimmt. Folglich verschwinden auch in der Reihe für  $g^*$  nicht beide linearen Glieder; diese Reihe beginnt nach (9) mit

$$g^*(x_1, x_2) = (\lambda a + \mu c)x_1 + (\lambda b + \mu d)x_2 + \dots .$$

Diese linearen Glieder könnte man aber durch geeignete Wahl von  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  zum Verschwinden bringen, wenn die Determinante  $ad - bc = 0$  wäre; es ist also  $ad - bc \neq 0$ . Da aber  $g_1 = f_1$ ,  $g_2 = f_2$  ist, ist  $ad - bc = D(0, 0)$ .

Aus  $D(0, 0) \neq 0$  folgt nun weiter, daß  $f$  in einer Umgebung  $U'$  von  $o$  ausnahmslos schlicht ist.

Es ist also bewiesen: *Im Fall I ist  $f$  ausnahmslos schlicht in  $U'$ ,  $D(0, 0) \neq 0$  und  $o$  Unbestimmtheitsstelle von  $q$ .*

Jetzt liege der Fall II vor: Dann liest man aus (6) ab:  $o$  ist nicht Unbestimmtheitsstelle von  $q$ , sowie:  $t(0, 0) = 0$ ; da die Menge  $A$  durch  $t = 0$  charakterisiert ist, besteht sie nicht nur aus  $o$ , sondern ist eine Ausnahmemenge; da sie auf  $a$  abgebildet wird, ist  $D(0, 0) = 0$ .

Wir haben noch zu zeigen:  $f$  ist eineindeutig in  $U - A$ . Dies ist trivial, falls  $H = A$  ist;  $H$  enthalte also einen irreduziblen Bestandteil  $H_1$ , der nicht zu  $A$  gehört;  $o_1$  sei ein von  $o$  verschiedener Punkt auf  $H_1$ , und  $U_1$  eine Umgebung von  $o_1$ , deren Durchschnitt mit  $H$  zu  $H_1$



gehört. Die Abbildung  $f$  ist in  $U_1 - H_1$  eineindeutig, und wir können unsere bisherigen Betrachtungen statt auf  $o$ ,  $U$  und  $H$  analog auf  $o_1$ ,  $U_1$  und  $H_1$  beziehen. Dann aber — also indem wir  $o$  durch  $o_1$  ersetzen — befinden wir uns nicht im Falle II; denn sonst wäre, wie wir soeben gesehen haben, die Menge  $A'$  der Punkte  $x \in U_1$  mit  $f(x) = f(o_1)$  — also die Menge, die analog zu  $A$  ist — eine Ausnahmemenge und enthielte also eine analytische,  $o_1$  enthaltende Fläche  $A''$ ; infolge der Schlichtheit von  $f$  in  $U_1 - H_1$  müßte  $A''$  auf  $H_1$  liegen, und  $f$  wäre somit in einem Teilgebiet von  $H_1$  konstant; dann wäre  $f$  auf ganz  $H_1$  konstant, also  $H_1 \subset A$ , was nicht der Fall ist. Es liegt also in  $o_1$  der Fall I vor, und daher ist, wie wir oben gezeigt haben,  $D \neq 0$  in  $o_1$ . Daher hat  $o_1$  und somit hat jeder Punkt von  $U - A$  eine Umgebung, in der  $f$  eineindeutig und daher topologisch und gebietstreu ist;  $f$  ist aber in  $U - A$  überhaupt eineindeutig. Denn wäre  $f(p_1) = f(p_2) = y$  für zwei verschiedene Punkte  $p_1$  und  $p_2$  aus  $U - A$ , so betrachte man eine gegen  $y$  konvergierende Folge von Punkten  $y^{(n)}$ , die nicht zu  $f(H)$  gehören: infolge der Gebietstreue von  $f$  in Umgebungen von  $p_1$  und  $p_2$  gäbe es Punktfolgen  $p_1^{(n)} \rightarrow p_1$ ,  $p_2^{(n)} \rightarrow p_2$  mit  $f(p_1^{(n)}) = f(p_2^{(n)}) = y^{(n)}$ ,  $p_1^{(n)} \in U - H$ ,  $p_2^{(n)} \in U - H$  — entgegen der Eineindeutigkeit von  $f$  in  $U - H$ .

