Lineare Differenzgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

Autor(en): **Jost, Res**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **28 (1954)**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22618

Lineare Differenzengleichungen mit periodischen Koeffizienten

von Res Jost, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey

Herrn Prof. Dr. W. Scherrer zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Wir betrachten im folgenden lineare Differenzengleichungen, deren Koeffizienten periodische Funktionen sind, und zwar besitzen sie Perioden, die ein Multiplum der Spanne sind. Weiter sind die Koeffizienten aus einem bestimmten Funktionenkörper gewählt. Sie sind insbesondere meromorphe Funktionen der unabhängigen Variablen. Das Hauptgewicht der Untersuchung liegt auf den funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen. Diese werden zum Beispiel dadurch eingeschränkt, daß sie selbst auch meromorphe Funktionen sein sollen.

Die Literatur über diesen Gegenstand scheint recht spärlich zu sein. So gibt zum Beispiel der bekannte Existenzbeweis[1]) für die Lösungen linearer Differenzengleichungen in unserem Fall im allgemeinen durchaus nicht meromorphe Lösungen.

Der Verfasser sah sich zu dieser Untersuchung veranlaßt durch den Umstand, daß gewisse Integralgleichungen auf derartige Differenzengleichungen (und entsprechende funktionentheoretische Einschränkungen für die Lösungen) führen. Er hofft, auf diesen Zusammenhang später zurückzukommen.

Weiter glaubt sich der Verfasser, der nicht vom Fache ist, entschuldigen zu müssen, wenn seine Methoden etwas antiquiert sind und seine Behandlung des Problems lückenhaft ist.

§ 1. Der einfachste Fall mit Periode 1

Die Differenzengleichung, die wir in diesem Paragraphen lösen werden, ist von der Form

$$\sum_{k=0,1,2,\dots,r} a_k(z) H(z+k) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Ihre Koeffizienten $a_k(z)$ seien meromorphe Funktionen der Periode 1.

---

[1]) *N. E. Nörlund,* Differenzenrechnung, Berlin 1924, p. 273 ff.

Wir wollen die Koeffizienten durch die folgenden Forderungen weitgehend einschränken.

1. Einschränkung. $a_k(z)$ seien *rationale Funktionen* von $v = e^{2\pi i z}$. Bezeichnen wir den Funktionenkörper dieser rationalen Funktionen mit $\mathfrak{k}$ und führen wir den Translationsoperator t ein

$$tf(z) = f(z+1) \ , \tag{1.2}$$

dann läßt sich (1.1) auch schreiben

$$P(t)H(z) = 0 \ , \tag{1.3}$$

wo $P(\lambda)$ ein Polynom über $\mathfrak{k}$ ist.

Es ist eine besondere Annehmlichkeit dieses einfachsten Falles, daß t mit den Elementen von $\mathfrak{k}$ vertauscht.

2. Einschränkung. $P(\lambda)$ soll irreduzibel sein über $\mathfrak{k}$. An dieser zweiten Einschränkung halten wir durch diesen ganzen Paragraphen fest. Im nächsten Paragraphen werden wesentlich allgemeinere Gleichungen auf die hier gelösten Gleichungen zurückgeführt. Die nun folgenden zwei Einschränkungen werden nur vorübergehend gemacht.

3. Einschränkung. Die durch $P(w) = 0$ definierte algebraische Funktion $w(v)$ habe weder über $v = 0$ noch über $v = \infty$ einen Verzweigungspunkt. Es ist leicht zu sehen, daß diese 3. Einschränkung zur folgenden Folgerung Anlaß gibt:

Folgerung. $P(\lambda)$ ist irreduzibel über jedem Körper

$$\mathfrak{k}_\nu \equiv \mathfrak{k}\,(e^{\frac{2\pi i z}{\nu}}), \quad \nu \text{ ganz.}$$

Schließlich fordern wir der Bequemlichkeit halber die

4. Einschränkung. Die Werte von w über den Punkten $v = 0$ und $v = \infty$ seien endlich und von Null verschieden.

Die Singularitäten von (1) werden wie folgt definiert: es ist offenbar möglich, durch passende Multiplikation mit einem Polynom in v, die Koeffizienten von (1) zu teilerfremden Polynomen $p_k(v)$ von v zu machen:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{r} p_k(v)H(z+k) = 0 \\ &(p_0, p_1, \ldots, p_r) = 1 \end{aligned}\right\} . \tag{1.1'}$$

Definition. Die Nullstellen von $p_0(e^{2\pi i z})$ und $p_r(e^{2\pi i z})$ heißen die

Singularitäten von (1). Jetzt können wir genauer festlegen, welche Anforderungen wir an die Lösung $H(z)$ machen wollen:

1. Bedingung. $H(z)$ soll meromorph sein.

2. Bedingung. $H(z)$ soll Pole nur in den Singularitäten von (1) besitzen.

Die 3. Bedingung soll ein unvernünftiges Verhalten von $H(z)$ für großen $|Im\,[z]|$ ausschließen.

