Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1954)

Artikel: Räume mit Mittelbildungen.

Autor: Eckmann, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22628

Räume mit Mittelbildungen

von B. Eckmann, Zürich

Herrn Heinz Hopf in Verehrung und Freundschaft zum 60. Geburtstag gewidmet

§ 1. Einleitung

1.1. Unter einem Mittel von n Argumenten in einem topologischen Raume R – kurz „n-Mittel in R" genannt – verstehen wir eine stetige Funktion M, welche jedem System von n Punkten $x_1, \ldots, x_n \in R$ einen Punkt $M(x_1, \ldots, x_n) \in R$ zuordnet und für welche gilt:

(1) $M(x_1, \ldots, x_n)$ ist symmetrisch in $x_1, \ldots, x_n$, d. h. bleibt ungeändert bei allen Permutationen von $x_1, \ldots, x_n$.

(2) $M(x, \ldots, x) = x$ für alle $x \in R$.

Ein 1-Mittel in R ist die Identität von R; im folgenden sei stets $n \geqslant 2$ angenommen. In den vorliegenden Zeilen werden notwendige *topologische Bedingungen* für die Existenz eines n-Mittels in R aufgestellt. Es wird sich zeigen, daß diese eine starke Einschränkung bedeutet; mit anderen Worten, daß in sehr großen Klassen von Räumen für kein $n \geqslant 2$ ein n-Mittel existiert. Ein Raum R, in welchem es für ein $n \geqslant 2$ ein n-Mittel gibt, soll kurz ein „M_n-Raum" genannt werden.

1.2. Beispiele von n-Mitteln:

(a) R sei ein Intervall der reellen Zahlgeraden, $M(x_1, \ldots, x_n)$ einer der klassischen Mittelwerte (arithmetisches, geometrisches Mittel usw.) der reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$.

(b) R sei eine konvexe Punktmenge in einem Euklidischen Raum, $M(x_1, \ldots, x_n)$ der Schwerpunkt von $x_1, \ldots, x_n \in R$.

(c) R sei ein Gebiet der komplexen Zahlenebene; eine Funktion M von $x_1, \ldots, x_n \in R$ mit komplexen Werten, die R angehören, mit den Eigenschaften (1), (2), und welche in $x_1, \ldots, x_n$ komplex-analytisch ist, heißt ein analytisches Mittel in R.

(d) R sei eine topologische Abelsche Gruppe (additiv geschrieben), in welcher $x \to nx \, (x \in R)$ ein Automorphismus[1]) ist; das arithmetische

[1]) Im algebraischen und topologischen Sinne.

Mittel $n^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)$ ist ein n-Mittel in R. – Beispiel: Das n-adische Solenoid, vgl. 4.3.

Der Begriff „n-Mittel in R" stammt von G. Aumann[2]), welcher weitere Beispiele und Zusatzbedingungen über (1) und (2) hinaus untersucht und spezielle Fälle der im folgenden zu besprechenden topologischen Bedingungen angegeben hat. Insbesondere hat er die Aufgabe behandelt, unter den n-Mitteln auf der Zahlgeraden oder in der komplexen Ebene die klassischen Mittel durch weitere Forderungen zu charakterisieren; diese Untersuchungen werden hier nicht berührt.

1.3. Unsere Resultate betreffen die *Homotopiegruppen* $\pi_r(R), r \geqslant 1$, und die ganzzahligen singulären *Homologiegruppen* $H_r(R), r \geqslant 1$, des Raumes R. Zur kürzern Formulierung sagen wir, eine Abelsche Gruppe G habe die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$, wenn $x \to n x$, $x \in G$, ein *Automorphismus* von G ist. Wir werden zeigen: *In einem M_n-Raum R ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(R)$ Abelsch, und alle genannten Gruppen $\pi_r(R)$ und $H_r(R)$ besitzen die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$.*

Hieraus ist für viele Räume R leicht zu ersehen, daß es in ihnen für bestimmte $n \geqslant 2$ oder sogar für alle $n \geqslant 2$ kein n-Mittel geben kann. Denn die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ in einer Abelschen Gruppe G impliziert (vgl. § 3), daß die Ordnung eines jeden Elementes von G gleich 0 oder zu n teilerfremd ist, und wenn G direkte Summe zyklischer Gruppen ist, daß keine Elemente der Ordnung 0 auftreten. Es ist leicht, Beispiele von Räumen R anzugeben, in welchen einzelne Homotopiegruppen diese Bedingungen nicht erfüllen. Ebenso für die Homologiegruppen $H_r(R)$; setzen wir noch voraus, daß die $H_r(R)$ von endlich vielen Elementen erzeugt sind (z. B. daß R ein endliches Polyeder ist), so folgt aus der Existenz eines n-Mittels in R: *In den Dimensionen $r \geqslant 1$ sind alle Bettischen Zahlen $= 0$ und alle Torsionskoeffizienten zu n teilerfremd.* – Unter geeigneten topologischen Voraussetzungen über R ergibt sich ferner (s. § 4): *Gibt es in R für alle $n \geqslant 2$ ein n-Mittel, so ist R in sich zusammenziehbar.*