Wir haben damit bewiesen: *Im Fall II hat die Funktion  $q$  keine Unbestimmtheitsstelle,  $A$  ist Ausnahmemenge, es ist  $D(0, 0) = 0$ , und  $f$  ist eineindeutig in  $U - A$ .*

Die Zusammenfassung der Ergebnisse für den Fall I und für den Fall II liefert den Beweis des Lemmas.

2. Wir betrachten jetzt eine analytische Abbildung  $f$  einer Mannigfaltigkeit  $X$  in eine Mannigfaltigkeit  $Y$ , die schlicht bis auf einen Punkt  $a \in f(X)$  ist, und es sei wieder  $f^{-1}(a) = A$ . Wie in § 2 sei  $Y_1$  die Mannigfaltigkeit, die durch den  $\sigma$ -Prozeß im Punkte  $a = a_0$  aus  $Y = Y_0$  entsteht, und die zugehörige Abbildung von  $Y_1$  auf  $Y_0$  heiße wieder  $\varphi_1$ . — Behauptung: *Entweder ist  $f$  ausnahmslos schlicht (also  $A$  einpunktig), oder  $f$  läßt sich zusammensetzen aus einer Abbildung  $f^1$  von  $X$  in  $Y^1$  und der Abbildung  $\varphi_1$ , so daß also  $f = \varphi_1 f^1$  ist.*

*Beweis.* Wir nehmen an, daß  $f$  nicht ausnahmslos schlicht ist.  $y_1, y_2$  seien Parameter in einer Umgebung  $V$  von  $a = (0, 0)$ ;  $W$  sei eine Umgebung von  $A$  mit  $f(W) \subset V$ ; dann wird  $f$  für  $x \in W$  durch zwei analytische Funktionen  $f_1(x) = y_1$ ,  $f_2(x) = y_2$  beschrieben; damit ist auch die meromorphe Funktion  $q = f_1 f_2^{-1}$  in  $W$  definiert. Wir behaupten:  $q$  besitzt keine Unbestimmtheitsstelle. In der Tat: in  $W - A$  ist dies klar, da dort eine der Funktionen  $f_i \neq 0$  ist; es sei also  $o$  ein be-

liebiger Punkt von  $A$ . Da  $f$  nicht ausnahmslos schlicht ist, ist  $o$  nach § 1, Nr. 2, nicht isolierter Punkt von  $A$ ; dann folgt aus dem Lemma in Nr. 1 — indem wir in der Umgebung von  $o$  Parameter  $x_1, x_2$  einführen und übrigens  $H = A$  setzen —, daß  $o$  nicht Unbestimmtheitspunkt ist.

In dem Teil  $V_1 = \varphi_1^{-1}(V)$  der Mannigfaltigkeit  $Y_1$  sind gemäß § 2 die Parameter  $y_1, y_2, s_1 : s_2$ , die durch die Relation (2) verknüpft sind, erklärt. Wir definieren die Abbildung  $f^1$  von  $W$  in  $V_1$  durch

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x), \quad s_1 : s_2 = q(x). \quad (11)$$

Für diese Abbildung von  $W$  gilt  $\varphi_1 f^1 = f$ ; sie kann daher in  $W - A$  auch durch

$$f^1(x) = \varphi_1^{-1} f(x) \quad (11')$$

erklärt werden. Wenn wir nun für alle  $x \in X - A$  die Abbildung  $f^1$  durch (11') definieren, so ist  $f^1$  in ganz  $X$  erklärt, und es ist überall  $f = \varphi_1 f^1$ .