3. Bedingung. Falls $Im\,[z]>N, N<\infty$, so soll $H(z)$ wie folgt darstellbar sein:

$$H(z)=\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{P}_k(v)e^{z\log w_k(v)} \tag{1.4}$$

und analog für $Im\,[z]<-N', N'<\infty$

$$H(z)=\sum_{k=1}^{r}\mathfrak{P}'_k(v^{-1})e^{z\log w'_k(v^{-1})}\,. \tag{1.4'}$$

Dabei sind $w_k(v)$ die r verschiedenen Lösungen von

$$P(w)=0 \tag{1.5}$$

in der Umgebung von $v=0$.

$w'_k(v^{-1})$ die Lösungen von (1.5) in der Umgebung von $v=\infty$. $\mathfrak{P}_k(\lambda)$ und $\mathfrak{P}'_k(\lambda)$ sind konvergente Potenzreihen, die nur endlich viele negative Potenzen enthalten.

Unser Ziel ist es, eine solche Lösung von (1.1) zu konstruieren. Doch, bevor wir dazu übergehen, eine Bemerkung. Es sei $H(z)$ eine meromorphe Lösung von (1.1). Dann gilt der folgende

Satz 1.1. $H(z), H(z+1),\ldots,H(z+r-1)$ bilden ein fundamentales Lösungssystem von (1.1). Die Wronskische Determinante

$$\operatorname{Det}\|H(z+i+k)\|$$

$i=0,1,2,\ldots,r-1$; $k=0,1,2,\ldots,(r-1)$ verschwindet nicht identisch in z.

Verschwände nämlich die Wronskische Determinante, dann ließen sich periodische Funktionen der Periode 1 so finden, daß

$$\sum_{k=0}^{r-1}\alpha_k(z)H(z+k)=0\ . \tag{1.6}$$

Die $\alpha_k(z)$ kann man dabei als meromorph voraussetzen. Wir können (1.6) auch schreiben

$$P_1(t)H(z) = 0 \ , \tag{1.6'}$$

wobei $P_1(\lambda)$ ein Polynom mit periodischen, meromorphen Koeffizienten ist. Ist $P_2(\lambda)$ der G. G. T. von $P(\lambda)$ und $P_1(\lambda)$, dann gilt offenbar auch

$$P_2(t)H(z) = 0 \ . \tag{1.7}$$

Da aber $P(\lambda)$ irreduzibel ist (auch über dem Körper der meromorphen Funktionen der Periode 1 schlechtweg), sind wir auf einen Widerspruch gestoßen.

Nun zur Lösung: Dazu leiten wir aus (1.1) zunächst eine Hilfsgleichung 1. Ordnung ab. $\mathfrak{F}$ [mit den Punkten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$] sei das durch (1.5) definierte analytische Gebilde (w, z). Gemäß Einschränkung 2 und 3 ist $\mathfrak{F}$ zusammenhängend. Außerdem gestattet $\mathfrak{F}$ Translationen, die definiert sind durch

$$tz = z + 1 \qquad tw = w \ . \tag{1.8}$$

Ist $f(\mathfrak{p})$ eine Funktion auf $\mathfrak{F}$, dann verstehen wir unter

$$tf(\mathfrak{p}) = f(t\mathfrak{p}) \ . \tag{1.9}$$

Wir werden zunächst die folgende Hilfsgleichung lösen:

$$t\mathfrak{H}(\mathfrak{p}) = w\mathfrak{H}(\mathfrak{p}) \ , \tag{1.10}$$

und zwar durch eine auf $\mathfrak{F}$ eindeutige, meromorphe Funktion $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$, die Pole höchstens besitzt in den Polen und Nullstellen von $w(\mathfrak{p})$ und die über den Punkten $v = 0$ und $v = \infty$ ein später zu definierendes Verhalten zeigt. Jede Lösung von (1.10) ist offenbar Lösung von (1.1). Aus einer Lösung von (1.10) erhalten wir eine Lösung von (1.1), die den Bedingungen 1 und 2 genügt, durch die Vorschrift:

$$H(z) = \sum_{\mathfrak{p}_z} \mathfrak{H}(\mathfrak{p}_z) \ , \tag{1.11}$$

wobei $\mathfrak{p}_z$ über alle Punkte von $\mathfrak{F}$ läuft, die über z liegen.

