Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1954)

Artikel: Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire.
Autor: de Rham, Georges de
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22630

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire

par Georges de Rham, Lausanne

Dédié à Monsieur Heinz Hopf pour son soixantième anniversaire

1. Considérons une forme linéaire $\omega = \sum_1^n y_i X_i$ en n indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, dont les coefficients y_i appartiennent à un anneau commutatif A, et des formes extérieures $\alpha, \beta, \ldots$ en les mêmes indéterminées, dont les coefficients appartiennent à un A-module M. Un produit tel que $\omega \wedge \alpha$ est alors bien déterminé, c'est une forme extérieure dont les coefficients appartiennent à M. Pour que α soit *divisible* par ω, c'est-à-dire pour qu'il existe une forme β (à coefficients dans M) telle que $\alpha = \omega \wedge \beta$, il est évidemment nécessaire que $\omega \wedge \alpha = 0$. Cette condition est aussi suffisante lorsque ω est susceptible de faire partie d'une base des formes linéaires en $X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans A : il suffit de le vérifier pour $\omega = X_1$, ce qui est immédiat et bien connu. Je me propose d'indiquer ici un cas plus général où cette condition est encore suffisante, et j'en ferai une application à la théorie des formes différentielles et des courants.

Disons que ω jouit de la *propriété* (P), si, pour tout entier $k \geqslant 0$ et $< n$, pour un élément quelconque a de M, le fait que $y_{k+1} a$ soit une combinaison linéaire de $y_1, \ldots, y_k$ à coefficients dans M entraîne que a est lui-même une telle combinaison. En désignant par $(y_1, \ldots, y_k)$ le sous-A-module de M formé par toutes les combinaisons linéaires de $y_1, \ldots, y_k$ à coefficients dans M, cela signifie que $y_{k+1} a \in (y_1, \ldots, y_k)$ entraîne $a \in (y_1, \ldots, y_k)$, et en particulier (pour $k = 0$), $y_1 a = 0$ entraîne $a = 0$. Nous établirons alors la proposition suivante :

I. *Si ω jouit de la propriété (P), pour qu'une forme α de degré $q < n$ soit divisible par ω, il suffit que $\omega \wedge \alpha = 0$.*

Pour abréger l'écriture, il sera commode d'utiliser la notion d'adjointe $*\alpha$ à une forme α par rapport à $X_1^2 + \cdots + X_n^2$, de sorte que

$$*1 = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \quad *X_1 = X_2 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \quad *(X_1 \wedge X_2) = X_3 \wedge \ldots \wedge X_n\,, \text{ etc.}$$

Les expressions générales d'une forme α de degré $n-1$ et d'une forme β de degré $n-2$ sont alors

$$\alpha = \sum_i a_i * X_i \ , \qquad \beta = \sum_{i<j} b_{ij} * (X_i \wedge X_j) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} * (X_i \wedge X_j) \ ,$$

où $a_i \in M$, $b_{ij} = -b_{ji} \in M$. Par un calcul immédiat, on a

$$\omega \wedge \alpha = \sum_i y_i a_i * 1 \ , \qquad \omega \wedge \beta = \sum_{i,j} y_j b_{ij} * X_i \ .$$

Ces formules montrent que, pour $q = n-1$, la proposition I se réduit à la suivante : *si les éléments a_i de M $(i = 1, \ldots, n)$ satisfont à $\sum_1^n y_i a_i = 0$ et si la propriété (P) est vérifiée, il existe des éléments b_{ij} de M $(i, j = 1, \ldots, n)$ qui satisfont aux relations $b_{ij} + b_{ji} = 0$, $a_i = \sum_{j=1}^n y_j b_{ij}$.*