In dem soeben geführten Beweis haben wir die Voraussetzung, daß  $f$  in ganz  $X$  schlicht bis auf  $a$ , also in ganz  $X - A$  eineindeutig sei, nicht ausgenutzt, sondern nur folgende schwächere Voraussetzung:  *$f$  ist in ganz  $X$  gegeben, und die Menge  $A = f^{-1}(a)$  besitzt eine Umgebung  $U$ , so daß  $f$  in  $U$  schlicht bis auf  $a$  ist.* Denn die Anwendung des Lemmas aus Nr. 1 spielt in der Umgebung von  $A$ , und die Definition von  $f$  durch (11') in  $X - A$  ist von der Eineindeutigkeit ganz unabhängig. Wir werden diese Bemerkung nachher anwenden.

3. Es sei auch weiterhin  $A$  Ausnahmemenge,  $f$  eineindeutig in  $U - A$ ,  $f^1$  also erklärt; ferner sei  $o$  ein Punkt von  $A$ ,  $f^1(o) = a_1$ ,  $(f^1)^{-1}(a_1) = A_1$ . Aus der Eineindeutigkeit von  $f = \varphi_1 f^1$  in  $U - A$  folgt, daß dort auch  $f^1$  eineindeutig ist; wir beschränken uns zunächst auf eine Umgebung  $U(o)$  von  $o$  und können dort das Lemma aus Nr. 1 anwenden, indem wir die dortigen  $f, H, A$  jetzt durch  $f^1, A, A_1$  ersetzen; dann besagt das Lemma (unter anderem), daß  $f^1$  eineindeutig in  $U'(o) - A_1$  ist. Die Vereinigung aller  $U'(o)$ , während  $o$  die Menge  $A_1$  durchläuft, ist eine Umgebung  $U(A_1)$ . Wir behaupten:  $f^1$  ist eineindeutig in  $U(A_1) - A_1$ . Dies folgt aus der soeben bewiesenen lokalen Eineindeutigkeit, also Gebietstreue von  $f^1$  in  $U(A_1) - A_1$  und der globalen Eineindeutigkeit in  $U - A$ : wären nämlich  $p_1, p_2$  verschiedene Punkte in  $U(A_1) - A_1$  mit  $f^1(p_1) = f^1(p_2)$ , so kämen wir auf gleiche Weise zu einem Widerspruch wie am Schluß des Beweises in Nr. 1, wobei wir die dortigen  $f, H, A$  wieder durch  $f^1, A, A_1$  zu ersetzen haben. Da somit  $f^1$  in einer Umgebung von  $A_1$  schlicht bis auf  $a_1$  ist, können wir auf Grund der Feststellung am Schluß von Nr. 2 das Ergebnis von Nr. 2 auf  $f^1$  anwenden.

Demnach besteht die — durch den Punkt  $o$  bestimmte — Menge  $A_1$  entweder (a) nur aus dem Punkt  $o$  (dann ist  $f^1$  in der Umgebung von  $o$  eineindeutig), oder (b) es ist  $f^1 = \varphi_2 f^2$ , wobei  $f^2$  eine Abbildung von  $X$  in die Mannigfaltigkeit  $Y_2$  ist, welche durch den  $\sigma$ -Prozeß im Punkte  $a_1 = f^1(o)$  aus  $Y_1$  entsteht, und wobei  $\varphi_2$  die zugehörige Abbildung von  $Y_2$  auf  $Y_1$  bezeichnet. Der Punkt  $a_1$  liegt auf der Sphäre  $\sigma_1^1$  (in der Bezeichnungsweise aus § 2, Nr. 6), da  $\varphi_1(a_1) = \varphi_1 f^1(o) = f(o) = a_0$  ist.

