Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1954)

Artikel: Normalfunktionen und Hauptfolgen.

Autor: Bachmann, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22611

Normalfunktionen und Hauptfolgen

von HEINZ BACHMANN, Zürich

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Finsler, zum 60. Geburtstag

1. Einleitung

Diese Mitteilung ist eine Weiterführung eines Teils der Arbeit des Verfassers über Normalfunktionen und Hauptfolgen [1], kann jedoch ohne Kenntnis der letzteren gelesen werden. Wir legen das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem der Mengenlehre zugrunde, und zwar meist ohne Auswahlaxiom (die Anwendung des Auswahlaxioms wird jeweils hervorgehoben). Wir gebrauchen folgende Bezeichnungen und Definitionen:

1) W sei die Klasse aller Ordnungszahlen; ist α eine Ordnungszahl, so sei $W(\alpha)$ die Menge aller Ordnungszahlen $<\alpha$; A sei immer ein Anfangsstück von W, das heißt, eine Klasse von Ordnungszahlen mit der Eigenschaft: $\alpha \epsilon A, \beta < \alpha \to \beta \epsilon A$ (es ist also entweder $A = W$ oder $A = W(\alpha)$, wobei α eine Ordnungszahl ist); ein solches Anfangsstück A heiße *regulär*, wenn entweder $A = W$ oder $A = W(\Lambda)$, wobei Λ eine reguläre Limeszahl $> \omega$ ist.

2) Wir betrachten hier fast ausschließlich solche Funktionen (Folgen) von Ordnungszahlen, deren Argumentbereiche Anfangsstücke A von W sind, und deren Wertbereiche ebenfalls aus lauter Ordnungszahlen bestehen. Im Fall $A = W(\alpha)$ heiße die Funktion *vom Typ* α. Eine Funktion f heiße *monoton*, wenn $f(\xi_1) \leqq f(\xi_2)$ für beliebige Argumente ξ_1, ξ_2 mit $\xi_1 < \xi_2$, *wachsend*, wenn $f(\xi_1) < f(\xi_2)$ für solche Argumente, *stetig*, wenn $f(\lambda) = \lim\limits_{\xi<\lambda} f(\xi)$ für jedes Limeszahlargument λ. Wir definieren die Iterationen f^n (für $n < \omega$) einer Funktion f durch $f^0(\xi) = \xi$, $f^{n+1}(\xi) = f(f^n(\xi))$.

3) Eine wachsende und stetige Funktion, deren Argumentbereich eine Klasse A ist, heißt eine *Normalfunktion*. Eine Normalfunktion, deren Wertbereich eine Teilklasse des Argumentbereiches ist, soll eine *volle* Normalfunktion heißen. Ist φ eine Normalfunktion, so heißen die Ordnungszahlen ξ, für die $\varphi(\xi) = \xi$ gilt, die *kritischen Zahlen* von φ. Diese bilden wieder eine Normalfunktion, die sogenannte *Ableitung* φ' von φ [2]. Jede volle Normalfunktion mit regulärem Argumentbereich hat als Ableitung eine volle Normalfunktion mit demselben Argument-

bereich[1]); ist φ eine Normalfunktion vom Typ Λ, wobei Λ eine mit ω konfinale Limeszahl ist, so kann es vorkommen, daß φ keine kritischen Zahlen hat. Ferner gilt: Ist ξ eine kritische Zahl einer Normalfunktion φ, so ist $\lim\limits_{n<\omega} \varphi^n(\xi + 1)$ die nächstgrößere kritische Zahl von φ, sofern alle Iterationen $\varphi^n(\xi + 1)$ existieren und ihr Limes im Argumentbereich von φ liegt; die erste kritische Zahl von φ ist $\lim\limits_{n<\omega} \varphi^n(0)$, sofern analoge Bedingungen erfüllt sind [1].