Cette dernière proposition est évidente pour $n = 1$: les hypothèses entraînent alors en effet $a_1 = 0$ et il suffit de prendre $b_{11} = 0$. Procédant par récurrence, supposons qu'elle est vraie pour $n-1$ au lieu de n. La relation $\sum_1^n y_i a_i = 0$, vérifiée par hypothèse, entraine $y_n a_n \in (y_1, \ldots, y_{n-1})$, d'où, en vertu de (P), $a_n \in (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Il existe donc des éléments b_{nj} de M $(j = 1, \ldots, n-1)$ tels que $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} y_j b_{nj}$, d'où, en substituant dans la relation précédente, $\sum_{i=1}^{n-1} y_i (a_i + y_n b_{ni}) = 0$. En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe alors des éléments b_{ij} de M $(i, j = 1, \ldots, n-1)$ tels que $b_{ij} + b_{ji} = 0$, $a_i + y_n b_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} y_j b_{ij}$, et en posant encore $b_{in} = -b_{ni}$, $b_{nn} = 0$, on satisfait à toutes les conditions requises.

Pour établir I lorsque $q < n-1$, procédons encore par récurrence. Posant $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge X_n$, $\omega = \omega_1 + y_n X_n$, les formes α_1, α_2 et ω_1 ne contenant pas X_n, on a

$$\omega \wedge \alpha = \omega_1 \wedge \alpha_1 + [\omega_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^q y_n \alpha_1] \wedge X_n \ .$$

Comme $\omega \wedge \alpha = 0$, on a aussi $\omega_1 \wedge \alpha_1 = 0$; par suite, en vertu de ce qu'on vient d'établir si $q = n-2$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence si $q < n-2$, il existe une forme β_1, ne contenant pas X_n, telle que $\alpha_1 = \omega_1 \wedge \beta_1$.

Mais $\omega \wedge \alpha = 0$ entraîne aussi $\omega_1 \wedge \alpha_2 + (-1)^q y_n \alpha_1 = 0$, c'est-à-dire $\omega_1 \wedge [\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$. Si $q > 1$, en vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une forme β_2, ne contenant pas X_n, telle que $\omega_1 \wedge \beta_2 = \alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1$, et en posant $\beta = \beta_1 + \beta_2 \wedge X_n$, il vient

$\omega \wedge \beta = \omega_1 \wedge \beta_1 + (-1)^{q-1} y_n \beta_1 \wedge X_n + \omega_1 \wedge \beta_2 \wedge X_n = \alpha_1 + \alpha_2 \wedge X_n = \alpha.$
Si $q = 1$, α_2 et β_1 sont de degré zéro, la relation $\omega_1[\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$ implique $y_1[\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1] = 0$, d'où, en vertu de (P),

$$\alpha_2 + (-1)^q y_n \beta_1 = 0 \ , \qquad \alpha_2 = y_n \beta_1 \ ,$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 X_n = \omega_1 \beta_1 + y_n \beta_1 X_n = \omega \beta_1 \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

Dans le cas où le degré de α est égal à n, on a toujours $\omega \wedge \alpha = 0$, mais α n'est pas toujours divisible par ω. Des formules données plus haut, on déduit immédiatement que, *pour que la forme* $a * 1$ *soit divisible par* ω, *il faut et il suffit que* $a \in (y_1, \ldots, y_n)$.

Remarque. Si l'on dispose d'une opération associant à tout élément $a \in (y_1, \ldots, y_k)$ un système déterminé d'éléments $a_1, \ldots, a_k$ de M tel que $a = \sum_1^k y_i a_i$, la démonstration ci-dessus donne un procédé permettant de construire, pour toute forme α divisible par ω, une forme déterminée β satisfaisant à $\alpha = \omega \wedge \beta$.

2. Appliquons ce qui précède aux formes différentielles dans R^n, en posant $X_1 = dx_1, \ldots, X_n = dx_n$. Supposons que *les coefficients* $y_1, \ldots, y_n$ *de* $\omega = \Sigma\, y_i dx_i$ *forment un système de coordonnées dans* R^n *et ne s'annulent simultanément qu'au seul point* O, et prenons pour A l'ensemble des fonctions C^∞ et pour M l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact dans R^n.

