Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1954)

Artikel: Über eine Klasse von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten.

Autor: Gautschi, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22619

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über eine Klasse von linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten

Von Walter Gautschi, Basel

1. Sei θ_x ein linear homogener Funktionaloperator, sodaß allgemein $\theta_x(au + bv) = a\theta_x u + b\theta_x v$ gilt, wenn a, b Konstanten und u, v Funktionen der Variablen x aus einer geeigneten Funktionsklasse bedeuten[1]). Das System der n linearen homogenen Gleichungen

$$\theta u_\nu(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{\nu\kappa} u_\kappa(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{\nu\kappa}$ läßt sich in Matrizenform schreiben als

$$\theta U = AU \ , \tag{1}$$

wo $A = (a_{\nu\kappa})$ die $n \times n$-Matrix mit den Elementen $a_{\nu\kappa}$ und U, θU die (Kolonnen-) Vektoren der Dimension n mit den Komponenten u_ν bzw. θu_ν sind. Im Falle des Differentialoperators $\theta = D_x$ $\left(D_x = \dfrac{d}{dx}\right)$ zum Beispiel stellt (1) ein System von linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung dar. An sich kann ein solches System mit Hilfe der Elementarteilertheorie nach klassischen Methoden gelöst werden. Indessen ist es von einigem Interesse, eine explizite Form der Lösung zu kennen, in die nur die Eigenwerte von A und ihre Vielfachheiten eingehen.

Eine solche Darstellung der Lösung im Falle $\theta = D_x$ ist von J. S. Frame[2]) angegeben worden und neuerdings von M. Kumorovitz[3]) wieder gefunden worden. B. Z. Linfield[4]) hat die entsprechende Lösung

[1]) Der Index x bei θ_x wird im folgenden, wenn keine Mißverständnisse möglich sind, weggelassen.

[2]) *J. S. Frame*, On the explicit solution of simultaneous linear differential equations with constant coefficients, Amer. Math. Monthly **47** (1940).

[3]) *M. Kumorovitz*, Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coéfficients constants, Ann. Soc. Pol. Math. **23** (1950).

[4]) *B. Z. Linfield*, On the explicit solution of simultaneous linear difference equations with constant coefficients, Amer. Math. Monthly **47** (1940).

für den Fall des allgemeinen Differenzenoperators Δ_h angegeben. In einer Herausgebernote im Anschluß an die Arbeit von Linfield faßt R. J. Walker das Resultat von Frame und Linfield mit Hilfe des allgemeinen Operators θ in dem folgenden Satz zusammen:

Genügen die Funktionen $v_{a,i}$ für irgendeine Konstante a den rekursiven Relationen

$$\begin{aligned} (\theta - a)\, v_{a,0} &= 0 \,, \\ (\theta - a)\, v_{a,i} &= v_{a,i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2}$$

und ist λ ein p-facher Eigenwert von A, $|A - \lambda I| = 0$, so hat die Gleichung (1) *eine Lösung*

$$U = \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i v_{\lambda,i} C \,, \tag{3}$$

wo C irgendein Lösungsvektor des linearen homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)^p C = 0 \tag{4}$$

ist.

2. Ist zum Beispiel $\theta = D_x$, so haben die Gleichungen (2) als einfachste Lösung

$$v_{a,i} = \frac{x^i}{i!} e^{ax} \quad (\theta = D_x) \,. \tag{2^0}$$

In diesem Fall hat Kumorovitz gezeigt, daß die allgemeinste Lösung von (1) sich linear zusammensetzen läßt aus den Lösungen, die sich aus (3) und (4) ergeben, wenn man λ sämtliche voneinander verschiedenen Eigenwerte von A durchlaufen läßt, für jeden Eigenwert das zugehörige Gleichungssystem (4) durch ein vollständiges System von linear unabhängigen Vektoren löst und für die Funktionen $v_{\lambda,i}$ in (3) die Funktionen (2^0) für $a = \lambda$ verwendet.