4) Unter einer *regressiven Funktion* verstehen wir eine Funktion f mit $f(0) = 0$ und $f(\xi) < \xi$ für $\xi > 0$. Ist A ein reguläres Anfangsstück von W und K eine mit A ähnliche Teilklasse von A, und ist auf K eine regressive Funktion f definiert, so hat sie einen Wert η, so daß die Gleichung $f(\xi) = \eta$ eine mit A ähnliche Klasse von Lösungen ξ hat [3].

5) Ist f eine monotone Funktion mit dem Argumentbereich A, so heiße die Funktion δ mit $\delta(\xi) = -f(\xi) + f(\xi + 1)$[2]) für $(\xi + 1) \in A$ die *Differenzenfunktion* (Differenzenfolge) von f. Ist K eine Teilklasse einer Klasse A, so daß die Differenzenfunktion der wachsenden Funktion mit dem Wertbereich K jede Zahl von A schließlich endgültig überschreitet, so heiße K eine *gelichtete Teilklasse* von A [4].

6) Eine Funktion f von zwei Variablen, die jedem geordneten Paar (α, β) von Ordnungszahlen eine Ordnungszahl $f(\alpha, \beta)$ eindeutig zuordnet, heiße eine *arithmetische Operation*, wenn für $\alpha > 1$ und $\beta > 1$ gilt: $f(\alpha, \beta)$ ist für festes α eine Normalfunktion von β und für festes β eine monotone Funktion von α mit $f(\alpha, \beta) > \alpha$. Zum Beispiel sind die elementaren arithmetischen Operationen $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ und α^β solche Funktionen. Man nennt eine Ordnungszahl ξ eine *Hauptzahl* bezüglich der arithmetischen Operation f, wenn es eine Ordnungszahl α_0 gibt mit $f(\alpha, \xi) = \xi$ für alle α mit $\alpha_0 \leqq \alpha < \xi$. Man kann in analoger Weise wie in [5] zeigen, daß alle Hauptzahlen > 2 Limeszahlen sind (sogenannte *eigentliche* Hauptzahlen), daß die Hauptzahlen von f eine Normalfunktion mit dem Argumentbereich W bilden, daß alle eigentlichen Hauptzahlen *additive Hauptzahlen* sind (das heißt, von $f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$), und daß diese additiven Hauptzahlen die Zahlen ω^ξ sind.

2. Kritische Zahlen und Hauptzahlen

Wir beweisen nun folgende Sätze über kritische Zahlen und Hauptzahlen:

Satz 1. Die mit ω konfinalen additiven Hauptzahlen sind genau die

[1]) In [1] und [2] werden nur solche Normalfunktionen betrachtet.
[2]) Subtraktion von links!

Ordnungszahlen, die man als Limes einer wachsenden Folge $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ vom Typ ω darstellen kann, wobei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\alpha_0 = 0$,

(2) die Differenzenfolge $\{\delta_n\}_{n<\omega}$ von $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ ist monoton.

Beweis. a) Ist Δ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl, so gibt es eine solche Folge $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$: Im Fall $\Delta = \omega^{x+1}$ setze man $\alpha_n = \omega^x \cdot n$; also wird $\delta_n = \omega^x$ für alle $n<\omega$. Im Fall $\Delta = \omega^x$, wobei x eine Limeszahl ist, existiert eine wachsende Folge $\{x_n\}_{n<\omega}$ mit $\lim\limits_{n<\omega} x_n = x$. Man setze dann $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = \omega^{x_n}$; es wird $\delta_n = \omega^{x_n}$.

b) Ist $\Delta = \lim\limits_{n<\omega} \alpha_n$, wobei $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ eine Folge mit den Bedingungen (1) und (2) ist, und ist Δ keine mit ω konfinale additive Hauptzahl, so ist Δ überhaupt keine additive Hauptzahl; Δ_1 sei nun die größte additive Hauptzahl $<\Delta$ und α_{n_0} das erste Glied der Folge $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ mit $\alpha_{n_0} \geqq \Delta_1$; es ist $n_0 \geqq 1$, $\alpha_{n_0-1}<\Delta_1$ und $\delta_{n_0-1} \geqq \Delta_1$, also $\Delta \geqq \Delta_1 \cdot \omega$. Dies ist aber unmöglich, weil $\Delta_1 \cdot \omega$ die nächstgrößere additive Hauptzahl über Δ_1 ist.