Choisissons une fonction $\varrho(t)$ d'une variable, C^∞, nulle pour $|t| > 1$ et égale à 1 pour $|t| < \frac{1}{2}$. A toute fonction $a(y_1, \ldots, y_n)$ nous pouvons associer les fonctions a_i $(i = 1, \ldots, n)$ définies par

$$a_i(y_1, \ldots, y_n) = \tag{1}$$
$$= \varrho(y_1) \ldots \varrho(y_n) \frac{a(0, \ldots, 0, y_i, \ldots, y_n) - \varrho(y_i)\, a(0, \ldots, 0, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{y_i}$$

On a les identités

$$a(y_1, \ldots, y_n) - \varrho(y_1) \ldots \varrho(y_k)\, a(0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^k y_i a_i \ . \tag{2}$$

Il est clair que $a_i \in M$ si $a \in M$. Les fonctions de $(y_1, \ldots, y_k)$ sont celles qui s'annulent pour $y_1 = \ldots = y_k = 0$, et pour une telle fonction l'identité ci-dessus se réduit à $a = \sum_{i=1}^k y_i a_i$. Ainsi la propriété (P) est vérifiée, et nous avons un procédé qui, en vertu de la remarque faite plus

haut, fournit une opération, qu'on désignera par P^*, qui associe à toute forme α de degré $q > 0$ divisible par ω une forme déterminée $P^*\alpha$ de degré $q - 1$ satisfaisant à $\omega \wedge P^*\alpha = \alpha$.

Cette opération P^* est linéaire, parce que les a_i dépendent linéairement de a. Nous allons étendre sa définition à toutes les formes. Tout d'abord, si $\alpha = a * 1$ est de degré n, il suffit de poser

$$P^*(a * 1) = \sum_1^n a_i * dx_i \ .$$

En introduisant la distribution de Dirac δ définie par $\delta[a * 1] = a(0, \ldots, 0)$ et posant $\sigma = \varrho(y_1) \ldots \varrho(y_n) * 1$, l'identité (2) donne, pour $k = n$,

$$\alpha = \omega \wedge P^* \alpha + \delta[\alpha]\sigma \ . \tag{3}$$

La condition pour que ω divise α peut alors s'écrire $\delta[\alpha] = 0$.

Si le degré de α est égal à zéro, nous poserons $P^* \alpha = 0$. Enfin, si ce degré est compris entre zéro et n, nous poserons

$$P^* \alpha = P^*[\alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)] \ ,$$

le second membre de cette relation étant déjà défini puisque les formes $\omega \wedge \alpha$ et $\alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)$ sont divisibles par ω.

Cette forme $\beta = \alpha - P^*(\omega \wedge \alpha)$ étant divisible par ω satisfait à $\beta = \omega \wedge P^* \beta$, d'où

$$\alpha = \omega \wedge P^* \alpha + P^*(\omega \wedge \alpha) \ . \tag{4}$$

L'opération P^* ainsi définie est une application linéaire *continue* de l'espace vectoriel de toutes les formes C^∞ à support compact en lui-même. L'opération duale P change tout courant[1]) T en un courant PT défini par $PT[\alpha] = T[P^*\alpha]$. Les relations (3) et (4) entraînent, par dualité,

$$\text{si } T \text{ est de degré zéro,} \qquad T = P(T\omega) + T[\sigma]\delta \ , \tag{5}$$

$$\text{si } T \text{ est de degré} > 0, \qquad T = P(T \wedge \omega) + (PT) \wedge \omega \ . \tag{6}$$

On en déduit : *les distributions T qui satisfont à $T\omega = 0$ sont les multiples de la distribution de Dirac δ, et tout courant T de degré > 0 qui satisfait à $T \wedge \omega = 0$ est divisible par ω*. Ce dernier résultat ne pouvait pas se déduire immédiatement de I, car en prenant pour M l'ensemble des distributions, la propriété (P) n'est pas vérifiée, puisque $y_1 T = 0$ n'entraîne pas $T = 0$.

---

[1]) *L. Schwartz,* Théorie des distributions, I, Paris 1950. — *G. de Rham and K. Kodaira,* Harmonic Integrals. The Institute for Advanced Study, Princeton 1950.

