Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 28 (1954)

Artikel: Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration.

Autor: Nef, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22617

Zerlegungsäquivalenz von Funktionen und invariante Integration

von WALTER NEF, Bern

Herrn Prof. Dr. Willy Scherrer zu seinem 60. Geburtstag, am 29. Juli 1954, gewidmet

Einleitung

In seiner unter der Leitung von H. Hadwiger entstandenen Dissertation[1]) hat A. Kirsch die Zusammenhänge zwischen der Zerlegungsgleichheit von Funktionen und der invarianten Integration in homogenen Räumen untersucht. Zwei über einem homogenen Raum R (dessen Transformationsgruppe mit Γ bezeichnet werden möge) definierte Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ heißen bezüglich einer Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ zerlegungsgleich:

$$f \approx g(\mathfrak{M}) \ ,$$

wenn zwei endliche Zerlegungen

$$f = \sum_{k=1}^{n} f_k \ , \quad g = \sum_{k=1}^{n} g_k \quad (f_k, g_k \in \mathfrak{M})$$

existieren, so daß $f_k \cong g_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Die letzte Beziehung bedeutet die „Kongruenz" von f_k und g_k, das heißt die Existenz einer Transformation $\tau_k \in \Gamma$, so daß $f_k(x) = g_k(\tau_k x)$ ist.

Ein Integrationssystem $[\mathfrak{T}, T]$ über dem homogenen Raum R besteht aus einem Integralfeld $\mathfrak{T}$ und einem auf $\mathfrak{T}$ definierten Integral T. Dabei bedeutet:

A. Ein Integralfeld $\mathfrak{T}$ über R eine Menge von auf R definierten reellen Funktionen, die folgende Postulate erfüllt:

1) $\mathfrak{T}$ ist ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen: Aus $f, g \in \mathfrak{T}$, a, b reell folgt: $af + bg \in \mathfrak{T}$.

---

[1]) *Arnold Kirsch,* Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen, Math. Ann. 124 (1952) 343—363. Im folgenden zitiert als (K). Vgl. auch *H. Hadwiger und A. Kirsch,* Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit, Portugaliae Math. 11 (1952) 57—67. Ferner: *H. Hadwiger und W. Nef,* Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Im folgenden zitiert als (HN). Diese Arbeit wird demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinen.

2) $\mathfrak{T}$ ist invariant gegenüber der Gruppe Γ:
Aus $f(x) \in \mathfrak{T}$ und $\tau \in \Gamma$ folgt: $f(\tau x) \in \mathfrak{T}$.

3) $\mathfrak{T}$ ist normal: das heißt eine bestimmte vorgegebene nichtnegative und nicht identisch verschwindende Funktion (Einheitsfunktion) $e(x)$ gehört zu $\mathfrak{T}$.

4) $\mathfrak{T}$ ist e-beschränkt:
Zu jeder Funktion $f \in \mathfrak{T}$ existieren reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und Transformationen $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \Gamma$, so daß

$$|f| \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k e(\tau_k x) \tag{1}$$

ist.
Aus diesen Postulaten folgt unmittelbar, daß jedes Feld alle Funktionen von der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k e(\tau_k x)$ enthält. Diese Funktionen heißen „elementar". Die elementaren Funktionen bilden selber ein Feld, das wir im folgenden mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen und das „elementare Feld" nennen.
Ein weiteres Beispiel eines Feldes ist die Menge aller e-beschränkten Funktionen; das sind die Funktionen, die eine Relation der Form (1) erfüllen. Dieses Feld nennen wir das „universelle Feld" und bezeichnen es mit $\mathfrak{B}$.

B. Ein Integral T auf $\mathfrak{T}$ ist ein auf $\mathfrak{T}$ definiertes Funktional $T(f(x))$, das die folgenden Postulate erfüllt:

I. T ist linear: $T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$.

II. T ist invariant gegenüber der Gruppe Γ:

$$T(f(\tau x)) = T(f(x)) \qquad (\tau \in \Gamma).$$

III. T ist positiv (monoton): Aus $f \geqslant 0$ folgt $T(f) \geqslant 0$.

IV. T ist normiert: $T(e) = 1$.

Bei gegebenem R, Γ und e ist es nicht zum vornherein gesagt, daß ein Integrationssystem existiert. Dafür muß vielmehr $e(x)$ eine bestimmte Bedingung erfüllen[2]), die allerdings immer erfüllt ist, wenn die Gruppe Γ Abelsch ist[3]). Wenn diese Bedingung erfüllt ist, wenn also überhaupt ein Integrationssystem existiert, so existiert auf jeden Fall das elementare

---

[2]) Vgl. Satz 11 oder (HN) Existenz-Kriterium. (3).
[3]) (HN) Satz 5.