1.4. Ein n-Mittel in R läßt sich auch auffassen als eine stetige Abbildung des Cartesischen Produkts $P = R_1 \times \ldots \times R_n$ von n Exemplaren $R_i = R$ in den Raum R; die Eigenschaften (1) und (2) lassen sich dann so formulieren: D sei die Abbildung $D(x) = x \times \ldots \times x$, $x \in R$, von R in P; $D(R) = \Delta \subset P$ heißt die *Diagonale* von P. (2) besagt, daß $M D$ die identische Abbildung von R auf sich ist. (1) bedeutet, daß Punkte von P, die auseinander durch Permutation der n Komponenten $x_i \in R_i$,

[2]) Vgl. [1], [2]. – Zahlen in eckiger Klammer verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

$i = 1, \ldots, n$ hervorgehen, bei der Abbildung M dasselbe Bild haben. Diese Permutationen bilden eine Gruppe Γ von Homöomorphismen von P; identifiziert man äquivalente Punkte, so erhält man das *symmetrische Produkt* S von n Faktoren $R_i = R$. Da Γ die Diagonale Δ punktweise festläßt, darf man Δ als Teilmenge von S betrachten. Man kann somit M auch auffassen als *Abbildung von S in R, derart daß MD die Identität von R ist.* In diesem Sinne ist die Frage, ob es in R ein n-Mittel gibt, eine Erweiterungsaufgabe: Die Abbildung D^{-1} von Δ auf R soll zu einer Abbildung M von ganz S in R erweitert werden. Ist z. B. R in sich zusammenziehbar, so ist die Erweiterung trivialerweise möglich: *In einem zusammenziehbaren Raum gibt es für jedes n ein n-Mittel.*

Ebenso elementar sind die folgenden Aussagen über n-Mittel[3]): R sei ein M_n-Raum; jede Zusammenhangskomponente von R, jeder Retrakt von R und die universelle Überlagerung von R sind selbst M_n-Räume.

1.5. In § 2 der vorliegenden Arbeit werden die Homotopiegruppen eines M_n-Raumes R untersucht; ein n-Mittel in R induziert ein „homomorphes n-Mittel" in jeder Homotopiegruppe von R. § 3 handelt von Mittelbildungen in Gruppen, mit Anwendung auf die Homotopiegruppen eines M_n-Raumes. In § 4 wird der Fall behandelt, daß R für *jedes* $n \geqslant 2$ ein n-Mittel besitzt. – Für die singulären Homologiegruppen eines M_n-Raumes R (§ 5) werden andere Methoden angewendet als für die Homotopiegruppen, das Ergebnis lautet jedoch gleich[4]).

§ 2. Homotopiegruppen eines M_n-Raumes

2.1. Für zwei Räume T und R bezeichne R^T den Raum[5]) aller stetigen Abbildungen von T in R. Eine Abbildung F von R in einen Raum S bewirkt eine Abbildung von R^T in S^T, die ebenfalls mit F bezeichnet sei: Man definiert, für $f \in R^T, F(f) = g \in S^T$ durch $g(t) = F\big(f(t)\big), t \in T$.

Ist P das Cartesische Produkt $R_1 \times \ldots \times R_n$ von Räumen R_i, so kann man P^T in kanonischer Weise darstellen als Cartesisches Produkt $P^T = R_1^T \times \ldots \times R_n^T$; ist F eine Abbildung von P in R, so läßt sich die induzierte Abbildung von P^T in R^T also auffassen als Abbildung von $R_1^T \times \ldots \times R_n^T$ in R^T: für $f_i \in R_i^T, i = 1, \ldots, n$ ist $F(f_1, \ldots, f_n) = g \in R^T$ gegeben durch $g(t) = F\big(f_1(t), \ldots, f_n(t)\big), t \in T$.

---

[3]) Vgl. [1].

[4]) Mit Hilfe der Methoden von *Serre* [6] könnte auf Grund allgemeiner Beziehungen von den Homotopie- auf die singulären Homologiegruppen geschlossen werden; die direkte Behandlung der Homologiegruppen (§ 5) ist aber so einfach, daß wir diese vorziehen.

[5]) In der üblichen („kompakt-offenen") Topologie.

