

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 27 (1953)

**Artikel:** Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs.  
**Autor:** Strebel, Kurt  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21889>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs

Von KURT STREBEL, Zürich

## I. TEIL

### Einleitung

1. Eine topologische Abbildung eines Gebietes  $G_z$  der  $z$ -Ebene<sup>1)</sup> in die  $w$ -Ebene führt  $G_z$  wiederum in ein Gebiet  $G_w$  über. Durch die Zuordnung der Gebietspunkte  $z \leftrightarrow w$  von  $G_z$  und  $G_w$  wird eine eindeutige Zuordnung der Randkomponenten  $\Gamma_z \leftrightarrow \Gamma_w$  der beiden Gebiete induziert, in dem Sinne, daß jeder Punktfolge  $(z_n)$  aus  $G_z$ , die gegen eine Randkomponente  $\Gamma_z$  konvergiert<sup>2)</sup>, eine Punktfolge  $(w_n)$  von  $G_w$  entspricht, die gegen eine und dieselbe Randkomponente  $\Gamma_w$  konvergiert und umgekehrt. Ist  $G_z$  von unendlich hohem Zusammenhang<sup>3)</sup>, so ist die induzierte Zuordnung der Menge der Randkomponenten überdies topologisch, wenn man als Umgebungen einer Randkomponente  $\Gamma$  die Teilmenge derjenigen Randkomponenten betrachtet, die in einer Umgebung von  $\Gamma$  bezüglich der komplexen Ebene liegen.

An Stelle der Randkomponenten ist es im folgenden praktischer, die Komplementärkontinuen dieses Gebietes zu betrachten: Eine Randkomponente  $\Gamma$  eines Gebietes  $G$  hat als Komplement eine offene Menge, die im allgemeinen in mehrere einfach zusammenhängende Gebietskomponenten zerfällt. Eine derselben enthält das Gebiet  $G$ , sämtliche andern sind zu  $G$  fremd. Die Vereinigung der letztern mit  $\Gamma$  stellt ein zu  $G$  fremdes Kontinuum dar; wir nennen es das zu  $\Gamma$  gehörige Komplementärkontinuum  $\overline{\Gamma}$  von  $G$ . Ein solches ist stets einfach zusammenhängend, das heißt sein Komplement besteht aus einem einzigen Gebiet (welches  $G$  enthält).

---

<sup>1)</sup> Darunter verstehen wir stets die durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossene Ebene mit einem dem Abstand auf der Kugel äquivalenten Umgebungsbegriff.

<sup>2)</sup> d. h. jede Umgebung von  $\Gamma_z$  enthält fast alle Punkte der Folge.

<sup>3)</sup> Zusammenhangszahl = Anzahl der Randkomponenten.



Bei einer bloß *topologischen Abbildung* etwa eines Gebietes  $G_z$  endlichen Zusammenhangs können nun die Komplementärkontinuen des Bildgebietes  $G_w$  als außerhalb voneinander liegende, einfach zusammenhängende Kontinuen beliebig vorgegeben werden, wenn nur ihre Anzahl gleich der Anzahl der Komplementärkontinuen von  $G_z$  ist. Dies ist jedoch bei einer *eindeutigen und konformen Abbildung*  $w(z)$  nicht mehr der Fall. Man wird vielmehr jedem Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_z$  von  $G_z$  eine ganze Klasse  $C(\bar{\Gamma}_z)$  von einfach zusammenhängenden Kontinuen zuordnen müssen, aus der dann die Auswahl durch die konforme Abbildung selber getroffen wird. Wir wollen ein System  $C_1, \dots, C_n$  von solchen Klassen vollständig nennen, wenn jedes  $n$ -fach zusammenhängende Gebiet  $G_z$  mit beliebiger *eindeutiger Zuordnung*  $\bar{\Gamma}_z \leftrightarrow C(\bar{\Gamma}_z)$  ein konform äquivalentes Gebiet  $G_w$  besitzt, dessen  $\bar{\Gamma}_z$  entsprechendes Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_w$  in der Klasse  $C(\bar{\Gamma}_z)$  liegt. Man wird dabei bestrebt sein, die einzelnen Klassen gleichzeitig so eng zu wählen, daß bei gegebenem  $G_z$  das Gebiet  $G_w$  eindeutig bestimmt ist.

Ein einfaches Beispiel ist das sogenannte Koebesche Kreisnormierungsprinzip (Koebe [1]): Die Klassen  $C_1, \dots, C_n$  sind alle identisch und gleich der Menge aller Kreisscheiben und Punkte auf der Kugel. Dieses System ist vollständig, das heißt jedes beliebige  $n$ -fach zusammenhängende Gebiet  $G_z$  kann auf ein Gebiet  $G_w$  abgebildet werden, dessen sämtliche nicht-punktförmigen Randkomponenten Kreise oder Geraden sind, und  $G_w$  ist bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt. Allgemeinere Klassen  $C$  sind für den Fall endlichen Zusammenhangs u. a. von Grötzsch [1, 2] angegeben worden. Für Gebiete unendlich hohen Zusammenhangs ist die Frage jedoch noch fast gar nicht behandelt. Es tritt dabei auch für die Häufungsrandkomponenten eine ganz neue Situation auf: Durch die den unmittelbar benachbarten Komponenten aufgeprägte Gestalt wird diejenige der Häufungsrandkomponente zusätzlich beeinflußt.

Ein instruktives Beispiel ist ebenfalls von Grötzsch ([3], Strebel [1]) angegeben worden: Die Klasse  $C_1$  besteht aus dem Einheitskreis  $|w| \leq 1$ ; die übrigen Klassen  $C_2, C_3, \dots$  sind miteinander identisch und bestehen aus den radialen Schlitten. Das System der Klassen  $C_1, \dots, C_n$  ist für jedes endliche  $n$  vollständig, das unendliche System jedoch nicht; das heißt es gibt Gebiete abzählbaren Zusammenhangs, die sich nicht auf ein Gebiet, das vom Einheitskreis und lauter radialen Schlitten berandet ist, abbilden lassen. Die radialen Schlitten können ein Herausspringen eines solchen am Einheitskreise selbst bewirken.

Wir stellen uns nun folgendes Problem: Es sei  $G_z$  ein Gebiet abzählbaren Zusammenhangs. Jedem Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_z$  von  $G_z$  sei eine gewisse Klasse  $C(\bar{\Gamma}_z)$  von einfach zusammenhängenden Kontinuen zugeordnet, so daß endlich viele von diesen Klassen stets ein vollständiges System bilden. Unter welchen (hinreichenden) Bedingungen über die Häufungsrandkomponenten von  $G_z$  gibt es eine konforme Abbildung  $w(z)$ , die jedes Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_z$  in ein  $\bar{\Gamma}_w \in C(\bar{\Gamma}_z)$  überführt?

Im demnächst in derselben Zeitschrift erscheinenden zweiten Teil der Arbeit wird unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Gestalt der Randkomponenten  $\Gamma_w$  die Unität gewisser speziell normierter Abbildungen bewiesen.