Bevor wir zur Lösung von (1.10) schreiten, einige Bemerkungen. Eindeutige Funktionen auf $\mathfrak{F}$ mit der Eigenschaft

$$tf(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p}) \tag{1.12}$$

nennen wir periodisch. Periodische Funktionen sind offenbar eindeutige Funktionen auf dem über den Punkten $v = 0$ und $v = \infty$ punktierten algebraischen Gebilde (v, w), das durch (1.5) definiert ist. Dieses Gebilde sei mit $\mathfrak{F}_0$, seine Punkte mit $\mathfrak{p}^0, \mathfrak{q}^0, \ldots$ bezeichnet. Mit $\overline{\mathfrak{F}}_0$ bezeichnen wir das durch (1.5) definierte geschlossene algebraische Gebilde (v, w). Was eben über Funktionen gesagt wurde, gilt auch für Differentiale. Unter einem *Periodenstreifen* von $\mathfrak{F}$ verstehen wir ein Fundamentalgebiet der durch t erzeugten Gruppe. Wir können von einem linken oder rechten Randpunkt des Periodenstreifens sprechen, je nachdem mit $\mathfrak{p}$ auch $t\mathfrak{p}$ oder $t^{-1}\mathfrak{p}$ Randpunkt ist.

Nun seien $\mathfrak{q}_e$ die Pole des Differentials $d \log w(\mathfrak{p})$, die in einem bestimmten und im folgenden festgehaltenen Periodenstreifen liegen. S_e seien die zugehörigen Residuen. Dann gilt der folgende

Hilfssatz 1.1. Es ist

$$-2\pi i \sum S_e z(\mathfrak{q}_e) + \sum_k \log w(\mathfrak{q}^0_{0,k}) - \sum_k \log w(\mathfrak{q}^0_{\infty,k}) \equiv 0 \bmod (2\pi i)\,. \quad (1.13)$$

Dabei sind $\mathfrak{q}^0_{0,k}$ die Punkte von $\overline{\mathfrak{F}}_0$ die über $v = 0$, $\mathfrak{q}^0_{\infty,k}$ diejenigen, die über $v = \infty$ liegen. Man kann über die Logarithmen so verfügen, daß (1.13) eine Gleichung wird.

Beweis. Man integriere $z d \log w$ um die Begrenzung eines Periodenstreifens, die entsteht durch den Rand des Periodenstreifens und eine kanonische Zerschneidung im Innern des Periodenstreifens[2]).

Jetzt sind wir in der Lage, (1.10) zu lösen.
Es sei

$$\sigma(\mathfrak{p}) = d \log \mathfrak{H}(\mathfrak{p}) \quad (1.14)$$

$$\eta(\mathfrak{p}) = d \log w(\mathfrak{p}) \quad (1.15)$$

dann aus (1.8):

$$t\sigma(\mathfrak{p}) = \sigma(\mathfrak{p}) + \eta(\mathfrak{p}) \quad (1.16)$$

oder

$$\sigma(\mathfrak{p}) = z\eta(\mathfrak{p}) + \varrho(\mathfrak{p})\,, \quad (1.17)$$

wobei

$$t\varrho(\mathfrak{p}) = \varrho(\mathfrak{p})\,. \quad (1.18)$$

Also ist $\varrho(\mathfrak{p})$ ein Differential auf $\mathfrak{F}_0$. Da $\sigma(\mathfrak{p})$ als logarithmisches Differential einer meromorphen Funktion nur Pole erster Ordnung haben soll, gilt dasselbe auch für $\varrho(\mathfrak{p})$. Dadurch, daß wir diese Forderung auf $\overline{\mathfrak{F}}_0$ ausdehnen, erhalten wir die oben angekündigte Bedingung über das Verhalten von $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ über $v = 0$ und $v = \infty$.

---

[2]) Siehe zum Beispiel *P. Appell et E. Goursat*, Théorie des Fonctions Algébriques..., Paris 1929, Ch. III und Ch. VII.