Sind insbesondere alle $R_i = R, i = 1, \dots, n,$ und ist $F = M$ ein n-Mittel in R – d. h. eine Abbildung von P in R mit den Eigenschaften (1) und (2) –, so gelten (1) und (2) auch für die induzierte Abbildung von $R_1^T \times \dots \times R_n^T$ in R^T:

Satz 1. *Ein n-Mittel M in R induziert ein n-Mittel im Raum R^T der Abbildungen von T in R.* — Dies gilt auch dann, wenn man die Elemente $f \in R^T$ durch die Bedingung einschränkt, daß für eine gewisse Teilmenge $T_0 \subset T$ stets $f(T_0)$ ein vorgegebener Punkt p von R sein soll.

2.2. Es sei nun $\Omega(R)$ der Raum der geschlossenen Wege in R mit Anfangs- und Endpunkt p, wo p ein festgewählter Punkt von R ist; d. h. T sei die reelle Einheitsstrecke $0 \leqslant t \leqslant 1$, und $\Omega(R)$ die Teilmenge von R^T bestehend aus denjenigen Abbildungen f von T in R, bei welchen $f(0) = f(1) = p$ ist. In $\Omega(R)$ ist in üblicher Weise eine Operation erklärt, die wir mit $+$ bezeichnen: $\omega + \omega'$ $(\omega, \omega' \in \Omega(R))$ ist definiert durch $(\omega + \omega')(t) = \omega(2t)$ für $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, = \omega'(2t-1)$ für $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$. Sie ist i. A. nicht assoziativ, kommutativ usw.; ε bezeichne den Weg $\omega(T) = p$. Für jede Abbildung F von R in S ist die induzierte Abbildung von $\Omega(R)$ in $\Omega(S)$ offenbar homomorph bezüglich dieser Operation.

In einem Cartesischen Produkt $P = R_1 \times \dots \times R_n$ ist

$$\Omega(P) = \Omega(R_1) \times \dots \times \Omega(R_n),$$

und die Operation $+$ läßt sich komponentenweise ausführen. Eine Abbildung F von P in R induziert eine Abbildung von $\Omega(R_1) \times \dots \times \Omega(R_n)$ in $\Omega(R)$ – wo $\Omega(R_i)$ bezüglich $p_i \in R_i$ und $\Omega(R)$ bezüglich $F(p_1, \dots, p_n) \in R$ genommen sei –, und es gilt für $\omega_i, \omega_i' \in \Omega(R_i), i = 1, \dots, n$

$$F(\omega_1 + \omega_1', \dots, \omega_n + \omega_n') = F(\omega_1, \dots, \omega_n) + F(\omega_1', \dots, \omega_n').$$

Handelt es sich bei F insbesondere um ein n-Mittel M in R, so hat also das gemäß Satz 1 in $\Omega(R)$, bezüglich $p \in R$, induzierte n-Mittel M außer (1) und (2) die Homomorphieeigenschaft

$$M(\omega_1 + \omega_1', \dots, \omega_n + \omega_n') = M(\omega_1, \dots, \omega_n) + M(\omega_1', \dots, \omega_n') \quad (3)$$

für alle $\omega_i, \omega_i' \in \Omega(R)$; wir nennen es ein *homomorphes n-Mittel.*

2.3. Die durch Wege zusammenhängenden Komponenten von $\Omega(R)$ – d. h. die Homotopieklassen geschlossener Wege in R mit festem Anfangs- und Endpunkt p – bilden bezüglich der Operation $+$ eine Gruppe, die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(R)$ in p; sie ist i. A. nicht Abelsch, und ihr Neutralelement 0 ist die Klasse, welche ε enthält. Zum homomorphen n-Mittel M in $\Omega(R)$ gehört offenbar ein ebensolches in $\pi_1(R)$. Es ergibt sich somit:

Satz 2. *Ein n-Mittel in R induziert ein homomorphes n-Mittel in der Fundamentalgruppe* $\pi_1(R)$ (bezogen auf einen beliebigen Punkt $p \in R$).

Unter einer allgemeinen *Homotopiegruppe* $\Pi(R)$ von R versteht man die Fundamentalgruppe $\pi_1(R^T)$ eines Abbildungsraumes R^T, in einem vorgegebenen Punkt $f_0 \in R^T$. Aus den Sätzen 1 und 2 folgt unmittelbar

Satz 2'. *Ein n-Mittel in R induziert ein homomorphes n-Mittel in jeder Homotopiegruppe* $\Pi(R)$ *von R.*

Dies gilt insbesondere für die *Hurewicz'schen Homotopiegruppen* $\pi_n(R)$, $r \geqslant 2$, da diese bekanntlich als Fundamentalgruppen von Abbildungsräumen $R^T(T =$ Sphäre $S^{n-1})$ aufgefaßt werden kann. — Um aus Satz 2 und 2' weitere Folgerungen ziehen zu können, untersuchen wir im nächsten Abschnitt den Begriff des homomorphen n-Mittels in einer Gruppe.