So fahren wir fort:  $f^2(o) = a_2$  ist ein Punkt der Sphäre  $\sigma_2^2$  in  $Y_2$ ; es sei  $(f^2)^{-1}(a_2) = A_2$ . Es bestehen zwei Möglichkeiten: (a)  $A_2 = o$ , also  $f^2$  in der Umgebung von  $o$  eineindeutig; (b)  $f^2 = \varphi_3 f^3$ , wobei  $f^3$  eine Abbildung von  $X$  in die Mannigfaltigkeit  $Y_3$  ist, die durch den  $\sigma$ -Prozeß in  $a_2$  aus  $Y_2$  entsteht. Nehmen wir an, daß bei  $k$ -maliger Wiederholung immer der Fall (b) vorliegt; dann haben wir:

$$f = \varphi_1 f^1 = \varphi_1 \varphi_2 f^2 = \dots = \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k f^k = \Phi_k f^k, \quad (12)$$

wobei  $f^k$  eine Abbildung von  $X$  in  $Y_k$  und  $\Phi_k$  die natürliche Abbildung von  $Y_k$  auf  $Y$  ist. Diese Zerlegung von  $f$  hängt von dem gewählten Punkt  $o$  ab.

Es wäre nun zunächst denkbar, daß für einen gewissen Punkt  $o$  immer der Fall (b) vorläge, es also beliebig lange Zerlegungen (12) gäbe. Behauptung: Das ist unmöglich. Beweis<sup>9)</sup>: Es gelte (12), und es seien, bei Benutzung beliebiger lokaler Parameter,  $D(f)$ ,  $D(f^k)$  die Funktionaldeterminanten von  $f$  und  $f^k$  in der Umgebung von  $o$  und  $D(\varphi_i)$  die Funktionaldeterminante von  $\varphi_i$  in der Umgebung von  $a_i$ ; dann ist

$$D(f) = D(\varphi_1) \cdot \dots \cdot D(\varphi_k) \cdot D(f^k);$$

alle diese Determinanten sind Funktionen der in der Umgebung von  $o$  gültigen Parameter  $x_1, x_2$ . Nun ist aber  $D(\varphi_i) = 0$  im Punkte  $a_i$ , da dieser auf der Sphäre  $\sigma_i^i$  liegt, die durch  $\varphi_i$  ganz auf den Punkt  $a_{i-1}$  abgebildet wird; die Funktion  $D(\varphi_i)$  von  $x_1, x_2$  verschwindet also in  $o$ . Folglich ist die Funktion  $D(f)$  ein Produkt von  $k$  nicht-trivialen, das heißt in  $o$  verschwindenden Funktionen, und daher ist  $k$  nicht größer als die Anzahl der Faktoren bei der Zerlegung von  $D(f)$  in Primfaktoren.

Es gibt also zu jedem Punkt  $o$  von  $A$  eine Zahl  $k$ , so daß beim  $k$ -ten Schritt unseres Vorgehens der Fall (a) eintritt. Für dieses  $k = k(o)$  gilt (12); dabei ist  $f^k$  eine Abbildung von  $X$  in eine Mannigfaltigkeit  $Y_k$ , welche durch einen  $k$ -fachen  $\sigma$ -Prozeß im Punkte  $a = a_0$  aus  $Y$  entstanden ist;

---

<sup>9)</sup> Diesen Beweis verdanke ich Herrn H. Bührer; mein ursprünglicher Beweis war umständlicher.

diese Abbildung  $f^k$  ist in einer Umgebung von  $o$  eineindeutig;  $\Phi_k$  ist die natürliche Abbildung von  $Y_k$  auf  $Y$ .