$\varrho(\mathfrak{p})$ ist daher ein Abelsches Differential 3. Art. Im folgenden beschränken wir uns auf den Periodenstreifen, oder, was dasselbe ist, auf das längs gewissen Wegen aufgeschnittene Gebilde $\mathfrak{F}_0$. (Zum Beispiel sollen alle Integrationswege in diesem Periodenstreifen liegen.) Nun hat $\varrho(\mathfrak{p})$ die Aufgabe, die Residuen von $\sigma(\mathfrak{p})$ ganzzahlig zu machen. Nach dem Hilfssatz kann das bei geeigneter Verfügung über $\log w(\mathfrak{p})$ durch ein Differential 3. Art geschehen, das an den Stellen

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{q}_e^0 & \text{das Residuum } -S_e z(\mathfrak{q}_e) \\ \mathfrak{q}_{0,k}^0 & \text{das Residuum } \dfrac{1}{2\pi i}\log w(\mathfrak{q}_{0,k}^0) \\ \mathfrak{q}_{\infty,k}^0 & \text{das Residuum } -\dfrac{1}{2\pi i}\log w(\mathfrak{q}_{\infty,k}^0) \end{array}\right] \to \varrho_1(\mathfrak{p}) \tag{1.19}$$

besitzt. Nach (1.13) existiert ein solches Differential. Bezeichnen wir es mit $\varrho_1(\mathfrak{p})$ und spalten wir $\varrho(\mathfrak{p})$ auf:

$$\varrho(\mathfrak{p}) = \varrho_1(\mathfrak{p}) + \varrho_2(\mathfrak{p}) \ . \tag{1.20}$$

Was haben wir dadurch nun in der Umgebung eines Punktes $\mathfrak{q}_{0,k}^0$ gewonnen? Integrieren wir $z\eta + \varrho_1$ in dieser Umgebung:

$$\begin{aligned} \int (z\eta + \varrho_1) &= z \log w - \int (\log w \, dz - \varrho_1) \\ &= z \log w - \int\left(\frac{1}{2\pi i}\log w \frac{dv}{v} - \varrho_1\right) . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Nach (1.19) aber und nach Einschränkung 3. und 4. ist das letzte Integral eine reguläre Funktion von v. Insbesondere ist

$$\int_{z_0}^{z_0+1} (z\eta + \varrho_1) = \log w \ , \tag{1.22}$$

das heißt in der Umgebung von $\mathfrak{q}_{0,k}^0$ (und von $\mathfrak{q}_{\infty,k}^0$) löst $\exp \int^{\mathfrak{p}} (z\eta + \varrho_1)$ die Differenzengleichung (1.10) [wenigstens in den Randpunkten des abgeschlossenen Periodenstreifens]. Die Funktion besitzt aber noch im allgemeinen von 1 verschiedene Multiplikatoren zu den Rückkehrschnitten im Periodenstreifen. Diese Multiplikatoren sollen durch Wahl von ϱ_2 zu 1 gemacht werden. Das ist aber nach dem folgenden Satz immer möglich[3]:

Satz. Zu jedem System $\mu_1 \ldots \mu_p$, $\nu_1 \ldots {}_p$ von endlichen, nichtverschwindenden Multiplikatoren zu einer Basis $a_1 \ldots a_p$, $b_1 \ldots b_p$ von

[3]) Etwa *H. Weyl,* Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig und Berlin 1923, § 17.

Rückkehrschnitten auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche vom Geschlecht p gibt es eine meromorphe Funktion $\varphi(\mathfrak{p}^0)$ mit p Polen und p Nullstellen. Die Lage der Pole kann man beliebig vorgeben. Die Lage der Nullstellen ist durch das Jacobische Umkehrproblem bestimmt.

Legt man also die Pole in die Pole von $\eta(\mathfrak{p})$ und identifiziert man die Multiplikatoren mit den reziproken Multiplikatoren von

$$\exp \int (z\eta + \varrho_1)$$

dann hat man nur zu setzen

$$\varrho_2(\mathfrak{p}) = d \log \varphi(\mathfrak{p}) \ . \tag{1.23}$$

Durch unsere Vorschriften ist $\varrho(\mathfrak{p})$ bis auf das logarithmische Differential einer algebraischen Funktion auf $\overline{\mathfrak{F}}_0$ bestimmt [4]).

Setzt man

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{p}) = e^{\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} (z\eta + \varrho)} \tag{1.24}$$

so ist nun $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ im abgeschlossenen Periodenstreifen eindeutig. Liegt $\mathfrak{p}$ auf dem linken Rand, dann gilt (1.10). Setzen wir $\mathfrak{H}(\mathfrak{p})$ nach (1.10), also in den rechts benachbarten Periodenstreifen fort, so ist diese Fortsetzung stetig und daher analytisch. So fortfahrend erhalten wir das Resultat, daß (1.24) eine allen Bedingungen genügende Lösung von (1.10) ist. Es ist natürlich leicht, über die in ϱ unbestimmt gebliebene algebraische Funktion so zu verfügen, daß der Ausdruck (1.11) sicher nicht identisch verschwindet [man kann zum Beispiel immer erreichen, daß (1.11) einen Pol hat]. Das so gefundene $H(z)$ erfüllt offenbar die 1. und 2. Bedingung. Daß es auch die 3. Bedingung erfüllt, folgt aus (1.21). Gemäß *Satz* 1.1 aber ist dadurch auch die Existenz eines den Bedingungen 1 bis 3 genügenden Fundamentalsystems gesichert.