§ 3. Mittelbildung in Gruppen

3.1. G sei eine beliebige, additiv geschriebene Gruppe, M ein *homomorphes n-Mittel* in G, $n \geqslant 2$, also eine Funktion $M(x_1, \ldots, x_n)$ von n Variablen $x \in G$ mit Werten in G, welche (1) symmetrisch in $x_1, \ldots, x_n$ ist, (2) $M(x, \ldots, x) = x$ erfüllt für alle $x \in G$, (3) homomorph ist in allen Variablen:

$$M(x_1 + x_1', \ldots, x_n + x_n') = M(x_1, \ldots, x_n) + M(x_1', \ldots, x_n'), \, x_i, x_i' \in G.$$

(Mit anderen Worten: M ist ein Homomorphismus der direkten Summe von n Exemplaren G in G.)

Wir setzen $\mu(x) = M(x, 0, \ldots, 0) = M(0, x, \ldots, 0) = \ldots = M(0, 0, \ldots, x)$, $x \in G$. Aus (3) folgt, daß μ ein Homomorphismus von G in sich ist. Ferner gilt für $x, y \in G$

$$\mu(x) + \mu(y) = M(x, 0, \ldots, 0) + M(0, y, 0, \ldots, 0) = M(x, y, 0, \ldots, 0),$$

also wegen der Symmetrieeigenschaft (1)

$$\mu(x) + \mu(y) = \mu(y) + \mu(x),$$

d. h. $\mu(G) \subset G$ ist Abelsch.

3.2. Aus (2) folgt für jedes $x \in G$:

$$x = M(x, x, \ldots, x) = M(x, 0, \ldots, 0) + \cdots + M(0, 0, \ldots, x) = n \cdot \mu(x) = \mu(nx).$$

Somit ist $G = \mu(G)$ eine *Abelsche* Gruppe. Die Zuordnung $x \to nx$

ist also ein Endomorphismus von G; wegen $n\mu(x) = \mu(nx) = x$ für alle $x \in G$ ist sie sogar ein *Automorphismus*, und μ ist der inverse Automorphismus $x \to n^{-1}x$.

Für $M(x_1, \ldots, x_n)$ erhält man dann

$$M(x_1,\ldots,x_n) = M(x_1,0,\ldots,0) + \cdots + M(0,\ldots,0,x_n) = \mu(x_1) + \cdots + \mu(x_n)$$
$$= \mu(x_1 + \cdots + x_n) = n^{-1}(x_1 + \cdots + x_n),$$

also das „arithmetische Mittel".

Satz 3. *In einer Gruppe G gibt es dann und nur dann ein homomorphes n-Mittel M, wenn G Abelsch und $x \to nx$, $x \in G$, ein Automorphismus von G ist. In diesem Falle gibt es nur ein n-Mittel, nämlich*

$$M(x_1, \ldots, x_n) = n^{-1}(x_1 + \cdots + x_n)\,.$$

3.3. Die Abelschen Gruppen, in denen $x \to nx$ ein Automorphismus ist, sollen näher untersucht werden; wie in § 1 bezeichnen wir diese Eigenschaft mit $\mathfrak{a}_n$, und es sei stets $n \geqslant 2$.

G habe die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$, und $x \in G$ sei von der Ordnung $k > 0$. Ist (n, k) der größte gemeinsame Teiler von n und k, und

$$k = k'(n, k),\, n = n'(n, k)\,,$$

also $nk' = kn'$, so ist $k'(nx) = n'kx = 0$; da nx auch die Ordnung k hat, ist k Teiler von k', somit $(n, k) = 1$:

Satz 4. *Wenn die Abelsche Gruppe G die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ hat, dann ist die Ordnung eines jeden Elementes von G entweder 0 oder zu n teilerfremd.*

Die Umkehrung hievon gilt offenbar nicht, wie die unendliche zyklische Gruppe zeigt. Sie gilt jedoch für Torsionsgruppen, d. h. für Gruppen ohne Elemente der Ordnung 0.