Satz 2. Damit zu einer Limeszahl Δ eine volle Normalfunktion vom Typ Δ existiert, die keine kritischen Zahlen hat, ist notwendig und hinreichend, daß Δ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl ist.

Beweis. a) Ist Δ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl, so existiert nach Satz 1 eine wachsende Folge $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ mit dem Limes Δ, die den Bedingungen (1) und (2) genügt. Wir setzen

$$\zeta(0) = 1\ ,$$
$$\zeta(\alpha_n + \eta) = \alpha_{n+1} + \eta \quad \text{für} \quad 0 \leqq n<\omega \quad \text{und} \quad 0<\eta \leqq -\alpha_n + \alpha_{n+1}\ .$$

ζ ist eine volle Normalfunktion vom Typ Δ, die keine kritischen Zahlen hat.

b) Ist ζ eine solche Normalfunktion, so sei $\alpha_n = \zeta^n(0)$; $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ ist dann eine wachsende Folge mit $\lim\limits_{n<\omega} \alpha_n = \Delta$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, denn ihre Differenzen sind

$$\delta_0 = \zeta(0)\ ,$$
$$\delta_1 = -\zeta(0) + \zeta^2(0) \geqq \zeta(0) = \delta_0\ ,$$
$$\delta_2 = -\zeta^2(0) + \zeta^3(0) \geqq -\zeta(0) + \zeta^2(0) = \delta_1\ ,$$
usw.

Satz 3. Damit zu einer vollen Normalfunktion φ mit regulärem Argumentbereich eine ebensolche Normalfunktion Φ existiert mit $\Phi' = \varphi$, ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(3) $\varphi(0)$ ist entweder 0 oder eine mit ω konfinale additive Hauptzahl,

(4) die Differenzenfunktion von φ hat als Werte nur entweder 1 oder mit ω konfinale additive Hauptzahlen.

Beweis. a) Die Bedingungen sind notwendig: Ist Φ eine volle Normalfunktion mit regulärem Argumentbereich, so ist

$$\Phi'(0) = \lim_{n<\omega} \Phi^n(0) \ .$$

Ist $\Phi(0) = 0$, so ist auch $\Phi'(0) = 0$. Ist $\Phi(0) > 0$, so ist die Folge $\{\Phi^n(0)\}_{n<\omega}$ wachsend, und sie erfüllt die Bedingungen (1) und (2). Also ist $\Phi'(0)$ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl. — Für ein beliebiges Argument ξ sei nun $\Delta_\xi = -\Phi'(\xi) + \Phi'(\xi + 1)$. Es ist

$$\Phi'(\xi + 1) = \lim_{n<\omega} \Phi^n(\Phi'(\xi) + 1) \ .$$

Ist $\Delta_\xi > 1$, so ist $\Phi'(\xi) + 1 < \Phi'(\xi + 1)$, also die Folge $\{\Phi^n(\Phi'(\xi)+1)\}_{n<\omega}$ wachsend, also Δ_ξ eine Limeszahl. Setzen wir

$$\Phi(\Phi'(\xi) + \eta) = \Phi'(\xi) + \zeta(\eta) \quad \text{für} \quad 1 \leqq \eta < \Delta_\xi \ , \qquad \zeta(0) = 1 \ ,$$

so ist $\zeta(\eta)$ eine volle Normalfunktion vom Typ Δ_ξ, die keine kritischen Zahlen hat, also ist nach Satz 2 Δ_ξ eine mit ω konfinale additive Haupt zahl. — Φ' erfüllt also die Bedingungen (3) und (4).