Analog kann man auch bei allgemeineren Operatoren θ vorgehen, vorausgesetzt, daß die Gleichungen (2) für die Werte $a = \lambda$ der Konstante a lösbar sind. Man erhält dann in jedem Falle n Lösungen von (1) von der Form (3). Verwendet man für jeden Wert $a = \lambda$ jeweilen ein *einziges* Lösungssystem $v_{\lambda,i}$ von (2), so kann es allerdings sein, daß man dann nicht mehr zur allgemeinsten Lösung von (1) gelangt. Dies zeigt schon der einfache Fall $\theta = D^2$. In diesem Falle haben freilich die Gleichungen (2) eine größere Lösungsmannigfaltigkeit als die entsprechenden Gleichungen mit $\theta = D$, so daß man erwarten darf, daß durch geeignete Auswahl unter diesen Lösungen die noch fehlenden Konstanten gewonnen werden können. Untersuchungen in dieser Richtung indessen sind von den zitierten Autoren nicht unternommen worden.

Im folgenden sollen nun an Stelle des Systems (1) erster Ordnung allgemeiner *Systeme höherer Ordnung* betrachtet werden, und zwar solche, die durch *eine einzige Matrix* A «erzeugt» werden können. Genauer seien $p_\tau(u)$ $(\tau = 0, 1, \ldots, m)$ $m + 1$ Polynome beliebigen Grades und

$$\varphi(u, t) = p_0(u)t^m + p_1(u)t^{m-1} + \cdots + p_m(u) \ ; \tag{5}$$

dann handelt es sich um das lineare System m-ter Ordnung

$$\varphi(A, \theta)\, U(x) = 0 \ , \tag{6}$$

das für $m = 1$, $\varphi(u, t) = t - u$ mit dem System (1) identisch ist.

Derartige Systeme, in denen die Koeffizienten p_τ linear von A abhängen, spielen im Falle des Verschiebungsoperators $\theta = E$ $(E = I + \Delta)$ eine gewisse Rolle bei Fehleruntersuchungen über graphische und numerische Methoden der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

In Satz I wird der obige Satz von Walker auf Systeme (6) verallgemeinert. Anschließend wird in den Fällen $\theta = D$, $\theta = E$ die Frage nach der vollständigen Lösung diskutiert und unter einer gewissen Annahme in Satz II vollständig gelöst. Am Beispiel (24) eines Systems von Differenzengleichungen $(\theta = E)$ wird – im Hinblick auf eine spätere Anwendung auch für den Fall eines inhomogenen Systems – die allgemeine Lösung in geschlossener Form [(29), (33)] angegeben.

3. **Satz I.** *Es bezeichne* $\varphi_j(a, \theta)$ *für irgendeine Konstante* a *den Operator*

$$\varphi_j(a, \theta) = \frac{1}{j!} D_a^j \varphi(a, \theta) \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \quad \varphi_0(a, \theta) = \varphi(a, \theta) \ . \tag{7}$$

Genügen die Funktionen $v_{a,i}(x)$ *den rekursiven Relationen*

$$\sum_{j=0}^{i} \varphi_j(a, \theta)\, v_{a, i-j} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

und ist λ *ein* p*-facher Eigenwert von* A, *so hat* (6) *eine Lösung*

$$U(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i v_{\lambda, i}(x)\, C \ , \tag{9}$$

wo C *irgendein Lösungsvektor von* (4) *ist.*

Beweis. Mit Hilfe der Operatoren (7) kann die Taylorentwicklung von $\varphi(A, \theta)$ an der Stelle $A = \lambda I$ in der Form

$$\varphi(A, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\lambda, \theta)(A - \lambda I)^j \tag{10}$$

geschrieben werden. Der Einfachheit halber erstrecken wir die Summation über j ins Unendliche, obwohl, da $\varphi(A, \theta)$ bezüglich A ein Polynom ist, nur endlich viele Summanden vorhanden sind.

