Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1954)

Artikel: Ein Minimum-Maximumproblem über konvexe Rotationskörper.
Autor: Bieri, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22615

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

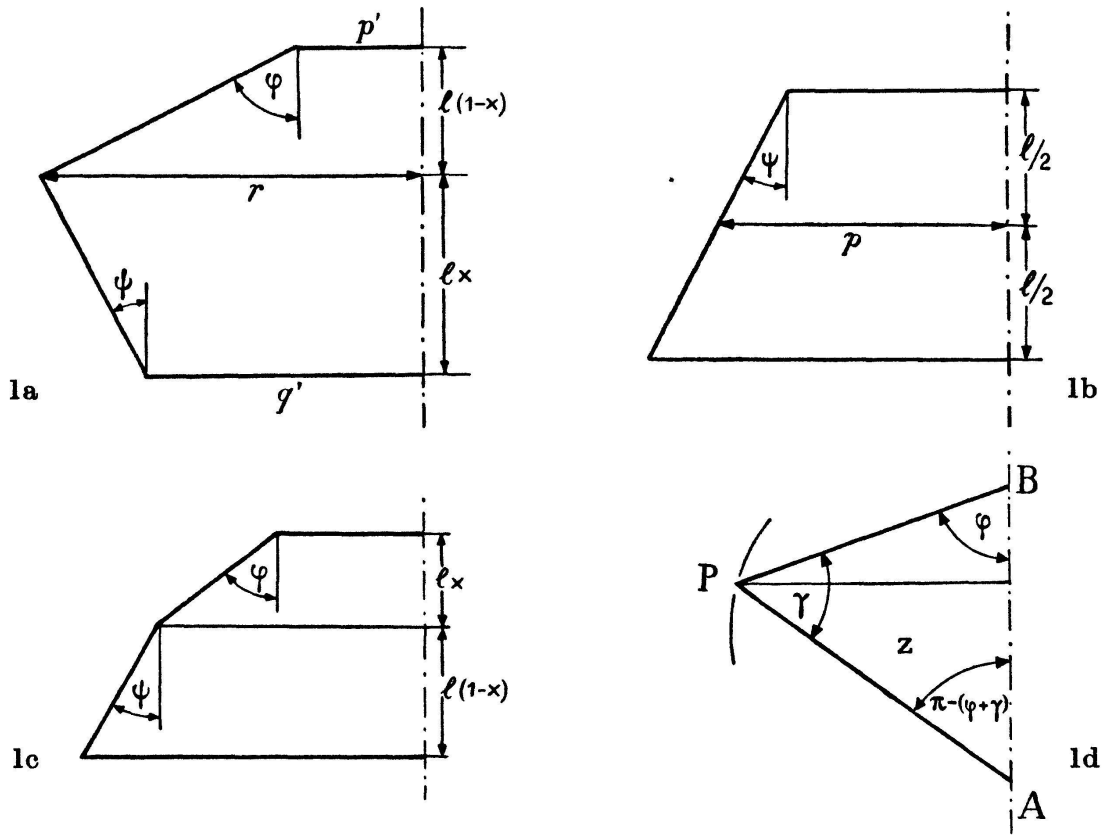
ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ein Minimum-Maximumproblem über konvexe Rotationskörper

von H. Bieri, Bern

Seinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Scherrer, zum 60. Geburtstag gewidmet

Ein konvexer Rotationskörper des R_3 kann durch folgende Maßzahlen charakterisiert werden (Abb. 1a)[1])



Länge oder Poldistanz l, *Äquatorradius* r, *Länge der erzeugenden Meridiankurve* L, *Flächeninhalt des halben Meridianschnittes* Q, *Volumen* V, *Oberfläche* F, *Integral der mittleren Krümmung* M (1)

Das Problem, alle Relationen zu finden, welche zwischen den genannten Größen bestehen müssen, damit wirklich konvexe Körper vorliegen, ist wohl zu kompliziert. Man kann sich in der Weise einschränken, daß man

[1]) Wesentliche Größen wie *Durchmesser* und *Dicke* hätten sich dem gewählten Rahmen nur schlecht angepaßt und fehlen deshalb.

einige der Größen 1) passend vorgibt und hernach nach den Extremwerten einer weitern Größe aus 1) fragt[2]). Probleme dieser Art sind in größerer Zahl gelöst worden. In vielen Fällen muß zunächst eine dem Problem angemessene direkte Methode entwickelt werden[3]). Als sehr günstig hat sich die Einführung der *polygonalen Rotationskörper* erwiesen. In den Arbeiten von H. Hadwiger[4]) spielen sie eine entscheidende Rolle. Sind in der Tat die gesuchten Extremalkörper selber solche spezielle konvexe Rotationskörper, so hat man Aussicht, sie durch Operationen im Bereich dieser Unterklasse von konvexen Rotationskörpern aufzufinden. Der Übergang zu beliebigen konvexen Rotationskörpern durch Approximation und Stetigkeitsbetrachtungen bereitet keine Mühe.