Es ist leicht, zu erkennen, daß das Weglassen der 4. Einschränkung in der durchgeführten Konstruktion und der 3. Bedingung nur zu unwesentlichen Änderungen Anlaß gibt. Wesentlich ist es, die 3. Einschränkung zu eliminieren.

---

[4]) Sind also $\mathfrak{H}_1(\mathfrak{p})$ und $\mathfrak{H}_2(\mathfrak{p})$ zwei Lösungen von (1.10), die nach dem angegebenen Verfahren konstruiert sind, dann gilt immer

$$\mathfrak{H}_2(\mathfrak{p}) = \Big(\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k(z) w^k(\mathfrak{p})\Big)\, \mathfrak{H}_1(\mathfrak{p}) \ ,$$

wobei $\alpha_k(z) \in \mathfrak{k}$. Mit (1.10) und (1.11) also

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k(z) H_1(z+k) \ ,$$

was man mit *Satz* 1.1 zu vergleichen hat.

Ich möchte kurz skizzieren, wie man dann zu verfahren hat.

Es sei also $P(\lambda)$ irreduzibel über $\mathfrak{k}$, habe aber Verzweigungspunkte über $v = 0$ oder $v = \infty$. Nun bestimme man m derart, daß die sämtlichen Funktionselemente von $w(v)$ über $v = 0$ und $v = \infty$ sich als Potenzreihen in $v' = e^{\frac{2\pi i}{m} z}$ resp. $v'^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{m} z}$ darstellen lassen. Dann definiere man

$$P_n(\lambda) = P(e^{\frac{2\pi i}{m} n} \lambda) \ . \tag{1.25}$$

Die Lösungen von

$$P_n(t) H_n(z) = 0 \tag{1.26}$$

sind

$$H_n(z) = e^{-\frac{2\pi i}{m} nz} H(z) \ . \tag{1.27}$$

Weiter ist das Polynom $P_0(\lambda) P_1(\lambda) \ldots P_{m-1}(\lambda)$ offenbar ein Polynom in λ^m:

$$\prod_{n=0}^{m-1} P_n(\lambda) = Q(\lambda^m) \ . \tag{1.28}$$

$Q(\Lambda)$ ist die Potenz eines irreduziblen Polynoms über $\mathfrak{k}$

$$Q(\Lambda) = [Q_0(\Lambda)]^\mu \ . \tag{1.29}$$

$Q_0(\Lambda)$ ist definiert als das Polynom kleinsten Grades für welches $Q_0(\lambda^m)$ durch $P(\lambda)$ teilbar ist. Definiert man den Translationsoperator T durch

$$T f(z) = f(z + m) \ . \tag{1.30}$$

Dann ist jede Lösung von (1.1) auch Lösung von

$$Q_0(T) K(z) = 0 \ . \tag{1.31}$$

Nun kann $Q_0(\Lambda)$ über dem Körper $\mathfrak{k}_m$ zerfallen. Es sei $\bar{Q}_0(\Lambda)$ ein irreduzibler Faktor. Betrachtet man dann die Gleichung

$$\bar{Q}_0(T) \bar{K}(z) = 0 \ , \tag{1.32}$$

so ist $\bar{K}(z)$ auch eine Lösung von (1.31). Nach der Substitution $z' = \frac{z}{m}$ erfüllt $\bar{Q}_0(\Lambda)$ die Einschränkungen 1, 2 und 3 aus dem Anfang dieses Paragraphen. Die Gleichung (1.32) kann also gemäß der angegebenen Konstruktion gelöst werden. Nun suchen wir das Polynom kleinsten Grades über $\mathfrak{k}$, für welches gilt

$$\bar{P}(t) \bar{K}(z) = 0 \ . \tag{1.33}$$

Nach (1.30) und (1.31) gibt es ein solches Polynom. $\bar{P}(\lambda)$ ist offenbar ein Teiler von $Q_0(\lambda^m)$ und daher von $Q(\lambda^m)$. (28) stellt aber die Zerlegung von $Q(\lambda^m)$ in irreduzible Faktoren über $\mathfrak{k}$ dar. Daher gilt:

$$\prod_{i=1}^{\alpha} P_{n_i}(t)\overline{K}(z) = 0 \ , \tag{1.34}$$

aber

$$\prod_{i=2}^{\alpha} P_{n_i}(t)\ \overline{K}(z) = H_{n_1}(z) \neq 0 \ . \tag{1.35}$$

Aus (1.34) und (1.35)

$$P_{n_1}(t) H_{n_1}(z) = 0 \tag{1.36}$$

und nach (1.27)

$$H(z) = e^{\frac{2\pi i}{m} n_1 z} H_{n_1}(z) \ . \tag{1.37}$$

Damit ist (1.1) gelöst.