4. Da die Bedingung  $f(x) = a_0$  auf Grund der Zerlegung  $f = \Phi_k f^k$  identisch ist mit  $f^k(x) \in \Sigma_k$ , wobei  $\Sigma_k$  wie in § 2 den Sphärenbaum in  $Y_k$  bezeichnet, wird  $A$  durch  $f^k$  auf einen Teil von  $\Sigma_k$  abgebildet. In einer Umgebung von  $o$  ist  $f_k$  eineindeutig; folglich ist das dort gelegene Stück von  $A$  analytisch homöomorph einem Stück eines Sphärenbaums in der Umgebung eines seiner Punkte; aus Eigenschaften der Sphärenbäume, die wir in § 2, Nr. 6, festgestellt haben, folgt daher:

**Satz I.** *Eine Ausnahmemenge  $A$  einer schlichten Abbildung besteht in der Umgebung eines beliebigen ihrer Punkte entweder aus einem einzigen regulären analytischen Flächenstück oder aus zwei solchen Flächenstücken, die sich schneiden (ohne Berührung).<sup>6)</sup>*

Auch wenn man keine anderen Mannigfaltigkeiten  $X$  betrachtet als die Gebiete des Zahlenraumes, verdient diese Tatsache Interesse<sup>10)</sup>. Das Beispiel (1) in § 1 zeigt den Fall einer einzigen Ausnahmefläche; Beispiele mit zwei Ausnahmeflächen durch einen Punkt werden durch

$$y_1 = x_1^a x_2^b, \quad y_2 = x_1^c x_2^d; \quad a, b, c, d > 0, \quad ad - bc = 1 \quad (13)$$

gegeben.

5. Wir knüpfen an das Ende von Nr. 3 an und wollen zunächst angeben, wie groß man die Umgebung  $U$  von  $o$  wählen darf, damit  $f^k$  in  $U$  eineindeutig sei. Die Menge  $A$  besteht aus endlich oder abzählbar unendlich vielen irreduziblen analytischen Flächen  $C_j$ , von denen eine oder zwei durch  $o$  laufen. Behauptung:  $f^k$  ist in  $U$  eineindeutig, falls keine andere  $C_j$  in  $U$  eintritt als die durch  $o$  laufenden. In der Tat: wenn diese Bedingung erfüllt ist, so tritt, da  $f^k$  auf den durch  $o$  laufenden  $C_j$  (infolge der Eineindeutigkeit von  $f^k$  in der Nähe von  $o$ ) nicht konstant ist, keine Ausnahmemenge von  $f^k$  in  $U$  ein; folglich besitzt jeder Punkt von  $U$  eine Umgebung, in der  $f^k$  eineindeutig ist; ferner ist  $f^k$  eineindeutig in  $U - A$  (da  $f = \Phi_k f^k$  dort eineindeutig ist). Wie früher (zum Beispiel gegen Schluß von Nr. 1) folgt aus der lokalen Eineindeutigkeit in  $U$  und der globalen Eineindeutigkeit in  $U - A$  leicht die Eineindeutigkeit in  $U$ .

Jeder Punkt von  $A$  besitzt eine solche „ausgezeichnete“ Umgebung. Es sei nun ein kompakter Teil  $K$  von  $A$  gegeben. Wir können ihn mit

<sup>10)</sup> In diesem Zusammenhang hat mich zuerst Herr Bühner auf den Satz I aufmerksam gemacht.