In der vorliegenden Arbeit wird folgender *Satz* bewiesen:

„*Bei vorgeschriebener Körperlänge l und ebensolcher Meridianlänge L besitzen Zylinder und nur sie kleinstes Integral der mittlern Krümmung M, symmetrische Doppelkegel und nur diese Körper größtes M.*"

Er läßt sich auch in der Form einer doppelten Ungleichung schreiben:

$$\boxed{\pi \cdot \frac{\pi}{2}(L-l) \leq M \leq \pi \cdot \arccos\left(\frac{l}{L}\right)\sqrt{L^2-l^2}} \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen linker Hand genau für Zylinder, dasjenige rechter Hand genau für symmetrische Doppelkegel gilt.

Bezüglich der verwendeten individuellen Methode sei auf eine schon publizierte Arbeit verwiesen[5]).

Mit I bezeichne ich die Teilklasse aller Polygonalkörper, deren Äquatorradius r am Rande liegt, mit II die analoge Teilklasse mit einem im Innern liegenden r. Durch Vereinigung passender Teilklassen der Typen I, II können abgeschlossene Teilklassen $\mathfrak{K}_{12\ldots i}$ konstruiert werden, deren Körper aus höchstens i Kegelstümpfen (im weitern Sinne) bestehen.

Als wirksamste, weil analytisch einfachste Deformation, hat sich für unser Problem das *Abschleifen* (unter Erhaltung von l) erwiesen[6]).

---

[2]) *T. Bonnesen und W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3; Berlin 1934, S. 74.

[3]) Siehe Fußnote 2, S. 74—75.

[4]) *H. Hadwiger*, Einige neue Ergebnisse über extremale konvexe Rotationskörper. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Bd. 18, S. 42—44.

[5]) *H. Bieri*, Kurvendiskussion als Methode. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, 8. Band 1950.

[6]) *H. Bieri*, Ein (M, F)-Problem mit Nebenbedingung. Experientia IX 16, 1953, 207—209, speziell Abb. 5, 6, 7.

Beweis. Für Kegelstümpfe (Abb. 1b) gilt mit der Substitution $p = \frac{l}{2} \cdot q$:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \frac{\pi l}{2}(\pi q + 2 \operatorname{tg} \psi \cdot \psi) \\ L &= l(q + \sec \psi) \end{aligned}}^{7)} \qquad (3)$$

Die Bildkurven der Kegelstumpfscharen in einem (L, M)-Diagramm sind bei festem ψ Geraden mit der Steigung $\frac{dM}{dL} = \frac{\pi^2}{2}$.

Eine dieser Geraden entspricht den *Zylindern* mit $\psi = 0$. Für die *Kegel* aber hat man: $p = \frac{l}{2} \cdot \operatorname{tang} \psi$, also $q = \operatorname{tang} \psi$. Es folgt:

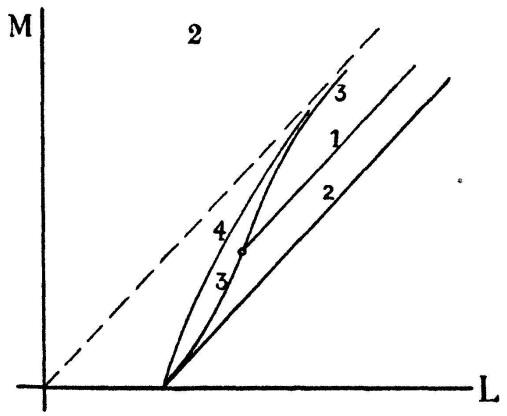
$$\boxed{\begin{aligned} M &= \frac{\pi l}{2} \cdot \operatorname{tang} \psi \, (2\psi + \pi) \\ L &= \frac{l(1 + \sin \psi)}{\cos \psi} \end{aligned}} \qquad (4)$$

Wächst ψ von 0 bis $\pi/2$, so wird die *Kegelkurve* durchlaufen. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

a) Im Bildpunkt der Strecke von der Länge $l(\psi = 0)$ beträgt die Steigung $\pi^2/2$.

b) Es ist im Intervall $0 \leq \psi \leq \pi/2$ genau ein Wendepunkt vorhanden.. Die Kurve ist zunächst *von unten konvex.*

c) Die einzige geradlinige Asymptote liegt oberhalb der Zylinderkurve und ist zu ihr parallel.