b) Die Bedingungen sind hinreichend: Es sei φ eine gegebene Normalfunktion mit den Bedingungen (3) und (4). Wir setzen

$$\Delta_\xi = -\varphi(\xi) + \varphi(\xi + 1) \ .$$

Nach dem *Auswahlaxiom* gibt es eine Funktion, die jedem $\Delta_\xi > 1$ eine wachsende Folge mit dem Limes Δ_ξ zuordnet, und daraus folgt nach dem Beweis von Satz 1 und 2 die Existenz einer Funktion, die jedem $\Delta_\xi > 1$ eine volle Normalfunktion $\zeta_\xi(\eta)$ vom Typ Δ_ξ ohne kritische Zahlen zuordnet. Wir setzen

$$\Phi(\varphi(\xi)) = \varphi(\xi) \ ,$$
$$\Phi(\varphi(\xi) + \eta) = \varphi(\xi) + \zeta_\xi(\eta) \quad \text{für} \quad 1 \leqq \eta < \Delta_\xi \ .$$

Ist $\varphi(0) > 0$, so existiert nach Satz 2 eine volle Normalfunktion ζ vom Typ $\varphi(0)$ ohne kritische Zahlen, und wir setzen $\Phi(\eta) = \zeta(\eta)$ für $\eta < \varphi(0)$. — Für die dadurch definierte Normalfunktion Φ gilt $\Phi'(\xi) = \varphi(\xi)$.

Satz 4. Zu jeder arithmetischen Operation $f(\alpha, \beta)$ läßt sich eine Normalfunktion $\Psi(\xi)$ effektiv bilden, deren kritische Zahlen genau die eigentlichen Hauptzahlen von f sind.

Beweis. Es sei $\psi(\xi) = f(\xi, \xi)$. Für $\xi > 1$ ist diese Funktion wachsend. Wir definieren die Normalfunktion Ψ so, daß $\Psi(\xi) = \psi(\xi)$ für ξ 1. Art > 1; für $\xi \leqq 1$ sei $\Psi(\xi) = 1 + \xi$. Somit ist $\Psi(\xi)$ eine Normalfunktion, die keine endlichen kritischen Zahlen hat. Ist ξ eine eigentliche Hauptzahl von f, so ist ξ eine Limeszahl mit $f(\alpha, \xi) = \xi$ für $1 < \alpha < \xi$, also $f(\alpha, \alpha) = \psi(\alpha) < \xi$, also $\xi \leqq \Psi(\xi) = \lim\limits_{\alpha<\xi} \psi(\alpha) \leqq \xi$, also $\Psi(\xi) = \xi$, das heißt, ξ ist eine kritische Zahl von Ψ.

Ist umgekehrt ξ eine kritische Zahl von Ψ, so ist ξ eine Limeszahl; denn wäre ξ 1. Art, so wäre $\Psi(\xi) = \psi(\xi) > \xi$. Also ist

$$\xi = \Psi(\xi) = \lim_{\alpha<\xi} f(\alpha, \alpha) \ .$$

Für $1 < \alpha' < \xi$ ist also

$$\xi \leqq f(\alpha', \xi) = \lim_{\alpha<\xi} f(\alpha', \alpha) \leqq \lim_{\alpha<\xi} f(\alpha, \alpha) = \xi \ ,$$

also $f(\alpha', \xi) = \xi$; das heißt, ξ ist eine eigentliche Hauptzahl von f.

Satz 5. Damit die Werte einer Normalfunktion ψ mit dem Argumentbereich W genau die eigentlichen Hauptzahlen einer arithmetischen Operation sein können, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Zahl ξ 1. Art (einschließlich $\xi = 0$) $\psi(\xi)$ eine mit ω konfinale additive Hauptzahl ist.