## § 1. Der extremale Durchmesser eines Randpunktes

2. *Die extremale Länge einer Kurvenmenge*<sup>4)</sup>. Es sei  $\{\gamma\}$  eine Menge von rektifizierbaren Kurven<sup>5)</sup> in einem Gebiete  $G$  der  $z$ -Ebene, und  $\varrho(z)$  eine reelle, nicht-negative Funktion in  $G$ , für die die Integrale

$$L_\varrho(\gamma) = \int_\gamma \varrho |dz| \quad \text{und} \quad F_\varrho(G) = \iint_G \varrho^2 dx dy$$

stets existieren und  $0 < F_\varrho(G) < \infty$  ist. Jeder solchen Funktion  $\varrho$  ordnen wir die Zahl

$$\mu(\varrho, \{\gamma\}, G) = \frac{L_\varrho^2\{\gamma\}}{F_\varrho(G)}$$

zu,  $L_\varrho\{\gamma\} = \inf_{\{\gamma\}} L_\varrho(\gamma)$ . Unter der extremalen Länge  $\lambda$  der Kurvenmenge  $\{\gamma\}$  verstehen wir die obere Grenze der Zahlen  $\mu$  für alle den obigen Bedingungen genügenden Vergleichsfunktionen  $\varrho$ :

$$\lambda\{\gamma\} = \sup_{\varrho} \mu(\varrho, \{\gamma\}, G) .$$

Die Zahl  $\lambda\{\gamma\}$  ist unabhängig vom speziellen Gebiet  $G$ , in das die Kurvenmenge  $\{\gamma\}$  eingebettet ist, und invariant gegenüber eindeutiger konformer Abbildung. Ferner besitzt sie folgende leicht zu beweisenden *Eigenschaften*:

(2.1) Ist  $\{\gamma_1\}$  eine Teilmenge der Kurvenmenge  $\{\gamma\}$ , so ist  $\lambda\{\gamma_1\} \geq \lambda\{\gamma\}$ .

<sup>4)</sup> Vgl. L. Ahlfors und A. Beurling [1].

<sup>5)</sup> Unter einer rektifizierbaren Kurve in  $G$  verstehen wir das stetige und rektifizierbare Bild eines Kreises oder das stetige Bild einer offenen Strecke, wobei das Bild jedes abgeschlossenen Teilintervalles der Parameterstrecke in  $G$  liege und rektifizierbar sei.

(2.2) Enthält jede Kurve der Menge  $\{\gamma\}$  eine solche der Menge  $\{\gamma_1\}$ , so gilt  $\lambda\{\gamma_1\} \leq \lambda\{\gamma\}$ .

(2.3) Ist  $\{\gamma\}$  die Vereinigungsmenge der beiden nicht notwendig elementfremden Kurvenmengen  $\{\gamma_1\}$  und  $\{\gamma_2\}$ , so gilt die Ungleichung (Strebel [1])

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_k = \lambda\{\gamma_k\}, \quad k = 1, 2.$$

3. *Die extremale Distanz eines Gebietpunktes von einer Randkomponente.* Wir betrachten eine Randkomponente  $\Gamma$  eines Gebietes  $G$  der  $z$ -Ebene.  $\Gamma'$  sei eine in  $G$  gelegene Jordankurve, die uns im folgenden als Hilfskurve dienen wird. In einem der durch  $\Gamma'$  erzeugten beiden Teile der Ebene liegt  $\Gamma$ : Wir bezeichnen diesen Teil als das Innere von  $\Gamma'$  und sagen von Jordankurven, die in  $G$  liegen und  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  trennen, sie umfassen oder umschließen  $\Gamma$ .

Jedem Gebietpunkte  $z$ , der im Innern von  $\Gamma'$  liegt, ordnen wir auf folgende Art bezüglich  $G$ ,  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  eine positive Zahl

$$d(z) = d(z; G, \Gamma, \Gamma')$$

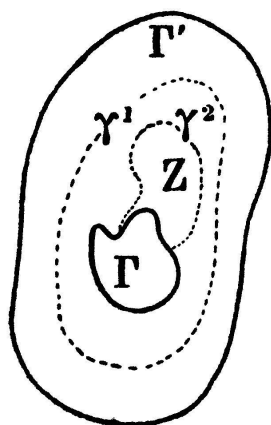


Fig. 1

zu, die wir die *extremale Distanz*<sup>6)</sup> (bezüglich  $\Gamma'$ ) des Punktes  $z$  von der Randkomponente  $\Gamma$  nennen wollen:  $\{\gamma\}$  sei die Vereinigungsmenge aller in  $G$  und im Innern von  $\Gamma'$  gelegenen rektifizierbaren Jordankurven  $\gamma^1$ , die  $z$  und  $\Gamma$  umfassen, und Querschnitte  $\gamma^2$ , die  $z$  von  $\Gamma'$  trennen und auf  $\Gamma$  enden<sup>7)</sup> (Fig. 1). Unter  $d(z)$  verstehen wir die extremale Länge dieser Kurvenmenge:

$$d(z) = \lambda\{\gamma\}.$$

Diese extremale Distanz  $d(z)$  besitzt folgende *Eigenschaften*:

(3.1) Ist  $(z_n)$  eine Folge von Punkten, für die  $d(z_n) \rightarrow 0$  geht, so folgt  $z_n \rightarrow \Gamma$ . Bilden wir nämlich das Innere von  $\Gamma'$  konform auf das Innere des Einheitskreises  $|w| < 1$  ab<sup>8)</sup>, wobei  $\Gamma'$  in  $|w| = 1$  übergehe, so gilt  $d(z_n) = d(w_n)$ , letztere bezüglich  $|w| = 1$  genommen. Wählen wir nun die Funktion  $\varrho(w) = 1$  im Einheitskreis, so ist für jeden Punkt  $w_n$

<sup>6)</sup> Die hier definierte extremale Distanz ist nicht identisch mit der bei Ahlfors und Beurling definierten extremalen Distanz zweier Randkomponenten.

<sup>7)</sup> Das sind topologische Bilder der Parameterstrecke  $0 < t < 1$ , deren in  $G$  kompakte Intervalle rektifizierbar sind, und die für  $t \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 1$  gegen  $\Gamma$  gehen.

<sup>8)</sup> Eine Abbildung des Durchschnittes des Innern von  $\Gamma'$  mit  $G$  in das innere des Einheitskreises genügt natürlich.

$$d(w_n) \geq \frac{L_\varrho^2\{\gamma\}}{F_\varrho(G)} \geq \frac{4a^2(w_n)}{\pi} ,$$

wo  $a(w_n)$  den Abstand des Punktes  $w_n$  von der Randkomponente  $\Gamma_w$  ( $=$  Bild von  $\Gamma$ ) bedeutet. Es folgt also aus  $d(z_n) \rightarrow 0$  auch  $a(w_n) \rightarrow 0$  und damit  $z_n \rightarrow \Gamma$ .