Die Anwendung von (10) auf den Vektor (9) ergibt, wenn in (10) das Glied mit $j = 0$ abgetrennt wird,

$$\begin{aligned}\varphi(A, \theta)\, U = \varphi(\lambda, \theta) \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i v_{\lambda, i} C + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\lambda, \theta)(A - \lambda I)^j \sum_{i=0}^{p-1} (A - \lambda I)^i v_{\lambda, i} C\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (8) für $i = 0$ ist der erste Summand rechterhand in (11) gleich

$$\sum_{i=1}^{p-1} (A - \lambda I)^i \varphi(\lambda, \theta)\, v_{\lambda, i} C\,.$$

Andererseits wird der zweite Summand rechts in (11), da wegen (4)

$$(A - \lambda I)^{i+j} C = 0$$

für $i + j \geqq p$ ist, gleich

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} (A - \lambda I)^{i+j} \varphi_j(\lambda, \theta)\, v_{\lambda, i} C &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=i+1}^{p-1} (A - \lambda I)^k \varphi_{k-i}(\lambda, \theta)\, v_{\lambda, i} C \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} (A - \lambda I)^k \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(\lambda, \theta)\, v_{\lambda, k-j} C\end{aligned}$$

und wegen (8) gleich

$$- \sum_{k=1}^{p-1} (A - \lambda I)^k \varphi(\lambda, \theta) v_{\lambda, k} C\,.$$

Daher folgt $\varphi(A, \theta)\, U = 0$ und Satz I ist damit bewiesen.

Über die Lösbarkeit der rekursiven Gleichungen (8) kann im Falle eines allgemeinen Operators θ unmittelbar folgende Aussage gemacht werden: *Hat die Gleichung* $\varphi(u, \theta) v_{u,0} = 0$ *eine Lösung* $v_{u,0}(x)$, *die für* $u = a$ *genügend oft nach* u *differenzierbar ist, so kann*

$$v_{a,i} = \frac{1}{i!} D_a^i\, v_{a,0} \tag{12}$$

gesetzt werden, vorausgesetzt, daß $D_a \theta_x = \theta_x D_a$ *gilt.*

In der Tat ergeben sich die Relationen (8) aus $\varphi(u, \theta) v_{u,0} \equiv 0$ und (12) durch i-maliges Differenzieren nach u an der Stelle $u = a$:

$$0 = \frac{1}{i!} D_a^i\, \varphi(a, \theta)\, v_{a,0} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} D_a^j\, \varphi(a, \theta)\, D_a^{i-j}\, v_{a,0} = \sum_{j=0}^{i} \varphi_j(a, \theta) v_{a, i-j}\,.$$

4. Wir spezialisieren im folgenden θ auf den *Differentialoperator* $\theta = D$ und den *Verschiebungsoperator* $\theta = E$.

Ist t_a eine Wurzel der Gleichung $\varphi(a, t) = 0$ m-ten Grades in t, so gilt offenbar $\varphi(a, D_x) e^{t_a x} \equiv 0$ und, falls $t_a \neq 0$ ist, $\varphi(a, E_x) e^{x \lg t_a} \equiv 0$. Daher kann in diesen Fällen $v_{a,0} = e^{t_a x}$ bzw. $v_{a,0} = e^{x \lg t_a} = t_a^x$ gesetzt werden. Beide Funktionen sind beliebig oft nach a differenzierbar, vorausgesetzt, daß t_a eine *einfache* Wurzel und $\neq 0$ ist, die erste auch, wenn $t_a = 0$ gilt. Gemäß (12) sind daher im Falle $\theta = D$ die Funktionen

$$\begin{aligned} v_{a,0} &= e^{t_a x}, \\ v_{a,1} &= x e^{t_a x} t'_a, \\ v_{a,2} &= \frac{x}{2!} e^{t_a x} (x t_a'^2 + t''_a) \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (\theta = D) \qquad (13)$$

und im Falle $\theta = E$ die Funktionen

$$\begin{aligned} v_{a,0} &= t_a^x, \\ v_{a,1} &= x t_a^{x-1} t'_a, \\ v_{a,2} &= \binom{x}{2} t_a^{x-2} t_a'^2 + \tfrac{1}{2} x t_a^{x-1} t''_a \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \qquad (\theta = E, t_a \neq 0) \qquad (13^0)$$