endlich vielen ausgezeichneten Umgebungen  $U(o_1), U(o_2), \dots, U(o_m)$  überdecken. Wir bestimmen erstens die Abbildung  $f_1^{k_1}$  von  $X$  in eine Mannigfaltigkeit  $Y_{k_1}^1$ , so daß  $f_1^{k_1}$  in  $U(o_1)$  eineindeutig ist und für welche  $f = \Phi_{k_1} f_1^{k_1}$  gilt. Die Umgebung  $U(o_2)$ , welche in bezug auf die Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$  „ausgezeichnet“ war, ist dies auch in bezug auf die Abbildung  $f_1^{k_1}$  von  $X$  in  $Y_{k_1}^1$ ; denn die Ausnahmemenge  $B$  von  $f_1^{k_1}$  geht aus  $A$  hervor, indem aus  $A$  gewisse  $C_j$  fortfallen (aber keine neuen Ausnahmepunkte hinzutreten). Es gibt daher eine Mannigfaltigkeit  $Y_{k_2}^2$ , welche aus  $Y_{k_1}^1$  durch einen mehrfachen  $\sigma$ -Prozeß im Punkte  $f_1^{k_1}(o_2)$  hervorgeht, und eine Abbildung  $f_2^{k_2}$  von  $X$  in  $Y_{k_2}^2$ , die in  $U(o_2)$  eineindeutig ist und für die  $f_1^{k_1} = \Psi_{k_2} f_2^{k_2}$ , also  $f = \Phi_{k_1} \Psi_{k_2} f_2^{k_2}$  gilt; die Eineindeutigkeit von  $f_1^{k_1}$  in  $U(o_1)$  bleibt beim Übergang zu  $f_2^{k_2}$  erhalten, wie aus der angegebenen Zerlegung von  $f_1^{k_1}$  ersichtlich ist. So fährt man fort und erhält schließlich eine Mannigfaltigkeit  $\tilde{Y}$ , die durch einen mehrfachen  $\sigma$ -Prozeß in  $a$  aus  $Y$  entstanden ist, und eine Abbildung  $F$  von  $X$  in  $\tilde{Y}$ , die in allen  $U(o_i)$  eineindeutig ist und für welche  $f = \Omega F$  gilt, wobei  $\Omega$  die natürliche Abbildung von  $\tilde{Y}$  auf  $Y$  bezeichnet. Die gegebene Menge  $K \subset A$  ist in der Summe  $U$  der  $U(o_i)$  enthalten; aus der Eineindeutigkeit von  $F$  in jedem  $U(o_i)$  und in  $X - A$  folgt die Eineindeutigkeit in  $U$  nach demselben Schema wie früher: wäre  $F(p_1) = F(p_2)$  für verschiedene  $p_1, p_2$  aus  $U$ , so käme man ebenso zum Widerspruch, wie gegen Schluß von Nr. 1. — Wir fassen zusammen:

**Satz II.**  *$K$  sei ein kompakter Teil der Ausnahmemenge  $A$  bei der bis auf  $a$  schlichten Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$ ; dann gibt es eine Mannigfaltigkeit  $\tilde{Y}$ , die durch einen mehrfachen  $\sigma$ -Prozeß in  $a$  aus  $Y$  entsteht, und eine Abbildung  $F$  von  $X$  in  $\tilde{Y}$ , so daß  $F$  in einer Umgebung von  $K$  eineindeutig ist und daß  $f = \Omega F$  gilt, wobei  $\Omega$  die natürliche Abbildung von  $\tilde{Y}$  auf  $Y$  bezeichnet.  $K$  selbst wird durch  $F$  analytisch homöomorph auf einen Teil des Sphärenbaumes  $\tilde{\Sigma}$  in  $\tilde{Y}$  abgebildet.*

Dieser Satz enthält das Ergebnis von Nr. 3 als Spezialfall: dort ist  $K$  der Punkt  $o$ .

6. Jetzt sei  $A$  kompakt; dann dürfen wir  $K=A$  setzen. Da  $F$  sowohl in einer Umgebung  $U(A)$  als auch von vornherein in  $X - A$  eineindeutig ist, ist  $F$  eine homöomorphe Abbildung von  $X$  auf einen Teil  $X'$  von  $Y$ . Das in  $\tilde{\Sigma}$  gelegene Bild  $F(A)$  ist mit  $\tilde{\Sigma}$  identisch; denn es ist einerseits kompakt, also abgeschlossen, andererseits, infolge der Eineindeutigkeit von  $F$ , offen in  $\tilde{\Sigma}$ ; da  $\tilde{\Sigma}$  zusammenhängend ist, ist  $F(A) = \tilde{\Sigma}$ .



