Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1954)

Artikel: Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz.

Autor: Methée, Pierre-Denis

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22621

Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz

Par Pierre-Denis Methée, Lausanne

Introduction

A l'origine de ce travail se trouve le problème suivant, qui s'est posé à l'occasion de la Thèse de M. D. Rivier[1]): déterminer, dans l'espace à n dimensions $R^n (n \geqslant 3)$, toutes les distributions (au sens de M. L. Schwartz) qui sont invariantes dans le groupe G des rotations propres de Lorentz et qui satisfont à l'équation des ondes $\square T + kT = 0$ ou δ_O, k étant une constante quelconque (éventuellement nulle), et δ_O désignant la distribution de Dirac relative au point O centre des rotations de Lorentz et origine des coordonnées. La difficulté essentielle de ce problème réside en ceci que, pour $n \geqslant 4$, il existe des fonctions invariantes solutions usuelles de l'équation $\square T + kT = 0$ qui ne sont pas sommables dans un voisinage du cône $u = t^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0$ et qui, par conséquent, ne définissent immédiatement des distributions que dans les trois domaines $u \neq 0$ et non dans l'espace entier.

Le travail tel qu'il se présente ici est conçu d'un point de vue un peu plus large que ne l'exigerait la seule résolution du problème énoncé.

Quelques propriétés des distributions invariantes par G, en général, sont d'abord établies, dont voici la plus importante: on peut associer à toute distribution invariante définie dans $R^n - O$ (espace privé de l'origine) un couple de distributions sur la droite Ou, et réciproquement.

Des distributions invariantes particulières sont ensuite examinées: celles qui ont pour support l'hyperboloïde $u = \varepsilon (\varepsilon < 0)$ ou une nappe de l'hyperboloïde $u = \varepsilon (\varepsilon > 0)$. De cette étude il ressort notamment que ces distributions, considérées comme fonctions de la variable ε, admettent toutes un développement asymptotique, au voisinage de $\varepsilon = 0$, de forme

[1]) *D. Rivier:* Une méthode d'élimination des infinités en théorie des champs quantifiés. Application au moment magnétique du neutron. (Helvetica Phys. Acta, XXII (1949), p. 265–318).

simple. Cela permet alors aisément, en s'inspirant de la méthode utilisée par M. J. Hadamard[2]) pour définir la «partie finie» d'une intégrale divergente, de prolonger de façon invariante dans R^n, que n soit pair ou qu'il soit impair, les distributions égales, pour $u \neq 0$, à certaines fonctions de u non sommables au voisinage de $u = 0$.

Parmi ces fonctions figurent précisément celles qui interviennent dans le problème indiqué plus haut, lequel peut ainsi être résolu. La solution générale invariante de l'équation $\square T + kT = 0$ ou δ_0 est donnée explicitement. Elle dépend de trois constantes arbitraires.

Je ne puis terminer sans préciser que c'est M. G. de Rham, mon maître, qui m'a proposé le sujet de ce travail. J'ai bénéficié constamment de ses critiques et de ses conseils. Ses directives pour la présentation finale des résultats m'ont été particulièrement précieuses. C'est un devoir pour moi, dont je m'acquitte ici avec joie, d'assurer M. G. de Rham de ma vive reconnaissance.

§ 1. Rappel des notions de distribution et de courant[3])

Dans l'espace à n dimensions R^n, un *courant de degré* $n - p$ est une fonctionnelle linéaire $T[\varphi]$, définie sur l'espace vectoriel des formes différentielles extérieures φ de degré p dont les coefficients sont des fonctions indéfiniment différentiables nulles hors d'un ensemble compact, et qui est continue dans le sens suivant: si $\varphi \to 0$ de manière que chaque coefficient de φ reste nul hors d'un compact fixe et que chacune de ses dérivées tende uniformément vers zéro, alors $T[\varphi] \to 0$.

On dit qu'une forme φ est C^∞ si ses coefficients sont des fonctions indéfiniment différentiables. La forme φ est dite nulle en un point si tous ses coefficients s'annulent en ce point. Le *support* de φ est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel φ est nulle. L'ensemble de toutes les formes C^∞ à support compact sera désigné par $\mathcal{D}$.

Le courant T est dit nul dans un ensemble ouvert D si $T[\varphi] = 0$ pour toute forme $\varphi \in \mathcal{D}$ à support dans l'ensemble D. Le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel le courant T est nul est appelé le *support* de T. La définition de la fonctionnelle $T[\varphi]$ s'étend d'une manière naturelle à toutes les formes C^∞ dont le support coupe

---

[2]) *J. Hadamard:* Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, p. 184–230. (Paris, Hermann, 1932.)

[3]) Cf. *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tomes I et II (Actualités Sci. Ind., fasc. 1091 et 1122; Paris, 1950 et 1951);

G. de Rham et *K. Kodaira:* Harmonic Integrals (Lecture delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1950).

celui de T suivant un compact ; si φ est une telle forme, on peut, en effet, la décomposer en la somme $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ de deux formes C^∞, dont la première φ_1 a un support compact et la seconde φ_2 a un support qui ne rencontre pas celui de T, et l'on pose $T[\varphi_2] = 0$ et $T[\varphi] = T[\varphi_1]$; la valeur ainsi obtenue ne dépend pas de la décomposition choisie.

On dit que le courant T est égal à la forme α, de même degré $n - p$ que T, si

$$T[\varphi] = \int \alpha \wedge \varphi ,$$

quelle que soit la forme $\varphi \in \mathcal{D}$ de degré p.

Le produit extérieur $T \wedge \alpha$ du courant T par une forme C^∞ est le courant défini par l'égalité

$$T \wedge \alpha[\varphi] = T[\alpha \wedge \varphi] ;$$

la différentielle dT du courant T, de degré $n - p$, est le courant défini par

$$dT[\varphi] = (-1)^{n-p+1} T[d\varphi] ;$$

enfin, les dérivées partielles de T par rapport aux coordonnées x_i dans R^n sont les courants définis par

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}[\varphi] = -T\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right],$$

où $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est la forme que l'on déduit de φ en remplaçant chacun de ses coefficients par sa dérivée partielle par rapport à x_i. De ces définitions il suit que

$$dT = \sum_i dx_i \wedge \frac{\partial T}{\partial x_i} .$$

Si μ est une application C^∞ de R^m dans R^n, qui applique le point y de R^m sur le point $x = \mu y$ de R^n, à chaque forme $\varphi(x)$ dans R^n correspond une forme $\mu^*\varphi(y)$ dans R^m, appelée *image transposée* de φ par μ, qu'on obtient en remplaçant, dans l'expression de $\varphi(x)$, les coordonnées de x par leurs expressions en fonction des coordonnées de y. Cette opération jouit des propriétés exprimées par les relations

$$d\mu^*\varphi = \mu^* d\varphi , \quad \mu^*(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = \mu^*\varphi_1 \wedge \mu^*\varphi_2 ;$$

de plus, le support de $\mu^*\varphi$ est contenu dans l'image réciproque $\mu^{-1} K$ du support K de φ.

Si T est un courant dans R^m, dont le support coupe l'image réciproque $\mu^{-1} K$ de tout compact $K \subset R^n$ suivant un compact, l'image μT de T par μ est le courant défini dans R^n par la relation $\mu T[\varphi] = T[\mu^* \varphi]$.

Dans R^n, les courants de degré n ne sont pas autre chose que les distributions de L. Schwartz. Mais à tout courant de degré 0 est associé un courant de degré n, son produit par la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, qu'on écrira simplement $dx_1 \ldots dx_n$ lorsque aucune confusion ne sera possible, et qui représente l'élément de volume dans R^n. Un courant de degré 0 représente donc aussi une distribution. Dans la suite, nous éviterons de confondre les courants de degré 0 et les courants de degré n, et *nous réserverons le nom de distribution aux courants de degré* 0.

§ 2. Condition d'invariance d'une distribution dans les rotations de Lorentz

On appelle *rotation de Lorentz* de l'espace R^n toute transformation linéaire homogène

$$x_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

qui laisse invariante la forme quadratique

$$u = x_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$$

et dont le déterminant $|a_{ik}|$ est égal à $+1$.

Nous poserons $x_n = t$ et $r = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}$, de sorte que $u = t^2 - r^2$.

Le domaine défini dans R^n par $t > 0$ et $u > 0$, appelé *intérieur du cône futur*, sera désigné par Ω_1. L'intérieur du *cône passé*, défini par $t < 0$ et $u > 0$, sera désigné par Ω_3, et le domaine extérieur à ces deux cônes, défini par $u < 0$, sera désigné par Ω_2.

Toute rotation de Lorentz laisse Ω_2 invariant, tandis que Ω_1 et Ω_3 sont ou bien invariants ou bien permutés. Dans le premier cas, on dit que la rotation est *propre*; dans le second cas, elle est dite *impropre*.

Nous appellerons *distribution invariante* toute distribution T telle que $\lambda T = T$ pour *toute rotation propre* λ.

Si T est invariante et si λ_1 et λ_2 sont deux rotations impropres, on a $\lambda_1 T = \lambda_2 T$, car $\lambda_2 \lambda_1^{-1}$ est une rotation propre. Nous dirons que T est *symétrique* si $\lambda_1 T = T$ et *antisymétrique* si $\lambda_1 T = -T$. Toute distribution invariante se laisse décomposer, d'une manière unique, en la somme d'une distribution symétrique et d'une distribution antisymétrique:

$$T = \tfrac{1}{2}(T + \lambda_1 T) + \tfrac{1}{2}(T - \lambda_1 T) .$$

Les rotations propres forment, on le sait, un groupe de Lie connexe G dont les transformations infinitésimales sont des combinaisons linéaires des suivantes:

$$X_i = x_i \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_i} , \quad X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i,j = 1, \dots, n-1) .$$

On en déduit que la distribution T est invariante si elle satisfait aux conditions

$$X_i T = X_{ij} T = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, n-1)$$

et dans ce cas seulement.

Comme $\quad dT = \dfrac{\partial T}{\partial t} dt + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\partial T}{\partial x_i} dx_i$ et $\tfrac{1}{2}\, du = t\, dt - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} x_j\, dx_j$,

on a

$$\tfrac{1}{2}\, dT \wedge du = \sum_i (X_i T)\, dx_i \wedge dt + \sum_{i<j} (X_{ij} T)\, dx_i \wedge dx_j .$$

Par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que la distribution T soit invariante est que $dT \wedge du = 0$.*

§ 3. Les distributions invariantes de support O

Pour commencer la recherche des distributions invariantes, nous allons déterminer celles dont le support se réduit au point O, centre des rotations de Lorentz.

La *distribution de Dirac* δ_O, définie par

$$\delta_O\, [\varphi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n] = \varphi(0, \dots, 0) ,$$

est évidemment invariante. D'autre part, l'opérateur différentiel $\Box$, dit *dalembertien*,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} ,$$

étant invariant, si T est invariante, $\Box\, T$ l'est aussi. Par suite, les distributions $\Box^k \delta_O (k = 0, 1, \dots)$ et leurs combinaisons linéaires sont des distributions invariantes de support O. Ce sont les seules:

Théorème 1. *Toute distribution invariante dont le support se réduit au point O est égale à une combinaison linéaire de dalembertiens itérés de δ_O.*

En effet, d'après un théorème connu[1]), toute distribution de support O est égale à une combinaison linéaire de dérivées de δ_O,

$$T = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\delta_O ,$$

où P désigne un polynôme de dérivation. Pour que cette distribution soit invariante, il faut et il suffit que le polynôme associé

$$P(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$$

soit invariant. Supposons qu'il en soit ainsi. Comme il existe une rotation propre amenant le point $(x_1, 0, \ldots, 0)$ sur le point $(-x_1, 0, \ldots, 0)$, on a $P(x_1, 0, \ldots, 0) = P(-x_1, 0, \ldots, 0)$, de sorte que $P(x_1, 0, \ldots, 0)$ est égal à un polynôme en x_1^2, soit $P(x_1, 0, \ldots, 0) = Q(-x_1^2)$. Le polynôme $P(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) - Q(u)$ est alors invariant et nul sur l'axe Ox_1. Comme tout point de Ω_2 peut être amené sur un point de Ox_1 par une rotation propre, ce polynôme est identiquement nul et $T = Q(\Box)\,\delta_O$. C. Q. F. D.

Ce théorème entraîne que toute distribution invariante dont le support se réduit au point O est symétrique.

§ 4. Les distributions invariantes dans $R^n - O$

Nous allons chercher maintenant les distributions invariantes T définies seulement dans $R^n - O$, c'est-à-dire telles que $T[\varphi]$ n'est défini que pour les formes $\varphi \in \mathcal{D}$ de degré n dont le support ne contient pas O.

Désignons par f l'application de R^n sur la droite R, qui applique le point $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ de R^n sur le point fx de R d'abscisse

$$u = t^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 .$$

Désignons encore par f_+ la restriction de f au domaine $C\overline{\Omega}_3$, extérieur du cône passé, et par f_- sa restriction à $C\overline{\Omega}_1$, extérieur du cône futur.

Les images réciproques $f^{-1}u_0, f_+^{-1}u_0$ et $f_-^{-1}u_0$ d'un point de R d'abscisse négative $u_0 < 0$ sont toutes trois identiques à l'hyperboloïde à une nappe contenu dans Ω_2 et d'équation $u = u_0$. Si $u_0 > 0$, l'hyperboloïde $u = u_0$ est à deux nappes, l'une contenue dans Ω_1 qui forme $f_+^{-1}u_0$, l'autre contenue dans Ω_3 qui forme $f_-^{-1}u_0$, la réunion des deux

[1]) *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tome I, p. 99.

formant $f^{-1} u_0$. Enfin, si $u_0 = 0$, $f_+^{-1} 0$ est la surface du cône futur privée du sommet O, $f_-^{-1} 0$ est la surface du cône passé privée de O et $f^{-1} 0$ est la surface totale des deux cônes y compris le point O.

Quel que soit u_0, chacun des ensembles $f_+^{-1} u_0$ et $f_-^{-1} u_0$ est invariant par le groupe G des rotations propres et transformé transitivement par ce groupe. Par suite, toute fonction $\Phi(x)$ définie dans $R^n - O$ et invariante par G est constante sur chacun de ces ensembles. Soit $\Phi^+(u)$ sa valeur sur $f_+^{-1} u$ et $\Phi^-(u)$ sa valeur sur $f_-^{-1} u$. On a

$$\Phi = f_+^* \Phi^+ \quad \text{dans} \quad C\overline{\Omega}_3 , \quad \Phi = f_-^* \Phi^- \quad \text{dans} \quad C\overline{\Omega}_1 , \tag{4.1}$$

et il est clair que

$$\Phi^+(u) = \Phi^-(u) \quad \text{pour} \quad u < 0 . \tag{4.2}$$

Réciproquement, à toute paire Φ^+, Φ^- de fonctions définies dans R et satisfaisant à (4.2) correspond une fonction Φ invariante dans $R^n - O$ définie par (4.1).

Nous allons établir une proposition analogue pour les distributions. Si T est un courant de degré n à support compact dans $C\overline{\Omega}_3$, alors, d'après la définition du § 1, $f_+ T$ est un courant de degré 1 dans R qui satisfait à $f_+ T[\psi] = T[f_+^* \psi]$, où ψ est une fonction C^∞ quelconque à support compact dans R. Pour toute rotation propre λ, comme $f_+ \lambda = f_+$, on a $f_+ \lambda T = f_+ T$. Considérons, en particulier, le cas où T est une forme α, et supposons d'abord que le support de α soit contenu dans le domaine D de R^n défini par $t > 0$. En prenant le système de coordonnées formé par $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$, ce domaine D est défini par l'inégalité $r^2 + u > 0$, et, si $\alpha = a(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, du$, on a

$$f_+ \alpha[\psi] = \alpha[f_+^* \psi] = \int a(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, \psi(u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, du ,$$

d'où

$$f_+ \alpha = A(u)\, du \quad \text{avec} \quad A(u) = \int a(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{4.3}$$

formule qui montre que, *si α est C^∞ à support compact dans D, alors $f_+ \alpha$ est C^∞*.