Damit sind aber die Verhältnisse in der Teilklasse $\mathfrak{K}_1$ geklärt (Abb. 2).

In der gestaltlich reichhaltigeren Teilklasse $\mathfrak{K}_{12}$ werden wir schon die Hauptschwierigkeit des Problems antreffen.

Wenden wir uns zuerst den *symmetrischen Doppelkegelstümpfen* zu. Man erhält (Abb. 1a, $q' = p'$, $\varphi = \psi$):

---

[7]) Berechnet wird $M^* = M - \pi l$. Hernach wird der Stern weggelassen.

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \pi(\pi p' + l \cdot \operatorname{tang}\psi \cdot \psi) \\ L &= 2p' + l \cdot \sec\psi \end{aligned}} \tag{5}$$

Die Bildkurven der Doppelkegelstumpfscharen mit festem ψ sind wieder Geraden mit der Steigung $\frac{dM}{dL} = \pi^2/2$. Mit $p' = 0$ erhält man die *symmetrischen Doppelkegel* mit

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \pi l \cdot \operatorname{tang}\psi \cdot \psi \\ L &= l \cdot \sec\psi \end{aligned}} \tag{6}$$

Wächst ψ von 0 bis $\pi/2$, so wird die Bildkurve der symmetrischen Doppelkegel durchlaufen. Sie besitzt folgende Eigenschaften:

a) Im Bildpunkt der Strecke von der Länge l beträgt die Steigung $2\pi > \pi^2/2$.

b) Im Intervall $0 \leq \psi \leq \pi/2$ ist sie *durchwegs von unten konkav.*

c) Ihre geradlinige Asymptote fällt mit derjenigen der Kegelkurve zusammen.

Es ist nun von größter Bedeutung, die relative Lage der Kurve der symmetrischen Doppelkegel und der Kegelkurve zu kennen. Wir betrachten spezielle Kegelstumpfkegel aus *II* (Abb. 1a, $p' = 0$, $\varphi = \psi$ fest, q', also x variabel). Es folgt:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \pi l \cdot \operatorname{tang}\psi\,(\psi + \pi/2 - \pi x) \\ L &= l\,(\sec\psi + \operatorname{tang}\psi - 2x \cdot \operatorname{tang}\psi) \end{aligned}} \tag{7}$$

Durchläuft x das Intervall $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, so entstehen im Diagramm Strecken mit der Steigung $\pi^2/2$. Der eine Endpunkt liegt auf der Kegelkurve, der andere auf der Kurve der symmetrischen Doppelkegel. Wegen der Form der Kegelkurve ist der Schluß gestattet, *daß die Kegelkurve ganz nicht oberhalb liegt* (vgl. Abb. 2).

Jetzt verschieben wir die eine Stützebene nach außen (Abb. 1a, $\varphi = \psi$ fest, q' fest, p', also auch x variabel).

Durchläuft x das Intervall $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, so entstehen im Diagramm neuerdings Strecken. Ihre Endpunkte sind Bildpunkte je eines Kegelstumpfes und eines symmetrischen Doppelkegelstumpfes. Da diese Kör-

per nicht extremal sind und die Doppelkegelkurve *von unten konkav* ist, kommt keiner der betrachteten Körper für ein Extremum in Frage.

Wir betrachten ferner Doppelkegelstümpfe aus I (Abb. 1c).

Diesmal liegen zwei verschiedene Neigungswinkel vor. Wir verschieben die untere Stützebene nach innen, erhalten eine einparametrige Körperschar und zeigen wie oben, daß diese Körper ebenfalls nicht extremal sein können. Es ist klar, daß der obere Kegelstumpf durch einen Kegel ersetzt werden darf.

Damit ist aber der Formenreichtum der Teilklasse $\mathfrak{K}_{12}$ noch nicht erschöpft. Da sind zunächst die *unsymmetrischen Doppelkegel* aus II zu beachten. Bei ihnen versagt das Abschleifen, so daß sie auf andere Weise zu *einparametrigen Scharen* zusammengefaßt werden (Abb. 1d).