Satz 4'. *Ist die Ordnung eines jeden Elementes der Abelschen Gruppe G zu n teilerfremd, so hat G die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$.*

Beweis. Zu jedem Element $x \in G$ gibt es eine ganze Zahl v, derart, daß $vx = x$ ist; ist nämlich k die Ordnung von x, so gibt es wegen $(k, n) = 1$ zwei ganze Zahlen u, v mit $uk + vn = 1$, also

$$ukx + vnx = vnx = x\,.$$

Es ist somit $nG = G$, und aus $nx = 0$ folgt $x = vnx = 0$. –

In einer direkten Summe gilt die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ dann und nur dann, wenn sie in jedem Summanden gilt. Eine Abelsche Gruppe mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ (für ein $n \geqslant 2$) enthält also keinen direkten Summanden, der unendlich zyklisch ist; sie kann also sicher *nicht frei* sein. – Für direkte Summen zyklischer Gruppen (z. B. Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden) ist, ebenso wie für Torsionsgruppen, die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ äquivalent damit, daß die Ordnung eines jeden Elementes zu n teilerfremd ist.

3.4. In Verbindung mit den Ergebnissen von § 2 erhalten wir nun Begingungen für die Existenz von n-Mitteln in einem Raume R; sie betreffen die Homotopiegruppen $\Pi(R)$ von R (vgl. 2.3):

Satz 5. *Gibt es im Raume R ein n-Mittel, so ist jede Homotopiegruppe $\Pi(R)$ Abelsch, und $\alpha \to n\alpha$, $\alpha \in \Pi(R)$, ist ein Automorphismus von $\Pi(R)$. Die Ordnung eines jeden Elementes von $\Pi(R)$ ist also* 0 *oder zu n teilerfremd, und $\Pi(R)$ enthält keinen direkten Summanden, welcher unendlich zyklisch ist.*

Dies gilt insbesondere für die Fundamentalgruppe $\pi_1(R)$ und für die Hurewicz'schen Homotopiegruppen $\pi_r(R), r \geqslant 2$. Auf Grund der Kenntnis dieser Gruppen lassen sich viele Beispiele von Räumen angeben, in welchen es für kein $n \geqslant 2$ ein n-Mittel gibt; wir erwähnen hier nur

a) die p-dimensionale Sphäre S^p ($\pi_p(S^p)$ ist unendlich zyklisch),
b) die geschlossenen Flächen Φ vom Geschlecht $g > 1$ ($\pi_1(\Phi)$ ist nicht Abelsch).

Satz 5 läßt sich auch auf die *Torus-Homotopiegruppen*[6]) eines M_n-Raumes R anwenden; es ergibt sich u. a., daß diese Abelsch sind. Dies bedeutet für die Homotopiegruppen $\pi_r(R), r \geqslant 1$: ein M_n-Raum R ist *einfach* in allen Dimensionen $r \geqslant 1$ (im Sinne von Eilenberg[6])), und alle Whiteheadprodukte[6]) zwischen den Elementen der $\pi_r(R)$ sind 0.

§ 4. Räume mit n-Mitteln für alle n

4.1. Wir nehmen an, es gebe im Raume R für jedes $n \geqslant 2$ ein n-Mittel. $\Pi(R)$ sei eine Homotopiegruppe von R (vgl. 2.3); sie ist Abelsch und hat die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n, n = 2, 3, \ldots$. Ist $\alpha \in \Pi(R)$ ein Element der Ordnung $k > 0$, so muß k zu $n = 2, 3, \ldots$ teilerfremd, also $= 1$ sein, d. h. es ist $\alpha = 0$. Alle Elemente $\neq 0$ von G haben also die Ordnung 0; eine solche Gruppe heißt *torsionsfrei*.

[6]) Siehe *Fox* [4].

Satz 6. *Gibt es in R für jedes $n \geqslant 2$ ein n-Mittel, so sind alle Homotopiegruppen $\Pi(R)$ torsionsfreie Abelsche Gruppen mit der Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ für alle n.*

Unendlich zyklische direkte Summanden können in einer solchen Gruppe nicht auftreten. Ist von der Homotopiegruppe $\Pi(R)$ des Raumes R zum vorneherein bekannt, daß sie eine direkte Summe zyklischer Gruppen sein muß, so ist also nur $\Pi(R) = 0$ möglich (z. B. wenn $\Pi(R)$ von endlich vielen Elementen erzeugt wird).

4.2. **Satz 6'.** *R sei ein zusammenhängendes endliches Polyeder. Dann und nur dann gibt es in R für jedes n ein n-Mittel, wenn R in sich auf einen Punkt zusammenziehbar ist.*

Beweis. Die ganzzahligen singulären Homologiegruppen $H_r(R)$ sind von endlich vielen Elementen erzeugt. Aus der Existenz der n-Mittel folgt, daß $\pi_1(R)$ Abelsch ist, also $= H_1(R)$, somit von endlich vielen Elementen erzeugt; nach 4.1 ist also $\pi_1(R) = 0$. Hieraus folgt aber $\pi_2(R) \cong H_2(R)$, also von endlich vielen Elementen erzeugt, also ebenfalls $= 0$. Durch Induktion folgt $\pi_r(R) = 0$ für alle $r \geqslant 1$; nach dem Satz von Hurewicz [5] bedeutet dies, daß R zusammenziehbar ist. – Umgekehrt existieren in einem zusammenziehbaren Raum n-Mittel für alle n (vgl. 1.4).