Considérons plus généralement, dans une variété C^∞ à n dimensions V, une forme différentielle ω de degré 1, C^∞, *ne s'annulant qu'en des points isolés en chacun desquels le jacobien de ses coefficients par rapport aux coordonnées locales est différent de zéro.* Si une forme α, C^∞ dans V, est localement divisible par ω, elle est globalement divisible par ω ; car on peut alors trouver un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ localement fini de V et des formes β_i telles que $\alpha = \omega \wedge \beta_i$ dans U_i ; si $1 = \Sigma \varphi_i$ est une partition de l'unité, où φ_i est une fonction C^∞ à support dans U_i, la forme $\beta = \Sigma \varphi_i \beta_i$ est C^∞ dans V et satisfait à $\alpha = \omega \wedge \beta$. De même, un courant localement divisible par ω est aussi globalement divisible par ω. Cela étant, les résultats ci-dessus entraînent immédiatement le suivant :

Pour qu'une forme α de degré q, C^∞ dans V, soit divisible par ω, il faut et il suffit, si $q < n$, que $\omega \wedge \alpha = 0$; si $q = n$, il faut et il suffit que α s'annule en tous les points où ω s'annule. Pour qu'un courant T de degré > 0 soit divisible par ω, il faut et il suffit que $\omega \wedge T = 0$; les distributions T qui satisfont à $T\omega = 0$ sont les combinaisons linéaires des distributions de Dirac relatives aux zéros de ω.

3. Soit G le plus grand groupe linéaire connexe qui laisse invariante la forme quadratique

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 \ , \qquad (\varepsilon_i = \pm 1) \ .$$

Pour qu'une distribution T soit *invariante* relativement à G, il faut et il suffit que $dT \wedge du = 0$; cela résulte de ce que

$$dT \wedge du = \Sigma X_{ij}(T) dx_i \wedge dx_j \ ,$$

où les X_{ij} sont les symboles de transformations infinitésimales qui engendrent G. La forme différentielle $du = \sum_1^n \varepsilon_i 2 x_i dx_i$ satisfaisant aux conditions imposées à ω au début du n° 2, il en résulte que, *pour toute distribution invariante T, il existe une distribution S, déterminée à un multiple près de δ, qui satisfait à $dT = S du$.* Cette distribution S, invariante puisque $dS \wedge du = 0$, sera appelée dérivée de T par rapport à u et notée $S = \dfrac{dT}{du}$. Réciproquement, la condition d'invariance de S étant en même temps la condition pour que $S du$ soit une différentielle exacte, pour toute distribution invariante S il existe une distribution T, définie à une constante près, qui satisfait à $dT = S du$, et qui est nécessairement invariante.

Posons $\square = \sum_1^n \varepsilon_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. De la relation, valable pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\square^k (x_i T) = x_i \square^k T + 2k\varepsilon_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\square^{k-1} T) ,$$

on déduit, en remplaçant T par δ, tenant compte de $x_i \delta = 0$, multipliant par $\varepsilon_i 2dx_i$ et sommant, du $\square^k \delta + 4kd(\square^{k-1}\delta) = 0$, d'où, pour tout entier $k \geqslant 0$,

$$\frac{d}{du} \square^k \delta = - \frac{1}{4(k+1)} \square^{k+1} \delta + C\delta ,$$

avec une constante arbitraire C. On en déduit, en désignant par $Q(\square)$ un polynome arbitraire en $\square$ à coefficients constants de degré $< p$,

$$\frac{d^p}{du^p} \delta = \frac{1}{p!} \left(- \frac{\square}{4} \right)^p \delta + Q(\square)\, \delta .$$

Par suite, la dérivée p-ième $\frac{d^p T}{du^p}$ d'une distribution invariante T est déterminée à une distribution près de la forme $Q(\square)\delta$.

Cette notion de dérivée par rapport à u permet de répondre à une question concernant la détermination de toutes les distributions invariantes relativement à G.