System: dessen Feld ist das elementare Feld $\mathfrak{E}$ und das Integral hat für die elementare Funktion $f = \sum_k a_k e(\tau_k x)$ den Wert $T(f) = \sum_k a_k$[4].

Ein auf dem universellen Feld $\mathfrak{B}$ existierendes Integral heißt universell. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein universelles Integral existiert, ist, wie Kirsch bewiesen hat, die Bedingung, daß $e(x)$ bezüglich der Menge aller e-beschränkten Funktionen nicht zerlegungsgleich 0 ist[5].

Sei $\mathfrak{T}$ ein Integralfeld und $\mathfrak{M}$ eine Obermenge von $\mathfrak{T}$. Ein auf $\mathfrak{T}$ definiertes Integral T heißt zerlegungsinvariant bezüglich $\mathfrak{M}$ (in Zeichen: $\approx(\mathfrak{M})$ - invariant), wenn aus

$$f \approx g(\mathfrak{M}) \quad \text{folgt} \quad T(f) = T(g) .$$

Einer der wichtigsten Sätze von Kirsch sagt dann aus: Ein auf einem zerlegungsfreien Feld $\mathfrak{T}$ definiertes Integral kann dann und nur dann zu einem universellen Integral erweitert werden, wenn es $\approx(\mathfrak{B})$-invariant ist[6].

Die genannten Beispiele zeigen die engen Zusammenhänge, die zwischen den Eigenschaften der Zerlegungsgleichheit von Funktionen und der Integrationstheorie bestehen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Untersuchungen von Kirsch weitergeführt. Die Zerlegungsgleichheit von Funktionen wird durch eine schwächere Relation ersetzt, die wir Zerlegungsäquivalenz nennen. Dadurch erhält man die Möglichkeit, die Resultate von Kirsch wesentlich zu verallgemeinern. Insbesondere ist es in keinem Falle mehr nötig, sich auf solche Bezugsmengen $\mathfrak{M}$ zu beschränken, welche die Bedingungen α, β, γ erfüllen[7]. So tritt zum Beispiel an die Stelle des zuletzt erwähnten Satzes von Kirsch der allgemeinere Satz 9 der vorliegenden Arbeit.

Nebenbei findet man auf einem neuen Wege das die Einheitsfunktion e betreffende Kriterium für die Existenz eines Integrationssystems (Satz 11), womit zwischen der vorliegenden und der von ihr methodisch sehr verschiedenartigen Arbeit (*HN*) eine Beziehung hergestellt ist.

1. Teil. Zerlegungsäquivalenz von Funktionen

Im folgenden setzen wir von der Funktionenmenge $\mathfrak{M}$ *stets voraus, daß sie selber ein Integralfeld ist.*

---

[4]) (HN) Definition 4.

[5]) (K) Seite 355.

[6]) (K) Satz 5.3. ($\mathfrak{T}$ heißt zerlegungsfrei, wenn aus $f \in \mathfrak{T}$, $f \approx g(\mathfrak{B})$ folgt $g \in \mathfrak{T}$).

[7]) (K) S. 346 und Satz 2.6. Diese Bedingungen, die insbesondere für das Feld $\mathfrak{B}$ erfüllt sind, haben u. a. zur Folge, daß aus der Zerlegungsäquivalenz (s. u.) zweier Funktionen deren Zerlegungsgleichheit folgt (s. unten).

Definition. f und g seien zwei Funktionen aus $\mathfrak{M}$. Wir nennen f zerlegungsgrößer als g bezüglich $\mathfrak{M}$:

$$f \gtrsim g(\mathfrak{M}) \ ,$$

wenn zwei Funktionen $f', g' \in \mathfrak{M}$ existieren, für die

$$f \approx f' \geqslant g' \approx g(\mathfrak{M})$$

gilt.

Satz 1. Die Relation $\gtrsim (\mathfrak{M})$ ist reflexiv und transitiv.