Ce dernier résultat s'étend au cas où α est une forme C^∞ à support compact contenu dans $C\overline{\Omega}_3$. En effet, on sait que les transformés λD de D par toutes les rotations propres λ recouvrent complètement $C\overline{\Omega}_3$. En vertu du théorème de Borel-Lebesgue, le support de α est contenu dans la réunion $\bigcup_i \lambda_i D$ d'un nombre fini de tels transformés. En utilisant une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, on peut remplacer α par une somme de formes α_i qui sont C^∞ et dont chacune a son support contenu dans le transformé $\lambda_i D$ d'indice correspondant. Alors $f_+\alpha = \sum_i f_+\alpha_i = \sum_i f_+ \lambda_i^{-1}\alpha_i$ est C^∞ en vertu de ce qui précède, car $\lambda_i^{-1}\alpha_i = \lambda_i^* \alpha_i$ est C^∞ à support compact dans D.

En écrivant $\alpha = \beta \wedge du$, où β est une forme C^∞ à support compact dans $C\overline{\Omega}_3$, on a

$$f_+\alpha = du \int_{f_+^{-1} u} \beta \, , \tag{4.4}$$

l'intégrale étant étendue à la surface $f_+^{-1}u$ (hyperboloïde ou nappe d'hyperboloïde ou de cône) convenablement orientée.

D'une manière tout à fait analogue, si β est encore une forme $\in \mathcal{D}$ de degré $n-1$ à support dans $C\overline{\Omega}_3$, on voit que $f_+\beta$ est la fonction C^∞ dans R définie par

$$f_+\beta = \int_{f_+^{-1} u} \beta \, . \tag{4.5}$$

Si β est divisible par du, on a $f_+\beta = 0$. D'autre part, (4.4) et (4.5) montrent que $f_+(\beta \wedge du) = (f_+\beta)\, du$.

Ces remarques permettent d'*étendre la définition de l'opération* f_+^*. La relation $f_+\alpha[\psi] = \alpha[f_+^*\psi]$, qui peut aussi s'écrire

$$f_+^*\psi[\alpha] = \psi[f_+\alpha] \, ,$$

conduit, en effet, à poser, *pour toute distribution S dans R*,

$$f_+^* S[\alpha] = S[f_+\alpha] \, .$$

La fonctionnelle linéaire $f_+^* S[\alpha]$ définie ainsi pour toute forme $\alpha \in \mathcal{D}$ de degré n à support dans $C\overline{\Omega}_3$ est une distribution dans $C\overline{\Omega}_3$, qui est invariante parce que $f_+ \lambda^{-1} = f_+$ et $(\lambda^{-1})^* f_+^* = f_+^*$ ou $\lambda f_+^* = f_+^*$ pour toute rotation propre λ.

De même, si β est une forme de $\mathcal{D}$ de degré $n-1$ à support dans $C\overline{\Omega}_3$, la relation $f_+\beta[\psi\, du] = \beta[f_+^*(\psi\, du)]$, qui peut aussi s'écrire $f_+^*(\psi\, du)\,[\beta] = (-1)^{n-1}(\psi\, du)\,[f_+\beta]$, conduit à poser, *pour tout courant U de degré 1 dans R*,

$$f_+^* U\,[\beta] = (-1)^{n-1}\, U\,[f_+\beta] \, ,$$

et la fonctionnelle linéaire $f_+^* U\,[\beta]$ définie ainsi est un courant de degré 1 dans $C\overline{\Omega}_3$ qui est invariant.

L'opération f_+^* ainsi prolongée est encore permutable avec d,

$$f_+^* \, dS = d(f_+^* \, S), \quad \text{et l'on a} \quad f_+^*(S\,du) = (f_+^* \, S)\,du\,,$$

en désignant, comme nous l'avons fait, par le même symbole du les différentielles dans R et dans R^n, de sorte que $du = f_+^* \, du$.

Grâce à cette opération, à toute distribution S dans R correspond une distribution invariante $f_+^* \, S$ dans $C\overline{\Omega}_3$. Nous allons montrer maintenant que, réciproquement, à toute distribution T invariante dans $C\overline{\Omega}_3$ correspond une distribution S dans R, et une seule, telle que $T = f_+^* S$.

Soit $c(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ une fonction C^∞, dont le support est contenu dans D (le domaine défini par $t > 0$ ou $r^2 + u > 0$) et coupe l'image réciproque $f_+^{-1} K$ de tout compact $K \subset R$ suivant un compact, telle que

$$\int c(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} = 1 \qquad \text{quel que soit } u\,.$$

Il est aisé de construire une telle fonction. Supposons-la choisie une fois pour toutes et posons

$$\gamma = c(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\,.$$

Si $\psi = \psi(u)$ est une fonction C^∞ à support compact dans R, la forme $\gamma \wedge f_+^*(\psi\,du)$, de degré n, est C^∞ à support compact dans D, et l'on a

$$f_+\{\gamma \wedge f_+^*(\psi\,du)\} = \psi\,du\,. \tag{4.6}$$

Par suite, pour toute distribution S dans R, il vient

$$S[\psi\,du] = f_+^* \, S\,[\gamma \wedge f_+^*(\psi\,du)] = f_+^* S \wedge \gamma\,[f_+^*(\psi\,du)]\,,$$

d'où

$$S = f_+(f_+^* \, S \wedge \gamma)\;; \tag{4.7}$$

ainsi S est complètement déterminée par la connaissance de $f_+^* S$.

Si T est une distribution invariante donnée dans $C\overline{\Omega}_3$, il ne peut donc y avoir d'autre distribution S dans R satisfaisant à $f_+^* S = T$ que celle donnée par $S = f_+(T \wedge \gamma)$. Montrons que cette distribution S satisfait effectivement à la condition requise, c'est-à-dire que la distribution $T_0 = f_+^* S - T$ est nulle. Comme T_0 est visiblement invariante, il suffit de prouver que $T_0[\alpha] = 0$ pour toute forme $\alpha \in \mathcal{D}$ de degré n à support dans D. On a

$$T_0\,[\alpha] = S\,[f_+ \alpha] - T\,[\alpha] = T[\gamma \wedge f_+^* \, f_+ \alpha - \alpha]\,,$$

ce qu'on peut écrire $T_0[\alpha] = T[\beta]$ en posant

$$\gamma \wedge f_+^* f_+ \alpha - \alpha = \beta = b(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, du\,.$$

De la relation (4.6) appliquée à $\psi\, du = f_+ \alpha$, on tire $f_+ \beta = 0$, donc

$$\int b(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0 \qquad \text{quel que soit } u\,.$$

Or, d'après une proposition connue[5]), cette relation entraîne que la forme $b(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$, u étant pris comme un paramètre, est la différentielle d'une forme β_1 de degré $n - 2$ à support compact contenu dans D. En considérant u comme une variable, on peut, par suite, écrire

$$b(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)\, dx_1 \ldots dx_{n-1} = d\beta_1 - du \wedge \frac{\partial \beta_1}{\partial u}\,,$$

d'où résulte $\beta = d(\beta_1 \wedge du)$; il vient, par conséquent,

$$T_0[\alpha] = T[d(\beta_1 \wedge du)] = -\, dT[\beta_1 \wedge du] = (-1)^{n-1}\, dT \wedge du\, [\beta_1]\,,$$

ce qui est bien nul, puisque, T étant invariante, on a $dT \wedge du = 0$.

Des considérations analogues sont évidemment valables pour les distributions invariantes dans $C\overline{\Omega}_1$. On peut alors énoncer le théorème suivant[6]), qui résume les résultats obtenus:

Théorème 2. *A toute distribution T invariante dans $R^n - O$ correspond une paire de distributions (T^+, T^-) dans R, qui coïncident sur la demi-droite $u < 0$, telles que*

$$T = f_+^*\, T^+ \quad \textit{dans} \quad C\overline{\Omega}_3 \quad \textit{et} \quad T = f_-^*\, T^- \quad \textit{dans} \quad C\overline{\Omega}_1\,.$$

Réciproquement, toute paire de distributions dans R qui coïncident sur la demi-droite $u < 0$ définit une distribution T invariante dans $R^n - O$.

La distribution T sera symétrique si $T^+ = T^-$, antisymétrique si $T^+ = -T^-$. Dans le dernier cas, elle s'annule dans Ω_2.

Le support de T^+ et celui de T^- sont contenus dans l'image par f du support de T.

Remarquons encore que la forme γ de degré $n - 1$, qui permet

---

[5]) C'est un cas particulier du "deuxième théorème de de Rham", facile à démontrer directement. Il se ramène par exemple au lemme 2 du chapitre 3 de la thèse de cet auteur: Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions (J. Math. Pures Appl., 1931, p. 115–200).

[6]) Le principe de la démonstration de ce théorème m'a été communiqué par M. de Rham.

d'exprimer T^+ par $T^+ = f_+(T \wedge \gamma)$, jouit des propriétés suivantes, qui seules sont essentielles: elle est C^∞, son support est contenu dans $C\overline{\Omega}_3$ et coupe l'image réciproque $f_+^{-1} K$ de tout compact $K \subset R$ suivant un compact, enfin $f_+ \gamma = 1$.

Démontrons maintenant la proposition suivante, utile pour les calculs à venir:

Si (T^+, T^-) *est la paire associée à la distribution invariante* T, *la paire associée à* $\square T$ *est* (DT^+, DT^-), *où*

$$D = \left(4u\frac{d}{du} + 2n\right)\frac{d}{du}.$$

L'opérateur différentiel D et son adjoint $D^* = \left(4u\dfrac{d}{du} + 8 - 2n\right)\dfrac{d}{du}$ sont définis pour toute distribution dans R. Si $U_1 = U\,du$ est un courant de degré 1 dans R, U étant une distribution, on conviendra de définir DU_1 et D^*U_1 en posant $DU_1 = (DU)\,du$ et $D^*U_1 = (D^*U)\,du$. De même, si $T = T_0\,dx_1 \dots dx_n$ est un courant de degré n dans R^n, T_0 étant une distribution, nous définirons $\square T$ en posant

$$\square T = (\square T_0)\,dx_1 \dots dx_n.$$

Si ψ est une fonction C^∞ dans R, un calcul simple donne

$$f_+^* D\psi = \square f_+^* \psi. \tag{4.8}$$

Par suite, pour un courant T de degré n à support compact dans $C\overline{\Omega}_3$, on a $f_+ \square T[\psi] = T[\square f_+^* \psi] = T[f_+^* D\psi] = f_+ T[D\psi]$. Mais, D^* étant adjoint à D, on peut écrire, pour tout courant U_1 de degré 1 dans R, les relations $D^*U_1[\psi] = U_1[D\psi]$ et $DU_1[\psi] = U_1[D^*\psi]$. Il en résulte que $f_+T[D\psi] = D^*f_+T[\psi]$, donc que $f_+ \square T[\psi] = D^* f_+ T[\psi]$, soit

$$f_+ \square T = D^* f_+ T. \tag{4.9}$$

Cette relation est vraie, en particulier, pour $T = \alpha$, forme C^∞ à support compact dans $C\overline{\Omega}_3$. Il vient alors, pour toute distribution U dans R: $\square f_+^* U[\alpha] = U[f_+ \square \alpha] = U[D^* f_+ \alpha] = f_+^* DU[\alpha]$, ou

$$\square f_+^* U = f_+^* DU. \tag{4.10}$$

Cette relation et celle qu'on obtiendrait de façon semblable en envisageant l'opération f_-^* entraînent la proposition énoncée.

Si le support de la distribution U, dans R, ne contient pas le point $u = 0$, la distribution $f_+^* U$, définie dans $C\overline{\Omega}_3$, peut être prolongée dans R^n, en la posant égale à zéro dans un voisinage de $\overline{\Omega}_3$. De même,

$f_{-}^{*}\, U$ se prolonge dans R^n en une distribution nulle dans un voisinage de $\overline{\Omega}_1$ et $f^* U$ se prolonge en une distribution nulle dans un voisinage du cône $u = 0$. *Chaque fois que le support de U ne contiendra pas le point $u = 0$, nous conviendrons que $f_{+}^{*}\, U, f_{-}^{*}\, U$ et $f^* U$ sont ainsi prolongées dans R^n*. Ce seront alors des distributions invariantes dans R^n, à supports contenus dans $\Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_3 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ respectivement.

§ 5. Les distributions H_ε^k, $\overline{H}_\varepsilon^k$ et $\mathscr{H}_\varepsilon^k$

Nous noterons H_ε^k, ε étant > 0 et k entier $\geqslant 0$, la distribution invariante associée à la paire $(\delta_\varepsilon^{(k)}, 0)$, où $\delta_\varepsilon^{(k)}$ est la dérivée $k^{\text{ième}}$ de la distribution de Dirac δ_ε relative au point $u = \varepsilon$ sur la droite Ou, autrement dit la distribution telle que $\delta_\varepsilon^{(k)}[\psi(u)\, du] = (-1)^k\, \psi^{(k)}(\varepsilon)$. Cette distribution $H_\varepsilon^k = f_{+}^{*}\, \delta_\varepsilon^{(k)}$ est définie non seulement dans $R^n - O$, mais encore dans R^n, grâce à la convention de la fin du § 4.

Soit alors T une distribution invariante dont le support est $f_{+}^{-1}\, \varepsilon$, c'est-à-dire la nappe supérieure $(t > 0)$ de l'hyperboloïde $u = \varepsilon (\varepsilon > 0)$, et soit (T^+, T^-) la paire de distributions associées sur Ou. Il est clair que $T^- = 0$ et que, en vertu de la relation qui lie les supports de T et de T^+, le support de T^+ se réduit au point $u = \varepsilon$. D'après le théorème déjà cité de M. L. Schwartz, T^+ est une combinaison linéaire des $\delta_\varepsilon^{(k)}$; donc T est une combinaison linéaire des H_ε^k. *Ainsi, toute distribution invariante de support $f_{+}^{-1}\, \varepsilon$ est une combinaison linéaire des H_ε^k.*

Comme $\dfrac{d}{d\varepsilon}\, \delta_\varepsilon^{(k)} = -\, \delta_\varepsilon^{(k+1)}$, on a, en considérant H_ε^k comme une fonction de ε:

$$\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon^k = - H_\varepsilon^{k+1} \quad , \qquad H_\varepsilon^k = (-1)^k \frac{d^k}{d\varepsilon^k} H_\varepsilon^0 \,. \tag{5.1}$$

De la proposition de la fin du § 4, il résulte que la distribution $\square\, H_\varepsilon^k$ est associée à la paire $(D\delta_\varepsilon^{(k)}, 0)$. Or, sachant que $u\, \delta_\varepsilon = \varepsilon\, \delta_\varepsilon$ et $u\, \delta_\varepsilon^{(m)} + m\, \delta_\varepsilon^{(m-1)} = \varepsilon\, \delta_\varepsilon^{(m)}$, on trouve facilement que

$$D\delta_\varepsilon^{(k)} = 4\varepsilon\, \delta_\varepsilon^{(k+2)} + 2(n - 2k - 4)\, \delta_\varepsilon^{(k+1)} \,. \tag{5.2}$$

On en déduit l'égalité

$$\square\, H_\varepsilon^k = 4\varepsilon\, H_\varepsilon^{k+2} + 2(n - 2k - 4)\, H_\varepsilon^{k+1} \,, \tag{5.3}$$

qu'on peut aussi écrire, en utilisant (5.1),

$$\square\, H_\varepsilon^k = 4\varepsilon^{\frac{n}{2} - 1 - k} \frac{d}{d\varepsilon}\, \varepsilon^{k + 2 - \frac{n}{2}} \frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon^k \,. \tag{5.4}$$

Considérons la transformée de H_ε^k par une rotation impropre de Lorentz et désignons-la par $\overline{H}_\varepsilon^k$. C'est la distribution invariante associée à la paire $(0, \delta_\varepsilon^{(k)})$; son support est $f_-^{-1}\,\varepsilon$, c'est-à-dire la nappe inférieure $(t < 0)$ de l'hyperboloïde $u = \varepsilon (\varepsilon > 0)$. Un raisonnement analogue à celui tenu plus haut montre que *toute distribution invariante de support* $f_-^{-1}\,\varepsilon$ *est une combinaison linéaire des* $\overline{H}_\varepsilon^k$. Les formules qui précèdent restent valables après substitution de $\overline{H}$ à H.