Ein einfaches Beispiel (4.3) zeigt, daß i. A. aus der Existenz eines n-Mittels in R für ein bestimmtes n noch nicht die Zusammenziehbarkeit von R folgt. Jedoch bleibt hier die Frage offen, ob dies für spezielle Räume R (etwa diejenigen von Satz 6') der Fall ist; ebenso, ob für gewisse Klassen von Räumen aus der Existenz eines n-Mittels für ein bestimmtes n diejenige für alle andern n folgt, und auch ob die Aussage von Satz 6' für allgemeinere Räume als die dort genannten gilt.

4.3. *Beispiel eines n-Mittels in einem nicht-zusammenziehbaren Raum:* $n \geqslant 2$ sei beliebig vorgegeben, R der Raum des n-adischen Solenoids Σ_n; dieses kann definiert werden als kompakte Charakterengruppe mod. 1 der diskreten additiven Gruppe A_n aller n-albrüche. R ist nicht zusammenziehbar (da gewisse Čech-Homologiegruppen von $R \neq 0$ sind[7])).

Jedes Element $\chi \in \Sigma_n$ ist durch n teilbar. Aus $n\chi = 0$, folgt $\chi(na) = 0$ für alle $a \in A_n$, also, da $nA_n = A_n$ ist, $\chi(a) = 0$ für alle $a \in A_n$, d. h. $\chi = 0$. Somit hat Σ_n die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$, und gemäß 1.2 liefert das arithmetische Mittel von n Elementen ein n-Mittel in Σ_n.

---

[7]) Vgl. *Eilenberg-Steenrod:* Foundations of Algebraic Topology, (Princeton 1952) p. 296.

§ 5. Homologiegruppen eines M_n-Raumes

5.1. Es handelt sich im folgenden durchwegs um die *singuläre* Homologietheorie. $H_p(R)$ sei die p-te Homologiegruppe des Raumes R, mit ganzzahligen Koeffizienten. Wir erinnern zunächst an einige bekannte Eigenschaften der Homologiegruppen Cartesischer Produkte, die wir nachher benötigen.

5.1.1. Für ein Cartesisches Produkt $R \times Q$ zweier Räume R, Q gilt die Isomorphie

$$H_p(R \times Q) \cong \sum_{r+s=p} H_r(R) \otimes H_s(Q) + \sum_{r+s=p-1} H_r(R) * H_s(Q)$$

für $p > 0$; dabei handelt es sich um direkte Summen, und $A \otimes B$ bezeichnet das *Tensorprodukt* der Abelschen Gruppen A und B, $A * B$ deren *Torsionsprodukt* (letzteres läßt sich so definieren[8]): Es sei $B = F/F_0$, wo F eine freie Abelsche Gruppe ist. $A * B$ ist isomorph zum Kern des natürlichen Homomorphismus von $A \otimes F_0$ in $A \otimes F$. Man kann zeigen, daß $A * B$ keine Elemente der Ordnung 0 enthält). Für unsere Zwecke wird die folgende Zerlegung von $H_p(R \times Q)$ genügen:

$$H_p(R \times Q) \cong H_p(R) \otimes H_0(Q) + H_0(R) \otimes H_p(Q) + \tilde{H}_p\,,$$

wo $\tilde{H}_p$ eine direkte Summe von Tensor- und Torsionsprodukten gewisser $H_r(R), H_s(Q)$ mit $r < p, s < p$ ist; für $p = 1$ ist $\tilde{H}_1 = 0$. Außerdem brauchen wir noch Einzelheiten über die Art, wie diese Zerlegung von $H_p(R \times Q)$ explizite hergestellt werden kann.

5.1.2. Es bezeichne H'_p (bzw. H''_p) die Untergruppe von $H_p(R \times Q)$, deren Elemente durch Cartesische Produktzyklen $c_p \times c_0$ eines p-Zyklus c_p in R und eines 0-Zyklus c_0 in Q (bzw. $c_0 \times c_p$, c_0 in R, c_p in Q) repräsentiert werden können; sind $z_p \in H_p(R)$ und $z_0 \in H_0(Q)$ die Homologieklassen von c_p und c_0, so bezeichne $z_p \times z_0$ diejenige von $c_p \times c_0$. Dann ist $H_p(R \times Q)$ direkte Summe von H'_p, H''_p und einer weitern Untergruppe $\bar{H}_p$, und es ist $H'_p \cong H_p(R) \otimes H_0(Q)$, $H''_p \cong H_0(R) \otimes H_p(Q)$, also $\bar{H}_p \cong \tilde{H}_p$.