Bereits in § 1, Nr. 3, haben wir gezeigt, daß die Abbildung  $f$  vollständig ist; in unserer jetzigen Sprache bedeutet das einfach, daß jede Umgebung von  $\tilde{Z}$  durch  $\Omega$  auf eine volle Umgebung von  $a$  abgebildet wird. — Hiermit ist unser *Hauptsatz* bewiesen:

**Satz III.** *Ist die Ausnahmemenge  $A = f^{-1}(a)$  der bis auf den Punkt  $a$  schlichten Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$  kompakt, so läßt sich  $f$  zusammensetzen aus einer analytisch homöomorphen Abbildung  $F$  von  $X$  auf einen Teil  $X'$  einer Mannigfaltigkeit  $\tilde{Y}$ , die durch einen mehrfachen  $\sigma$ -Prozeß in  $a$  aus  $Y$  entstanden ist, und der natürlichen Projektion  $\Omega$  von  $\tilde{Y}$  auf  $Y$ . Durch  $F$  geht  $A$  in den Sphärenbaum  $\tilde{Z}$  von  $\tilde{Y}$  über.  $A$  ist also mit  $\tilde{Z}$  homöomorph. Das Bild  $f(X)$  enthält eine volle Umgebung von  $a$ .*

Übersetzen wir dies gemäß § 1, Nr. 4, in die Sprache der Modifikationen, so haben wir noch zu beachten, daß dann  $f$  eine Abbildung von  $X$  auf die ganze Mannigfaltigkeit  $Y$ , daß also  $X' = \tilde{Y}$  ist; indem wir  $X$  vermöge  $F$  mit  $X'$  identifizieren, dürfen wir dann sagen:

**Satz III'.** *Es gibt keine anderen lokalen Modifikationen von  $Y$  als die  $n$ -fachen  $\sigma$ -Prozesse,  $n \geq 1$ .*

7. Auch über die Struktur nicht-kompakter  $A$  gibt der Satz II weitgehend Aufschluß:

**Satz IV.** *Die irreduziblen analytischen Flächen  $C_1, C_2, \dots$ , aus denen die Ausnahmemenge  $A$  einer bis auf einen Punkt schlichten Abbildung besteht, haben folgende Eigenschaften: (a) jede  $C_i$  ist in jedem ihrer Punkte regulär<sup>6)</sup>; (b) jede  $C_i$  ist einem Gebiet der Zahlkugel  $\sigma$  analytisch homöomorph (sie ist also eine „schlichtartige“ Riemannsche Fläche); (c) je zwei  $C_i$  haben höchstens einen Punkt gemeinsam; ein solcher ist Schnitt-, nicht Berührungspunkt; (d) durch keinen Punkt gehen mehr als zwei Flächen  $C_i$ ; (e) es gibt keinen „Zyklus“  $C_1, C_2, \dots, C_n, C_{n+1} = C_1, n > 2$ , derart, daß immer  $C_i$  und  $C_{i+1}$  sich schneiden.*

Man bestätigt jede dieser Behauptungen leicht mit Hilfe des Satzes II: Wäre eine der Behauptungen falsch, so gäbe es einen kompakten Teil von  $A$ , der nicht mit einem Teil eines Sphärenbaumes analytisch homöomorph wäre.

In der Sprache der Modifikationen lautet der Satz:

**Satz IV'.** *Eine Menge  $A$ , welche bei einer lokalen Modifikation einer Mannigfaltigkeit  $Y$  einen Punkt  $a$  ersetzen kann, hat — wenn sie nicht selbst nur ein Punkt ist — notwendigerweise die im Satz IV genannten Eigenschaften.*

8. Der Satz IV gilt unabhängig davon, ob die Abbildung  $f$  vollständig ist oder nicht (er enthält nicht nur Aussagen über Modifikationen). Für vollständige Abbildungen können wir, wenn auch nicht über die Struktur von  $A$ , so doch über die Struktur des Raumes  $X$  noch folgende Aussage hinzufügen :