Soit maintenant ε un nombre négatif. Nous noterons $\mathscr{H}_\varepsilon^k$ la distribution invariante correspondant à la paire $(\delta_\varepsilon^{(k)}, \delta_\varepsilon^{(k)})$. Elle a pour support $f^{-1}\,\varepsilon$, soit l'hyperboloïde à une nappe $u = \varepsilon (\varepsilon < 0)$. On est amené à la conclusion que *toute distribution invariante de support* $f^{-1}\,\varepsilon$ *est une combinaison linéaire des* $\mathscr{H}_\varepsilon^k$ et que les formules (5.1) à (5.4) subsistent lorsqu'on y remplace H par $\mathscr{H}$.

§ 6. Les parties infinies de H_ε^k et de $\mathscr{H}_\varepsilon^k$, et les distributions H^k, $\overline{H}^k$ et $\mathscr{H}^k$

Nous dirons que deux fonctions de ε, définies pour $\varepsilon > 0$, ont *la même partie infinie* si leur différence tend vers une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$.

Considérons les fonctions $\varepsilon^\lambda \log^\mu \varepsilon$, où μ est un entier $\geqslant 0$ et λ un nombre réel ou complexe dont la partie réelle est $\leqslant 0$, la valeur $\lambda = 0$ étant exclue si $\mu = 0$. Lorsque $\varepsilon \to 0$, une fonction de ce type ne tend pas vers une limite finie, et l'on sait, de plus, qu'il n'y a aucune combinaison linéaire (non identiquement nulle) de telles fonctions qui puisse tendre vers une limite finie. Il en résulte que, s'il existe une combinaison linéaire de ces fonctions, soit $I(\varepsilon)$, ayant la même partie infinie qu'une fonction donnée $g(\varepsilon)$, cette combinaison est unique. Nous dirons alors que $I(\varepsilon)$ est la *partie infinie* de $g(\varepsilon)$. Nous poserons

$$Pf\, g(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} (g(\varepsilon) - I(\varepsilon)) .$$

L'opération représentée par le symbole Pf (lequel est une abréviation de «valeur limite pour $\varepsilon \to 0$ de la partie finie de . . .») généralise l'opération $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$, et s'y réduit chaque fois que cette dernière a un sens, c'est-à-dire lorsque la partie infinie de $g(\varepsilon)$ existe et est égale à zéro.

Le cas d'une fonction définie pour $\varepsilon < 0$ se ramène naturellement au précédent.

Nous appliquerons aussi ces définitions à des fonctions dont la valeur est une distribution, en particulier à H_ε^k et à $\mathscr{H}_\varepsilon^k$.

Comme $\delta_\varepsilon \to \delta$ et que $\delta_\varepsilon^{(k)} \to \delta^{(k)}$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (δ désignant la distribution de Dirac relative au point $u = 0$ de Ou), H_ε^k tend, *dans* $R^n - O$, vers la distribution invariante associée à la paire $(\delta^{(k)}, 0)$. Mais la définition de cette dernière distribution ne s'étend pas immédiatement à R^n, parce que le point O adhère au support de ladite distribution, et il se trouve, comme nous le verrons, que, pour $k \geqslant \frac{1}{2}(n - 2)$, et que n soit pair ou impair, H_ε^k *ne converge pas dans* R^n quand $\varepsilon \to 0$. La même conclusion sera valable pour $\mathscr{H}_\varepsilon^k$ dans le cas n pair. Nous montrerons alors que H_ε^k et $\mathscr{H}_\varepsilon^k$ ont des parties infinies bien déterminées, qui sont des combinaisons linéaires, ayant des distributions pour coefficients, de fonctions $\varepsilon^\lambda \log^\mu |\varepsilon|$. Les distributions

$$H^k = Pf\, H_\varepsilon^k \quad \text{et} \quad \mathscr{H}^k = Pf\, \mathscr{H}_\varepsilon^k$$

seront alors des distributions invariantes *définies dans* R^n et associées respectivement aux paires $(\delta^{(k)}, 0)$ et $(\delta^{(k)}, \delta^{(k)})$.

Nous allons, pour commencer, nous occuper des distributions H_ε^k.

Dans toute la suite de ce travail, φ désignera exclusivement une fonction C^∞ à support compact dans R^n, et α sera la forme $\alpha = \varphi\, dx_1 \ldots dx_n$.

Un ensemble de telles formes α est dit *borné dans* $\mathscr{D}$ si [7]) les supports de toutes ces formes sont contenus dans un même compact K de R^n et s'il existe une suite croissante de nombres positifs $l_p (p = 1, 2, \ldots)$ telle que les dérivées d'ordre $\leqslant p$ de φ soient en valeur absolue $\leqslant l_p$.

Dans l'intérieur du cône futur, Ω_1, on peut substituer à $x_1, \ldots, x_{n-1}$ les coordonnées polaires, formées de r et de $n - 2$ variables angulaires, et à t la variable $u = t^2 - r^2$. En désignant par $d\omega$ l'élément d'aire de la sphère à $n - 2$ dimensions de rayon unité, on obtient

$$dx_1 \ldots dx_{n-1} = r^{n-2}\, d\omega\, dr \;, \quad dt = \frac{du}{2\sqrt{r^2 + u}} = \frac{du}{2t} \;,$$

d'où

$$\alpha = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dt = \frac{1}{2t}\, \varphi\, r^{n-2}\, d\omega\, dr\, du \;.$$

Si $\psi(u)$ est une fonction C^∞ à support compact contenu dans la demi-droite $u > 0$, on a

$$f_+ \alpha\, [\psi(u)] = \alpha\, [f_+^* \psi] = \int_{\Omega_1} \frac{\varphi}{2t}\, r^{n-2}\, d\omega\, dr\, \psi(u)\, du \;.$$

[7]) *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tome I, p. 70.

Cela montre que, dans la demi-droite $u > 0$, la forme $f_+ \alpha$ est donnée par

$$f_+ \alpha = du \int \frac{\varphi}{2t} r^{n-2} \, d\omega \, dr \, .$$

Désignons par $\Phi(r^2, t)$ la valeur moyenne de φ sur la sphère à $n-2$ dimensions $S(r, t)$ d'équation $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = r^2$ (r = constante, t = constante), et par s_{n-2} l'aire de $S(1, t)$. Il vient, pour $u > 0$,

$$f_+ \alpha = du \frac{s_{n-2}}{2} \int_0^\infty \Phi(r^2, t) \frac{r^{n-2}}{t} \, dr \, ,$$

où t doit être remplacé par $\sqrt{r^2 + u}$ avant l'intégration.

Par définition même de H_ε^k, on a $H_\varepsilon^k[\alpha] = f_+^* \delta_\varepsilon^{(k)}[\alpha] = \delta_\varepsilon^{(k)}[f_+ \alpha]$, donc

$$H_\varepsilon^k[\alpha] = \frac{(-1)^k s_{n-2}}{2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial^k}{\partial u^k} \frac{\Phi(r^2, t)}{t} \right\}_{u=\varepsilon} r^{n-2} \, dr \, . \tag{6.1}$$

Comme $\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{1}{2t} \dfrac{\partial}{\partial t}$, il vient, par un calcul facile,

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k} \frac{\Phi(r^2, t)}{t} = \left(\frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \frac{\Phi(r^2, t)}{t} = \frac{1}{2^k t^{2k+1}} \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} t^i \frac{\partial^i \Phi(r^2, t)}{\partial t^i} \, ,$$

où les $a_i^{(k)}$ sont des coefficients numériques ; en particulier,

$$a_0^{(k)} = (-1)^k \, 3 . 5 \ldots (2k-1) \, . \tag{6.2}$$

On obtient alors

$$H_\varepsilon^k[\alpha] = \frac{(-1)^k s_{n-2}}{2^{k+1}} \sum_{i=0}^k a_i^{(k)} \int_0^\infty \frac{\partial^i \Phi(r^2, \sqrt{r^2 + \varepsilon})}{\partial t^i} \frac{r^{n-2} \, dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon}^{\,2k+1-i}} \, . \tag{6.3}$$

Si $k < \frac{1}{2}(n-2)$, toutes les intégrales figurant dans cette expression sont absolument convergentes pour $\varepsilon = 0$ (la limite supérieure ∞ ne peut jamais entraîner de divergence, car Φ est à support compact et s'annule donc pour r assez grand). De plus, la convergence de cette expression pour $\varepsilon \to 0$ est uniforme par rapport à α sur tout ensemble borné dans $\mathcal{D}$. Par suite, *pour* $k < \frac{1}{2}(n-2)$, *la distribution* H_ε^k *converge quand* $\varepsilon \to 0$ *vers une distribution déterminée, qu'on désignera par* H^k.

C'est une distribution invariante associée à la paire $(\delta^{(k)}, 0)$, définie dans R^n et non seulement dans $R^n - O$.

Si $k \geqslant \frac{1}{2}(n - 2)$, les intégrales se trouvant dans (6.3) ne sont en général pas toutes convergentes pour $\varepsilon = 0$, mais nous allons montrer qu'elles possèdent des parties infinies déterminées.

Posons

$$\Phi_0(r^2, t^2) = \tfrac{1}{2}[\Phi(r^2, t) + \Phi(r^2, -t)] \quad \text{et} \quad \Phi_1(r^2, t^2) = \frac{1}{2t}[\Phi(r^2, t) - \Phi(r^2, -t)] .$$

Les fonctions $\Phi_0(x, y)$ et $\Phi_1(x, y)$ ainsi définies pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, et qui sont évidemment C^∞ pour $x \geqslant 0$ et $y > 0$, peuvent être prolongées pour $x < 0$ et $y < 0$ de manière à être fonctions C^∞ de x et de y quelles que soient les valeurs de ces variables[8]). Remplaçons alors Φ par $\Phi = \Phi_0 + t\,\Phi_1$ dans le second membre de (6.1). $H^k_\varepsilon[\alpha]$ se présente comme la somme de deux termes. Comme $\Phi_1(r^2, r^2 + u)$ est fonction C^∞ de r^2 et de u, le second terme a une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, $H^k_\varepsilon[\alpha]$ admet la même partie infinie que le premier terme, c'est-à-dire l'expression obtenue en substituant Φ_0 à Φ dans le second membre de (6.1), ou, ce qui revient au même, dans le second membre de (6.3).

$\Phi_0(r^2, t^2)$ étant fonction C^∞ de r^2 et de t^2, les fonctions $\dfrac{\partial^i \Phi_0}{\partial t^i}$ pour i pair et $\dfrac{1}{t}\dfrac{\partial^i \Phi_0}{\partial t^i}$ pour i impair sont C^∞ en r^2 et en t^2. Cela entraîne que chacune des intégrales figurant au second membre de (6.3), où l'on a remplacé Φ par Φ_0, se réduit à la forme

$$\int_0^\infty F(r^2, r^2 + \varepsilon) \frac{r^{n-2}\, dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon}^{\,n-2+d}} , \tag{6.4}$$

où $n - 2 + d = 2k + 1 - i$ si i est pair, $n - 2 + d = 2k - i$ si i est impair, et où $F(x, y)$ est une fonction C^∞ à support compact. Notons que d et n seront toujours de *parité différente*. Nous aurons alors besoin du lemme suivant.

Lemme. *Soient a un nombre réel > 0, m et d des entiers $\geqslant 0$ et $F(x, y)$ une fonction C^∞ de x et de y. La fonction*

$$J(\varepsilon) = \int_0^a F(r^2, r^2 + \varepsilon) \frac{r^m\, dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon}^{\,m+d}}$$

[8]) Cf., par exemple, *H. Whitney*: "Differentiable even functions", Duke Math. J., 10 (1943), p. 159.

a une partie infinie de la forme

$$Q_{\frac{d}{2}}(\varepsilon) = a_{\frac{d}{2}}\,\varepsilon^{\frac{1-d}{2}} + a_{\frac{d}{2}-2}\,\varepsilon^{\frac{3-d}{2}} + \cdots + a_1\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \quad \textit{si } d \textit{ est pair,}$$

$$P_{\frac{d-1}{2}}(\varepsilon) = b_{\frac{d-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{1-d}{2}} + b_{\frac{d-3}{2}}\,\varepsilon^{\frac{3-d}{2}} + \cdots + b_1\,\varepsilon^{-1} + b_0 \log \varepsilon$$

si d est impair.

Les coefficients a_j et b_j ne dépendent ni de ε, ni de a, et l'on a, en particulier :

$$\left.\begin{array}{lll} \textit{pour } d \textit{ pair} & > 1\,, & a_{\frac{d}{2}} \\ \textit{pour } d \textit{ impair} & > 1\,, & b_{\frac{d-1}{2}} \end{array}\right\} = F(0,0)\int_0^\infty \frac{\varrho^m\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+1}^{\,m+d}}\,,$$

$$\textit{pour } d \quad = 1\,, \quad b_0 \quad = -\tfrac{1}{2}F(0,0)\,.$$

Démonstration. On écrira, par raison de commodité, $J(\varepsilon) = J(m, d, F)$ pour marquer que $J(\varepsilon)$ dépend de m, de d et de F.

Remarquons d'abord que la partie infinie de $J(\varepsilon)$ est indépendante de a, pourvu que l'on ait $a > 0$. Si $r^{2-d} F(r^2, r^2+\varepsilon)$ est borné pour $r > 1$, en particulier si F est à support compact, on pourra prendre aussi $a = \infty$.

Si $d = 0$, il n'y a rien à démontrer, $J(\varepsilon)$ ayant alors une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$.

Si $d = 1$, on peut écrire, pour $m \geqslant 2$,

$$J(m, 1, F) = \frac{1}{1-m}\int_0^a F(r^2, r^2+\varepsilon)\, r^{m-1}\, d(r^2+\varepsilon)^{\frac{1-m}{2}}\,,$$

et une intégration par parties mène à l'égalité

$$J(m, 1, F) = J(m-2, 1, F) + \ldots\,,$$

les termes non écrits ayant une limite finie pour $\varepsilon \to 0$. On en déduit que $J(m, 1, F)$ a la même partie infinie que $J(0, 1, F)$ si m est pair, ou que $J(1, 1, F)$ si m est impair. Or, on peut poser

$$J(0, 1, F) = \int_0^a F(r^2, r^2+\varepsilon)\, d\log\left(r + \sqrt{r^2+\varepsilon}\right)\,,$$

$$J(1, 1, F) = \int_0^a F(r^2, r^2+\varepsilon)\, d\log\sqrt{r^2+\varepsilon}\;;$$

en transformant ces expressions à l'aide d'une intégration par parties, on voit aisément que chacune d'elles a une partie infinie qui se réduit à $-\frac{1}{2}F(0,0)\log\varepsilon$, d'où résulte l'affirmation du lemme pour $d=1$.