R und Q seien *durch Wege zusammenhängend*, also $H_0(R)$ und $H_0(Q)$ unendlich zyklisch und $H'_p \cong H_p(R)$, $H''_p \cong H_p(Q)$; bezeichnet z_0 die durch einen Punkt von Q repräsentierte Homologieklasse $\in H_0(Q)$, so ist die Zuordnung $z_p \to z_p \times z_0$, $z_p \in H_p(R)$, ein Isomorphismus von $H_p(R)$ auf H'_p, und analog läßt sich der Isomorphismus $H_p(Q) \cong H''_p$

---

[8]) Vgl. [3].

erhalten. Die Elemente von $\overline{H}_p$ sind dadurch charakterisiert, daß sie sich durch Cartesische Produkte von lauter Zyklen[9]) in R der Dimensionen $< p$ repräsentieren lassen.

5.1.3. Durch Iteration erhält man für das Cartesische Produkt $P = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$ von n Räumen R_i, die durch Wege zusammenhängend sind, eine Zerlegung von $H_p(P)$ in eine direkte Summe von Untergruppen

$$H_p(P) = H_p^{(1)} + \ldots + H_p^{(n)} + \overline{H}_p ;$$

dabei ist $H_p^{(i)} \cong H_p(R_i)$, und $\overline{H}_p \cong \tilde{H}_p$, wo $\tilde{H}_p$ eine direkte Summe von n-fachen Tensor- und Torsionsprodukten gewisser Gruppen $H_r(R_i), r<p$, ist. Mit $z_0^{(j)}$ bezeichnen wir die Homologieklasse aus $H_0(R_j)$, die durch einen Punkt $x_j \in R_j, j = 1, \ldots, n$ repräsentiert wird; die Zuordnung $z_p^{(i)} \to z_0^{(1)} \times \ldots \times z_0^{(i-1)} \times z_p^{(i)} \times z_0^{(i+1)} \times \ldots \times z_0^{(n)}$ ist ein Isomorphismus I_i von $H_p(R_i)$ auf $H_p^{(i)}$. Die Elemente von $\overline{H}_p$ sind analog charakterisiert wie in 5.1.2; für $p = 1$ ist $\overline{H}_p = 0$.

5.2. Es seien nun in P alle $R_i = R$, und D bezeichne wie in 1.4 die Diagonalabbildung von R in P, gegeben durch $D(x) = (x, x, \ldots, x)$, $x \in R$; $D(R) = \Delta \subset P$ ist die *Diagonale* von P. D induziert einen Homomorphismus D_* von $H_p(R)$ in $H_p(P)$; entsprechend der Zerlegung in 5.1.3 zerfällt $D_* z_p, z_p \in H(R)$, eindeutig in eine Summe

$$D_* z_p = D_1 z_p + \ldots + D_n z_p + \overline{D} z_p ,$$

wo D_i ein Homomorphismus von $H_p(R)$ in $H_p^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, $\overline{D}$ von $H_p(R)$ in $\overline{H}_p$ ist.

Unterwirft man die n Komponenten $x_i \in R$ eines jeden Punktes $(x_1, \ldots, x_n)$ von P einer bestimmten Permutation, so erhält man eine topologische Abbildung T von P auf sich, welche Δ punktweise festläßt. Offenbar bildet T_* die Gruppen $\sum_i H_p^{(i)}$ und $\overline{H}_p$ in sich ab. Wegen $TD = D$ ist $T_* D_* z_p = D_* z_p, z_p \in H_p(R)$, also

$$T_*(\sum_i D_i z_p) + T_* \overline{D} z_p = \sum_i D_i z_p + \overline{D} z_p ,$$

somit $T_*(\sum_i D_i z_p) = \sum_i D_i z_p$. Da dies für jede Permutation T gilt, folgt leicht, daß alle $I_i^{-1} D_i z_p \in H_p(R), i = 1, \ldots, n$, einander gleich sind; wir setzen $I_i^{-1} D_i z_p = J z_p$ und erhalten

$$D_i z_p = z_0^{(1)} \times \ldots \times z_0^{(i-1)} \times J z_p \times z_0^{(i+1)} \times \ldots \times z_0^{(n)} .$$

[9]) und ganzzahlige Zyklen mod m.