Beweis. 1) Reflexivität: $f \gtrsim f(\mathfrak{M})$ ist wegen $f \approx f(\mathfrak{M})$ selbstverständlich.

2) Transitivität: Es sei $f \gtrsim g(\mathfrak{M})$ und $g \gtrsim h(\mathfrak{M})$, das heißt

$$f \approx f' \geqslant g' \approx g \qquad \text{und} \qquad g \approx g'' \geqslant h'' \approx h \ . \tag{2}$$

(Im folgenden werden wir, wenn keine Verwechslung möglich ist, die Bezugsmenge $\mathfrak{M}$ in den Formeln weglassen.)

Da die Zerlegungsgleichheit eine mit der Vektorraumstruktur von $\mathfrak{M}$ verträgliche Äquivalenzrelation ist[8]), folgt $g' \approx g''$ und es gilt:

$$\cdot\ 0 \approx g' - g'' \geqslant g' - g'' \approx 0 \ .$$

Addiert man dies zum zweiten Teil von (2), so erhält man

$$g \approx g' \geqslant h'' + g' - g'' \approx h$$

und mit dem ersten Teil von (2) zusammen:

$$f \approx f' \geqslant h'' + g' - g'' \approx h \ ,$$

das heißt $f \gtrsim h(\mathfrak{M})$, w. z. b. w.

Definition. Zwei Funktionen $f, g \in \mathfrak{M}$ heißen zerlegungsäquivalent bezüglich $\mathfrak{M}$:

$$f \sim g(\mathfrak{M}) \ ,$$

wenn $f \gtrsim g(\mathfrak{M})$ und $g \gtrsim f(\mathfrak{M})$ ist.

Zu dieser Definition bemerken wir, daß aus der Zerlegungsäquivalenz die Zerlegungsgleichheit folgt, falls $\mathfrak{M}$ gewisse Bedingungen erfüllt[7]). Ob dies allgemein gilt, ist nicht bekannt. *Hingegen folgt umgekehrt,*

---

[8]) (K) Satz 1.3.

wie man sofort einsieht, *die Zerlegungsäquivalenz immer aus der Zerlegungsgleichheit.*

Satz 2. Aus $f \sim h(\mathfrak{M})$ und $f \gtrsim g \gtrsim h(\mathfrak{M})$ folgt

$$f \sim g(\mathfrak{M}) \quad \text{und} \quad g \sim h(\mathfrak{M}) \; .$$

Beweis. Aus $f \sim h$ folgt $h \gtrsim f$. Daraus und aus $f \gtrsim g$ folgt $h \gtrsim g$. Da nach der Voraussetzung auch $g \gtrsim h$ ist, folgt $g \sim h$. Auf dieselbe Art wird $f \sim g$ bewiesen.

Satz 3. Auf jedem Unterfeld $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$ ist die Zerlegungsäquivalenz bezüglich $\mathfrak{M}$ eine Äquivalenzrelation, die mit der Vektorraumstruktur von $\mathfrak{T}$ verträglich ist.

Beweis. 1) Daß $\sim(\mathfrak{M})$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt unmittelbar aus der Reflexivität und Transitivität von $\gtrsim(\mathfrak{M})$.

2) Sei $f, g, h \in \mathfrak{M}$ und $f \sim g$. Es ist zu beweisen, daß $af \sim ag$ für jede reelle Zahl a und ferner $f + h \sim g + h$ ist.

Aus $f \sim g$ folgt

$$f \gtrsim g \quad \text{und} \quad g \gtrsim f \; . \tag{3}$$

Die erste dieser Relationen bedeutet

$$f \approx f' \geqslant g' \approx g \; . \tag{4}$$

a) Ist vorerst $a \geqslant 0$, so folgt

$$af \approx af' \geqslant ag' \approx ag \; , \quad \text{also} \quad af \gtrsim ag \; .$$

Ist hingegen $a \leqslant 0$, so folgt auf dieselbe Art $ag \gtrsim af$.

Aus der zweiten Relation (3) folgt auf dieselbe Weise

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad a \geqslant 0: \quad ag \gtrsim af \; , \\ &\text{für} \quad a \leqslant 0: \quad af \gtrsim ag \; . \end{aligned}$$

In jedem Fall ist also $af \gtrsim ag$ und $ag \gtrsim af$, also

$$af \sim ag(\mathfrak{M}) \; .$$

b) Aus (4) folgt ferner

$$f + h \approx f' + h \geqslant g' + h \approx g + h \; ,$$

das heißt $f + h \gtrsim g + h$.