Si $d>1$, on pose

$$F_1(x,y)=\frac{F(x,y)-F(x,0)}{y} \quad \text{et} \quad F_2(x)=\frac{F(x,0)-F(0,0)}{x}.$$

Ces fonctions F_1 et F_2 sont C^∞ et l'on a

$$F(x,y)=F(0,0)+y\,F_1(x,y)+x\,F_2(x).$$

En substituant le second membre de cette égalité à $F(x,y)$ dans $J(m,d,F)$, il vient

$$J(m,d,F)=F(0,0)\,J(m,d,1)+J(m,d-2,F_1)+J(m+2,d-2,F_2).$$

Or, on a, pour $a=\infty$ et en posant $r=\sqrt{\varepsilon}\,\varrho$,

$$J(m,d,1)=\varepsilon^{\frac{1-d}{2}}\int_0^\infty \frac{\varrho^m\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+1}^{\,m+d}},$$

de sorte que, en raisonnant par récurrence relativement à d, on déduit immédiatement de la formule ci-dessus le lemme énoncé.

En tenant compte du fait noté plus haut que les intégrales figurant au second membre de (6.3), où l'on a remplacé Φ par Φ_0, se réduisent à la forme (6.4), avec $d=2k+3-i-n$ pour i pair et $d=2k+2-i-n$ pour i impair, il résulte immédiatement de ce lemme que,

pour $k\geqslant\frac{1}{2}(n-2)$, $H_\varepsilon^k[\alpha]$ *possède une partie infinie de la forme* $P_{k-\frac{n-2}{2}}(\varepsilon)$ *si* n *est pair et* $Q_{k-\frac{n-3}{2}}(\varepsilon)$ *si* n *est impair.*

Il suffira pour la suite de calculer effectivement les parties infinies de $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}[\alpha]$ (pour n pair) et de $H_\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}[\alpha]$ (pour n impair). Dans ces deux cas, le seul terme du second membre de (6.3), où Φ_0 a été substitué à Φ, qui diverge pour $\varepsilon=0$ est celui qui correspond à $i=0$, les autres termes ayant une partie infinie nulle. La partie infinie de $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}[\alpha]$ est donc la même que celle de

$$(-1)^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{-\frac{n}{2}}\, s_{n-2}\, a_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_0^\infty \Phi_0(r^2, r^2+\varepsilon) \frac{r^{n-2}\, dr}{\sqrt{r^2+\varepsilon}^{\,n-1}} \;;$$

elle est égale, d'après le lemme (cas où $m = n-2$ et $d = 1$), à

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\, 2^{-\frac{n}{2}-1}\, s_{n-2}\, a_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \Phi_0(0, 0) \log \varepsilon \;,$$

ce qui s'écrit aussi

$$-\, 2^{-1}\, \pi^{\frac{n-2}{2}}\, \delta_O\, [\alpha] \log \varepsilon \;,$$

si l'on tient compte des égalités suivantes:

$$\Phi_0(0, 0) = \Phi(0, 0) = \varphi(0, \ldots, 0) = \delta_O[\alpha] \;,$$

$$s_{n-2} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\, \pi^{\frac{n-2}{2}}}{1.3\ldots(n-3)} \text{ (pour } n \text{ pair)}, \quad a_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-2}{2}}\, 3.5\ldots(n-3)$$

(d'après (6.2)). Quant à $H_\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}[\alpha]$, sa partie infinie est celle de

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-\frac{n+1}{2}}\, s_{n-2}\, a_0^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \Phi_0(r^2, r^2+\varepsilon) \frac{r^{n-2}\, dr}{\sqrt{r^2+\varepsilon}^{\,n}} \;;$$

elle a pour valeur, en vertu du lemme (cas où $m = n-2$ et $d = 2$),

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{-\frac{n+1}{2}}\, s_{n-2}\, a_0^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \Phi_0(0, 0) \int_0^\infty \frac{\varrho^{n-2}\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2+1}^{\,n}}\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \,,$$

ou encore

$$2^{-1}\, \pi^{\frac{n-1}{2}}\, \delta_O\, [\alpha]\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \,,$$

sachant que $s_{n-2} = \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{2.4\ldots(n-3)}$ (pour n impair),

$$a_0^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 3.5\ldots(n-2) \,,$$

et enfin que l'intégrale en ϱ ci-dessus est égale à $\dfrac{(n-3)(n-5)\ldots 2}{(n-2)(n-4)\ldots 3}$.

Si l'on considère ε comme fixe et α comme variable, on voit que la partie infinie de $H_\varepsilon^k[\alpha]$ est une distribution, dont le support se réduit au point O, car $H_\varepsilon^k[\alpha]$ converge pour $\varepsilon \to 0$ si le support de α ne contient pas ce point. La démonstration qui précède permet de constater aisément que, pour $\varepsilon \to 0$, la convergence de la différence entre $H_\varepsilon^k[\alpha]$ et sa partie infinie est uniforme par rapport à α sur tout ensemble borné dans $\mathcal{D}$. Il en résulte que la limite $Pf\, H_\varepsilon^k$ de cette différence est une distribution. Nous la noterons H^k. Nous pouvons alors énoncer ce qui suit:

La distribution H_ε^k possède une partie infinie, qui se réduit à zéro si $k < \frac{1}{2}(n-2)$ et qui, pour $k \geqslant \frac{1}{2}(n-2)$, est de la forme $P_{k-\frac{n-2}{2}}(\varepsilon)$ si n est pair et $Q_{k-\frac{n-3}{2}}(\varepsilon)$ si n est impair. Les coefficients de ces parties infinies sont des distributions de support O.

Pour n pair, la partie infinie de $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ est $-2^{-1}\pi^{\frac{n-2}{2}}\delta_O \log \varepsilon$; pour n impair, la partie infinie de $H_\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$ est $2^{-1}\pi^{\frac{n-1}{2}}\delta_O\, \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, $H^k = Pf\, H_\varepsilon^k$ est une distribution invariante définie dans R^n, associée à la paire $(\delta^{(k)}, 0)$.

Considérons maintenant les distributions $\mathcal{H}_\varepsilon^k$.

Dans le domaine Ω_2, défini par $u < 0$, nous utiliserons les mêmes $n-2$ variables angulaires que dans Ω_1, ainsi que u, mais nous substituerons t à r. Comme u est négatif, $r = \sqrt{t^2 - u}$ est réel quel que soit t. On a $dr = \dfrac{t}{r}\, dt$ et, par conséquent, on peut poser

$$\alpha = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dt = \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, d\omega\, dt\, du\,.$$

Il vient, pour toute fonction $\psi(u)$ qui est C^∞ à support compact contenu dans la demi-droite $u < 0$:

$$f\alpha[\psi(u)] = \alpha[f^*\psi] = \tfrac{1}{2}\int \varphi \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, d\omega\, dt\, \psi(u)\, du \;;$$

cela montre que, dans la demi-droite $u < 0$, la forme $f\alpha$ est donnée par

$$f\alpha = du\, \tfrac{1}{2}\int \varphi \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, d\omega\, dt = du\, \frac{s_{n-2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(r^2, t)\, r^{n-3}\, dt\,,$$

où Φ est la valeur moyenne introduite précédemment et où r doit être remplacé par $\sqrt{t^2 - u}$ avant l'intégration.

Par définition même de $\mathcal{H}_\varepsilon^k$, on a $\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha] = f^*\delta_\varepsilon^{(k)}[\alpha] = \delta_\varepsilon^{(k)}[f\alpha]$, d'où ($\varepsilon$ est négatif):

$$\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha] = \frac{(-1)^k s_{n-2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial u^k} \Phi(t^2 - u, t) \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3} \right\}_{u=\varepsilon} dt \,. \tag{6.5}$$

Si n est impair $(n \geqslant 3)$, l'expression sous le signe somme est fonction C^∞ de t et de ε quel que soit ε, donc $\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha]$ *tend, pour toute valeur de k, vers une limite finie lorsque* $\varepsilon \to 0$.

D'autre part, si l'on remplace $\Phi(r^2, t)$ par sa partie paire en t, soit $\Phi_0(r^2, t^2)$, dans le second membre de (6.5), celui-ci garde la même valeur. Or, pour n pair, en posant $\Phi_0^{(i)}(x, y) = \frac{\partial^i}{\partial x^i} \Phi_0(x, y)$, on trouve

$$\frac{\partial^k}{\partial u^k} \Phi_0(t^2 - u\,, t^2)\,(t^2 - u)^{\frac{n-3}{2}}$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^{k} b_i^{(k)} \Phi_0^{(i)}(t^2 - u\,, t^2)\,(t^2 - u)^{\frac{n-3}{2} - k + i}\,, \tag{6.6}$$

où les $b_i^{(k)}$ sont des coefficients numériques ; en particulier,

$$b_0^{(k)} = (n-3)(n-5) \ldots (n-1-2k)\, 2^{-k}\,.$$

Il vient, par suite, pour n pair

$$\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha] = \frac{s_{n-2}}{2} \sum_{i=0}^{k} b_i^{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0^{(i)}(t^2 - \varepsilon, t^2) \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \varepsilon}^{\,-n+3+2k-2i}}\,.$$

Si $k < \frac{1}{2}(n-2)$, toutes ces intégrales convergent pour $\varepsilon = 0$, et la partie infinie de $\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha]$ se réduit à zéro. Si $k \geqslant \frac{1}{2}(n-2)$, le lemme ci-dessus (cas où $m = 0$ et d est impair) montre que $\mathcal{H}_\varepsilon^k[\alpha]$ a une partie infinie de la forme $P_{k-\frac{n-2}{2}}(-\varepsilon)$.

Pour $k = \frac{1}{2}(n-2)$, seul le terme correspondant à $i = 0$ diverge pour $\varepsilon = 0$, et, par conséquent, $\mathcal{H}_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}[\alpha]$ a la même partie infinie que

$$\frac{s_{n-2}}{2} b_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(t^2 - \varepsilon, t^2) \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \varepsilon}}\,;$$

en tenant compte de la parité de la fonction sous le signe somme, qui permet de ramener l'intervalle d'intégration à $(0, \infty)$ et en appliquant le lemme (cas où $d = 1$ et $m = 0$), on voit que cette partie infinie est

$$- \frac{s_{n-2}}{2} b_0^{\left(\frac{n-2}{2}\right)} \Phi_0(0, 0) \log(-\varepsilon) ,$$

ou encore, tous calculs faits,

$$- \pi^{\frac{n-2}{2}} \delta_O [\alpha] \log(-\varepsilon) .$$

En résumé, nous pouvons dire ce qui suit:

La distribution $\mathscr{H}_\varepsilon^k$ possède une partie infinie, qui se réduit à zéro si n est impair ou si $k < \frac{1}{2}(n-2)$, et qui est de la forme $P_{k-\frac{n-2}{2}}(-\varepsilon)$ si n est pair et $k \geqslant \frac{1}{2}(n-2)$. Les coefficients de cette partie infinie sont des distributions de support O.

Pour n pair, la partie infinie de $\mathscr{H}_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ est $-\pi^{\frac{n-2}{2}} \delta_O \log(-\varepsilon)$.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, $\mathscr{H}^k = Pf\, \mathscr{H}_\varepsilon^k$ est une distribution invariante définie dans R^n, associée à la paire $(\delta^{(k)}, \delta^{(k)})$.

Considérons encore les transformées $\overline{H}_\varepsilon^k$ de H_ε^k et $\overline{H}^k$ de H^k par une rotation impropre de Lorentz λ, par exemple la rotation

$$t' = -t, x_1' = -x_1, x_i' = x_i (i = 2, 3, \ldots, n-1) .$$

On a $\overline{H}_\varepsilon^k[\alpha] = \lambda H_\varepsilon^k[\alpha] = H_\varepsilon^k[\lambda^* \alpha]$. Comme λ permute les sphères $S(r, t)$ et $S(r, -t)$, la valeur moyenne de $\lambda^* \varphi$ sur $S(r, t)$ est égale à la valeur moyenne de φ sur $S(r, -t)$, soit $\Phi(r^2, -t)$. On obtiendra donc l'expression de $\overline{H}_\varepsilon^k[\alpha]$ en substituant $\Phi(r^2, -t)$ à $\Phi(r^2, t)$ dans le second membre de (6.1).

Il suit de là que les résultats obtenus pour H_ε^k, en particulier ceux qui sont relatifs à sa partie infinie, restent valables pour $\overline{H}_\varepsilon^k$.

En comparant les limites pour $\varepsilon = 0$ de $H_\varepsilon^0[\alpha]$ et de $\overline{H}_\varepsilon^0[\alpha]$, tirées de l'égalité (6.1), et celle de $\mathscr{H}_\varepsilon^0[\alpha]$, déduite de (6.5), limites qui s'écrivent, respectivement,

$$\frac{(-1)^k s_{n-2}}{2} \int_0^\infty \Phi(r^2, r)\, r^{n-3}\, dr , \quad \frac{(-1)^k s_{n-2}}{2} \int_0^\infty \Phi(r^2, -r)\, r^{n-3}\, dr ,$$

$$\frac{(-1)^k s_{n-2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t^2, t)\, |t|^{n-3}\, dt ,$$

on obtient la relation

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (H_\varepsilon^0 + \overline{H}_\varepsilon^0 - \mathscr{H}^0_{-\varepsilon}) = 0 , \quad \text{ou} \quad \mathscr{H}^0 = H^0 + \overline{H}^0 . \qquad (6.7)$$

Formons maintenant la différence $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \overline{H}_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} - \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n-2}{2}}$: elle possède, en vertu des résultats vus plus haut, une partie infinie nulle, donc elle tend vers une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0$. Nous allons montrer que cette limite est nulle, autrement dit que l'on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \overline{H}_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} - \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n-2}{2}}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathscr{H}^{\frac{n-2}{2}} = H^{\frac{n-2}{2}} + \overline{H}^{\frac{n-2}{2}} . \tag{6.8}$$

Partons des formules (6.1) et (6.5) et désignons par $d(\varepsilon)$ la différence en question, au facteur $(-1)^k\, 2^{-1}\, s_{n-2}$ près. Il vient

$$d(\varepsilon) = \left\{\frac{d^k}{du^k}\int_0^\infty \frac{\Phi(r^2, t) + \Phi(r^2, -t)}{t}\, r^{n-2}\, dr\right\}_{u=\varepsilon}$$

$$- \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial u^k}\Phi(t^2 - u, t)\, \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, dt\right\}_{u=-\varepsilon},$$

ou encore, en faisant le changement de variable $r = \sqrt{t^2 - u}$ dans la première intégrale après avoir constaté que le numérateur de la fraction qui s'y trouve n'est autre que $2\,\Phi_0(r^2, t^2)$, et en se souvenant qu'on peut remplacer $\Phi(r^2, t)$ par $\Phi_0(r^2, t^2)$ dans la seconde intégrale et, par conséquent, ramener l'intervalle d'intégration à $(0, \infty)$:

$$d(\varepsilon) = 2\left\{\frac{d^k}{du^k}\int_{\sqrt{u}}^\infty \Phi_0(t^2 - u, t^2)\, \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, dt\right\}_{u=\varepsilon}$$

$$- 2\left\{\int_0^\infty \frac{\partial^k}{\partial u^k}\Phi_0(t^2 - u, t^2)\, \sqrt{t^2 - u}^{\,n-3}\, dt\right\}_{u=-\varepsilon}.$$

Le premier crochet ne comprend, en fait, qu'un seul terme, celui qu'on obtient en dérivant par rapport à u la fonction sous le signe somme $k = \frac{1}{2}(n-2)$ fois: les autres termes contiennent, respectivement, les dérivées d'ordre $1, 2, \dots, k-1 = \frac{1}{2}(n-4)$ de cette fonction à prendre en $t = \sqrt{u}$, et sont alors nuls puisqu'ils possèdent tous au moins $\sqrt{t^2 - u}$ en facteur. Or, cette dérivée d'ordre $k = \frac{1}{2}(n-2)$ de la fonction sous le signe somme peut se mettre, en vertu de la formule (6.6), sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 - u}}\,\Psi(t^2 - u, t^2),$$

où $\Psi(x, y)$ désigne une fonction C^∞ de x et de y à support compact. Cela étant, la différence $d(\varepsilon)$ s'écrit

$$d(\varepsilon) = 2\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2-\varepsilon}}\, \Psi(t^2-\varepsilon, t^2)\, dt - 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+\varepsilon}}\, \Psi(t^2+\varepsilon, t^2)\, dt$$

$$= 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2+\varepsilon}}\, [\Psi(z^2, z^2+\varepsilon) - \Psi(z^2+\varepsilon, z^2)]\, dz \,,$$

expression qui tend bien vers zéro avec ε.