5.3. M sei ein n-Mittel in R, also eine Abbildung von $P = R \times \ldots \times R$ in R mit den Eigenschaften (1) und (2) (vgl. 1.3). Wir betrachten, für $z_p \in H_p(R)$, $M_* D_* z_p = M_* (\sum_i D_i z_p) + M_* \overline{D} z$. Repräsentiert man in der obigen Darstellung von $D_i z_p$ alle $z_0^{(i)}$ durch denselben Punkt von R und berücksichtigt man die Symmetrieeigenschaft (1), so folgt, daß alle $M_* D_i z_p$ einander gleich sind. Es ist also $M_* D_* z_p = n M_* D_1 z_p + M_* \overline{D} z$. Aus (2) folgt ferner $M_* D_* z_p = z_p$.

Es gibt also zwei Endomorphismen σ und τ von $H_p(R)$, derart daß für alle $z_p \in H_p(R)$ gilt

$$z_p = n\sigma z_p + \tau z_p ;$$

dabei ist $\tau = M_* \overline{D}$, wo $\overline{D}$ ein Homomorphismus von $H_p(R)$ in $\overline{H}_p$ ist.

Für $p = 1$ ist $\overline{H}_1 = 0$, also $\tau = 0$; es gibt also einen Endomorphismus σ, derart daß $n\sigma z_1 = z_1$ ist für alle $z_1 \in H_1(R)$. Hieraus folgt wie in 3.2, *daß $H_1(R)$ die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ hat:* $z_1 \to n z_1$ ist ein Automorphismus von $H_1(R)$.

Um durch Induktion bezüglich p weiter schließen zu können, benötigen wir ein Lemma bezüglich der Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$.

5.4. **Lemma.** A und B seien zwei Abelsche Gruppen. Mit A hat auch (a) ihr Tensorprodukt $A \otimes B$ und (b) ihr Torsionsprodukt $A * B$ die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$.

Beweis. (a) Ist α ein Automorphismus von A, so ist $\alpha \otimes i$ (i = Identität von B) ein Automorphismus von $A \otimes B$; wegen

$$(na) \otimes b = n(a \otimes b)$$

für alle $a \in A, b \in B$, ist also $a \otimes b \to n(a \otimes b)$ ein Automorphismus von $A \otimes B$. – Es folgt insbesondere, daß die Ordnung von $a \otimes b$ ($a \in A$, $b \in B$) entweder 0 oder zu n teilerfremd ist.

(b) $A * B$ ist Untergruppe von $A \otimes F_0$ (vgl. 5.1) und hat keine Elemente der Ordnung 0; die Ordnung eines jeden Elementes von $A * B$ ist also zu n teilerfremd, woraus nach Satz 5 (3.3) die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ folgt.

5.5. Wir gehen nun zurück zum M_n-Raum R. Es sei $p \geqslant 2$, und es sei schon gezeigt, daß alle $H_s(R)$, $0 < s < p$, die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$ haben; da $\overline{H}_p$ einer direkten Summe von Tensor- und Torsionsprodukten von H_s, $s < p$, isomorph ist (wobei für mindestens einen Faktor $s > 0$ ist), hat auf Grund des Lemmas $\overline{H}_p$ die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$. Setzen wir nun für $z_p \in H_p(R)$

$$\mu z_p = \sigma z_p + M_* (n^{-1} \overline{D} z_p) ,$$

so ist μ ein Endomorphismus von $H_p(R)$, für welchen nach 5.3 gilt:

$$n\mu z_p = \mu n z_p = n\sigma z_p + M_* \overline{D} z_p = n\sigma z_p + \tau z_p = z_p \, .$$

Somit hat $H_p(R)$ die Eigenschaft $\mathfrak{a}_n$.

Satz 8. *R sei ein durch Wege zusammenhängender Raum. Wenn es in R ein n-Mittel gibt, so ist in allen Dimensionen* $p > 0$ *die Zuordnung* $z_p \to n z_p$ *ein Automorphismus von* $H_p(R)$. *Die Ordnungen aller Homologieklassen sind also* 0 *oder zu n teilerfremd; ist* $H_p(R)$ *direkte Summe zyklischer Gruppen, so sind alle Ordnungen zu n teilerfremd (die Bettischen Zahlen also* $= 0$, *die Torsionskoeffizienten zu n teilerfremd).*

Dies sind, insbesondere für endliche Polyeder oder Räume von demselben Homologiecharakter, sehr starke Bedingungen, die die Existenz eines n-Mittels nur in seltenen Fällen zulassen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *G. Aumann*, Math. Ann. 119 (1943), 210–215.

[2] *G. Aumann*, Math. Ann. 111 (1935), 713–730.

[3] *H. Cartan* und *S. Eilenberg*, Homological algebra (in Vorbereitung).

[4] *R. H. Fox*, Ann. of Math. 49 (1948), 471–510.

[5] *W. Hurewicz*, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 521–528.

[6] *J. P. Serre*, Ann. of Math. 58 (1953), 258–294.

(Eingegangen den 7. Mai 1954)