**Satz V.** *Die Mannigfaltigkeit  $X$  gestatte eine Abbildung  $f$ , welche bis auf einen Punkt  $a$  schlicht ist, eine nicht-triviale (das heißt mehrpunktige) Ausnahmemenge  $A = f^{-1}(a)$  besitzt und welche vollständig ist; mit anderen Worten :  $X$  sei durch eine lokale Modifikation, die nicht trivial ist (das heißt, die  $a$  durch eine mehrpunktige Menge  $A$  ersetzt), aus einer Mannigfaltigkeit  $Y$  entstanden. Dann enthält  $X$  eine 2-dimensionale geschlossene Fläche, deren Selbstschnittzahl gleich  $-1$  ist.<sup>5)</sup>*

*Beweis.*  $C$  sei ein (beliebig kleines) Flächenstück aus  $A$ . Wir können (in der Ausdrucksweise von Satz II)  $\tilde{Y}$ ,  $F$  und eine Umgebung  $U(C)$  so wählen, daß  $W = (X - A) \cup U(C)$  durch  $F$  eineindeutig (also topologisch) in  $\tilde{Y}$  abgebildet wird, und wir brauchen uns daher von der Existenz einer geschlossenen Fläche mit der Selbstschnittzahl  $-1$  nur in dem Gebiet  $F(W)$  zu überzeugen. Da  $f$  vollständig ist, enthält  $f(X) = \Omega F(X)$  eine Umgebung  $V$  von  $a$ ; folglich enthält  $F(X - A)$  die Menge  $\Omega^{-1}(V - a)$  und  $F(W)$  die Menge  $\Omega^{-1}(V - a) \cup FU(C)$ ; diese Mannigfaltigkeit aber kann man so erzeugen : man übt erst auf  $V$  den mehrfachen  $\sigma$ -Prozeß  $\Omega^{-1}$  in  $a$  aus und entfernt dann einen abgeschlossenen echten Teil des Sphärenbaumes  $\tilde{\Sigma}$ . Daß es in einer solchen Mannigfaltigkeit geschlossene Flächen mit der Selbstschnittzahl  $-1$  gibt, haben wir in § 2, Nr. 7 (a), gesehen. —

Im  $(x_1, x_2)$ -Zahlenraum hat jeder 2-dimensionale Zyklus die Selbstschnittzahl 0 (da er homolog 0 ist); daher ist aus dem Satz V unter anderem ersichtlich : eine Abbildung eines Gebietes des Zahlenraumes, welche bis auf einen Punkt schlicht ist, ist entweder ausnahmslos schlicht oder unvollständig. Es ist also kein Zufall, sondern eine Notwendigkeit, daß bei den Abbildungen, die durch (1) und durch (13) gegeben sind, das Bild des  $(x_1, x_2)$ -Raumes keine volle Umgebung des Punktes  $y_1 = y_2 = 0$  enthält.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *H. Hopf*, Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. Mat., Ser. V, Vol. X, Roma 1951.
- [2] *H. Behnke und K. Stein*, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124** (1951).
- [3] *T. Radó*, Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit Math. Z. **20** (1924).
- [4] *H. Cartan*, Sur une extension d'un théorème de Radó. Math. Ann. **125** (1952).
- [5] *F. Hirzebruch*, Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126** (1953).
- [6] *O. Zariski*, Reduction of the singularities of algebraic three-dimensional varieties. Ann. Math. **45** (1944).
- [7] *W. Stoll*, Über meromorphe Modifikationen. Habilitationsschrift, Universität Tübingen, 1954. (Die Arbeit wird voraussichtlich in mehreren Teilen in der Math. Z. und den Math. Ann. erscheinen.)
- [8] *H. Freudenthal*, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. Compositio Math. **4** (1937).
- [9] *E. Calabi and M. Rosenlicht*, Complex analytic manifolds without countable base. Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953).
- [10] *H. Behnke und P. Thullen*, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin 1934.

(Eingegangen den 27. August 1954.)