Schließlich wollen wir als Vorbereitung für den nächsten Paragraphen noch den folgenden Satz anführen:

Satz 1.2. Ist $H(z)$ eine meromorphe Lösung von (1.1), dann bilden die Funktionen

$$z^\alpha t^\beta H(z) \qquad \begin{array}{l} \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, r-1 \end{array}$$

ein Fundamentalsystem der Gleichung

$$[P(t)]^n H(z) = 0 \ . \tag{1.38}$$

Der Beweis ist trivial [5]).

§ 2. Fall beliebiger ganzzahliger Periode

Es ist im folgenden bequemer, sich auf ein System erster Ordnung von Differenzengleichungen zu beziehen. Weiter wollen wir die Abmachung treffen, Elemente des Körpers $\mathfrak{k}$ mit kleinen Buchstaben a, b, $c \ldots$,; Elemente des Körpers $\mathfrak{k}_\nu$ ($\nu \geq 1$ ganz und fest) mit großen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ zu bezeichnen.

$\boldsymbol{y}(z)$ sei der Vektor $(y_1(z), \ldots, y_n(z))$; seine Elemente gehören nicht notwendig einem der Körper $\mathfrak{k}$ oder $\mathfrak{k}_\nu$ an,

$$\boldsymbol{M} \text{ die nicht singuläre Matrix } \| M_{ik}(z) \| \ ; \ M_{ik} \in \mathfrak{k}_\nu \ .$$

Zu lösen sei dann die Differenzengleichung

$$\boldsymbol{y}(z+1) = \boldsymbol{M}(z)\boldsymbol{y}(z) \ . \tag{2.1}$$

[5]) *N. E. Nörlund,* l. c. p. 295.

Natürlich ist

$$M(z+\nu) = M(z) \; . \tag{2.2}$$

Weiter soll $y(z)$ meromorph sein. Weitere Einschränkungen ergeben sich im Verlauf der Lösung von selbst. Es ist natürlich, die folgende Gruppe $\mathfrak{G}$ von nichtsingulären linearen Transformationen zuzulassen:

$$\bar{y}(z) = S(z)\, y(z)\, ; \qquad S_{ik}(z) \in \mathfrak{k}_\nu \tag{2.3}$$

(2.1) transformiert sich dann in

$$\bar{y}(z+1) = \bar{M}(z)\, \bar{y}(z) \tag{2.4}$$

mit

$$\bar{M}(z) = \bar{S}^{-1}(z+1)\, M(z)\, S(z) \; . \tag{2.5}$$

Fragen wir uns nach den Invarianten von (2.1) unter $\mathfrak{G}$. Dazu betrachte man die aus (2.1) folgende Hilfsgleichung:

$$y(z+\nu) = \mathfrak{M}(z)\, y(z) \; , \tag{2.6}$$

wobei

$$\mathfrak{M}(z) = M(z+\nu-1)\, M(z+\nu-2) \ldots M(z+1)\, M(z) \; . \tag{2.7}$$

Bei der Transformation $S \in \mathfrak{G}$ transformiert sich $\mathfrak{M}(z)$ nach

$$\bar{\mathfrak{M}}(z) = S^{-1}(z)\, \mathfrak{M}(z)\, S(z) \; . \tag{2.8}$$

Daraus folgt unmittelbar

Satz 2.1. Die Elementarteiler $e_k(\lambda)$ von $\mathfrak{M}(z) - \lambda 1$ sind Invarianten bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$. Sie sind außerdem Polynome über $\mathfrak{k}$.

Die letzte Behauptung folgt aus

$$\mathfrak{M}(z+1) = M(z)\, \mathfrak{M}(z)\, M^{-1}(z) \; . \tag{2.9}$$

Gemäß Satz (2.1) kann man ein $S_0 \in \mathfrak{G}$ so finden, daß

$$\mathfrak{m}_0(z) = S_0^{-1}(z)\, \mathfrak{M}(z)\, S_0(z) \in \mathfrak{k} \tag{2.10}$$

die erste Normalform annimmt[6]). Nach Ausführung dieser Transformation, sagen wir, daß (2.1) und damit $M(z)$ auf Normalform transformiert ist.