(3.2) Die Beziehung  $d(z_n) \rightarrow 0$  ist unabhängig von der Hilfskurve  $\Gamma'$ . Seien  $\Gamma'$  und  $\Gamma''$  zwei Hilfskurven, und für die Punktfolge  $(z_n)$  gehe

$$d(z_n; G, \Gamma, \Gamma') \rightarrow 0 .$$

Wir wählen eine dritte Hilfskurve  $\Gamma^*$  in  $G$ , die  $\Gamma$  sowohl von  $\Gamma'$  als auch von  $\Gamma''$  trennt. Die Punkte der Folge  $(z_n)$  liegen nach obigem schließlich alle im Innern von  $\Gamma^*$ , und wir teilen für diese  $n$  die Menge der Konkurrenzkurven bezüglich  $\Gamma'$  ein in die Teilmenge derjenigen, die ganz im Innern von  $\Gamma^*$  liegen, und die der übrigen

$$\{\gamma_n\} = \{\gamma_n^*\} + \{\gamma_n^{**}\} ,$$

und bezeichnen die extremalen Längen dieser Kurvenmengen mit  $\lambda_n$ ,  $\lambda_n^*$  und  $\lambda_n^{**}$ . Dann gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^*}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{**}}} .$$

Die Größen  $\lambda_n^{**}$  sind gleichmäßig nach unten beschränkt durch eine positive Schranke, was man analog wie (3.1) beweist, indem man eine spezielle Funktion  $\varrho$  betrachtet. Daraus folgt aber mit Hilfe der Ungleichung, daß mit  $\lambda_n \rightarrow 0$  auch  $\lambda_n^* \rightarrow 0$  gehen muß. Andererseits sind die Kurven  $\gamma_n^*$  die Konkurrenzkurven des Punktes  $z_n$  bezüglich  $\Gamma^*$ , und diese bilden eine Teilmenge der Konkurrenzkurven von  $z_n$  bezüglich  $\Gamma''$ : Die extremale Länge der letzten Menge ist somit  $\leq \lambda_n^*$  und geht folglich mit  $\lambda_n$  gegen null.

Die Beziehung  $d(z_n) \rightarrow 0$  ist somit allein durch das betrachtete Gebiet  $G$ , die Randkomponente  $\Gamma$  und die Folge  $(z_n)$  gegeben und insbesondere invariant gegenüber schlichter konformer Abbildung.

Ist  $\Gamma$  ein Punkt, so ist die extremale Länge der Menge der Querschnitte  $\gamma^2$ , die auf  $\Gamma$  enden und  $z$  von  $\Gamma'$  trennen, für jeden Punkt  $z$  gleich unendlich<sup>9)</sup>, so daß also mit  $\lambda\{\gamma\}$  auch  $\lambda\{\gamma^1\} \rightarrow 0$  gehen muß<sup>10)</sup>. Eine solche

<sup>9)</sup> Die extremale Länge dieser Kurven ist nämlich  $\geq$  der extremalen Länge der Verbindungskurven zweier geeignet gewählter konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt  $\Gamma$  und den Radien  $r_1$  und  $r_2 < r_1$ , also  $\geq (1/2\pi) \log(r_1/r_2)$ , wobei  $r_1$  festbleibt und  $r_2$  beliebig klein gewählt werden kann.

<sup>10)</sup> Es folgt dies wiederum aus der Ungleichung (2.3).

punktförmige Randkomponente wird nach Grötzsch [6] vollkommen punktförmig genannt. Sie geht bei jeder schlichten konformen Abbildung von  $G$  wieder in einen Punkt über. Ist  $\Gamma$  ein Kontinuum, so ist  $\lambda\{\gamma^1\}$  für jedes  $z$  größer als eine von  $z$  unabhängige positive Zahl, so daß mit  $\lambda\{\gamma\}$  auch  $\lambda\{\gamma^2\} \rightarrow 0$  gehen muß.

4. *Der extremale Durchmesser eines Randpunktes.* Die Randkomponente  $\Gamma$  von  $G$  sei nun eine Jordankurve<sup>11)</sup> oder ein Schlitz<sup>12)</sup>, und  $\zeta$  ein Punkt darauf. Dazu wählen wir wie oben eine Hilfskurve  $\Gamma'$ . Bezeichnen wir als das Innere von  $\Gamma$  denjenigen Teil der Ebene, der  $G$  ent-

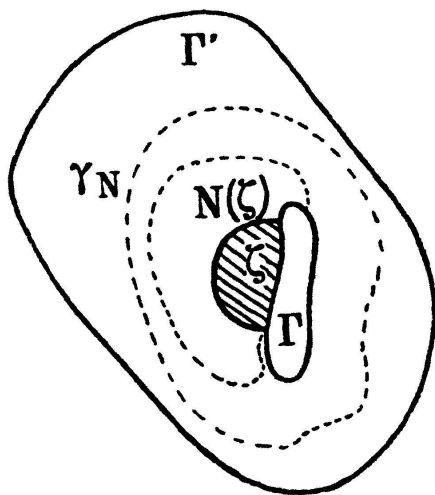


Fig. 2

hält, so gibt es bei nichtpunktförmigem  $\Gamma$  im Durchschnitt einer hinreichend kleinen Umgebung von  $\zeta$  mit dem Innern von  $\Gamma$  stets eine wohlbestimmte einfach zusammenhängende Gebietskomponente, die  $\zeta$  als Randpunkt besitzt: Den Durchschnitt dieses Gebietes mit  $G$  nennen wir eine Nachbarschaft  $N(\zeta)$  des Punktes  $\zeta$ . Wir betrachten nur Nachbarschaften von  $\zeta$ , die ganz im Innern der Hilfskurve  $\Gamma'$  liegen und ordnen jeder die Menge  $\{\gamma_N\}$  derjenigen im Innern von  $\Gamma'$  liegenden Jordankurven und Querschnitte von  $G$  zu, die  $N(\zeta)$  und  $\Gamma$  umfassen bzw.

auf  $\Gamma$  enden und  $N(\zeta)$  von  $\Gamma'$  trennen, (Fig. 2). Unter dem *extremalen Durchmesser* des Punktes  $\zeta$  (bezüglich  $\Gamma'$ ) verstehen wir die untere Grenze der extremalen Längen der Kurvenmengen  $\{\gamma_N\}$  für alle Nachbarschaften  $N(\zeta)$ :

$$d(\zeta) = d(\zeta; G, \Gamma') = \inf_{\{N(\zeta)\}} \lambda\{\gamma_N\}.$$

Dafür gilt nun wieder:

(4.1) Die Gleichung  $d(\zeta) = 0$  ist unabhängig von der gewählten Hilfskurve  $\Gamma'$ .

Zum Beweis wählen wir irgendeine absteigende Folge von Nachbarschaften  $N_k$  des Punktes  $\zeta$ , deren abgeschlossene Hüllen den Durchschnitt  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{N_k} = \zeta$  haben (= Fundamentalfolge von Nachbarschaften von  $\zeta$ ). Es ist klar, daß

$$d(\zeta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda\{\gamma_{N_k}\}$$

<sup>11)</sup> Gemeint auf der Riemannschen Kugel: Sie kann also durch  $z = \infty$  gehen.

<sup>12)</sup> Unter einem Schlitz verstehen wir einen zweiufrig zu nehmenden Jordanbogen; als Grenzfall lassen wir auch  $\Gamma = \zeta$  zu.

ist. Nun teilen wir für jedes  $k \geq 1$  die Menge  $\{\gamma_{Nk}\}$  auf in die Teilmenge  $\{\gamma_{Nk}^*\}$  derjenigen Kurven, die innerhalb  $N_0$  verlaufen und die der übrigen. Die extremale Länge der zweiten Menge ist wiederum gleichmäßig für alle  $k$  durch eine positive Schranke nach unten beschränkt, was man wie oben beweist. Es muß somit  $\lambda\{\gamma_{Nk}^*\} \rightarrow 0$  gehen. Da man die Nachbarschaft  $N_0$  beliebig wählen kann, muß auch

$$d(\zeta; G, \Gamma'') = 0$$

sein für jede von  $\Gamma'$  verschiedene Hilfskurve  $\Gamma''$ .