Auf dieselbe Art beweist man $g + h \gtrsim f + h$, so daß schließlich folgt: $f + h \sim g + h$.

Auf Grund von Satz 3 können wir den Restklassenraum von $\mathfrak{T}$ nach der Äquivalenzrelation $\sim(\mathfrak{M})$ bilden. Er ist der Quotientenraum von $\mathfrak{T}$ nach dem Unterraum $\mathfrak{O}$ derjenigen Funktionen $f \in \mathfrak{T}$, die $\sim 0(\mathfrak{M})$ sind. Wir bezeichnen ihn mit $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ oder kurz mit $\bar{\mathfrak{T}}$, wenn keine Verwechslung möglich ist. Seine Elemente bezeichnen wir mit $F, G, H, \ldots$ *Diese sind als Restklassen der Relation* $\sim(\mathfrak{M})$ *gegenüber* Γ *invariant.*

Insbesondere kann in den vorhergehenden Überlegungen $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$ sein. Als Quotientenraum erhalten wir dann $\bar{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M})$, wofür wir kürzer $\mathfrak{M}^*$ schreiben. $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ ist, falls $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{M}$, ein Unterraum von $\mathfrak{M}^*$[9]).

Es seien nun F und G zwei Elemente von $\bar{\mathfrak{T}}$. *Wir nennen* F *größer als* G: $F \geqslant G$, *wenn* $f \in F$ *und* $g \in G$ *existieren, so daß* $f \gtrsim g(\mathfrak{M})$ *ist.* Diese Beziehung gilt dann, wie man leicht sieht, für zwei beliebige Funktionen aus F bzw. G.

Satz 4. Durch die Relation $\geqslant$ wird $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ ein teilgeordneter Vektorraum.

Beweis. 1) Wir beweisen vorerst, daß die Relation $\geqslant$ eine Teilordnung auf der *Menge* $\bar{\mathfrak{T}}$ ist.

a) Transitivität: Es sei $F \geqslant G$ und $G \geqslant H$. Für beliebige Elemente $f \in F$, $g \in G$, $h \in H$ gilt dann $f \gtrsim g \gtrsim h$, also $f \gtrsim h$ und somit $F \geqslant H$.

b) Aus $F \geqslant G$ und $G \geqslant F$ folgt $F = G$. Die Voraussetzung bedeutet nämlich $f \gtrsim g$ und $g \gtrsim f$ $(f \in F,\ g \in G)$, also

$$f \sim g \quad \text{und} \quad F = G\ .$$

c) Schließlich folgt ohne weiteres $F \geqslant G$ aus $F = G$.

2) Es bleibt zu zeigen, daß aus $F \geqslant G$ folgt

$$F + H \geqslant G + H \quad (H \in \bar{\mathfrak{T}}) \quad \text{und} \quad aF \geqslant aG \quad (a \geqslant 0)\ .$$

Nun bedeutet die Voraussetzung, daß $f \in F$ und $g \in G$ existieren, so daß $f \gtrsim g$ ist. Wie beim Beweis des letzten Satzes folgt daraus

$$f + h \gtrsim g + h \quad (h \in \mathfrak{T}) \quad \text{und} \quad af \gtrsim ag \quad (a \geqslant 0).$$

Da $f + h \in F + H$ usw., folgt die Behauptung.

Bemerkung. Auch als teilgeordneter Vektorraum ist $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ Unterraum des teilgeordneten Vektorraumes $\mathfrak{M}^*$[9]).

---

[9]) Genau genommen gilt dies erst, wenn jedes Element von $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ durch dasjenige Element von $\mathfrak{M}^*$ ersetzt wird, dessen Untermenge es ist. Diese Ersetzung ist ein Isomorphismus und ändert an der algebraischen Struktur nichts.

Ein auf $\mathfrak{T}$ definiertes Integral T nennen wir im folgenden *invariant gegenüber Zerlegungsäquivalenz* bez. $\mathfrak{M}$ (in Zeichen: $\sim(\mathfrak{M})$-invariant), wenn aus $f \sim g(\mathfrak{M})$ folgt $T(f) = T(g)$.