Beweis. a) Die Bedingung ist notwendig: Ist $f(\alpha, \beta)$ eine arithmetische Operation, so gibt es nach Satz 4 eine Normalfunktion Ψ, deren kritische Zahlen genau die eigentlichen Hauptzahlen von f sind. Da ferner jede eigentliche Hauptzahl von f eine additive Hauptzahl ist, gilt für Ψ' die Bedingung von Satz 5.

b) Die Bedingung ist hinreichend: Aus der Bedingung von Satz 5 folgt, daß für Ψ die Bedingungen (3) und (4) erfüllt sind, woraus unter Anwendung des *Auswahlaxioms* nach Satz 3 folgt, daß eine Normalfunktion Ψ mit $\Psi' = \psi$ existiert.

Wir setzen nun $f(\alpha, \beta) = \alpha + \Psi(\beta)$. Diese Funktion ist eine arithmetische Operation. Die Hauptzahlen von f sind genau die Werte von ψ; denn für $\alpha < \psi(\xi)$ ist

$$f(\alpha, \psi(\xi)) = \alpha + \Psi(\psi(\xi)) = \alpha + \psi(\xi) = \psi(\xi) \ ,$$

weil alle Werte von ψ additive Hauptzahlen sind; dagegen ist für $\beta < \psi(0)$ oder $\psi(\xi) < \beta < \psi(\xi + 1)$ wegen $\Psi(\beta) > \beta$

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \Psi(\beta) > \alpha + \beta \geqq \beta \ .$$

3. Die zweite Zahlklasse und das Axiom der Hauptfolgen

Wir definieren die Klasse Z_2 (Vereinigung der ersten und zweiten Zahlklasse) wie folgt: Eine Ordnungszahl α gehört dann und nur dann zu Z_2, wenn entweder $\alpha = 0$, oder $\alpha > 0$ und α und alle β mit $0 < \beta < \alpha$ entweder Nachfolgerzahlen oder Limites von wachsenden Folgen vom Typ ω sind. Z_2 ist also ein reguläres Anfangsstück von W. Aus dem Auswahlaxiom folgt, daß Z_2 die Klasse der Ordnungszahlen α mit $\bar{\alpha} \leqq \aleph_0$[3]) ist. Ohne Auswahlaxiom kann dies nicht abgeleitet werden (wahrscheinlich ist sogar die Annahme $Z_2 = W$ relativ zu den übrigen Axiomen widerspruchsfrei); es folgt aber, wie auch die Ungleichung $\aleph_1 \leqq 2^{\aleph_0}$, aus einem viel schwächeren Axiom (A), das wir das *Axiom der Hauptfolgen* nennen [6]:

(A) Es gibt eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda \in Z_2$ eindeutig eine wachsende Folge vom Typ ω (die *Hauptfolge* von λ) mit dem Limes λ zuordnet[4]).

Wir stellen nun einige *äquivalente* Formulierungen dieses Axioms zusammen:

(A_1) Es gibt eine Funktion, die jeder additiven Hauptzahl $\Delta \in Z_2$ eindeutig eine wachsende Folge vom Typ ω zuordnet mit dem Limes Δ, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt.

(A_2) Es gibt eine Funktion, die jeder Ordnungszahl $\alpha \in Z_2$ eine eindeutige Abzählung der Zahlen $\xi < \alpha$ zuordnet (das heißt, die jedem $\alpha \in Z_2$ eine eindeutige Wohlordnung von $W(\alpha)$ im Ordnungstypus ω, oder von $W(\omega)$ im Ordnungstypus α zuordnet).

(A_3) Es gibt eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda \in Z_2$ eindeutig eine regressive Funktion f vom Typ λ mit $\lim\limits_{\xi < \lambda} f(\xi) = \lambda$ zuordnet.

(A_4) Es gibt eine Funktion, die jeder additiven Hauptzahl $\Delta \neq 1$ von Z_2 eindeutig eine volle Normalfunktion vom Typ Δ zuordnet, die keine kritischen Zahlen hat.

(A_5) Es gibt eine Funktion, die jeder vollen Normalfunktion φ mit dem Argumentbereich Z_2, die die Bedingungen (3) und (4) erfüllt, eindeutig eine volle Normalfunktion Φ mit dem Argumentbereich Z_2 zuordnet mit $\Phi' = \varphi$.