Ist in einem Randpunkte  $\zeta$   $d(\zeta) = 0$ , so gilt ersichtlich für jede Folge  $z_n \rightarrow \zeta$   $d(z_n) \rightarrow 0$ . Ferner ist  $\zeta$  notwendig ein erreichbarer Randpunkt; denn es existiert in dem Falle, wo  $\Gamma$  nicht punktförmig ist, eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten von  $G$ , deren Länge gegen null geht und die gegen  $\zeta$  konvergieren. Wir werden uns insbesondere für den Fall interessieren, wo  $d(\zeta) \equiv 0$  ist für jeden Punkt  $\zeta$  auf  $\Gamma$ . Dann gilt für jede Folge  $z_n \rightarrow \Gamma$   $d(z_n) \rightarrow 0$ .

**Satz.** *Ist auf der Randkomponente  $\Gamma_z$   $d(\zeta) \equiv 0$ , so ist bei jeder schlichten konformen Abbildung  $w(z)$  von  $G_z$ , die  $\Gamma_z$  als ganzes wieder in eine Jordankurve (Schlitz, Punkt)  $\Gamma_w$  überführt, die induzierte Zuordnung der Punkte von  $\Gamma_z$  und  $\Gamma_w$  topologisch. Ferner ist dann  $d(\omega) \equiv 0$  für die Punkte  $\omega$  von  $\Gamma_w$ .*

*Beweis.* Wir können annehmen, daß keine von den beiden Randkomponenten  $\Gamma_z$  und  $\Gamma_w$  punktförmig ist. Sonst sind nämlich wegen  $d(\zeta) = 0$  notwendig beide punktförmig und die Behauptung ist bewiesen. Ferner bedeutet es keine Einschränkung, vorauszusetzen, daß  $\Gamma_w$  den Punkt  $w = \infty$  nicht enthalte. Zu einem beliebigen Punkte  $\zeta$  auf  $\Gamma_z$  gibt es eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten  $\gamma_n$ , die  $\zeta$  abtrennen<sup>13)</sup> und deren Bildlänge mit  $n \rightarrow \infty$  gegen null geht; sonst bekäme man mit Hilfe der Funktion  $\varrho = |dw/dz|$  einen Widerspruch gegen  $d(\zeta) = 0$ . Da  $\Gamma_w$  nach Voraussetzung eine Jordankurve ist, konvergiert somit die Bildfolge jeder Folge  $z_n \rightarrow \zeta$  gegen einen und denselben Randpunkt  $\omega$  auf  $\Gamma_w$ , und diese Zuordnung  $\zeta \rightarrow \omega$  ist offensichtlich stetig. Die Zuordnung ist ferner einwertig. Würden nämlich zwei Punkte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  auf denselben Punkt  $\omega$  abgebildet, so gäbe es zwei Randwege von  $G_z$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , die bzw. in  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  enden würden, und deren Bilder  $\beta_1$  und  $\beta_2$  in  $\omega$  endeten. Die Punkte  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  teilen  $\Gamma_z$  in zwei Intervalle, von denen eines auf den Punkt  $\omega$  abgebildet wird. Sei  $\zeta$  ein Punkt dieses Intervalles und  $N_0(\zeta)$  eine Nachbarschaft von  $\zeta$ , die

<sup>13)</sup> D. h. zu irgendeiner Menge  $\{\gamma_n\}$  gehören, wo  $N(G)$  eine Nachbarschaft von  $G$  ist.



jedoch nicht Nachbarschaft von  $\zeta_1$  oder  $\zeta_2$  ist. Dann gilt für eine zu  $\zeta$  gehörige Fundamentalfolge  $N_k$  von Nachbarschaften, deren Anfangselement die gegebene Nachbarschaft  $N_0(\zeta)$  ist, nach früherem  $\lambda\{\gamma_{N_k}^*\} \rightarrow 0$ , wobei  $\{\gamma_{N_k}^*\}$  die Menge der Querschnitte bedeutet, die in  $N_0$  aber außerhalb  $N_k$  verlaufen. Andererseits ist aber diese extremale Länge für jedes  $k$  gleich unendlich, da die Bilder der Querschnitte  $\gamma_{N_k}^*$  im Punkte  $\omega$  enden<sup>14)</sup>. Die Abbildung  $\zeta \leftrightarrow \omega$  ist somit topologisch, und natürlich eine Abbildung von  $\Gamma_z$  auf  $\Gamma_w$ .

Da die Zuordnung  $G_z \longleftrightarrow G_w$  auf die Randkomponenten  $\Gamma_z$  und  $\Gamma_w$  topologisch fortgesetzt werden kann, wird jede Nachbarschaft eines Punktes  $G$  in eine solche seines Bildpunktes  $\omega$  übergeführt und umgekehrt. Da ferner die extremale Länge einer Kurvenmenge gegenüber eindeutiger konformer Abbildung invariant ist, folgt, daß auch  $d(\omega) \equiv 0$  sein muß.

## § 2. Die Abbildung einer Randkomponente durch eine Grenzfunktion

5. Im Gebiete  $G_z$  sei eine wachsende Folge von endlich vielfach zusammenhängenden, Jordan-berandeten Teilgebieten  $G_z^n$  gegeben, die  $G_z$  ausschöpft, und für jedes Gebiet  $G_z^n$  eine schlichte konforme Abbildung  $w_n(z)$ . Die Folge der Funktionen  $w_n(z)$  konvergiere auf jedem kompakten Teil von  $G_z$  gleichmäßig. Der Limes ist somit entweder eine Konstante (eventuell  $= \infty$ ), oder eine schlichte konforme Abbildung  $w(z)$  des ganzen Gebietes  $G_z$ . Wir nehmen das letztere an und bezeichnen  $w(z)$  als die Grenzfunktion der Folge  $w_n(z)$ .

$\Gamma_z$  sei irgendeine Randkomponente von  $G_z$ . Sie zeichnet in jedem Gebiete  $G_z^n$  eindeutig eine Randkomponente  $\Gamma_z^n$  aus, durch die sie von  $G_z^n$  getrennt wird. Die Folge dieser Jordankurven  $\Gamma_z^n$  ist ineinandergeschachtelt und hat als Limes  $\Gamma_z$ . Wir bezeichnen die Bilder von  $G_z^n$  und  $\Gamma_z^n$  mittels der Funktion  $w_n(z)$  mit  $G_{w_n}^n$  bzw.  $\Gamma_{w_n}^n$ , diejenigen von  $G_z$  und  $\Gamma_z$  mittels  $w(z)$  mit  $G_w$ ,  $\Gamma_w$ . Wir interessieren uns für die Beziehungen, die zwischen den Randkomponenten  $\Gamma_{w_n}^n$  und der Randkomponente  $\Gamma_w$  bestehen.

Ist  $\gamma_w$  irgendeine in  $G_w$  gelegene Jordankurve, und nennen wir denjenigen Teil der  $w$ -Ebene ihr Inneres, der  $\Gamma_w$  enthält, so entspricht ihr mittels der Abbildung  $w(z)$  eine Jordankurve  $\gamma_z$  in  $G_z$ , deren Inneres  $\Gamma_z$  enthält. Für alle hinreichend großen  $n$  liegt die Kurve  $\Gamma_z^n$  ebenfalls im Innern von  $\gamma_z$ , und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $(w_n(z))$

---

<sup>14)</sup> Siehe Fußnote 9 Seite 105.

auf einer in  $G_z$  kompakten Umgebung von  $\gamma_z$  muß schließlich  $\Gamma_{w_n}^n$  auch im Innern von  $\gamma_w$  liegen.