Lösungen der Gleichungen (8).

Um zur vollständigen Lösung des Systems (6) zu gelangen, mögen die voneinander verschiedenen Eigenwerte von A mit λ_σ $(\sigma = 1, \dots, s)$, ihre Vielfachheiten mit p_σ bezeichnet werden. Das Gleichungssystem

$$(A - \lambda_\sigma I)^{p_\sigma} C = 0 \qquad (14)$$

besitzt dann genau p_σ linear unabhängige Lösungsvektoren $C_{\sigma l}$ $(l = 1, \dots, p_\sigma)$. (An Stelle von p_σ in (14) können auch die Vielfachheiten m_σ der Wurzeln der Minimalgleichung von A treten, denn auch dann existieren p_σ linear unabhängige Lösungen.) Bildet man für jeden Eigenwert λ_σ ein solches Vektorsystem, so sind auch die n Vektoren $C_{\sigma l}$ $(\sigma = 1, \dots, s; l = 1, \dots, p_\sigma)$ bekanntlich linear unabhängig[5]).

[5]) Vgl. etwa *J. H. M. Wedderburn*, Lectures on Matrices, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XVII (1934), p. 43.

Ferner nehmen wir an, daß jede der s Gleichungen $\varphi(\lambda_\sigma, t) = 0$ *m verschiedene (also einfache) Wurzeln* $t_{\sigma,\mu}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ *besitzt.* Die Funktionen (13) bzw. (13^0), die zu $t_{\sigma,\mu}$ gehören, mögen mit $v^\mu_{\lambda_\sigma, i}$ bezeichnet werden. Dann gilt der

Satz II. *Die allgemeine Lösung von* (6) *setzt sich in den Fällen* $\theta = D$ *und* $\theta = E$ *linear zusammen aus den mn Lösungsvektoren*

$$U^\mu_{\sigma l}(x) = \sum_{i=0}^{p_\sigma - 1} (A - \lambda_\sigma I)^i v^\mu_{\lambda_\sigma, i}(x) C_{\sigma l} (\sigma = 1, \ldots, s; l = 1, \ldots, p_\sigma; \mu = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

mit den Funktionen $v^\mu_{\lambda_\sigma, i}$ *aus* (13) *bzw.* (13^0) *für* $a = \lambda_\sigma$, $t_a = t_{\sigma,\mu}$.

Beweis. a) Sei zunächst $\theta = D$. Es ist zu zeigen, daß die Vektoren (15) linear unabhängig sind. Die Funktion $v^\mu_{\lambda_\sigma, i}(x)$ ist, wie aus (13) hervorgeht, ein Produkt aus $e^{t_{\sigma,\mu} x}$ und einem Polynom in x vom Grade i. Ferner enthalten alle $v^\mu_{\lambda_\sigma, i}$ für $i > 0$ den Faktor x, während für $i = 0$ bei $e^{t_{\sigma,\mu} x}$ der Faktor 1 steht. Daher lassen sich die Vektoren (15) in der Form

$$U^\mu_{\sigma l}(x) = e^{t_{\sigma,\mu} x}(I + x P_{\sigma,\mu}(x)) C_{\sigma l} \tag{16}$$

schreiben, wo $P_{\sigma,\mu}(x)$ bestimmte $n \times n$-Matrizen bedeuten, deren Elemente Polynome in x sind. Angenommen, es besteht zwischen den Vektoren (16) eine lineare Beziehung