(A_6) Z_2 ist die Vereinigung von abzählbar vielen gelichteten, mit Z_2 ähnlichen Teilklassen von Z_2.

---

[3]) $\bar{\alpha}$ bedeutet die Mächtigkeit von $W(\alpha)$.

[4]) Der Ausdruck „Hauptfolge" stammt von Finsler [7]; Denjoy [8] verwendet den Ausdruck „kanonische Folge"; Verf. in [1] den Ausdruck „ausgezeichnete Folge".

(A_7) Es gibt eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda \in Z_2$ eindeutig eine „Darstellung von λ auf der Geraden" zuordnet[5]).

Wir beweisen nun die Äquivalenz dieser Axiome:

(A) $\to$ (A_1): Nach dem Beweis von Satz 1.

(A_1) $\to$ (A): Es gelte (A_1). Zum Beweis von (A) hat man also noch den Limeszahlen von Z_2, die keine additiven Hauptzahlen sind, Hauptfolgen zuzuordnen: Es sei λ eine solche Zahl, und allen Limeszahlen $<\lambda$ seien Hauptfolgen zugeordnet. Dann ordnen wir λ eine Hauptfolge zu, indem wir λ in additive Hauptzahlen zerlegen; diese Zerlegung hat mehr als ein Glied; ist das letzte Glied ϱ, so sei $\lambda = \sigma + \varrho$. ϱ ist eine Limeszahl $<\lambda$. Ist $\{\varrho_n\}_{n<\omega}$ die Hauptfolge von ϱ, so sei $\{\sigma + \varrho_n\}_{n<\omega}$ die Hauptfolge von λ.

(A) $\leftrightarrow$ (A_2): Nach Finsler [7].

(A) $\to$ (A_3): Nach Neumer [3].

(A_3) $\to$ (A): Es sei $f(\xi)$ eine regressive Funktion, deren Typ eine Limeszahl $\lambda \in Z_2$ ist, mit $\lim\limits_{\xi<\lambda} f(\xi) = \lambda$, und zu jedem $\xi<\lambda$ sei $g(\xi)$ das erste Argument $\eta>\xi$ mit $f(\xi')>\xi$ für $\eta \leqq \xi' < \lambda$. Setzt man $\gamma = \lim\limits_{n<\omega} g^n(0)$, so ist $0<\gamma \leqq \lambda$, weil $g^n(0)<\lambda$ für alle $n<\omega$. Wäre $\gamma<\lambda$, so wäre $f(\xi) \geqq \gamma$ für $\gamma \leqq \xi < \lambda$, also $f(\gamma) \geqq \gamma$, Widerspruch. Also ist $\gamma = \lambda$. Die Folge $\{g^n(0)\}_{n<\omega}$ kann also als Hauptfolge von λ definiert werden.

(A_1) $\leftrightarrow$ (A_4): Nach dem Beweis von Satz 2.

(A_4) $\to$ (A_5): Nach dem Beweis von Satz 3.

(A_5) $\to$ (A_4): Ist Δ eine additive Hauptzahl von Z_2, so setzen wir $\varphi(\xi) = \Delta + \xi$; dies ist eine volle Normalfunktion mit den Bedingungen von Satz 3. Nach (A_5) existiert also eine volle Normalfunktion Φ mit $\Phi' = \varphi$, also ist $\Phi'(0) = \varphi(0) = \Delta$. $\{\Phi(\xi)\}_{\xi<\Delta}$ ist also eine volle Normalfunktion vom Typ Δ ohne kritische Zahlen.

(A_2) $\leftrightarrow$ (A_6): Nach Sierpinski [4].

(A_2) $\to$ (A_7): Nach Hausdorff [9].