Wir führen nun zum Vergleich folgende Punktmengen der  $w$ -Ebene ein :

(1) Das zur Randkomponente  $\Gamma_w$  gehörige Komplementärkontinuum  $\overline{\Gamma_w}$  des Gebietes  $G_w$ .

(2) Die Menge  $\Gamma_w^\infty$ . D. i. der  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Gamma_{w_n}^n}$  zusammen mit denjenigen Komponenten seines Komplementes, die ganz in  $\overline{\Gamma_w}$  enthalten sind<sup>15)</sup>.

(3) Die Menge  ${}^\infty\Gamma_w$ . D. i. die Vereinigung des  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_{w_n}^n$  mit denjenigen Komponenten seines Komplementes, die ganz in  $\overline{\Gamma_w}$  liegen.

Für die drei Punktmengen gilt nach der obigen Bemerkung ersichtlich

$$\overline{\Gamma_w} \supseteq \Gamma_w^\infty \supseteq {}^\infty\Gamma_w .$$

6. Ist  $\Gamma_w$  ein Punkt, so liegt derselbe, wieder nach der obigen Bemerkung, sicher in  ${}^\infty\Gamma_w$ , so daß auch die umgekehrten Inklusionen erfüllt sind. Im andern Falle aber ist die Umkehrung i. a. nicht richtig, sondern läßt sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über das Gebiet  $G_z$  beweisen.

**Satz.** Falls für jede Folge  $(z_n)$  von Punkten aus  $G_z$ , die gegen  $\Gamma_z$  konvergiert, die extremale Distanz  $d(z_n) \rightarrow 0$  geht, so ist  $\Gamma_w^\infty \supseteq \overline{\Gamma_w}$ .

Wir können von dem Fall, daß  $\Gamma_z$  ein Punkt ist, absehen, da dann auch  $\Gamma_w$  ein Punkt und der Satz also bewiesen ist. Die extremale Distanz  $d(z)$  sei in  $G_z$  bezüglich einer festen Kurve  $\Gamma'_z$  und mit Hilfe der Kurven  $\gamma^2$  allein berechnet<sup>16)</sup>. Die Bilder  $w_n(\Gamma'_z)$  konvergieren gleichmäßig gegen das Bild  $w(\Gamma'_z)$ , aber wir bezeichnen mit  $\Gamma'_w$  eine Jordankurve in  $G_w$ , die  $w(\Gamma'_z)$  umfaßt, d. h. durch letztere von  $\Gamma_w$  getrennt wird. Für alle hinreichend großen  $n$  umfaßt  $\Gamma'_w$  auch  $w_n(\Gamma'_z)$ . Die in der  $w$ -Ebene, aber nicht notwendig in  $G_w$  gelegene Jordankurve  $\gamma_w^*$  umfasse  $\Gamma_w^\infty$ , d. h. trenne  $\Gamma_w^\infty$  von  $\Gamma'_w$  (Fig. 3). Nun wählen wir zu

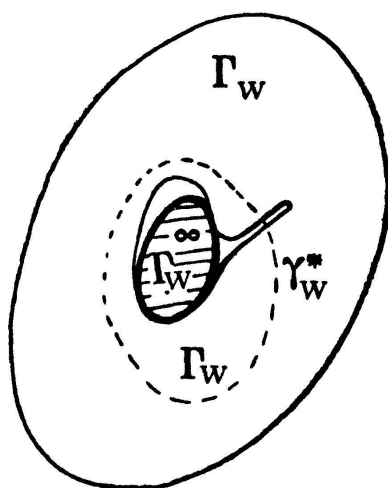


Fig. 3

<sup>15)</sup> Der  $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\Gamma_{w_n}^n}$  ist die Menge derjenigen Punkte der Ebene, in deren jeder Umgebung Punkte von  $\infty$  vielen  $\Gamma_{w_n}^n$  liegen, der  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_{w_n}^n$  die Menge der Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte von fast allen  $\Gamma_{w_n}^n$  liegen.

<sup>16)</sup> Siehe § 1, 3. Da bei nichtpunktförmiger Randkomponente  $\Gamma_z$  die extremale Länge der Menge  $\{\gamma^1\}$  unabhängig von  $z$  nach unten beschränkt ist, geht mit  $d(z)$  auch  $\lambda\{\gamma^2\}$  gegen null.



einem gegebenen positiven  $\varepsilon$  in  $G_z$  eine  $\Gamma_z$  umschließende Jordankurve  $\gamma_z$ , für deren sämtliche Punkte  $z$

$$d(z) = d(z; G_z, \Gamma_z, \Gamma'_z) < \varepsilon$$

ist, was es wegen  $d(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \Gamma_z$  gibt. Für alle hinreichend großen Indizes  $n$  werden auch die Kurven  $\Gamma_z^n$  von  $\gamma_z$  umfaßt, und es gilt für die Punkte  $z$  von  $\gamma_z$ :

$$d_n(z) = d(z; G_z^n, \Gamma_z^n, \Gamma'_z) \leq d(z; G_z, \Gamma'_z) < \varepsilon,$$

da jede Konkurrenzkurve für  $d$  eine solche für  $d_n$  enthält. Wegen der konformen Invarianz ist für jeden Punkt  $w$  der Kurve  $w_n(\gamma_z)$

$$d(w; G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, w_n(\Gamma'_z)) < \varepsilon$$

und um so mehr

$$d(w; G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, \Gamma'_w) < \varepsilon,$$

da hier die Menge der Konkurrenzkurven vergrößert wurde. Andererseits wird für alle hinreichend großen  $n$  das Kontinuum  $\Gamma_{w_n}^n$  von  $\gamma_w^*$  umfaßt. Ziehen wir nun zum Vergleich die extremale Distanz  $d^*(w)$  des Punktes  $w$  (falls es Punkte  $w \in w_n(\gamma_z)$  außerhalb  $\gamma_w^*$  überhaupt gibt) von  $\gamma_w^*$  bezüglich des von  $\gamma_w^*$  und  $\Gamma'_w$  berandeten Ringgebietes heran: Jede Konkurrenzkurve für die Größe

$$d(w; G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, \Gamma'_w)$$

enthält eine solche für  $d^*(w)$ , so daß um so mehr gilt

$$d^*(w) < \varepsilon.$$

Diese Beziehung kann aber nur für solche Punkte des zwischen  $\gamma_w^*$  und  $\Gamma'_w$  liegenden Ringgebietes gelten, die in einer schmalen Umgebung  $U_\varepsilon$  von  $\gamma_w^*$  liegen, in welcher also die Kurven  $w_n(\gamma_z)$  für alle hinreichend großen  $n$  und somit wegen der gleichmäßigen Konvergenz auch  $w(\gamma_z)$  liegen müssen. Da  $\varepsilon$  beliebig ist und  $U_\varepsilon$  mit  $\varepsilon$  gegen null geht, kann kein Punkt von  $w(\gamma_z)$  im Äußern von  $\gamma_w^*$  liegen, woraus folgt, daß auch  $\bar{\Gamma}_w$  von  $\gamma_w^*$  umfaßt wird. Da  $\gamma_w^*$  beliebig wählbar ist, muß

$$\bar{\Gamma}_w \subseteq \Gamma_w^\infty$$

gelten, w. z. b. w.