Wir nennen es ($\mathfrak{M}$)-*zerlegungsmonoton*, wenn aus $f \gtrsim g(\mathfrak{M})$ folgt $T(f) \geqslant T(g)$.

Man sieht unmittelbar, daß die $\sim(\mathfrak{M})$-Invarianz von T aus der ($\mathfrak{M}$)-Zerlegungsmonotonie folgt. Die Umkehrung gilt ebenfalls, wenn das Feld $\mathfrak{T}$ bezüglich $\mathfrak{M}$ zerlegungsfrei ist, das heißt wenn aus $f \in \mathfrak{T}$, $f \approx f'(\mathfrak{M})$ folgt $f' \in \mathfrak{T}$. In diesem Falle folgt die ($\mathfrak{M}$)-Zerlegungsmonotonie sogar schon aus der $\approx(\mathfrak{M})$-Invarianz[10].

Satz 5. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}$ seien zwei Integralfelder und $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{M}$. Zwischen den ($\mathfrak{M}$)-zerlegungsmonotonen Integralen auf $\mathfrak{T}$ und den normierten positiven Linearformen auf dem teilgeordneten Vektorraum $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung[11].

Genauer: Jedes ($\mathfrak{M}$)-zerlegungsmonotone Integral auf $\mathfrak{T}$ ist $\sim(\mathfrak{M})$-invariant und hat also für alle Funktionen einer $\sim(\mathfrak{M})$-Klasse denselben Wert. Es liefert also eine Funktion auf $\overline{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$. Diese ist eine normierte positive Linearform. Geht man umgekehrt aus von einer normierten positiven Linearform $T^*(F)$ auf $\overline{\mathfrak{T}}$ und setzt man $T(f) = T^*(F)$ für $f \in F$, so ist T ein Integral auf $\mathfrak{T}$.

Der Beweis ist so einfach, daß er übergangen werden kann.

Satz 6. Zwischen den Integralen auf einem Feld $\mathfrak{M}$ und den normierten positiven Linearformen auf $\mathfrak{M}^*$ besteht eine umkehrbar eindeutige Beziehung.

Beweis. Der Satz erscheint als Spezialfall von Satz 5, wenn man $\mathfrak{T} = \mathfrak{M}$ setzt und bedenkt, daß jedes auf $\mathfrak{M}$ definierte Integral ($\mathfrak{M}$)-zerlegungsmonoton ist.

Zum Abschluß des ersten Teiles formulieren wir einen Satz über positive Linearformen. Er ist zur Hauptsache schon bei Kirsch ausgesprochen[12]) und kann fast wörtlich bewiesen werden wie dort. Es wird deshalb hier auf den Beweis verzichtet.

Satz 7. Φ sei ein teilgeordneter Vektorraum und Ψ ein Unterraum von Φ. Zu jedem Element G von Φ mögen zwei Elemente F_1 und F_2 von

---

[10]) Aus $f \approx f' \geq g' \approx g$ mit $f, f', \ldots \in \mathfrak{T}$ folgt $T(f) \geqslant T(g)$.

[11]) Normiert nennen wir eine Liniearform T, wenn $T(E) = 1$ (E = Klasse von $e(x)$).

[12]) (K) Satz 5.2.

Ψ existieren, so daß $F_1 \geqslant G \geqslant F_2$ ist. Dann läßt sich jede auf Ψ definierte positive Linearform auf Φ fortsetzen.

2. Teil. Existenzsätze für Integrale

Satz 8. $\mathfrak{M}$ sei ein Integralfeld. Dann und nur dann existiert ein Unterfeld $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{M}$ und ein $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonotones Integral auf $\mathfrak{T}$, wenn $e \nsim 0(\mathfrak{M})$ ist.

(Setzt man hier $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$, so erhält man Satz 3.5 von Kirsch, vgl. Fußnote 7.)

Beweis. 1) Die Bedingung ist notwendig. Würde nämlich $e \sim 0(\mathfrak{M})$ sein und gleichzeitig auf einem Unterfeld $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$ ein $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonotones, also $\sim(\mathfrak{M})$-invariantes Integral T existieren, so würde, da ja $e \in \mathfrak{T}$ ist, $T(e) = 0$ folgen, was dem Postulat IV widerspricht.