(A_7) $\to$ (A_2): Wir ordnen jeder reellen Zahl x (einschließlich ∞) eindeutig eine wachsende Folge $\{x_n\}_{n<\omega}$ von reellen Zahlen zu mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, indem wir zum Beispiel setzen $x_n = n$, wenn $x = \infty$, $x_n = x - 2^{-n}$, wenn $x<\infty$. Ist λ eine Limeszahl von Z_2, so gibt es

---

[5]) Unter einer „Darstellung einer Ordnungszahl α auf der Geraden" verstehen wir eine wachsende Folge vom Typ α von reellen Zahlen.

nach (A_7) eine Folge $L = \{\xi_\nu\}_{\nu<\lambda}$ von reellen Zahlen, die eine Darstellung von λ auf der Geraden ist. Es sei x die obere Grenze von L, und $\{x_n\}_{n<\omega}$ die nach der obigen Definition zugehörige Folge reeller Zahlen. Dann sei λ_n die kleinste Zahl ν mit $\xi_\nu \geqq x_n$. Die Zahlen λ_n bilden eine monotone Folge vom Typ ω mit $\lim\limits_{n<\omega} \lambda_n = \lambda$; durch Streichen gewisser Glieder erhält man eine wachsende Folge, die man als Hauptfolge von λ nehmen kann.

Bemerkung. Das Axiom der Hauptfolgen ist nicht erfüllbar, wenn man die folgende scheinbar naheliegende Nebenbedingung hinzufügt:

Ist $\{\lambda_n\}_{n<\omega}$ eine Hauptfolge, und ist ξ eine Limeszahl mit $\lambda_n < \xi \leqq \lambda_{n+1}$ für ein $n < \omega$ und mit zugehöriger Hauptfolge $\{\xi_n\}_{n<\omega}$, so soll $\xi_0 \geqq \lambda_n$ sein.

Beweis. Annahme, es existiere eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda \in Z_2$ eine Hauptfolge $\{\lambda_n\}_{n<\omega}$ zuordnet, wobei die obige Nebenbedingung erfüllt sei. Dann ist die Funktion $f(\lambda) = \lambda_0$, definiert für alle Limeszahlen $\lambda \in Z_2$, regressiv; also existiert eine Zahl γ, so daß für eine wachsende Folge $\{\alpha_\xi\}_{\xi \in Z_1}$ von Limeszahlen $f(\alpha_\xi) = \gamma$ gilt. Es sei $\eta = \lim\limits_{\xi<\omega} \alpha_\xi$, also $\eta \in Z_2$; $\{\eta_n\}_{n<\omega}$ sei die Hauptfolge von η. Es sei n_0 die kleinste Zahl n mit $\eta_n > \gamma$, n_1 die kleinste Zahl n mit $\alpha_n > \eta_{n_0}$ und n_2 die kleinste Zahl n mit $\eta_n > \alpha_{n_1}$. Also ist $f(\alpha_{n_1}) = \gamma < \eta_{n_0}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $f(\alpha_{n_1}) \geqq \eta_{n_2-1} \geqq \eta_{n_0}$.

LITERATUR

[1] *H. Bachmann,* Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, Vierteljahrsschrift Naturf. Ges., Zürich 95 (1950), p. 115.

[2] *O. Veblen,* Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), p. 280.

[3] *W. Neumer,* Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, Math. Z. 54 (1951), p. 254.

[4] *W. Sierpinski,* Remarque sur les ensembles de nombres ordinaux de classes I et II, Rev. Ciencias, Lima 41 (1939), p. 289.

[5] *E. Jacobsthal,* Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik, Math. Ann. 66 (1909), p. 145.

[6] *A. Church,* Alternatives to Zermelo's assumption, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), p. 178.

[7] *P. Finsler,* Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen, Comment. Math. Helv. 25 (1951), p. 75.

[8] *A. Denjoy,* Einige Mitteilungen in C. R. Acad. Sci., Paris 234 (1952).

[9] *F. Hausdorff,* Mengenlehre, New York 1944, p. 172.

(Eingegangen den 6. Januar 1954)