Eine beliebige Teilfolge der Folge  $(w_n(z))$  konvergiert ebenfalls gegen  $w(z)$ , und es gilt somit für den lim. sup. der Bilder der entsprechenden  $\Gamma_z^n$  dieselbe eben bewiesene Inklusion. Daraus folgt aber, daß sogar

$${}^\infty\Gamma_w \supseteq \bar{\Gamma}_w$$

ist. Gäbe es nämlich einen Randpunkt  $\zeta$  von  $\bar{\Gamma}_w$  (d. h. einen Punkt von

$\Gamma_w$ ), der nicht zu  ${}^\infty\Gamma_w$  gehört, so gäbe es eine Umgebung  $U(\zeta)$  und eine Teilfolge der Abbildungen  $w_n(z)$ , für die die Durchschnitte  $\Gamma_{w_n}^n \cdot U(\zeta)$  leer wären. Der lim. sup. der Randkomponenten  $\Gamma_{w_n}^n$  für diese Teilfolge könnte von einer Jordankurve umschlossen werden, die nicht ganz  $\bar{\Gamma}_w$  umschließt, im Widerspruch zum bewiesenen Satz.

Beachtet man, daß es beim Beweis unwesentlich ist, daß die Gebiete  $G_z^n$  endlichen Zusammenhangs und in  $G_z$  kompakt sind, sondern die Jordankurven  $\Gamma_z^n$  ganz oder teilweise durch  $\Gamma_z$  selber ersetzt werden können, so ergibt sich der

**Hauptsatz.** *Ist  $w(z)$  eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes  $G_z$  und Limes der in jedem kompakten Teil von  $G_z$  gleichmäßig konvergenten Folge  $w_n(z)$ , und geht für eine Randkomponente  $\Gamma_z$  die extremale Distanz  $d(z) \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \Gamma_z$ , so konvergieren die Bilder der  $\Gamma_z$  entsprechenden Randkomponenten der Ausschöpfungsgebiete gegen  $\Gamma_w = w(\Gamma_z)$ .*

Die Konvergenz ist dabei so zu verstehen, daß der lim. sup. und der lim. inf. dieser Bildkomponenten zusammen mit denjenigen Komponenten ihrer Komplemente, die  $G_w$  nicht enthalten, gleich dem Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_w$  sind.

### § 3. Konforme Abbildung von Gebieten abzählbar unendlich hohen Zusammenhangs

7. Ein bekannter Abbildungssatz (Courant [1]) für endlich vielfach zusammenhängende Gebiete sei vorausgeschickt: Ein Gebiet  $G_z$  mit den Randkomponenten  $\Gamma_z^1, \dots, \Gamma_z^n$  (wobei man  $\Gamma_z^1$  als Jordankurve voraussetzen darf) kann stets auf ein Gebiet  $G_w$  mit den Randkomponenten  $\Gamma_w^1, \dots, \Gamma_w^n$ ,  $\Gamma_z^k \leftrightarrow \Gamma_w^k$ , abgebildet werden, welches folgende Bedingungen erfüllt:

$\Gamma_w^1$  ist eine gegebene, im Endlichen gelegene Jordankurve, die  $G_w$  in ihrem Innern enthält, und ein gewisser gegebener Punkt von  $\Gamma_z^1$  entspricht einem gegebenen Punkt von  $\Gamma_w^1$ <sup>17)</sup>.

$\Gamma_w^2$  gehört einer Klasse von Kurven an, die bezüglich eines festen, im Innern von  $\Gamma_w^1$  gelegenen Punktes sternförmig und homothetisch sind.

Die Jordankurven  $\Gamma_w^3, \dots, \Gamma_w^n$  gehören gegebenen Homothetieklassen<sup>18)</sup> von nicht-konkaven Jordankurven an, wozu wir als Grenzfall auch die Schlitze zählen.

<sup>17)</sup> Diese Punktzuordnung ist nur für den später folgenden Eindeutigkeitsbeweis wesentlich.

<sup>18)</sup> Zwei Kurven heißen homothetisch, wenn sie durch eine Transformation  $a(w - w_0) + w_0$ ,  $a \geq 0$ ,  $w_0$  beliebig, miteinander verknüpft sind.

Sei nun  $G_z$  ein Gebiet mit abzählbar vielen Randkomponenten,  $\Gamma_z^1$  (= Jordankurve) isoliert, die übrigen,  $\Gamma_z^2, \Gamma_z^3, \dots$  beliebig. Die Normierungsbedingungen für  $G_w$  seien dieselben, wobei wir nun zu den Klassen, denen die Kurven  $\Gamma_w^k$  ( $k \geq 2$ ) angehören sollen, auch die Punkte zulassen. Wir wollen, unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die Häufungsrandkomponenten von  $G_z$  die Existenz einer Abbildung  $w(z)$  auch in diesem Falle beweisen. Die Kreisnormierung bildet natürlich einen Spezialfall davon.

8. Allgemeiner stellen wir uns das in der Einleitung angegebene Problem: Diejenigen unendlich vielfach zusammenhängenden Gebiete zu charakterisieren, auf die ein beliebiger für endlichen Zusammenhang gültiger Existenzsatz der konformen Abbildung erweitert werden kann.

Zu diesem Zwecke schöpfen wir das Gebiet  $G_z$  durch eine wachsende Folge von kompakten oder nicht-kompakten, endlich vielfach zusammenhängenden Gebieten aus:

$$G_z^1 \subseteq G_z^2 \subseteq \dots \subseteq G_z^n = \dots \subseteq G_z.$$

jedem der endlich vielen Komplementärkontinuen der Gebiete  $G_z^n$  ordnen wir eine Klasse  $C$  von einfachzusammenhängenden Kontinuen der  $w$ -Ebene zu, so daß die den Gliedern jeder ineinandergeschachtelten Folge von Komplementärkontinuen zugeordneten Klassen schließlich identisch ist. Außerdem sollen für die Klassen  $C$  folgende beiden Bedingungen erfüllt sein:

(8.1) Jedes System von endlich vielen Klassen  $C$  ist vollständig<sup>19)</sup>.

(8.2) Der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen einer und derselben Klasse liegt stets wieder in der Klasse.

Für jedes Gebiet  $G_z^n$  gibt es also eine eindeutige konforme Abbildung  $w_n(z)$ , die jede Randkomponente in ein Kontinuum der ihr zugeordneten Klasse überführt. Wir nehmen nun weiter an:

(8.3) Die Folge  $(w_n(z))$  enthalte eine in jedem kompakten Teil von  $G_z$  gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Limes keine Konstante ist<sup>20)</sup>.

Der Limes  $w(z)$  einer gewissen konvergenten Teilfolge von Abbildungen  $w_n(z)$  ist somit eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes  $G_z$ . Jedes Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_z$  von  $G_z$  bestimmt eine ineinandergeschachtelte Folge von Komplementärkontinuen der Gebiete  $G_z^n$ , deren

---

<sup>19)</sup> D. h. ein endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet besitzt stets ein konform äquivalentes, dessen Komplementärkontinuen in den entsprechenden Klassen liegen.

<sup>20)</sup> Diese letzte Bedingung muß sich im konkreten Fall aus gewissen Normierungsbedingungen für die Abbildungen  $w_n(z)$  ergeben.