Wandert P auf einem Kreisbogen durch A und B, so wird *eine zwischen Strecke und symmetrischem Doppelkegel interpolierende einparametrige Körperschar* erzeugt, die allerdings im Falle $\gamma < \pi/2$ auch *nichtkonvexe* Körper enthält. Dieser Umstand wird aber keine Störung verursachen. Die Maßzahlen sind:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \frac{\pi l (\pi - \gamma) \sin \varphi \cdot \sin (\varphi + \gamma)}{\sin \gamma} \\ L &= \frac{l \cdot \sin (\varphi + \gamma/2)}{\sin \gamma/2} \end{aligned}} \tag{8}$$

Die Steigung berechnet sich zu

$$\frac{dM}{dL} = \frac{\pi (\pi - \gamma) \sin (\varphi + \gamma/2)}{\cos \gamma/2} .$$

Aus 8) kann der Parameter eliminiert werden:

$$\boxed{M = \frac{\pi (\pi - \gamma) \cdot \operatorname{tang} \gamma/2}{2 l} \cdot L^2 - \frac{\pi (\pi - \gamma) \operatorname{tang} \gamma/2 \cdot l}{2}} \tag{8a}$$

Die betrachteten Kurven sind also *von unten konvexe Parabeln.*

Auflösung der Enveloppenbedingung $\frac{\partial M}{\partial \gamma} = 0$ liefert als einzige Nullstelle $L = l$. Es handelt sich demnach um ein *ausgezeichnetes Kurvenfeld*, das *ganz nicht oberhalb* der Kurve der symmetrischen Doppelkegel liegt.

Die genauere Diskussion fördert weitere Resultate zutage:

a) $\gamma \geq \pi/2 \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi - \gamma}{2}$

$$\left.\frac{dM}{dL}\right/_{\varphi=0} = \pi(\pi - \gamma) \operatorname{tang} \gamma/2 \qquad \lim_{\gamma=\pi/2} \frac{\pi(\pi - \gamma)}{\operatorname{cotg} \gamma/2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{\gamma+\pi} \frac{\pi(\pi - \gamma)}{\operatorname{cotg} \gamma/2} = 2\pi \tag{9}$$

b) $\gamma < \pi/2 \rightarrow \pi/2 - \gamma \leq \varphi \leq \dfrac{\pi - \gamma}{2}$

$$\left.\frac{dM}{dL}\right/_{\varphi=\pi/2-\gamma} = \pi(\pi - \gamma) \geq \frac{\pi^2}{2}\,.$$

Die gestaltlichen Verhältnisse sind leicht überschaubar. Eine Skizze nach dem Muster der Abb. 2 verdeutlicht auffallende Gesetzmäßigkeiten. Macht man sich schließlich noch klar, daß auch die restlichen Körper nicht extremal sein können, so ist der Satz zunächst für die Teilklasse $\mathfrak{K}_{12}$ bewiesen[8]).

Der Beweis gilt aber auch für irgendeine Teilklasse $\mathfrak{K}_{12\ldots n}$. Durch Abschleifen gelangt man nämlich zu $\mathfrak{K}_{123}$, $\mathfrak{K}_{1234}$, schließlich zu $\mathfrak{K}_{12\ldots n}$. Die einparametrigen Körperscharen aus $\mathfrak{K}_{12\ldots m}$ besitzen für jedes m aus $2 < m \leq n$ Randkörper aus $\mathfrak{K}_{12\ldots m-1}$. Die Bildkurven sind jedesmal Strecken. Die Bildpunkte der Randkörper liegen *nicht außerhalb des von der Zylinderkurve und der Kurve der symmetrischen Doppelkegel begrenzten Bereiches*, so daß innere Punkte dieser Strecken sogar innerhalb liegen, w. z. b. w.

Weil aber ein beliebiger konvexer Rotationskörper sich durch Polygonalkörper approximieren läßt und weil die Größen 1) stetig vom Körper abhängen, so ist der Beweis für die volle Klasse der konvexen Rotationskörper mit der festen Länge l geleistet.

(Eingegangen den 6. September 1953.)

---

[8]) Von den unsymmetrischen Doppelkegeln aus erreicht man durch Verschiebung einer Stützebene Kegel. Weil die Bildkurve eine Strecke ist, können die interpolierenden Körper aus II nicht extremal sein. Von den letztgenannten Körpern aus erreicht man durch Verschiebung der andern Stützebene Kegelstümpfe, und man sieht wie oben, daß kein Doppelkegelstumpf aus II mit verschiedenen Winkeln extremal sein kann.