On pouvait prévoir sans calcul que, quel que soit l'entier $k \geqslant 0$, les distributions $\mathscr{H}^k$ et $H^k + \overline{H}^k$ sont égales dans $R^n - O$, car elles ont la même paire associée, à savoir $(\delta^{(k)}, \delta^{(k)})$. Nous verrons au § 7, à l'aide des résultats établis ci-dessus, qu'elles sont toujours égales dans R^n.

Envisageons, pour terminer, une distribution T invariante dont le support est contenu dans la surface du cône $u = 0$. Le support des distributions T^+ et T^- de la paire associée ne peut contenir d'autres points que le point $u = 0$, de sorte que la paire (T^+, T^-) est égale à une combinaison linéaire des paires $(\delta^{(k)}, 0)$ et $(0, \delta^{(k)})$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Donc, dans $R^n - O$, T est égale à la même combinaison linéaire des distributions H^k et $\overline{H}^k$ associées à ces paires. Dans R^n, la différence entre T et cette combinaison linéaire, si elle n'est pas nulle, est une distribution de support O. Se reportant au théorème 1, on peut alors énoncer:

Théorème 3. *Toute distribution invariante dont le support est contenu dans la surface du cône $u = 0$ est une combinaison linéaire des distributions $H^k, \overline{H}^k$ et $\Box^k \delta_O$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.*

§ 7. Développements asymptotiques de H_ε^0 et de $\mathscr{H}_\varepsilon^0$

On sait[9]) que si la dérivée $q^{\text{ième}}$ $F^{(q)}(\varepsilon)$ d'une fonction $F(\varepsilon)$ admet, dans l'échelle des fonctions $\varepsilon^\lambda \log^\mu \varepsilon$ (λ = nombre réel ou complexe quelconque, μ = nombre entier $\geqslant 0$), un développement asymptotique à la précision $o(1)$, $F(\varepsilon)$ admet dans cette même échelle un développement asymptotique à la précision $o(\varepsilon^q)$, dont la dérivée d'ordre q est précisément le développement de $F^{(q)}(\varepsilon)$. Or, la dérivée $q^{\text{ième}}$ de H_ε^k qui est égale, d'après (5.1), à $(-1)^q H_\varepsilon^{q+k}$, admet, en vertu des résultats du § 6, un développement asymptotique à la précision $o(1)$. Donc H_ε^k admet, pour tout k entier $\geqslant 0$, un développement asymptotique à la précision $o(\varepsilon^q)$, si grand que soit q, ce qu'on peut exprimer en disant que H_ε^k *admet, dans l'échelle des fonctions $\varepsilon^\lambda \log^\mu \varepsilon$, un développement asymptotique*

[9]) *N. Bourbaki:* Eléments de mathématique, livre IV (Fonctions d'une variable réelle), chapitre V, § 2 et § 3. (Actualités Sci. Ind., fasc. 1132; Paris, Hermann, 1951.)

illimité. Le développement de H^k_ε pouvant se déduire par dérivation de celui de H^0_ε, il suffira d'établir ce dernier.

Puisque $H^q_\varepsilon = (-1)^q \dfrac{d^q}{d\varepsilon^q} H^0_\varepsilon$, l'ensemble des termes infinis pour $\varepsilon = 0$ du développement qui se déduit du développement de H^0_ε en dérivant q fois ce dernier doit être égal, au facteur $(-1)^q$ près, à la partie infinie de H^q_ε déterminée au paragraphe précédent. Il en résulte immédiatement que l'on peut écrire, en désignant par $\sim$ le signe de l'égalité asymptotique:

$$H^0_\varepsilon \sim \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \left(A_h\, \varepsilon^h + B_h\, \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log \varepsilon\right) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \left(A_h\, \varepsilon^h + B_h\, \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}}\right) & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{7.1}$$

De la même manière, on voit que $\mathscr{H}^0_\varepsilon (\varepsilon < 0)$ possède un développement asymptotique de la forme

$$\mathscr{H}^0_\varepsilon \sim \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \left(\mathscr{A}_h\, \varepsilon^h + \mathscr{B}_h\, \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log(-\varepsilon)\right) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} \mathscr{A}_h\, \varepsilon^h & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{7.2}$$

Le développement de $\mathscr{H}^k_\varepsilon$ se déduit encore par dérivation de celui de $\mathscr{H}^0_\varepsilon$, en vertu de la formule $\mathscr{H}^k_\varepsilon = (-1)^k \dfrac{d^k}{d\varepsilon^k} \mathscr{H}^0_\varepsilon$.

Les coefficients de ces développements sont des distributions invariantes. Pour les déterminer, remarquons que l'on peut obtenir le développement de $\Box\, H^0_\varepsilon$ soit en appliquant l'opération $\Box$ aux coefficients du développement de H^0_ε, soit, d'après (5.4), en effectuant l'opération $4\,\varepsilon^{\frac{n}{2}-1} \dfrac{d}{d\varepsilon}\, \varepsilon^{2-\frac{n}{2}} \dfrac{d}{d\varepsilon}$ dans le développement de H^0_ε. En identifiant les résultats trouvés, on parvient aux relations de récurrence suivantes:

pour n impair:

$$\begin{cases} \Box\, A_h = 4(h+1)\left(h + 2 - \dfrac{n}{2}\right) A_{h+1}\,, \\ \Box\, B_h = 4(h+1)\left(h + \dfrac{n}{2}\right) B_{h+1}\,; \end{cases} \tag{7.3}$$

pour n pair :

$$\begin{cases} \Box A_h = 4(h+1)\left(h+2-\frac{n}{2}\right)A_{h+1} & \text{si } h<\frac{n-4}{2}, \\ \Box A_h = 4(h+1)\left(h+2-\frac{n}{2}\right)A_{h+1}+(8h+12-2n)B_{h-\frac{n}{2}+2} & \text{si } h\geqslant\frac{n-4}{2}, \\ \Box B_h = 4(h+1)\left(h+\frac{n}{2}\right)B_{h+1}\,. \end{cases} \tag{7.4}$$

Pour n impair, les coefficients de A_{h+1} et de B_{h+1} dans les seconds membres de (7.3) ne s'annulent jamais. Les distributions A_h et B_h sont donc égales, à des facteurs numériques près, aux distributions $\Box^h A_0$ et $\Box^h B_0$ respectivement.

Pour n pair, le seul coefficient numérique figurant dans les seconds membres de (7.4) qui puisse s'annuler est celui de A_{h+1} dans la seconde formule. Il s'annule pour $h=\frac{1}{2}(n-4)$, et cette formule devient alors

$$\Box A_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)\,B_0\,. \tag{7.5}$$

On constate que, à un facteur numérique près, B_h est égal à $\Box^h B_0$, donc à $\Box^{h+1} A_{\frac{n-4}{2}}$, donc à $\Box^{h+\frac{n-2}{2}} A_0$, puisque, pour $h<\frac{1}{2}(n-4)$, A_h est proportionnel à $\Box^h A_0$. Si $h\geqslant\frac{1}{2}(n-2)$, A_h est égal à une combinaison linéaire de $\Box^{h-\frac{n-2}{2}} A_{\frac{n-2}{2}}$ et de $\Box^h A_0$.

En résumé, A_h et B_h s'expriment toujours à l'aide de dalembertiens itérés de A_0 et de B_0 si n est impair, de A_0 et de $A_{\frac{n-2}{2}}$ si n est pair.

En considérant le développement asymptotique de $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ qu'on déduit de celui de H_ε^0 (formule (7.1), n pair) par dérivation $\frac{1}{2}(n-2)$ fois et multiplication par $(-1)^{\frac{n-2}{2}}$, on voit immédiatement que la partie infinie de $H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}$ est égale à $(-1)^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2}{2}\right)!\,B_0\log\varepsilon$. De même, pour n impair, on trouve que la partie infinie de $H_\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$ est égale à

$$(-2)^{-\frac{n-1}{2}}(n-2)(n-4)\dots 3\,B_0\,\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\,.$$

La comparaison de ces valeurs avec celles qui ont été déterminées au § 6 fournit B_0:

$$B_0 = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{2\left(\dfrac{n-2}{2}\right)!} \, \delta_O & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{2.3.5.7\ldots(n-2)} \, \delta_O & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right\} \qquad (7.6)$$

Enfin, $H^k = Pf\, H_\varepsilon^k$ n'étant pas autre chose que le terme indépendant de ε dans le développement asymptotique de H_ε^k, on obtient:

$$H^k = \left\{ \begin{array}{l} (-1)^k k!\, A_k \quad \text{pour } n \text{ impair, ou } n \text{ pair et } k < \frac{1}{2}(n-2)\,, \\ (-1)^k k!\, A_k + (-1)^k k! \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{k}\right) B_{k-\frac{n-2}{2}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } n \text{ pair et } k \geqslant \frac{1}{2}(n-2)\,. \end{array} \right\} \qquad (7.7)$$

Il résulte de là que la distribution B_h est toujours égale à un multiple de $\Box^h \delta_O$ et que la distribution A_h est égale à la distribution $\dfrac{(-1)^h}{h!} H^h$, augmentée d'un multiple de $\Box^{h-\frac{n-2}{2}} \delta_O$ si n est pair et $h \geqslant \frac{1}{2}(n-2)$.

D'autre part, on voit qu'il n'y aurait pas de difficulté à écrire l'expression du développement asymptotique de H_ε^k à l'aide des distributions H^k et $\Box^k \delta_O$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Il serait également aisé de calculer maintenant la valeur précise des coefficients de la partie infinie de H_ε^k pour tout k.

Ecrivons encore les relations de récurrence auxquelles satisfont les H^k. Elles découlent des formules (7.3) à (7.7):

$$\Box H^k = \left\{ \begin{array}{ll} 2(n-2k-4)\, H^{k+1} & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n \text{ impair, ou } n \text{ pair} \\ \text{et } k < \frac{1}{2}(n-4)\,, \end{array} \right. \\ \\ 2(n-2k-4)\, H^{k+1} + c_k \Box^{k-\frac{n}{2}+2} \delta_O & \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n \text{ pair et} \\ k \geqslant \frac{1}{2}(n-4)\,, \end{array} \right. \end{array} \right\} \qquad (7.8)$$

où c_k est un coefficient numérique, dont la valeur serait facile à déterminer pour tout k. Notons simplement que l'on a

$$c_{\frac{n-4}{2}} = 2\pi^{\frac{n-2}{2}}\,.$$

Désignons maintenant par $\overline{A}_h$ la transformée de A_h par une rotation impropre de Lorentz. Il est clair que les formules (7.1) à (7.8) subsistent lorsque l'on y remplace A par $\overline{A}$ et H par $\overline{H}$.

Des formules (7.8), pour les H et pour les $\overline{H}$, on peut alors, compte tenu du théorème 3, tirer les conclusions suivantes:

Pour n impair, il n'existe pas de distribution invariante $T \neq 0$ à support contenu dans la surface du cône $u = 0$ qui satisfasse à l'une des équations $\square T = 0$ ou $\square T = \delta_O$.

Pour n pair, au contraire, *la distribution*

$$H^{\frac{n-4}{2}} - \overline{H}^{\frac{n-4}{2}}$$

satisfait à $\square T = 0$, et toute distribution invariante à support contenu dans la surface du cône $u = 0$ qui est solution de cette équation est un multiple de cette distribution. D'autre part, *les distributions*

$$\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{2-n}{2}} H^{\frac{n-4}{2}} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{2-n}{2}} \overline{H}^{\frac{n-4}{2}}$$

satisfont à l'équation $\square T = \delta_O$.

Considérons, pour finir, les distributions $\mathscr{A}_h$ et $\mathscr{B}_h$ qui apparaissent comme coefficients dans le développement (7.2) de $\mathscr{H}_\varepsilon^0$. La première des relations (7.3), pour n impair, et les relations (7.4) et (7.5), pour n pair, restent valables si l'on y remplace A et B par $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$: les calculs à faire sont semblables à ceux qui précèdent. De même, les formules (7.7) sont encore vraies si l'on y substitue $\mathscr{H}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ à H, A et B.

Il résulte alors de (7.7) pour $k = 0$ et de (6.7) que

$$\mathscr{A}_0 = A_0 + \overline{A}_0 .$$

D'autre part, la méthode même qui a servi à établir (7.6) montre que, pour n pair,

$$\mathscr{B}_0 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} \delta_O = 2B_0 .$$

Il suit alors de (7.7) pour $k = \frac{1}{2}(n-2)$ et de (6.8) que

$$\mathscr{A}_{\frac{n-2}{2}} = A_{\frac{n-2}{2}} + \overline{A}_{\frac{n-2}{2}} .$$

Ces trois égalités suffisent, si l'on se souvient, d'une part, du fait, remarqué plus haut, que A_h et B_h s'expriment toujours à l'aide de dalembertiens itérés de A_0 et de B_0 ou de A_0 et de $A_{\frac{n-2}{2}}$, d'autre part, de l'identité des formules de récurrence relatives aux $A_h, \overline{A}_h$ et $\mathscr{A}_h$, ainsi qu'aux B_h et $\mathscr{B}_h$, pour entraîner les relations

$$\mathscr{A}_h = A_h + \overline{A}_h \ , \quad \mathscr{B}_h = 2 B_h \ , \quad \text{pour tout } h \ ; \tag{7.9}$$

on en déduit, compte tenu de (7.7), l'égalité

$$\mathscr{H}^h = H^h + \overline{H}^h \ , \quad \text{pour tout } h \ . \tag{7.10}$$

§ 8. Prolongement de distributions définies par certaines fonctions $g(u)$ non sommables au voisinage de $u = 0$. Les distributions S^p, $\overline{S}^p$ et $\mathscr{S}^p$

Soit $g(u)$ une fonction définie et continue pour $u > 0$. Nous nous proposons de chercher une distribution, définie dans R, qui soit égale à $g(u)$ pour $u > 0$ et à 0 pour $u < 0$.

Désignons par $Y_\varepsilon(u)$ la fonction de Heaviside valant 1 si $u > \varepsilon$ et 0 si $u < \varepsilon$. Pour $\varepsilon > 0$, la fonction $Y_\varepsilon(u)\, g(u)$ définit une distribution dans R. Lorsque $g(u)$ est sommable dans l'intervalle $(0, 1)$, mais dans ce cas seulement, cette distribution converge pour $\varepsilon \to 0$ vers une distribution $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} Y_\varepsilon(u)\, g(u)$ qui répond à la question. Si cette limite n'existe pas, il peut arriver que $Pf\, Y_\varepsilon(u)\, g(u)$ existe, et alors cette distribution résout le problème posé[10]).