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma,l,\mu} c^\mu_{\sigma l} e^{t_{\sigma,\mu} x}(I + x P_{\sigma,\mu}(x)) C_{\sigma l} \\ &= \sum_{\sigma,\mu} e^{t_{\sigma,\mu} x} Q_{\sigma,\mu}(x) \equiv 0, \quad Q_{\sigma,\mu} = \sum_{l=1}^{p_\sigma} c^\mu_{\sigma l}(I + x P_{\sigma,\mu}) C_{\sigma l} \end{aligned} \tag{17}$$

mit mn Konstanten $c^\mu_{\sigma l}$. Sind dann, wie wir zunächst annehmen wollen, sämtliche Wurzeln $t_{\sigma,\mu}$ voneinander verschieden, so folgt, da die Komponenten der Vektoren $Q_{\sigma,\mu}$ Polynome in x sind, für alle σ, μ die Identität $Q_{\sigma,\mu}(x) \equiv 0$, insbesondere also $Q_{\sigma,\mu}(0) = \sum_l c^\mu_{\sigma l} C_{\sigma l} = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $C_{\sigma l}$ müssen daher alle $c^\mu_{\sigma l}$ verschwinden.

Dasselbe gilt, falls einige der Wurzeln $t_{\sigma,\mu}$ einander gleich sind. Denn anderenfalls gäbe es in (17) eine Konstante $c^\mu_{\sigma l}$, die nicht verschwindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $c^1_{11} \neq 0$ an. Wir bezeichnen die Wurzel $t_{1,1}$ kurz mit t und die Indexpaare σ, μ, für welche $t_{\sigma,\mu} = t$ ist, mit $\alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r$:

$$t_{1,1} = t, \quad t_{\alpha_1,\beta_1} = \ldots = t_{\alpha_r,\beta_r} = t \quad (\alpha_1 = \beta_1 = 1). \tag{18}$$

Da die Wurzeln $t_{\sigma,\mu}$ für ein festes σ untereinander verschieden angenommen wurden, gilt

$$\alpha_\varrho \neq \alpha_\tau \ (\varrho \neq \tau), \qquad r \leqq s. \tag{19}$$

Ordnet man nun in (17) nach *verschiedenen* $t_{\sigma,\mu}$, so folgt durch Nullsetzen des Koeffizientenvektors bei e^{tx} die Identität $\sum_{\varrho=1}^{r} Q_{\alpha_\varrho,\beta_\varrho}(x) \equiv 0$ und für $x = 0$ insbesondere

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \sum_{l=1}^{p_{a_\varrho}} c_{\alpha_\varrho l}^{\beta_\varrho} C_{\alpha_\varrho l} = 0 .$$

Wegen (19) und wegen der linearen Unabhängigkeit der $C_{\alpha_\varrho l}$ müssen in dieser Summe alle Koeffizienten verschwinden, also auch $c_{\alpha_1 1}^{\beta_1} = c_{11}^{1}$, entgegen unserer Annahme.

b) Der somit für $\theta = D$ geführte Beweis stützt sich auf die Formel (16) und die Eigenschaft (19). Die Darstellung (16) gilt aber auch im Falle $\theta = E$, falls in ihr $t_{\sigma,\mu}$ durch $\tau_{\sigma,\mu} = \lg t_{\sigma,\mu}$ ersetzt wird. Andererseits gelten die Relationen (18), (19), wenn für die $t_{\sigma,\mu}$, dann auch für die $\tau_{\sigma,\mu}$. Daher ergibt sich auch für $\theta = E$ die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (15) und Satz II ist vollständig bewiesen.