2) Die Bedingung ist hinreichend. Ist nämlich $e \nsim 0(\mathfrak{M})$, so ist in $\mathfrak{M}$ die $\sim(\mathfrak{M})$-Klasse von e, die wir mit E bezeichnen, von der Klasse 0 verschieden. Auf dem durch E aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{M}^*$ ist demnach durch $T^*(aE) = a$ eine positive normierte Linearform gegeben. Diese liefert nach Satz 5 auf dem entsprechenden Unterfeld $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{M}$ ein $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonotones Integral. ($\mathfrak{E}'$ besteht aus allen Funktionen von $\mathfrak{M}$, die bezüglich $\mathfrak{M}$ mit einer elementaren Funktion zerlegungsäquivalent sind.)

Satz 9. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}$ seien zwei Integralfelder und $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{M}$. Ein auf $\mathfrak{T}$ definiertes Integral läßt sich dann und nur dann auf $\mathfrak{M}$ fortsetzen, wenn es $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonoton ist.

Bemerkung. Wenn das Unterfeld $(\mathfrak{M})$-zerlegungsfrei ist, so kann die Bedingung der $(\mathfrak{M})$-Zerlegungsmonotonie durch die $\approx(\mathfrak{M})$-Invarianz ersetzt werden.

Beweis. 1) Die Notwendigkeit der Bedingung ist deshalb klar, weil ein auf $\mathfrak{M}$ definiertes Integral $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonoton ist.

2) Die Bedingung ist hinreichend. Sei nämlich T ein $(\mathfrak{M})$-zerlegungsmonotones Integral auf $\mathfrak{T}$. Nach Satz 5 erscheint T auf $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ als positive normierte Linearform T^*. Weil e in $\mathfrak{T}$ enthalten und $\mathfrak{M}$ e-beschränkt ist [Postulat 4]), sind die Voraussetzungen von Satz 7 für die Räume $\bar{\mathfrak{T}}(\mathfrak{M})$ und $\mathfrak{M}^*$ erfüllt und T^* läßt sich auf $\mathfrak{M}^*$ fortsetzen. Geht man von $\mathfrak{M}^*$ zu $\mathfrak{M}$ zurück, so erhält man auf diesem Feld ein Integral, welches Fortsetzung des Integrales T auf $\mathfrak{T}$ ist.

Satz 10. Notwendig und hinreichend dafür, daß auf einem Feld $\mathfrak{M}$ ein Integral existiert, ist die Bedingung $e \nsim 0(\mathfrak{M})$.

Beweis. 1) Daß die Bedingung notwendig ist, folgt wie bei Satz 8.

2) Die Bedingung ist hinreichend: Ist sie nämlich erfüllt, so existiert nach Satz 8 ein ($\mathfrak{M}$)-zerlegungsmonotones Integral auf einem Unterfeld $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$. Dieses läßt sich nach Satz 9 zu einem Integral auf $\mathfrak{M}$ fortsetzen.

Satz 11. Notwendig und hinreichend dafür, daß zu einer Einheitsfunktion $e(x)$ ein Integrationssystem existiert, ist die Bedingung

$$e \nsim 0(\mathfrak{E}). \tag{5}$$

Beweis. 1) Die Bedingung ist notwendig. Wenn nämlich ein Integrationssystem existiert, so enthält dessen Feld das elementare Feld $\mathfrak{E}$ und es existiert also auch ein Integral auf $\mathfrak{E}$. Nach dem vorhergehenden Satz folgt also $e \nsim 0(\mathfrak{E})$.

2) Daß sie auch hinreichend ist, folgt aus Satz 10, indem man $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}$ setzt.

Der Beweis zeigt, daß, falls die Bedingung $e \nsim 0(\mathfrak{E})$ erfüllt ist, auf jeden Fall das elementare Integrationssystem existiert. Im allgemeinen existieren noch weitere, die alle aus dem elementaren durch Fortsetzung hervorgehen.

In der Arbeit (*HN*) wurde für die Existenz eines Integrationssystems zu $e(x)$ die folgende notwendige und hinreichende Bedingung abgeleitet:

$$\text{Aus} \quad \sum_k a_k\, e(\tau_k x) \geqq 0 \quad \text{folgt} \quad \sum_k a_k \geqq 0\text{[13]}\,. \tag{6}$$

Daß die Bedingungen (5) und (6) äquivalent sind, kann man wie folgt direkt einsehen:

1) Bedingung (5) sei nicht erfüllt. Wir zeigen, daß auch (6) nicht erfüllt ist.

a) Es sei sogar $e \approx 0(\mathfrak{E})$. Das bedeutet

$$e(x) = \sum_k a_k\, e(\sigma_k x) \tag{7}$$

und

$$0 = \sum_k a_k\, e(\tau_k x)\,. \tag{8}$$

α) Ist hier $\sum_k a_k \neq 0$, so zeigt Gleichung (8), daß (6) nicht erfüllt ist.