Il en est, en particulier, toujours ainsi quand $Pf\, g(\varepsilon)$ existe. En effet, $g(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon$ possède alors une partie infinie, que l'on obtient en multipliant la partie infinie de $g(\varepsilon)$ par le développement asymptotique de δ_ε fourni par la formule de Taylor

$$\delta_\varepsilon \sim \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!}\, \varepsilon^h\, \delta^{(h)} \ ,$$

et en ne conservant de ce produit que les termes qui n'ont pas de limite pour $\varepsilon \to 0$. Il résulte alors de l'égalité $\frac{d}{d\varepsilon} Y_\varepsilon(u)\, g(u) = - g(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon$ que $Y_\varepsilon(u)\, g(u)$ a aussi une partie infinie déterminée, donc que $Pf\, Y_\varepsilon(u)\, g(u)$ existe.

---

[10]) Cette méthode est celle de *M. J. Hadamard*. Cf. *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tome I, p. 38 et suivantes.

Dans $R^n - O$, considérons la distribution invariante G_ε associée à la paire $(Y_\varepsilon g, 0)$. Le point O n'adhère pas à son support, qui est contenu dans l'ensemble $(u \geqslant \varepsilon, t > 0)$, de sorte que la définition de G_ε s'étend à R^n. D'après la convention du § 4, cette distribution peut être notée $f_+^* Y_\varepsilon g$. On a

$$\frac{dG_\varepsilon}{d\varepsilon} = - g(\varepsilon) H_\varepsilon^0 \ ;$$

comme $g(\varepsilon) H_\varepsilon^0$ a une partie infinie, que l'on obtient en multipliant la partie infinie de $g(\varepsilon)$ par le développement asymptotique (7.1) de H_ε^0 et en ne conservant de ce produit que les termes qui n'ont pas de limite pour $\varepsilon \to 0, G_\varepsilon$ a aussi une partie infinie déterminée et, par conséquent, $Pf\, G_\varepsilon = Pf\ f_+^* Y_\varepsilon g$ existe. C'est une distribution invariante, définie dans R^n et non seulement dans $R^n - O$, associée à la paire $(Pf\, Y_\varepsilon g, 0)$. Bien entendu, quand, en particulier, la fonction $g(u)$ est sommable dans l'intervalle $(0, 1)$, on a simplement

$$Pf\, G_\varepsilon[\alpha] = Pf\ f_+^* Y_\varepsilon g\,[\alpha] = \int_{\Omega_1} g(u)\, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dt\,.$$

Un cas important pour la suite est celui où la fonction $g(u)$ est égale à $u^{\frac{p}{2}}$, p étant un nombre quelconque. Nous désignerons par S_ε^p la distribution $f_+^* Y_\varepsilon u^{\frac{p}{2}}$, et par S^p la distribution $Pf\, S_\varepsilon^p$. Il serait aisé de donner, dans chaque cas, l'expression détaillée de S^p. On a

$$S^p\,[\alpha] = \int_{\Omega_1} u^{\frac{p}{2}} \varphi\, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dt \quad \text{pour} \quad \mathcal{R} p > -2\,.$$

Les considérations précédentes s'étendent immédiatement à la distribution $\overline{G}_\varepsilon = f_-^* Y_\varepsilon g$ associée à la paire $(0, Y_\varepsilon g)$. Nous poserons

$$\overline{S}_\varepsilon^p = f_-^* Y_\varepsilon u^{\frac{p}{2}} \quad \text{et} \quad \overline{S}^p = Pf\, \overline{S}_\varepsilon^p\,.$$

D'une manière analogue, si $g(u)$ est définie et continue pour $u < 0$ et si $Pf\, g(-\varepsilon)$ existe, $Pf\,(1 - Y_{-\varepsilon})\, g$ existe aussi: c'est une distribution définie dans R, égale à $g(u)$ pour $u < 0$ et à 0 pour $u > 0$. Soit $\mathcal{G}_{-\varepsilon} = f^*(1 - Y_{-\varepsilon})\, g$ la distribution invariante définie dans R^n qui est associée à la paire $\big((1 - Y_{-\varepsilon})\, g, (1 - Y_{-\varepsilon})\, g\big)$. On voit, comme plus haut, que $Pf\, \mathcal{G}_{-\varepsilon} = Pf\ f^*(1 - Y_{-\varepsilon})\, g$ existe : c'est une distribution invariante définie dans R^n, associée à la paire

$$\big(Pf(1 - Y_{-\varepsilon})\, g, Pf(1 - Y_{-\varepsilon})\, g\big)\,.$$

Elle s'écrit $\int_{\Omega_2} g(u)\,\varphi\,dx_1\ldots dx_{n-1}\,dt$ lorsque $g(u)$ est sommable dans l'intervalle $(-1,0)$.

Nous aurons à considérer le cas où $g(u)=|u|^{\frac{p}{2}}$. Nous noterons $\mathcal{S}^p_{-\varepsilon}$ la distribution $f^*(1-Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{p}{2}}$ et $\mathcal{S}^p$ la distribution $Pf\,\mathcal{S}^p_{-\varepsilon}(\varepsilon>0)$.

Supposons maintenant que $g(u)$ ait des dérivées première et seconde continues pour $u>0$, qui possèdent aussi des parties infinies déterminées lorsque $u\to 0$. On trouve, par un calcul facile,

$$\frac{d}{du}(Y_\varepsilon\,g)=g(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon+Y_\varepsilon\,g',$$

$$u\frac{d^2}{du^2}(Y_\varepsilon\,g)=Y_\varepsilon\,ug''+[\varepsilon\,g'(\varepsilon)-g(\varepsilon)]\,\delta_\varepsilon+\varepsilon\,g(\varepsilon)\,\delta'_\varepsilon,$$

d'où

$$D(Y_\varepsilon g)=Y_\varepsilon\,Dg+[(2n-4)\,g(\varepsilon)+4\varepsilon\,g'(\varepsilon)]\,\delta_\varepsilon+4\varepsilon\,g(\varepsilon)\,\delta'_\varepsilon, \quad (8.1)$$

formule qui permettra de calculer $D\,Pf(Y_\varepsilon g)=Pf\,D(Y_\varepsilon g)$. En vertu d'un résultat du § 4, la paire associée à $\square\,G_\varepsilon$ est $(DY_\varepsilon\,g,0)$. On a donc

$$\square\,G_\varepsilon=f^*_+Y_\varepsilon\,Dg+[(2n-4)\,g(\varepsilon)+4\varepsilon\,g'(\varepsilon)]\,H^0_\varepsilon+4\varepsilon\,g(\varepsilon)\,H^1_\varepsilon, \quad (8.2)$$

d'où l'on pourra déduire $\square\,Pf\,G_\varepsilon=Pf\,\square G_\varepsilon$.

Par exemple, en prenant $g(u)=u^{\frac{p}{2}}$, on obtient

$$Dg=p(n+p-2)\,u^{\frac{p-2}{2}},$$

d'où

$$\square\,S^p_\varepsilon=p(n+p-2)\,S^{p-2}_\varepsilon+2(n+p-2)\,\varepsilon^{\frac{p}{2}}\,H^0_\varepsilon+4\varepsilon^{\frac{p+2}{2}}\,H^1_\varepsilon, \quad (8.3)$$

d'où encore

$$\square\,S^p=p(n+p-2)\,S^{p-2}+2(n+p-2)\,Pf\,\varepsilon^{\frac{p}{2}}\,H^0_\varepsilon+4Pf\,\varepsilon^{\frac{p+2}{2}}\,H^1_\varepsilon. \quad (8.4)$$

Les mêmes formules valent pour $\overline{G}_\varepsilon, \overline{H}^k_\varepsilon, \overline{S}^p_\varepsilon$ et $\overline{S}^p$.

D'une manière analogue, si $g(u)$ et ses dérivées première et seconde sont continues pour $u<0$ et ont des parties infinies déterminées lorsque $u\to 0$, on parvient à l'égalité

$$D(1-Y_{-\varepsilon})g=(1-Y_{-\varepsilon})Dg+[(4-2n)g(-\varepsilon)+4\varepsilon g'(-\varepsilon)]\delta_{-\varepsilon}+4\varepsilon g(-\varepsilon)\delta'_{-\varepsilon}, \quad (8.5)$$

qui permettra de calculer $DPf(1 - Y_{-\varepsilon})\, g = Pf\, D(1 - Y_{-\varepsilon})\, g$. On en déduit immédiatement la formule

$$\square\, \mathcal{G}_{-\varepsilon} = f^*(1-Y_{-\varepsilon})Dg + [(4-2n)g(-\varepsilon) + 4\varepsilon g'(-\varepsilon)]\, \mathcal{H}^0_{-\varepsilon} + 4\varepsilon g(-\varepsilon)\, \mathcal{H}^1_{-\varepsilon}, \tag{8.6}$$

grâce à laquelle on pourra trouver $\square\, Pf\, \mathcal{G}_{-\varepsilon} = Pf\, \square\, \mathcal{G}_{-\varepsilon}$.

Par exemple, pour $g(u) = |u|^{\frac{p}{2}}$, il vient $Dg = -p(n+p-2)\,|u|^{\frac{p-2}{2}}$, d'où

$$\square\, \mathcal{S}^p_{-\varepsilon} = -p(n+p-2)\, \mathcal{S}^{p-2}_{-\varepsilon} - 2(n+p-2)\, \varepsilon^{\frac{p}{2}}\, \mathcal{H}^0_{-\varepsilon} + 4\varepsilon^{\frac{p+2}{2}}\, \mathcal{H}^1_{-\varepsilon}, \tag{8.7}$$

et enfin

$$\square\, \mathcal{S}^p = -p(n+p-2)\, \mathcal{S}^{p-2} - 2(n+p-2)\, Pf\, \varepsilon^{\frac{p}{2}}\, \mathcal{H}^0_{-\varepsilon} + 4\, Pf\, \varepsilon^{\frac{p+2}{2}}\, \mathcal{H}^1_{-\varepsilon}. \tag{8.8}$$

Nous allons tirer quelques conséquences de certaines des formules précédentes.

Soit k un nombre entier positif quelconque. On déduit sans peine de (8.4) la relation

$$S^p = d_{n,p,k}\, \square^k S^{p+2k} + Pf\, \varepsilon^{\frac{p+2}{2}}\, R^{(1)}_{k-1}(\varepsilon) H^0_\varepsilon + Pf\, \varepsilon^{\frac{p+4}{2}}\, R^{(2)}_{k-1}(\varepsilon) H^1_\varepsilon, \tag{8.9}$$

où $d^{-1}_{n,p,k}$ est le coefficient

$$(p+2)(p+4)\dots(p+2k)(n+p)(n+p+2)\dots(n+p+2k-2)$$

et où $R^{(1)}_{k-1}(\varepsilon)$ et $R^{(2)}_{k-1}(\varepsilon)$ représentent deux polynômes en ε de degré $k-1$. Ce résultat n'a évidemment de sens que lorsque p ne prend pas l'une des valeurs annulant $d^{-1}_{n,p,k}$.

Désignons alors par E l'ensemble des nombres $-2, -4, -6, \dots$ et $-n, -n-2, -n-4, \dots$. Si p n'appartient pas à E, le coefficient $d^{-1}_{n,p,k}$ n'est jamais nul ; de plus, on constate que, dans ce cas, compte tenu de la forme (7.1) des développements de H^0_ε et de $H^1_\varepsilon = -\dfrac{d}{d\varepsilon} H^0_\varepsilon$, les deuxième et troisième termes figurant au second membre de (8.6) sont nuls. On a, par suite,

$$S^p = d_{n,p,k}\, \square^k S^{p+2k} \quad \text{si} \quad p \notin E, \quad \text{quel que soit } k \text{ entier} > 0\,. \tag{8.10}$$

Si l'on considère α comme fixe, mais p comme variable, $S^p[\alpha]$ est une fonction de p, qui est définie, comme on l'a vu plus haut, pour toute valeur réelle ou complexe de cette variable. *C'est même une fonction analytique de p pour $p \notin E$.* Envisageons, en effet, la fonction

$$I_k(p) = \int_{\Omega_1} u^{\frac{p}{2}+k} \,\square^k \varphi \, dx_1 \ldots dx_{n-1}\, dt \;,$$

k étant un entier positif. Elle est définie pour $\mathcal{R}p > -2-2k$, égale à $\square^k S^{p+2k}[\alpha]$, et c'est une fonction analytique de p. La fonction

$$d_{n,p,k}\, I_k(p)$$

est analytique dans le même domaine, sauf aux points qui appartiennent à E; elle admet pour prolongement $d_{n,p,k+1}\, I_{k+1}(p)$, car ces deux fonctions sont égales, d'après (8.10), dans la partie commune de leurs domaines d'existence. L'ensemble des fonctions $I_k(p)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, définit donc une fonction $I(p)$, qui est analytique, sauf pour les valeurs $p \in E$, qu'elle admet pour pôles simples ou doubles; et $I(p)$ est égale à S^p pour $p \notin E$.

Considérons maintenant les distributions $Pf\, s^p$ de M. Schwartz et Z_{n+p} de MM. Riesz et Schwartz[11]). $Pf\, s^p$ est une fonction de p, qui est analytique, sauf pour une double infinité de valeurs singulières, qui sont précisément les valeurs de l'ensemble E. Z_{n+p} est défini par l'égalité

$$Z_{n+p} = \frac{Pf\, s^p}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n+p-1}\, \Gamma\!\left(\frac{n+p}{2}\right) \Gamma\!\left(\frac{p+2}{2}\right)} \tag{8.11}$$

pour $p \notin E$, et par passage à la limite pour $p \in E$. On a

$$\square Z_l = Z_{l-2} \;, \quad \text{quel que soit } l \,. \tag{8.12}$$

Enfin, on sait que les distributions $Z_{n-2}, Z_{n-4}, \ldots, Z_1, Z_{-1}, \ldots$ (pour n impair) et $Z_{n-2}, Z_{n-4}, \ldots, Z_2$ (pour n pair), qui sont invariantes, ont pour support la surface du cône futur, et que ce sont les seules Z_l à posséder cette propriété.

Cherchons les relations existant entre ces distributions et nos distributions S^p et H^k.

---

[11]) Cf. *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tome I, p. 50;
M. Riesz: L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy (Acta Math., 81 (1949), p. 1–223).

De (8.11) et de (8.12), on tire immédiatement, pour $p \notin E$, l'égalité $Pf\, s^p = d_{n,p,1} \Box Pf\, s^{p+2}$; par conséquent, $Pf\, s^p$ satisfait à la même formule (8.10) que S^p. Or, pour k assez grand, on peut écrire, toujours pour $p \notin E$:

$$\Box^k S^{p+2k}[\alpha] = \int_{\Omega_1} u^{\frac{p}{2}+k} \Box^k \varphi\, dx_1 \ldots dx_{n-1} dt = \Box^k Pf\, s^{p+2k}[\alpha] \ .$$

On a donc

$$S^p = Pf\, s^p \quad \text{pour} \quad p \notin E \ . \tag{8.13}$$

Il est clair que les distributions Z_{n-2} et H^0 doivent être proportionnelles. Effectivement, de (8.12) où l'on pose $l = n$ et de (8.11) où l'on fait $p = 0$, on déduit que

$$Z_{n-2} = \Box Z_n = \frac{\Box S^0}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \ ;$$

et, de (8.4) pour $p = 0$, on conclut que $\Box S^0 = 2(n-2) H^0$. Il vient alors

$$(n-2) H^0 = \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) Z_{n-2} \ . \tag{8.14}$$

On remarquera que *l'ensemble des distributions Z_l ayant pour support la surface du cône futur ne comprend pas, lorsque n est pair, toutes les distributions invariantes ayant pour support ladite surface*. En effet, $H^{\frac{n-2}{2}}$, $H^{\frac{n}{2}}$, ... n'appartiennent pas à cet ensemble, puisque $H^{\frac{n-2}{2}}$ n'est pas un dalembertien itéré de H^0 .