5. Als Beispiel betrachten wir ein spezielles System von (inhomogenen) Differenzengleichungen ($\theta = E$). Es geht aus (6) hervor, wenn für A die Matrix

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{pmatrix} \tag{20}$$

mit beliebigen reellen Konstanten k_ν, für die Funktionen $p_\tau(u)$ in (5) lineare Polynome und an Stelle des Nullvektors auf der rechten Seite von (6) ein konstanter Vektor R gesetzt werden. Genauer sei

$$p_0(u) = a_0 - b_0 u;\ p_\mu(u) = -(a_\mu + b_\mu u);\ a_0, b_0, a_\mu, b_\mu \geqq 0\ (\mu = 1, \dots, m) \tag{21}$$

und darüber hinaus

$$a_0 = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu , \qquad b = \sum_{\tau=0}^{m} b_\tau \neq 0 . \tag{22}$$

Ferner möge die Diskriminante $D(\lambda_\sigma)$ des Polynoms $\varphi(\lambda_\sigma, t)$ für alle

Eigenwerte λ_σ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ von K und ebenso die Koeffizienten $p_0(\lambda_\sigma)$, $p_m(\lambda_\sigma)$ nicht verschwinden:

$$D(\lambda_\sigma) \neq 0 \;, \qquad (a_0 - b_0\lambda_\sigma)(a_m + b_m\lambda_\sigma) \neq 0 \qquad (\sigma = 1, \ldots, s). \quad (23)$$

Dann sind die Wurzeln $t_{\sigma,\mu}$ der Gleichung $\varphi(\lambda_\sigma, t) = 0$ sicher einfach und keine von ihnen verschwindet.

Das System lautet also ausgeschrieben:

$$(a_0 I - b_0 K)\, U(x + m) = \sum_{\mu=1}^{m} (a_\mu I + b_\mu K)\, U(x + m - \mu) + R\ ^{6)}. \quad (24)$$

Zur Matrix (20) gehört bekanntlich das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = |\, \lambda I - K \,| = \lambda^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} k_{\nu+1} \lambda^\nu \;. \quad (25)$$

Die voneinander verschiedenen Wurzeln λ_σ von $p(\lambda)$ seien so durchnumeriert, daß

$$|\, \lambda_1 \,| \geqq |\, \lambda_2 \,| \geqq \cdots \geqq |\, \lambda_s \,|$$

gilt.

Ferner bilden die (linear unabhängigen) Vektoren $C_{\sigma l}$, definiert durch

$$C_{\sigma l} = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{d\lambda_\sigma^{l-1}} C_{\sigma 1}, \; C'_{\sigma 1} = (1, \lambda_\sigma, \ldots, \lambda_\sigma^{n-1}) \; (l = 1, 2, \ldots p_\sigma), \quad (26)$$

ein geordnetes Hauptvektorsystem, das heißt es gilt

$$(K - \lambda_\sigma I)\, C_{\sigma l} = \begin{cases} 0 & (l = 1) \\ C_{\sigma, l-1} & (1 < l \leqq p_\sigma)\,. \end{cases} \quad (27)$$

Die Gleichungen für $l = 1$ drücken die bekannte Tatsache aus, daß die Vektoren $C_{\sigma 1}$ Eigenvektoren der Matrix K sind[7]). Die übrigen Gleichungen für $l > 1$ ergeben sich leicht durch vollständige Induktion. Differenziert man nämlich die l-te Gleichung nach λ_σ, so erhält man

$$- C_{\sigma l} + (K - \lambda_\sigma I)\, l C_{\sigma, l+1} = (l-1)\, C_{\sigma, l} \;, \quad (K - \lambda_\sigma I)\, C_{\sigma, l+1} = C_{\sigma l} \;,$$

also die entsprechende Gleichung für $l + 1$.

Aus (27) folgt offenbar

$$(K - \lambda_\sigma I)^l C_{\sigma l} = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p_\sigma) \;. \quad (28)$$

---

[6]) Eine praktische Anwendung solcher Systeme findet man in meiner Dissertation „Fehlerabschätzungen für die graphischen Integrationsverfahren von Grammel und Meißner-Ludwig", Verh. Naturforsch. Ges. Basel **64** (1953).