Nun gilt die folgende Umkehrung von Satz 2.1:

Satz 2.2. Zwei Matrizen $M(z)$ und $N(z)$ mit denselben Invarianten $e_k(\lambda)$ sind bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ äquivalent.

---

[6]) *B. L. van der Waerden*, Moderne Algebra, Berlin 1940, Bd. II, § 111.

Zum Beweis haben wir zu zeigen, daß es ein $\boldsymbol{S}(z) \in \mathfrak{G}$ so gibt, daß

$$\boldsymbol{N}(z) = \boldsymbol{S}^{-1}(z+1)\, \boldsymbol{M}(z)\, \boldsymbol{S}(z) \;. \tag{2.11}$$

Außerdem können wir von vornherein annehmen, daß $\boldsymbol{N}(z)$ und $\boldsymbol{M}(z)$ die Normalform haben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}(z+\nu-1)\, \boldsymbol{N}(z+\nu-2) \;\ldots\; \boldsymbol{N}(z+1)\, \boldsymbol{N}(z) &= \mathfrak{m}_0(z) \\ \boldsymbol{M}(z+\nu-1)\, \boldsymbol{M}(z+\nu-2) \ldots \boldsymbol{M}(z+1)\, \boldsymbol{M}(z) &= \mathfrak{m}_0(z) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Schreiben wir (2.9) als Differenzengleichung für $S(z)$:

$$\boldsymbol{S}(z+1) = \boldsymbol{M}(z)\, \boldsymbol{S}(z)\, \boldsymbol{N}^{-1}(z) \;, \tag{2.13}$$

so können wir davon unmittelbar eine Lösung angeben:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}(z) = \boldsymbol{A}(z) &+ \boldsymbol{M}(z-1)\, \boldsymbol{A}(z-1)\, \boldsymbol{N}^{-1}(z-1) \\ &+ \boldsymbol{M}(z-1)\, \boldsymbol{M}(z-2)\, \boldsymbol{A}(z-2)\, \boldsymbol{N}^{-1}(z-2)\, \boldsymbol{N}^{-1}(z-1) \\ &+ \ldots \\ &+ \boldsymbol{M}(z-1) \ldots \boldsymbol{M}(z-\nu+1)\, \boldsymbol{A}(z-\nu+1)\, \boldsymbol{N}^{-1}(z-\nu+1) \\ &\qquad \ldots \boldsymbol{N}^{-1}(z-1) \;, \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei $\boldsymbol{A}(z) = \| A_{ik}(z) \|$; $A_{ik} \in \mathfrak{k}_\nu$ nur der Bedingung

$$\mathfrak{m}_0(z)\, \boldsymbol{A}(z)\, \mathfrak{m}_0^{-1}(z) = \boldsymbol{A}(z) \tag{2.15}$$

zu genügen hat.

Es ist immer möglich über $\boldsymbol{A}(z)$ so zu verfügen, daß $\boldsymbol{S}(z)$ nicht singulär wird. Es genügt zum Beispiel $\boldsymbol{A}(z)$ so zu wählen, daß Det $\| \boldsymbol{S}(z) \|$ an einer Stelle einen Pol hat.

Es ist von Bedeutung, daß wir die Invarianten $e_k(\lambda)$ auch noch in unabhängiger Weise gewinnen können. Zu diesem Zweck schreiben wir (2.1) für ein Fundamentalsystem, das heißt für eine nicht singuläre Lösungsmatrix $\boldsymbol{Y}(z)$:

$$\boldsymbol{Y}(z+1) = \boldsymbol{M}(z)\, \boldsymbol{Y}(z) \;. \tag{2.16}$$

Sind $\boldsymbol{Y}_1(z)$ und $\boldsymbol{Y}_2(z)$ zwei solche Lösungsmatrizen, so ist offenbar

$$\boldsymbol{Y}_1^{-1}(z)\, \boldsymbol{Y}_2(z) = \tilde{\boldsymbol{s}}(z) \tag{2.17}$$

eine Matrix mit meromorphen Elementen, und es gilt

$$\tilde{\boldsymbol{s}}\,(z+1) = \tilde{\boldsymbol{s}}\,(z) \;. \tag{2.18}$$

Ohne Einschränkung über $\boldsymbol{Y}(z)$ folgt aber nicht, daß $s_{ik}(z) \in \mathfrak{k}$. Wir bezeichnen allgemein meromorphe Funktionen der Periode 1, die nicht notwendig Elemente von $\mathfrak{k}$ sind, mit einer Tilde. Nun folgt aber weiter aus (2.2) und (2.17):