Pour terminer, calculons les valeurs de $\Box S^{2-n}$, $\Box \overline{S}^{2-n}$, $\Box \mathcal{S}^{2-n}$, qui nous serviront dans le paragraphe suivant. On a, par application directe de (8.4) et de (8.8):

$$\Box S^{2-n} = 4 Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon, \ \Box \overline{S}^{2-n} = 4 Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \overline{H}^1_\varepsilon, \Box \mathcal{S}^{2-n} = 4 Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \mathcal{H}^1_{-\varepsilon} .$$

Si n est impair, on déduit facilement de (7.1) que $Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon$, c'est-à-dire le coefficient de $\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}$ dans le développement asymptotique de

$$H^1_\varepsilon = -\frac{d}{d\varepsilon} H^0_\varepsilon \ ,$$

est égal à $-\frac{1}{2}(n-2) B_0$; il vient alors, en vertu de (7.6),

$$\Box S^{2-n} = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1.3.5 \ldots (n-4)} \delta_O \ , \quad \text{pour } n \text{ impair.} \tag{8.15}$$

Remarquons qu'une solution particulière de l'équation $\square T = \delta_O$, pour n impair, est ainsi obtenue. Cette formule (8.15) est évidemment encore vraie pour $\square \overline{S}^{2-n}$. D'autre part, on a $Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \mathscr{H}^1_{-\varepsilon} = 0$, comme le montre immédiatement (7.2); d'où

$$\square\, \mathscr{S}^{2-n} = 0 \ , \qquad \text{pour } n \text{ impair.} \tag{8.16}$$

Si n est pair, on déduit de (7.1) que $Pf\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon$ vaut, cette fois-ci, $\frac{1}{2}(2-n)\, A_{\frac{n-2}{2}} - B_0$; par suite,

$$\square\, S^{2-n} = (4-2n)\, A_{\frac{n-2}{2}} - 4B_0 \ , \quad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{8.17}$$

Ce résultat, où l'on substitue $\overline{A}$ à A, est valable pour $\square\, \overline{S}^{2-n}$. Enfin, on conclut de (7.2), en tenant compte de (7.9), que

$$\square\, \mathscr{S}^{2-n} = (-1)^{\frac{n}{2}} \left[(4-2n) \left(A_{\frac{n-2}{2}} + \overline{A}_{\frac{n-2}{2}}\right) - 8B_0 \right] , \quad \text{pour } n \text{ pair.} \tag{8.18}$$

§ 9. Les solutions invariantes des équations $\square T = 0$ et $\square T = \delta_O$

On connaît déjà une solution invariante particulière de l'équation $\square T = \delta_O$, aussi bien pour n impair, par (8.15), que pour n pair, par (7.8). Il suffit donc de chercher la solution générale invariante de l'équation $\square T = 0$. D'une proposition démontrée à la fin du § 4, il découle que, si une distribution invariante T associée à la paire (T^+, T^-) est solution de $\square T = 0$, on doit avoir $DT^+ = DT^- = 0$. Il convient donc d'abord de déterminer toutes les distributions U dans R qui satisfont à $DU = 0$.

Cette équation étant régulière pour $u \neq 0$, toute distribution solution est égale, dans chacune des demi-droites $u > 0$ et $u < 0$, à une solution usuelle[12]), laquelle est de la forme $a + b\,|u|^{\frac{2-n}{2}}$. Il en résulte qu'une solution U s'écrira

$$U = a\, Pf\, Y_\varepsilon u^{\frac{2-n}{2}} + b\, Pf\,(1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{2-n}{2}} + cY_0 + d + \sum e_k\, \delta^{(k)},$$

car c'est là l'expression la plus générale d'une distribution égale, dans $u > 0$ comme dans $u < 0$, à une combinaison linéaire de $|u|^{\frac{2-n}{2}}$ et de 1.

---

[12]) *L. Schwartz:* Théorie des distributions, tome I, p. 127–130.

En tenant compte de (8.1) pour $g = u^{\frac{2-n}{2}}$, de (8.5) pour $g = |u|^{\frac{2-n}{2}}$ et de (5.2) où l'on pose $\varepsilon = 0$, il vient

$$DU = 4a\, Pf\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_\varepsilon + 4b\, Pf\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_{-\varepsilon}$$
$$+ 2(n-2)c\delta + \sum 2(n-2k-4)\, e_k\, \delta^{(k+1)}\,.$$

Si n est impair, les expressions $Pf\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_\varepsilon$ et $Pf\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_{-\varepsilon}$ sont nulles toutes deux, le coefficient $n - 2k - 4$ n'est jamais nul. Si n est pair $(n \geqslant 4)$, on a

$$Pf\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_\varepsilon = (-1)^{\frac{n}{2}}\, Pf\,\varepsilon^{\frac{4-n}{2}}\, \delta'_{-\varepsilon} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n-4}{2}\right)!}\, \delta^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}\,,$$

$n - 2k - 4$ s'annule pour $k = \frac{1}{2}(n-4)$. Dans les deux cas, DU est une combinaison linéaire de dérivées de δ, qui ne peut être nulle que si le coefficient de chaque dérivée est égal à zéro. On voit alors facilement que *la solution générale de l'équation* $DU = 0$ *est une combinaison linéaire arbitraire des trois distributions*

$$\left.\begin{array}{ll} Pf\,Y_\varepsilon\, u^{\frac{2-n}{2}}\,, \quad Pf(1-Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{2-n}{2}}\,, \quad 1 & \text{pour } n \text{ impair,} \\ Pf\,Y_\varepsilon u^{\frac{2-n}{2}} + (-1)^{\frac{n-2}{2}}\, Pf(1-Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{2-n}{2}} & \\ \quad = Pf(Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon})\, u^{\frac{2-n}{2}}\,, \quad \delta^{\left(\frac{n-4}{2}\right)}\,, 1 & \text{pour } n \text{ pair.} \end{array}\right\} \qquad (9.1)$$

Les distributions T^+ et T^- associées à une solution T de $\square T = 0$ sont des combinaisons linéaires des trois distributions (9.1). Comme T^+ et T^- sont assujetties à être égales pour $u < 0$, d'après le théorème 2, la paire (T^+, T^-) doit être une combinaison linéaire des quatre paires suivantes :

$$(Pf\,Y_\varepsilon u^{\frac{2-n}{2}}, 0)\,,\ (0, Pf\,Y_\varepsilon u^{\frac{2-n}{2}})\,,$$

$$\left(Pf(1-Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{2-n}{2}},\ Pf(1-Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{2-n}{2}}\right),\ (1,1) \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

$$\left(Pf(Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon})\, u^{\frac{2-n}{2}},\ Pf(Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon})\, u^{\frac{2-n}{2}}\right),$$
$$\left(\delta^{\left(\frac{n-4}{2}\right)}, 0\right),\ \left(0, \delta^{\left(\frac{n-4}{2}\right)}\right),\ (1,1) \qquad \text{pour } n \text{ pair.}$$

Par conséquent, T est égale, dans $R^n - O$, à une combinaison linéaire des quatre distributions associées à ces paires, à savoir, d'après les § 7 et 8 :

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{S}^{2-n}\ ,\ \overline{\mathcal{S}}^{2-n}\ ,\ \mathcal{S}^{2-n}\ ,\ 1 & \text{pour } n \text{ impair,} \\ \mathcal{S}^{2-n} + \overline{\mathcal{S}}^{2-n} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{S}^{2-n}\ ,\ H^{\frac{n-4}{2}}\ ,\ \overline{H}^{\frac{n-4}{2}}\ ,\ 1 & \text{pour } n \text{ pair.} \end{array}\right\} \quad (9.2)$$

Or, toutes ces distributions sont définies dans R^n. Dans R^n, T est alors égale à une telle combinaison linéaire augmentée éventuellement d'une distribution invariante de support O. Il reste à voir quelles combinaisons satisfont effectivement à l'équation $\square\, T = 0$. On sait, par les formules (7.8) et (8.15) à (8.18), que, k et k' étant des constantes, on a

$$\square\, \mathcal{S}^{2-n} = \square\, \overline{\mathcal{S}}^{2-n} = k\, \delta_O\ , \quad \square\, \mathcal{S}^{2-n} = 0 \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

$$\square \left(\mathcal{S}^{2-n} + \overline{\mathcal{S}}^{2-n} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{S}^{2-n}\right) = 0\ , \quad \square\, H^{\frac{n-4}{2}} = \square\, \overline{H}^{\frac{n-4}{2}} = k'\, \delta_O \quad \text{pour } n \text{ pair.}$$

De plus, il est clair que le dalembertien d'une distribution invariante de support O, c'est-à-dire d'une combinaison linéaire de $\square^k \delta_O$, ne peut ni s'annuler, ni être égal à un multiple de δ_O. On déduit alors facilement de là les relations devant exister entre les coefficients des combinaisons linéaires, et, partant, l'énoncé du

Théorème 4. *La solution générale invariante de l'équation* $\square\, T = 0$ *est*

$$T = \begin{cases} a(\mathcal{S}^{2-n} - \overline{\mathcal{S}}^{2-n}) + b\, \mathcal{S}^{2-n} + c & \text{si } n \text{ est impair,} \\ a\left(\mathcal{S}^{2-n} + \overline{\mathcal{S}}^{2-n} + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \mathcal{S}^{2-n}\right) + b\left(H^{\frac{n-4}{2}} - \overline{H}^{\frac{n-4}{2}}\right) + c & \\ & \text{si } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

avec trois constantes arbitraires a, b, c.

Une solution particulière de l'équation $\square\, T = \delta_O$ *est* [13])

$$T = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\, 3.5 \ldots (n-4)\, \mathcal{S}^{2-n} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 2^{-1} \pi^{\frac{2-n}{2}}\, H^{\frac{n-4}{2}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Cet énoncé suppose $n \geqslant 3$; pour $n = 3$, la solution particulière s'écrit $(2\pi)^{-1} \mathcal{S}^{-1}$.

---

[13]) Les formules (8.11) et (8.13), pour n impair, (7.8), (8.12) et (8.14), pour n pair, montrent que cette distribution n'est autre que la distribution Z_2, c'est-à-dire précisément la solution particulière de $\square\, T = \delta_O$ donnée par *M. Schwartz* (Théorie des distributions, tome I, p. 51, formule [II, 3; 34]).

§ 10. L'équation des ondes amorties $(\square + k)T = 0$ ou δ_O

La paire de distributions dans R associée à toute solution invariante de l'équation $(\square + k)\,T = 0$ est formée de distributions satisfaisant à l'équation $(D + k)\,U = 0$, ou $(D_n + k)\,U = 0$, en désignant par D_n au lieu de D l'opérateur $4u\dfrac{d^2}{du^2} + 2n\dfrac{d}{du}$. Or, on a $D_n \dfrac{d}{du} = \dfrac{d}{du} D_{n-2}$, et, par suite, pour n impair,

$$(D_n + k)\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} (D_1 + k)\,. \tag{10.1}$$

Si donc V satisfait à l'équation $(D_1 + k)\,V = 0$, $U = \left(\dfrac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} V$ satisfait à $(D_n + k)\,U = 0$. Réciproquement, si U satisfait à cette dernière équation et si V_0 est une primitive d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)$ de U, on a $\left(\dfrac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} (D_1 + k)\,V_0 = 0$, donc $(D_1 + k)\,V_0$ est un polynôme de degré $< \frac{1}{2}(n-1)$. Si $k \neq 0$, on vérifie aisément qu'il existe un polynôme P de degré $< \frac{1}{2}(n-1)$ tel que $(D_1 + k)\,P = (D_1 + k)\,V_0$; ainsi $V = V_0 - P$ satisfait à $(D_1 + k)\,V = 0$ et l'on a l'égalité

$$U = \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} V\,.$$

Un raisonnement analogue étant valable pour n pair, on a:

Si n est impair (ou pair) et k non nul, les solutions U de l'équation $(D_n + k)\,U = 0$ sont les dérivées d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)$ (ou $\frac{1}{2}(n-2)$) des solutions V de l'équation $(D_1 + k)\,V = 0$ (ou $(D_2 + k)\,V = 0$).

Pour $k = 0$, on verrait de même que toute solution U de la première équation est, à une constante additive près, la dérivée d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)$ (ou $\frac{1}{2}(n-2)$) d'une solution V de la seconde équation, ce qui est en accord avec les résultats du § 9.

Soit alors d'abord n impair: considérons l'équation $(D_1 + k)\,V = 0$. On en connaît les solutions usuelles $g_1(u) = \cos\sqrt{ku}$, fonction entière de u, et $|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)$, où $g_2(u) = \dfrac{\sin\sqrt{ku}}{\sqrt{ku}}$ est aussi une fonction entière de u. En raisonnant comme au § 9, on voit que V ne peut être qu'une combinaison linéaire des quatre distributions

$$g_1(u)\,,\quad Y_0\,g_1(u)\,,\quad Y_0\,u^{\frac{1}{2}} g_2(u)\,,\quad (1 - Y_0)\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)\,,$$

augmentée éventuellement d'une distribution ayant l'origine (de R) comme support, ce que l'on peut écrire

$$V = a\,g_1(u) + b\,Pf\,Y_\varepsilon g_1(u) + c\,Pf\,Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}} g_2(u)$$
$$+ d Pf\,(1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u) + \sum e_m \delta^{(m)} .$$

Il est clair que la distribution $g_1(u)$ satisfait à $(D_1 + k)\,V = 0$. On trouve ensuite, en utilisant (8.1) et (8.5), avec $n = 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&(D_1 + k)\,Y_\varepsilon g_1(u) = \big(-2g_1(\varepsilon) + 4\,\varepsilon\, g_1'(\varepsilon)\big)\,\delta_\varepsilon + 4\,\varepsilon\, g_1(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon' ,\\
&(D_1 + k)\,Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}} g_2(u) = 4\varepsilon^{\frac{3}{2}}\, g_2'(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon + 4\varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon' ,\\
&(D_1 + k)\,(1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u) = 4\varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2'(-\varepsilon)\,\delta_{-\varepsilon} + 4\varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2(-\varepsilon)\,\delta_{-\varepsilon}' ,
\end{aligned}\right\} \quad (10.2)$$

d'où se déduisent immédiatement les égalités

$$(D_1 + k)\,Pf\,Y_\varepsilon g_1(u) = -2\delta\ ,\ (D_1 + k)\,Pf\,Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}} g_2(u)$$
$$= (D_1 + k)\,Pf\,(1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u) = 0\ .$$

On a enfin, d'après (5.2),

$$(D_1 + k)\,\delta^{(m)} = -2(2m + 3)\,\delta^{(m+1)} + k\,\delta^{(m)} .$$

Il résulte de là que *la solution générale V de l'équation $(D_1 + k)\,V = 0$ est une combinaison linéaire arbitraire des trois distributions*

$$Pf\,Y_\varepsilon\, u^{\frac{1}{2}} g_2(u)\ ,\qquad Pf(1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)\ ,\quad g_1(u)\ .$$

En vertu de la remarque faite plus haut, la solution générale de l'équation $(D_n + k)\,U = 0$, *pour n impair*, est une combinaison linéaire arbitraire des dérivées d'ordre $\frac{1}{2}(n - 1)$ de ces trois distributions, soit, les opérations Pf et $\dfrac{d}{du}$ étant permutables, des trois distributions

$$U_1 = Pf\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}} g_2(u)\ ,\quad U_2 = Pf\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} (1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)\ ,$$
$$U_3 = \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} g_1(u)\ .$$

Cela étant, la paire associée à toute solution invariante T de l'équation $(\square + k)T = 0$ doit être une combinaison linéaire des quatre paires suivantes:

$$(U_1, 0)\ , \quad (0, U_1)\ , \quad (U_2, U_2)\ , \quad (U_3\ , U_3)\ .$$

La méthode développée au début du § 8 montre que les distributions

$$\boxed{T_1 = Pf\ f_+^*\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} Y_\varepsilon\, u^{\frac{1}{2}}\, g_2(u)\ ,\quad T_2 = Pf\ f^*\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} (1 - Y_{-\varepsilon})\,|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)}\ , \tag{10.3}$$

invariantes et définies dans R^n, sont respectivement associées aux paires $(U_1, 0)$ et (U_2, U_2). La transformée $\overline{T_1}$ de T_1 par une rotation impropre de Lorentz est associée à $(0, U_1)$, et la distribution égale à la fonction $\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} g_1(u)$ continue dans R^n est associée à (U_3, U_3).