[7]) Vgl. *H. W. Turnbull and A. C. Aitken*, An Introduction to the Theory of Canonical Matrices, 2nd ed., p. 58, wo die Vektoren $C_{\sigma l}$ aus (26) zur Transformation der Matrix (20) auf die Jordansche Normalform verwendet werden.

Wir betrachten nun zuerst die *homogene* Gleichung (24) mit $R = 0$. Satz II gibt die allgemeine Lösung in der Form

$$U(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{l=1}^{p_\sigma} c_{\sigma l}^{\mu} \sum_{i=0}^{p_\sigma - 1} (K - \lambda_\sigma I)^i \, v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu} \, C_{\sigma l} \, ,$$

wo die Funktionen $v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu}$ durch (13^0) für $a = \lambda_\sigma$, $t_a = t_{\sigma,\mu}$ und die Vektoren $C_{\sigma l}$ durch (26) gegeben sind. $c_{\sigma l}^{\mu}$ sind mn beliebige Konstanten (oder periodische Funktionen der Periode 1). Wegen (27) und (28) wird aber

$$U(x) = \sum_{\mu,\sigma} \sum_{l=1}^{p_\sigma} \sum_{i=0}^{l-1} c_{\sigma l}^{\mu} (K - \lambda_\sigma I)^i \, v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu} \, C_{\sigma l} = \sum_{\mu,\sigma} \sum_{l=1}^{p_\sigma} \sum_{i=0}^{l-1} c_{\sigma l}^{\mu} \, v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu} \, C_{\sigma, l-i}$$

$$= \sum_{\mu,\sigma} \sum_{l=1}^{p_\sigma} \sum_{j=1}^{l} c_{\sigma l}^{\mu} \, v_{\lambda_\sigma, l-j}^{\mu} \, C_{\sigma j} \, .$$

Vertauscht man hier die beiden inneren Summationen und ersetzt man hinterher l durch den neuen Summationsindex $i = l - j$, so wird

$$U(x) = \sum_{\mu,\sigma} \sum_{j=1}^{p_\sigma} \sum_{i=0}^{p_\sigma - j} c_{\sigma, i+j}^{\mu} \, v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu} \, C_{\sigma j} \, .$$

Daher ist

$$U(x) = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{j=1}^{p_\sigma} w_{\sigma j}(x) \, C_{\sigma j} \, , \qquad w_{\sigma j}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{i=0}^{p_\sigma - j} c_{\sigma, i+j}^{\mu} \, v_{\lambda_\sigma, i}^{\mu}(x) \tag{29}$$

die *allgemeine Lösung* der zu (24) *homogenen* Gleichung.

Es sei nun im *inhomogenen* Fall $R \neq 0$ zunächst $\lambda_s \neq 0$. Dann kann als Partikulärlösung von (24) ein konstanter Vektor P angesetzt werden. Man erhält für P, unter Berücksichtigung von (22), die Gleichung $\varphi(K, 1)\, P = -bKP = R$, also, da K^{-1} existiert, $P = -\frac{1}{b} K^{-1} R$.

Ist hingegen $\lambda_s = 0$ mit der Vielfachheit $p = p_s$, so folgt aus (25), daß $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$, $k_{p+1} \neq 0$ gilt. K hat daher die Gestalt

$$K = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hline & & 0 & & & & K_{n-p} & \end{array} \right), \quad K_{n-p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{p+1} & k_{p+2} & \ldots & k_n \end{pmatrix}, \quad k_{p+1} \neq 0 . \tag{30}$$