Limes es ist. Den Komplementärkontinuen der Folge ist schließlich allen dieselbe Klasse  $C$  zugeordnet. Das Gebiet  $G_z$  habe nun die *Eigenschaft* :

(8.4) Für jede Folge  $(z_n)$  aus  $G_z$ , die gegen den Rand von  $G_z$  geht, geht  $d(z_n) \rightarrow 0$ .

Dann liegt das Bild  $\overline{\Gamma_w}$  von  $\overline{\Gamma_z}$  ebenfalls in der Klasse  $C$ .

9. Die Anzahl der verschiedenen Klassen  $C$  von Kontinuen der  $w$ -Ebene, die auf diese Art den Randkomponenten von  $G_z$  zugeordnet werden, ist notwendig abzählbar, weil die Anzahl der Randkomponenten der Gebiete  $G_z^n$  abzählbar ist. Wir wollen nun umgekehrt für ein Gebiet  $G_z$  abzählbaren Zusammenhang von einer Zuordnung  $\Gamma_z \rightarrow C(\Gamma_z)$  der Klassen zu den Randkomponenten von  $G_z$  ausgehen. Es ist eine spezielle Ausschöpfung des Gebietes  $G_z$  zu finden, die es gestattet, die gegebene Zuordnung  $\Gamma_z \rightarrow C(\Gamma_z)$  auf die Ausschöpfungsgebiete zu übertragen. Zu diesem Zwecke bilden wir die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Menge  $\{\Gamma_z\}$  der Randkomponenten von  $G_z$  <sup>21)</sup> :

$$\{\Gamma_z\}^1, \{\Gamma_z\}^2, \dots, \{\Gamma_z\}^n, \dots, \{\Gamma_z\}^\omega, \{\Gamma_z\}^{\omega+1} \dots,$$

wobei also  $\{\Gamma_z\}^1$  die Menge der Häufungsrandkomponenten ist,  $\{\Gamma_z\}^2$  die Menge der Häufungskomponenten von  $\{\Gamma_z\}^1$ ;  $\{\Gamma_z\}^\omega$  ist gleich dem Durchschnitt der Mengen  $\{\Gamma_z\}^n$  für alle natürlichen Zahlen usw. Solche Ableitungen gibt es nur abzählbar viele nicht-leere, und eine letzte. Diese enthält daher nur endlich viele Komponenten von  $\{\Gamma_z\}$ . Jede einzelne davon trennen wir von einem ein für allemal fest gewählten Punkt  $z_0 \in G_z$  durch eine in  $G_z$  verlaufende Jordankurve, so, daß diese Jordankurven alle außerhalb voneinander und je in einer Umgebung vom Radius  $\varepsilon_1$  der zugehörigen Häufungsrandkomponente von  $G_z$  verlaufen. Durch diese Jordankurven wird eine gewisse Teilmenge von Randkomponenten des Gebietes  $G_z$  vom Punkte  $z_0$  getrennt. Mit der Menge der übrigen verfahren wir analog, d. h. wir bilden wieder die letzte nicht-verschwindende Ableitung und trennen diese endlich vielen Randkomponenten durch ebensoviele in  $G_z$  verlaufende Jordankurven vom Punkte  $z_0$ , wobei diese Jordankurven nun auch außerhalb der zuerst gezogenen verlaufen sollen. Es ist leicht zu sehen, daß nach endlich vielen Schritten nur mehr endlich viele isolierte Komponenten von  $\{\Gamma_z\}$  übrigbleiben <sup>22)</sup>. Das von diesen und den endlich vielen eingeführten Jordankurven berandete Teilgebiet von  $G_z$  bezeichnen wir mit  $G_z^1$ . Falls gewisse isolierte Randkomponenten von  $G_z$  zur Normierung der Abbildung besonders

<sup>21)</sup> Wir bezeichnen die Menge mit  $\{\Gamma_z\}$ , irgendeine einzelne Komponente davon mit  $\Gamma_z$ .

<sup>22)</sup> Der Beweis ist in der Arbeit [2] des Verf. durchgeführt.

ausgezeichnet sind, wie dies im eingangs erwähnten Beispiel  $\Gamma^1$  ist, kann man die Ausschöpfung so einrichten, daß dieselben auch wieder als Randkomponenten von  $G_z^1$  auftreten.

Um das Gebiet  $G_z^2$  zu erhalten, führen wir dasselbe Verfahren mit denjenigen einzelnen Teilmengen von  $\{\Gamma_z\}$  durch, die von den oben konstruierten Jordankurven umfaßt (d. h. von  $z_0$  getrennt) werden. Dabei wählen wir die neuen Jordankurven in einer  $\varepsilon_2$ -Umgebung der zugehörigen Randkomponenten von  $G_z$ , und so, daß  $G_z^1 \subseteq G_z^2$  ist. Indem wir diese Konstruktion für jede natürliche Zahl  $n$  ausführen und dabei die Zahlen  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  gehen lassen, erhalten wir eine Ausschöpfung

$$G_z^1 \subset G_z^2 \subset \dots \subset G_z$$

des Gebietes  $G_z$ . Jeder Randkomponente des Gebietes  $G_z^n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist eindeutig eine Randkomponente  $\Gamma_z$  von  $G_z$  zugeordnet, nämlich entweder sie selber oder diejenige, zu der sie konstruiert wurde: Letztere ist die letzte nicht-verschwindende Ableitung des von der ersten umschlossenen Teils von  $\{\Gamma_z\}$ . Wir ordnen ihr nun die Klasse  $C(\Gamma_z)$  von Kontinuen der  $w$ -Ebene zu.

Betrachten wir andererseits irgendeine Randkomponente  $\Gamma_z$  von  $G_z$ . Ist sie isoliert, so wird sie schließlich auch Randkomponente von  $G_z^n$  sein. Andernfalls bestimmt sie in jedem  $G_z^n$  eindeutig eine Randkomponente, die sie von  $G_z^n$  trennt. Die Folge  $(\Gamma_z^n)$  der dadurch ausgezeichneten Randkomponenten der Gebiete  $G_z^n$  ist ineinandergeschachtelt und konvergiert gegen  $\Gamma_z$ . Es ist zu zeigen, daß die den  $\Gamma_z^n$  zugeordneten Klassen schließlich gleich derjenigen von  $\Gamma_z$  sind, das heißt daß  $\Gamma_z$  schließlich stets die letzte nicht-verschwindende Ableitung der von  $\Gamma_z^n$  umschlossenen Teilmenge von  $\{\Gamma_z\}$  ist. Dies folgt aber leicht:  $\Gamma_z$  ist nämlich isolierte Komponente einer wohlbestimmten Ableitung  $\{\Gamma_z\}^\alpha$ , und die Ableitungen der von den  $\Gamma_z^n$  umschlossenen Teilmengen von  $\{\Gamma_z\}$  sind gleich den von  $\Gamma_z^n$  umschlossenen Teilmengen der entsprechenden Ableitungen der ganzen Menge. Für alle hinreichend nahe an  $\Gamma_z$  gelegenen Kurven ist somit  $\alpha$  die Ordnung der letzten nicht-verschwindenden Ableitung des von  $\Gamma_z^n$  umschlossenen Teils von  $\{\Gamma_z\}$  und  $\Gamma_z$  die einzige Komponente dieser Ableitung. Die Zuordnung der Klassen  $C$  zu den Randkomponenten der endlich vielfach zusammenhängenden Ausschöpfungsgebiete  $G_z^n$ ,  $\Gamma_z^n \rightarrow C$ , ist somit wohldefiniert und induziert die gegebene Zuordnung

$$\Gamma_z \rightarrow C(\Gamma_z) .$$

Wir haben damit, falls man noch Bedingungen (8.1, 8.2) über die vor-

gegebenen Klassen von Komplementärkontinuen und die Bedingung (8.3) berücksichtigt, folgendes bewiesen :