Dans R^n, la distribution T est nécessairement une combinaison linéaire de ces quatre distributions T_1, $\overline{T_1}$, T_2 et T_3, augmentée éventuellement d'une distribution invariante de support O.

Voyons maintenant quelles sont les combinaisons linéaires qui satisfont effectivement à $(\square + k)\ T = 0$. On a:

$$\begin{aligned}(\square + k)\, T_1 &= Pf(\square + k)\, f_+^*\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} Y_\varepsilon\, u^{\frac{1}{2}}\, g_2(u)\\ &= Pf\ f_+^*\,(D_n + k)\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}}\, g_2(u)\ .\end{aligned}$$

Or, d'après (10.1) et (10.2), on peut écrire

$$\begin{aligned}(D_n + k)\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}}\, g_2(u) &= \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} (D_1 + k)\ Y_\varepsilon u^{\frac{1}{2}}\, g_2(u)\\ &= 4\,\varepsilon^{\frac{3}{2}}\, g_2'(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + 4\,\varepsilon^{\frac{3}{2}}\, g_2(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\ ,\end{aligned}$$

ce qui entraîne immédiatement

$$(\square + k)\ T_1 = 4 Pf\ \varepsilon^{\frac{3}{2}}\, g_2'(\varepsilon)\, H_\varepsilon^{\frac{n-1}{2}} + 4 Pf\ \varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2(\varepsilon)\, H_\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}\ .$$

On déduit sans difficulté de (7.1) que le premier terme du second membre est nul, alors que le second vaut

$$4(-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-4}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot B_0 \,,$$

ou encore, d'après (7.6), $\pi^{\frac{n-1}{2}} \delta_O$. Des calculs semblables valent pour $\overline{T}_1$. Ainsi:

$$(\square + k)\, T_1 = (\square + k)\, \overline{T}_1 = \pi^{\frac{n-1}{2}} \delta_O \,.$$

D'une manière analogue, on obtient

$$(\square + k)\, T_2 = 4 Pf\, \varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2'(-\varepsilon)\, \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n-1}{2}} + 4 Pf\, \varepsilon^{\frac{3}{2}} g_2(-\varepsilon)\, \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n+1}{2}} = 0 \,.$$

Enfin, il est évident que $(\square + k)\, T_3 = 0$. Nous pouvons énoncer:

Théorème 5. *Si n est impair $(n \geqslant 3)$ et $k \neq 0$, la solution générale invariante de l'équation $(\square + k)\, T = 0$ est, avec trois constantes arbitraires a, b, c,*

$$T = a(T_1 - \overline{T}_1) + b T_2 + c T_3 \,,$$

où T_1 et T_2 sont définies par les formules (10.3) dans lesquelles

$$g_2(u) = \frac{\sin \sqrt{ku}}{\sqrt{ku}} \,,$$

où $\overline{T}_1$ est la transformée de T_1 par une rotation impropre de Lorentz et où T_3 est la distribution égale à la fonction invariante $\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos \sqrt{ku}$.

Une solution particulière de l'équation $(\square + k)\, T = \delta_O$ est $\pi^{\frac{1-n}{2}} T_1$.

Il est possible aussi de définir T_1 et T_2 comme suit:

$$T_1 = Pf\ f_+^* Y_\varepsilon \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} u^{\frac{1}{2}} g_2(u), \quad T_2 = Pf\ f^*(1 - Y_{-\varepsilon}) \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-1}{2}} |u|^{\frac{1}{2}} g_2(u) \,. \qquad (10.4)$$

En effet, si $h(u)$ est une fonction définie et suffisamment dérivable pour $u > 0$, on tire de la formule

$$\left(\frac{d}{du}\right)^m Y_\varepsilon h = h(\varepsilon)\,\delta_\varepsilon^{(m-1)} + \left(\frac{d}{du}\right)^{m-1} Y_\varepsilon\, h' \,,$$

l'égalité

$$f_+^*\left(\frac{d}{du}\right)^m Y_\varepsilon h = f_+^*\, Y_\varepsilon\left(\frac{d}{du}\right)^m h + \sum_{l=0}^{m-1} h^{(l)}(\varepsilon)\, H_\varepsilon^{m-l-1} \,, \qquad (10.5)$$

encore valable si l'on y remplace f_+^* par f_-^* et H par $\overline{H}$; de façon analogue, si $h(u)$ est définie et suffisamment dérivable pour $u < 0$, on trouve

$$f^*\left(\frac{d}{du}\right)^m (1 - Y_{-\varepsilon})\, h = f^*(1 - Y_{-\varepsilon})\left(\frac{d}{du}\right)^m h - \sum_{l=0}^{m-1} h^{(l)}(-\varepsilon)\mathscr{H}_{-\varepsilon}^{m-l-1} \,. \qquad (10.6)$$

Or, pour $m = \frac{1}{2}(n-1)$ (n impair), et $h(u) = u^{\frac{1}{2}} g_2(u)$, ou $|u|^{\frac{1}{2}} g_2(u)$, avec $g_2(u)$ fonction entière, on voit immédiatement, d'après (7.1) et (7.2), que l'opération Pf appliquée aux sommes figurant dans les seconds membres de (10.5), ou de (10.6), donne zéro, ce qui justifie les définitions (10.4).

On peut encore substituer à la fonction $g_2(u)$ son développement en série de puissances de u et, par suite, exprimer les distributions T_1 et T_2 à l'aide des distributions S^p et $\mathscr{S}^p$, respectivement[14]).

Occupons-nous maintenant du cas n pair: nous devons considérer l'équation $(D_2 + k)\, V = 0$. La fonction entière $h_1(u) = J_0(\sqrt{ku})$, où J_0 est la fonction classique de Bessel, est une solution usuelle de cette équation ; on sait qu'il existe une autre solution usuelle de la forme

$$h_2(u) = h_1(u) \log|u| + h_3(u) \,,$$

où $h_3(u)$ est une fonction entière. Le raisonnement déjà utilisé pour les équations $DU = 0$ et $(D_1 + k)\, V = 0$ montre que V ne peut être, ici, que de la forme

$$\begin{aligned} V = a h_1(u) + b\ Pf\ Y_\varepsilon h_1(u) + c\ Pf\ Y_\varepsilon h_2(u) \\ + d\ Pf\ (1 - Y_{-\varepsilon})\, h_2(u) + \sum e_m\, \delta^{(m)} \,. \end{aligned}$$

---

[14]) On obtient, pour T_1 par exemple, par un calcul facile:

$$T_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-k)^l}{l!\,4^l} \frac{S^{2-n+2l}}{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2} + l\right)} \,.$$

Sous cette forme, et compte tenu de (8.13), il est clair que $\pi^{\frac{1-n}{2}}\, T_1$ est la solution même de $(\square + k)\, T = \delta_O$, pour n impair, que donne M. Schwartz (Théorie des distributions, tome II, p. 35, formule (VI, 5; 29) où $m = 1$).

La première de ces distributions satisfait évidemment à l'équation $(D_2 + k)\, V = 0$. On trouve ensuite, en utilisant (8.1) et (8.5), avec $n = 2$:

$$\left.\begin{aligned}
&(D_2 + k)\, Y_\varepsilon h_1(u) = 4\varepsilon\, h_1'(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon + 4\varepsilon\, h_1(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon' , \\
&(D_2 + k)\, Y_\varepsilon h_2(u) = 4\, h_1(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon \\
&\qquad + 4\varepsilon\big(h_1'(\varepsilon) \log \varepsilon + h_3'(\varepsilon)\big)\, \delta_\varepsilon + 4\varepsilon\, h_2(\varepsilon)\, \delta_\varepsilon' , \\
&(D_2 + k)\,(1 - Y_{-\varepsilon})\, h_2(u) = -\, 4h_1(-\varepsilon)\, \delta_{-\varepsilon} \\
&\qquad + 4\varepsilon\big(h_1'(-\varepsilon) \log \varepsilon + h_3'(-\varepsilon)\big)\, \delta_{-\varepsilon} + 4\varepsilon h_2(-\varepsilon) \delta'_{-\varepsilon} ,
\end{aligned}\right\} \qquad (10.7)$$

d'où résultent aussitôt (sachant que $h_1(0) = 1$) les égalités

$$(D_2 + k) Pf\ Y_\varepsilon h_1(u) = 0, (D_2 + k) Pf\ Y_\varepsilon h_2(u) = 4\delta ,$$

$$(D_2 + k)\, Pf(1 - Y_{-\varepsilon})\, h_2(u) = -\, 4\delta .$$

On a encore, par (5.2),

$$(D_2 + k)\, \delta^{(m)} = -\, 4(m + 1)\, \delta^{(m+1)} + k\, \delta^{(m)} .$$

Il découle de ces résultats que les constantes $c - d$ et e_m pour tout m doivent être nulles, et, par conséquent, que *la solution générale V de l'équation $(D_2 + k)\, V = 0$ est une combinaison linéaire arbitraire des trois distributions*

$$Pf\ Y_\varepsilon h_1(u) \quad , \quad Pf(Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon})\, h_2(u) \quad , \quad h_1(u) .$$

D'après la remarque du début du paragraphe, la solution générale de l'équation $(D_n + k)\, U = 0$ est alors une combinaison linéaire arbitraire des trois distributions

$$U_1 = Pf\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} Y_\varepsilon\, h_1(u) \ , \ U_2 = Pf\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} (Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon})\, h_2(u) \ ,$$

$$U_3 = \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} h_1(u) .$$

En raisonnant comme dans le cas n impair, on conclut alors que, dans R^n, toute solution invariante T de l'équation $(\square + k) T = 0$ est nécessairement une combinaison linéaire (augmentée éventuellement d'une distribution invariante de support O) des quatre distributions T_1, $\overline{T}_1$, T_2 et T_3, qui sont définies comme suit:

$$\boxed{T_1 = Pf\ f_+^*\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} Y_\varepsilon h_1(u)\,,\ T_2 = Pf\ f^*\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} (Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon}) h_2(u)}\,, \tag{10.8}$$

$\overline{T}_1$ est la transformée de T_1 par une rotation impropre de Lorentz, T_3 est la distribution égale à la fonction $\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} h_1(u)$ continue dans R^n.

Il reste à déterminer les combinaisons linéaires satisfaisant effectivement à $(\square + k)\,T = 0$. La méthode à suivre est la même que pour n impair. On obtient d'abord:

$$(\square + k)\,T_1 = 4Pf\ \varepsilon\, h_1'(\varepsilon)\, H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + 4Pf\ \varepsilon\, h_1(\varepsilon)\, H_\varepsilon^{\frac{n}{2}}\ .$$

On déduit aisément de (7.1) que le premier terme du second membre est nul, alors que le second vaut $4(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2} - 1\right)!\ B_0$, ou encore, d'après (7.6), $2\pi^{\frac{n-2}{2}}\ \delta_O$. Un calcul semblable est valable pour $\overline{T}_1$. Par conséquent:

$$(\square + k)\,T_1 = (\square + k)\,\overline{T}_1 = 2\pi^{\frac{n-2}{2}}\ \delta_O\ .$$

On obtient encore

$$(\square + k)\,T_2 = 4Pf\left\{\varepsilon\, h_2'(\varepsilon)\left(H_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \overline{H}_\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}\right)\right.$$

$$\left. + \varepsilon\, h_2(\varepsilon)\left(H_\varepsilon^{\frac{n}{2}} + \overline{H}_\varepsilon^{\frac{n}{2}}\right) + \varepsilon\, h_2'(-\varepsilon)\ \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n-2}{2}} + \varepsilon\, h_2(-\varepsilon)\, \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n}{2}}\right\} = 0\ ,$$

les termes non nuls se détruisant. Enfin, il est clair que $(\square + k)\,T_3 = 0$. D'où l'énoncé:

Théorème 6. *Si n est pair $(n \geqslant 4)$ et $k \neq 0$, la solution générale invariante de l'équation $(\square + k)\,T = 0$ est, avec trois constantes arbitraires a, b, c,*

$$T = a(T_1 - \overline{T}_1) + b\,T_2 + c\,T_3\,,$$

où T_1 et T_2 sont définies par les formules (10.8) *dans lesquelles*

$$h_1(u) = J_0\left(\sqrt{ku}\right)\ ,$$

J_0 désignant la fonction classique de Bessel, et $h_2(u)$ est une autre solution linéairement distincte de l'équation $(D_2 + k)\,V = 0$,

où $\overline{T}_1$ *est la transformée de* T_1 *par une rotation impropre de Lorentz et où* T_3 *est la distribution égale à la fonction invariante* $\left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} J_0(\sqrt{k\,u})$.

Une solution particulière de l'équation $(\Box + k)\, T = \delta_O$ *est* $2^{-1} \pi^{\frac{2-n}{2}} T_1$.

On peut chercher à transformer, comme on l'a fait pour n impair, les formules de définition (10.8). Comme $h_1(u)$ est une fonction entière et que, pour $k < \frac{1}{2}(n-2)$, H_ε^k converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers H^k, on a immédiatement

$$Pf \sum_{l=0}^{\frac{n-4}{2}} h_1^{(l)}(\varepsilon) H_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}-l} = \sum_{l=0}^{\frac{n-4}{2}} h_1^{(l)}(0) H^{\frac{n-4}{2}-l} \quad ;$$

la formule (10.5) appliquée à $h(u) = h_1(u)$, avec $m = \frac{1}{2}(n-2)$, mène alors à la nouvelle expression de T_1 [15]:

$$T_1 = Pf\ f_+^*\ Y_\varepsilon \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} h_1(u) + \sum_{l=0}^{\frac{n-4}{2}} h_1^{(l)}(0) H^{\frac{n-4}{2}-l} \quad . \tag{10.9}$$

Pour T_2, on doit utiliser les formules (10.5), pour f_+^* et f_-^*, et (10.6), et, par suite, calculer l'expression

$$\sum_{l=0}^{\frac{n-4}{2}} Pf \left\{ h_2^{(l)}(\varepsilon) \left(H_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}-l} + \overline{H}_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}-l} \right) - h_2^{(l)}(-\varepsilon) \mathscr{H}_{-\varepsilon}^{\frac{n-4}{2}-l} \right\} .$$

On trouve qu'elle est nulle, ce qui entraîne immédiatement l'égalité

$$T_2 = Pf\ f^*(Y_\varepsilon + 1 - Y_{-\varepsilon}) \left(\frac{d}{du}\right)^{\frac{n-2}{2}} h_2(u) \ . \tag{10.10}$$

---

[15]) Si, de plus, on substitue à $h_1(u)$ son développement en série, on obtient l'expression de T_1 à l'aide des distributions S et H :

$$T_1 = \sum_{l=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{(-k)^l}{l!\,4^l} H^{\frac{n-4}{2}-l} + \sum_{l=\frac{n-2}{2}}^{\infty} \frac{(-k)^l}{l!\,4^l} \frac{S^{2-n+2l}}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}+l\right)} \ .$$

On voit alors que $2^{-1} \pi^{\frac{2-n}{2}} T_1$ est, compte tenu de (8.13) et de (8.14), la solution de $(\Box + k)\, T = \delta_O$, pour n pair, donnée par M. Schwartz.
(Théorie des distributions, tome II, p. 35, formule (VI, 5; 29) où $m = 1$) .

(Reçu le 24 octobre 1953.)