---

[13]) (HN) Existenzkriterium (3).

β) Ist hingegen $\sum_k a_k = 0$, so zeigt Gleichung (7), daß (6) nicht erfüllt ist.

b) Es sei $e \sim 0(\mathfrak{E})$ aber nicht $e \approx 0(\mathfrak{E})$. Es folgt $e \lesssim 0(\mathfrak{E})$ und das bedeutet

$$e(x) \approx \sum_k a_k\, e(\sigma_k x) \leqslant \sum_k b_k\, e(\tau_k x) \approx 0(\mathfrak{E}) \ .$$

Da e nicht $\approx 0(\mathfrak{E})$ ist, folgt $\sum_k a_k = 1$ und $\sum_k b_k = 0$. Man hat also

$$\sum_k [b_k\, e(\tau_k x) - a_k\, e(\sigma_k x)] \geqslant 0$$

mit $\sum_k (b_k - a_k) < 0$, das heißt (6) ist nicht erfüllt.

2) Jetzt sei Bedingung (6) nicht erfüllt. Dann folgt vorerst, daß reelle Zahlen a_k existieren, so daß

$$f(x) = \sum_k a_k e(\sigma_k x) \leqslant 0 \quad \text{und} \quad \sum_k a_k > 0$$

ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $\sum_k a_k = 1$ annehmen. Es folgt dann

$$e \approx f(\mathfrak{E}) \leqslant 0 \ , \quad \text{also} \quad e \lesssim 0(\mathfrak{E}) \ .$$

Da anderseits wegen $e \geqslant 0$ auch $e \gtrsim 0(\mathfrak{E})$ ist, folgt $e \sim 0(\mathfrak{E})$, also ist (5) nicht erfüllt.

Nachtrag. Nach Abschluß des Manuskriptes erhielt der Verfasser Kenntnis von einer Arbeit von H. Hadwiger[14]), in der von einer Relation Gebrauch gemacht wird, die ebenfalls Zerlegungsäquivalenz genannt wird. H. Hadwiger nennt zwei Funktionen f und $g \in \mathfrak{B}$ zerlegungsäquivalent, $f \overset{z}{\sim} g$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Funktionen f', $g' \in \mathfrak{B}$ existieren, so daß

$$f \approx f'(\mathfrak{B}) \ , \quad g \approx g'(\mathfrak{B}) \ , \quad |f' - g'| \leqslant \varepsilon \cdot e$$

ist.

Damit stellt sich die Frage nach der Beziehung zwischen der von H. Hadwiger verwendeten und der in der vorliegenden Arbeit definierten Relation. Dabei ist sinngemäß unsere Relation für den Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$ zu betrachten. In diesem Falle ist sie aber mit der Relation der Zerlegungsgleichheit äquivalent, während dies nach einer Mitteilung von H. Hadwiger für die Relation $f \overset{z}{\sim} g$ nicht der Fall ist. Die Relation $f \overset{z}{\sim} g$ ist

[14]) *H. Hadwiger*, Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration. Diese Arbeit wird demnächst im Archiv der Mathematik erscheinen.

also schwächer als $f \sim g(\mathfrak{B})$ (das heißt ihre Äquivalenzklassen sind umfassender).

Es sei schließlich bemerkt, daß sich die Hadwigersche Relation ebenfalls unter Bezugnahme auf ein beliebiges Feld $\mathfrak{M}$ definieren läßt: Man setzt $f \overset{z}{\sim} g(\mathfrak{M})$, wenn $f', g' \in \mathfrak{M}$. In allen Sätzen der vorliegenden Arbeit kann dann $\sim(\mathfrak{M})$ durch $\overset{z}{\sim}(\mathfrak{M})$ ersetzt werden.

Die Frage nach den Beziehungen dieser beiden Relationen ist bei beliebigem $\mathfrak{M}$ unabgeklärt.

(Eingegangen den 14. Oktober 1953.)