Il est aisé de déterminer les distributions invariantes dans $R^n - O$, comme l'a fait M. Methée[2]) dans le cas où $u = - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2 + x_n^2$; en désignant par D_1 le domaine ($u < 0$ ou $u \geqslant 0$ et $x_n > 0$), par D_2 le domaine ($u < 0$ ou $u \geqslant 0$ et $x_n < 0$), par f_i la restriction à D_i de l'application f de R^n dans R qui envoie le point $(x_1, \ldots, x_n)$ sur le point de R d'abcisse $\xi = u$, à chaque paire (T_1, T_2) de distributions dans R satisfaisant à la condition de compatibilité $T_1 = T_2$ pour $\xi < 0$ correspond une distribution invariante T dans $R^n - 0$ définie par $T = f_i^* T_i$ dans D_i $(i = 1, 2)$, et l'on obtient ainsi toutes les distributions invariantes dans $R^n - O$. Si la signature de u est (a, b) avec $a > 1$ et $b > 1$, on voit de même que les distributions invariantes T dans $R^n - O$ correspondent aux distributions T_0 dans R par $T = f_0^* T_0$, f_0 étant la restriction de f à $R^n - O$. Enfin, si $a = b = 1$, $n = 2$, $u = x_1^2 - x_2^2$, il faut considérer les quatre domaines $D_1(x_1 + x_2 > 0)$, $D_2(x_1 - x_2 > 0)$, $D_3(x_1 + x_2 < 0)$ et $D_4(x_1 - x_2 < 0)$; à chaque système de quatre distributions T_i dans R satisfaisant aux conditions de compatibilité

[2]) *P. D. Methée*, Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz, Comment. Math. Helv. 28, p. 225—269, § 4.

$T_1 = T_2$ et $T_3 = T_4$ pour $\xi > 0$, $T_2 = T_3$ et $T_4 = T_1$ pour $\xi < 0$, correspond une distribution invariante T dans $R^2 - O$, définie par $T = f_i^* T_i$ dans D_i (f_i étant la restriction de f à D_i), et l'on obtient ainsi toutes les distributions invariantes dans $R^2 - O$.

Ainsi, dans tous les cas où u est indéfinie, les distributions invariantes dans $R^n - O$ sont associées aux distributions dans R ou aux systèmes de deux ou quatre distributions dans R satisfaisant à certaines conditions de compatibilité.

D'autre part, les distributions invariantes dont le support se réduit au point O sont les combinaisons linéaires des $\Box^k \delta$ $(k = 0, 1, \ldots)$[3]. Si une distribution invariante dans $R^n - O$ peut être prolongée en une distribution invariante dans R^n, le prolongement sera donc déterminé à une combinaison linéaire près des $\Box^k \delta$. La question se pose alors de savoir si ce prolongement est toujours possible. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi : *si la forme quadratique u est indéfinie, toute distribution invariante dans $R^n - O$ peut être prolongée en une distribution invariante dans R^n.*

Pour cela, remarquons qu'en vertu des définitions ci-dessus, si $T = \dfrac{d^p S}{du^p}$ et si $\{T_i\}$ et $\{S_i\}$ sont les systèmes associés à T et S, on a $T_i = \dfrac{d^p S_i}{d\xi^p}$. Les T_i étant donnés, en vertu d'un théorème connu de la théorie des distributions[4], pour p assez grand, dans un voisinage du point $\xi = 0$, les S_i seront égales à des fonctions continues. Alors, dans le voisinage correspondant du cône $u = 0$, S sera égale à une fonction continue qui se prolonge en O par continuité, et de ce prolongement de S dans R^n résulte par la formule $T = \dfrac{d^p S}{du^p}$ un prolongement de T dans R^n, déterminé à une combinaison linéaire près des $\Box^k \delta$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Si la forme quadratique u est définie positive, les distributions invariantes T dans $R^n - O$ correspondent, par la formule $T = f_0^* T_0$, aux distributions T_0 dans la demi-droite $\xi > 0$ de R. Si T_0 peut être prolongée dans R, on voit comme ci-dessus que T peut être prolongée dans R^n. Mais il peut arriver que T_0 ne puisse pas être prolongée dans R, comme par exemple $T_0 = \exp. \dfrac{1}{\xi}$, et alors T ne peut pas être prolongée dans R^n.

(Reçu le 20 avril 1954)

---

[3]) Cf. *P. D. Methée*. loc. cit., § 3.

[4]) *L. Schwartz*, loc. cit. p. 85.