Die Funktionen $\omega_i(x)$ mögen den rekursiven Relationen

$$a_0\omega_0(x+m) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \omega_0(x+m-\mu) + 1\,, \tag{31}$$

$$a_0\omega_i(x+m) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \omega_i(x+m-\mu) + \sum_{\tau=0}^{m} b_\tau \omega_{i-1}(x+m-\tau) \quad (i=1,2,\ldots)$$

genügen, die kürzer in der Form

$$\varphi(0,E)\,\omega_0 = 1\;,\qquad \varphi(0,E)\,\omega_i + \varphi_1(0,E)\,\omega_{i-1} = 0$$

geschrieben werden können. Ferner sei $\Omega(x)$ die Matrix

$$\Omega(x) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \omega_0 & \omega_1 & \ldots & \omega_{p-1} & -\omega_{p-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \omega_0 & \ldots & \omega_{p-2} & -\omega_{p-2} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \omega_0 & -\omega_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline & & 0 & & & -\frac{1}{b} I_{n-p} & & \end{array}\right). \tag{32}$$

Dann ist

$$U(x) = P(x)R\;,\qquad P(x) = \Omega(x)\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & K_{n-p}^{-1}\end{pmatrix} \tag{33}$$

eine *partikuläre Lösung* der *inhomogenen* Gleichung (24).

Für $p=0$, das heißt $\lambda_s \neq 0$, ergibt sich aus (33) die bereits gefundene Lösung $-\frac{1}{b}K^{-1}R$. Zum Beweis von (33) genügt es offenbar, die Matrixgleichung

$$\varphi(K,E)\,\Omega = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & K_{n-p}\end{pmatrix} \tag{34}$$

nachzuweisen. (34) folgt sofort durch Anwendung des Operators

$$\varphi(K,E) = \varphi(0,E) + \varphi_1(0,E)\,K$$

auf die Matrix (32), wenn dabei die Relationen (31) berücksichtigt werden.

Ein Funktionensystem $\omega_i(x)$ kann durch sukzessive Auflösung der Relationen (31) gewonnen werden. Hierzu sind fortwährend lineare, inhomogene Differenzengleichungen aufzulösen, denen das charakteristische Polynom

$$\varphi(0,t) = a_0 t^m - \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu t^{m-\mu}$$

gemeinsam ist. Dieses hat wegen (22) und (23) die einfache Wurzel $t = 1$:

$$\varphi(0, t) = (t - 1)\,\varphi^*(t)\,, \quad \varphi^*(1) \neq 0\,.$$

Bildet man die Entwicklung

$$1/\varphi^*(1 + t) = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots \qquad (\gamma_0 \neq 0)$$

und ist B der Operator $B = \sum_{\tau=0}^{m} b_\tau E^{m-\tau}$, so kann zum Beispiel

$$\omega_i(x) = B\Delta^{-1} \sum_{\nu=0}^{i} \gamma_\nu \Delta^\nu \omega_{i-1}(x)\,, \quad \omega_0 = \gamma_0 x \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{35}$$

gesetzt werden[8]. $\Delta^{-1}g(x)$ bedeutet dabei irgend eine Funktion, deren Differenz $g(x)$ ist. Wählt man in (35) insbesondere $\Delta^{-1}x = \binom{x}{2}$, $\Delta^{-1}\binom{x}{2} = \binom{x}{3}$ usw., so ist durch (35) die Funktionenfolge ω_i eindeutig bestimmt. Die ersten dieser Funktionen lauten

$$\omega_0(x) = \gamma_0 x\,, \qquad \omega_1(x) = \gamma_0 B\left\{\gamma_0\binom{x}{2} + \gamma_1 x\right\},$$

$$\omega_2(x) = \gamma_0 B^2\left\{\gamma_0^2\binom{x}{3} + 2\gamma_0\gamma_1\binom{x}{2} + (\gamma_1^2 + \gamma_0\gamma_2)\,x\right\}, \quad \text{usw.}$$

(Eingegangen den 15. Juli 1953.)

[8] *L. M. Milne-Thomson*, The Calculus of Finite Differences, London 1933, p. 392 ff.