$$\boldsymbol{Y}(z+\nu) = \boldsymbol{Y}(z)\,\tilde{\mathfrak{n}}(z)\ , \tag{2.19}$$

aber aus (2.6)

$$\boldsymbol{Y}(z+\nu) = \mathfrak{M}(z)\,\boldsymbol{Y}(z) \tag{2.20}$$

oder

$$\tilde{\mathfrak{n}}(z) = \boldsymbol{Y}^{-1}(z)\,\mathfrak{M}(z)\,\boldsymbol{Y}(z)\ , \tag{2.21}$$

daraus aber

Satz 2.3. $\tilde{\mathfrak{n}}(z) - \lambda 1$ hat die Elementarteiler $e_k(\lambda)$

und

Satz 2.4. Ist $\boldsymbol{H}(z)$ eine nichtsinguläre Lösungsmatrix des Systems

$$\boldsymbol{H}(z+\nu) = \boldsymbol{H}(z)\,\mathfrak{m}_0(z) \tag{2.22}$$

und ist

$$\boldsymbol{H}(z+1)\,\boldsymbol{H}^{-1}(z) = \boldsymbol{N}(z) \in \mathfrak{k}_\nu\ , \tag{2.23}$$

dann ist $\boldsymbol{N}(z)$ bezüglich $\mathfrak{G}$ äquivalent mit $\boldsymbol{M}(z)$, das heißt, es gibt ein $\boldsymbol{S}(z) \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{S}(z)\,\boldsymbol{H}(z)\ . \tag{2.24}$$

Der Beweis erfolgt nach *Satz* 2.2 und *Satz* 2.3.

Das Problem ist jetzt also reduziert auf die Lösung von (2.22). Setzt man für $\mathfrak{m}_0(z)$ die Normalform ein, so tritt eine Reduktion nach Maßgabe einzelner Elementarteiler ein. Um den Anschluß an die in § 1 gelöste Differenzengleichung zu finden, ziehen wir es jedoch vor, die Matrix $\mathfrak{m}_0(z)$ *im Körper* $\mathfrak{k}_\nu$ auf die zweite Normalform[7]) zu transformieren. Diese sei mit $\mathfrak{M}_0(z)$ bezeichnet

$$\mathfrak{M}_0(z) = \boldsymbol{T}(z)\,\mathfrak{m}_0(z)\,\boldsymbol{T}^{-1}(z) \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{L}(z)\,\boldsymbol{T}(z) \tag{2.26}$$

und

$$\boldsymbol{L}(z+\nu) = \boldsymbol{L}(z)\,\mathfrak{M}_0(z)\ . \tag{2.27}$$

Setzt man die Normalform von $\mathfrak{M}_0(z)$ wirklich ein, so erkennt man durch Elimination, daß das Problem zurückgeführt ist auf die Lösung von Differenzengleichungen der Form

$$[P(T)]^n L(z) = 0\ , \tag{2.28}$$

[7]) *B. L. van der Waerden*, l. c.

wobei

$$TL(z) = L(z + \nu) \tag{2.29}$$

und $P(\Lambda)$ ein irreduzibles Polynom über $\mathfrak{k}_\nu$ ist. Damit ist der Anschluß an § 1 gewonnen. Es ist nicht schwer, zu verifizieren, daß (2.23) eine Folge unseres Konstruktionsverfahrens ist[8]).

Da man umgekehrt offenbar von beliebigen Elementarteilern $e_k(\lambda)$ über $\mathfrak{k}$ ausgehen kann und zu beliebigen $\boldsymbol{\nu}$ immer eine Matrix $\boldsymbol{M}(z)$ und ein Gleichungssystem (2.1) finden kann, das zu den Invarianten $e_k(\lambda)$ gehört, haben wir

Satz 2.5. Abgesehen von der Bedingung $e_k(\lambda) \in \mathfrak{k}[\lambda]$ unterliegen die Elementarteiler von $\mathfrak{M} - \lambda 1$ nur den gewöhnlichen Einschränkungen[9]).

Der Verfasser fühlt sich den Mathematikern seiner Umgebung, die er oft mit Fragen belästigt hat, verpflichtet.

Besonderen Dank schuldet er den Herren Dr. A. Beurling und Dr. F. Hirzebruch für anregende Diskussionen, Dr. F. J. Dyson für Durchsicht des Manuskripts.

(Eingegangen den 23. Oktober 1953.)

---

[8]) Man vergleiche dazu die Fußnote p. 7.

[9]) *O. Schreier und E. Sperner*, Analytische Geometrie, Leipzig und Berlin 1935, Bd. II, p. 124.