**Satz.** *Jeder Existenzsatz der konformen Abbildung für endlichen Zusammenhang gilt auch für ein Gebiet  $G_z$  abzählbaren Zusammenhangs, für welches  $d(z) \rightarrow 0$  konvergiert, wenn  $z$  gegen eine beliebige Randkomponente von  $G_z$  geht. Dabei bedeutet  $d(z)$  die extremale Distanz des Punktes  $z$  von dieser Randkomponente, bezüglich irgendeiner Hilfskurve in  $G_z$ .*

Insbesondere ist damit der in Nr. 7 behauptete Abbildungssatz bewiesen, da natürlich auch die dort verlangte Zuordnung eines Punktes auf dem Rand von den Näherungsabbildungen auf die Grenzabbildung übergeht.

#### § 4. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $d \equiv 0$ ist auf einer Randkomponente

10. *Hilfssätze über Streifengebiete.* Wir wollen in diesem Paragraphen eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß der extremale Durchmesser  $d(\zeta)$  jedes Punktes  $\zeta$  auf einer Jordanrandkomponente (Schlitz) null ist. Zu diesem Zwecke vergleichen wir die extremale Länge der  $\zeta$  abtrennenden Querschnitte  $\gamma$ , die zur Definition von  $d(\zeta)$  verwendet wurden, mit den Moduln gewisser Streifengebiete, die wir in das betrachtete Gebiet legen.

Unter einem Streifengebiet  $G_z$  verstehen wir ein im Endlichen gelegenes Gebiet, dessen äußere Randkomponente  $\Gamma_z$  eine Jordankurve ist, auf der zwei abgeschlossene, getrennte Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  ausgezeichnet sind. Wir machen überdies die Voraussetzung, daß sich die im Innern von  $\Gamma_z$  gelegenen Randkomponenten von  $G_z$  nur gegen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  häufen, die beiden Komplementärintervalle  $\beta$  auf  $\Gamma_z$  also freie Jordanbogen sind. Bekanntlich gibt es in dem Falle, wo  $\Gamma_z$  isoliert ist, eine schlichte konforme Abbildung  $w = u + iv$  von  $G_z$  auf ein Rechteck  $G_w$ , wobei die Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  in die Seiten  $u = 0$  und  $u = 1$ , die Komplementärintervalle in die Seiten  $v = 0$  und  $v = a$ , und die innern Randkomponenten in Schlitz  $v = \text{konst.}$  oder Punkte übergeführt werden. Überdies besitzt die Funktion  $u(x, y)$  eine Minimaleigenschaft, die man etwa mit Hilfe des Dirichletintegrals von  $u$  formulieren kann : In der Klasse  $\{\varphi\}$  aller in  $G_z$  stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi(x, y)$  mit den Randwerten 0 auf  $\alpha_0$  und 1 auf  $\alpha_1$  ist  $u(x, y)$  diejenige, die das Dirichletintegral

$$\|\varphi\|^2 = \iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy$$



minimisiert<sup>23)</sup>. Wir nennen  $w(z)$  die Parallelschlitzabbildung des Streifens  $G_z$ .

Sind die beiden Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  nicht isoliert, so gibt es i. A. keine Funktion in  $\{\varphi\}$ , welche dem Dirichletintegral den kleinsten Wert erteilt. Jedenfalls aber gibt es darin eine Minimalfolge  $(\varphi_n)$ , d. i. eine Folge mit der Eigenschaft  $\|\varphi_n\| \rightarrow d = \inf_{\{\varphi\}} \|\varphi\|$ . Es gilt nun der

**Satz.** *Es gibt eine in  $G_z$  harmonische Funktion  $u(x, y)$  mit der Eigenschaft, daß  $\|u - \varphi_n\| \rightarrow 0$  geht für jede Minimalfolge  $(\varphi_n)$ . Sie ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt durch die beiden Eigenschaften: (a)  $u(x, y)$  ist in  $G_z$  stetig und stückweise stetig differenzierbar; (b)  $\|u - \varphi_n\| \rightarrow 0$  für eine Minimalfolge  $(\varphi_n)$ .*

Zum Beweis konstruieren wir zunächst eine spezielle Minimalfolge  $u_n(x, y)$ : Zu den beiden Bogen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  geben wir je eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten

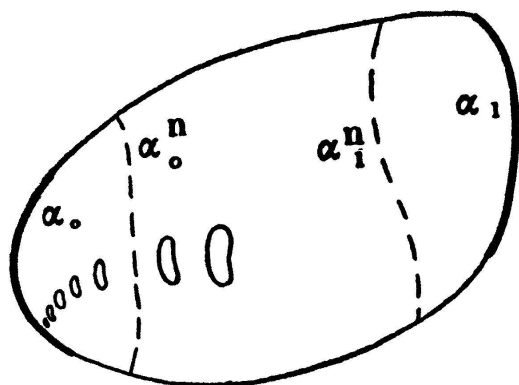


Fig. 4

$\alpha_0^n$  bzw.  $\alpha_1^n$  des Gebietes  $G_z$ <sup>24)</sup>, die gegen  $\alpha_0$  bzw.  $\alpha_1$  konvergieren und auf den Komplementärbögen  $\beta$  enden (Fig. 4). Die von den beiden Querschnitten  $\alpha_0^n$  und  $\alpha_1^n$  und den dieselben verbindenden beiden Intervallen der Bogen  $\beta$  berandeten Teilgebiete  $G_z^n$  sind wieder Streifengebiete mit den beiden ausgezeichneten Intervallen  $\alpha_0^n$  und  $\alpha_1^n$ . Die

Funktion  $u_n(x, y)$  sei darin die Lösung des Minimumproblems für  $G_z^n$ . Wir ergänzen diese Funktionen in den beiden durch  $\alpha_0^n$  und  $\alpha_1^n$  abgetrennten Teilen von  $G_z$  durch 0 bzw. 1 und erhalten dadurch eine Folge von Vergleichsfunktionen für das Gebiet  $G_z$ ; ebenso ist  $u_n$  natürlich eine Vergleichsfunktion für das Gebiet  $G_z^{n+1}$ , so daß also für jedes  $n$  gilt:

$$\|u_n\| \geq \|u_{n+1}\| \geq d.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Folge dieser erweiterten Funktionen  $u_n(x, y)$  eine Minimalfolge für das Gebiet  $G_z$  bildet<sup>25)</sup>. Nun ist aber bekanntlich jede Minimalfolge  $(\varphi_n)$  eine Fundamentalfolge, d. h. es gilt

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty^{26)}.$$

<sup>23)</sup> Im Falle endlichen Zusammenhangs von  $G_z$  impliziert die gegebene geometrische Charakterisierung von  $G_w$  diese Minimaleigenschaft.

<sup>24)</sup> Das sind hier topologische, glatte Bilder einer abgeschlossenen Strecke, die mit Ausnahme der Endpunkte in  $G$  liegen.

<sup>25)</sup> Ist nämlich  $\varphi(x, y)$  eine beliebige Vergleichsfunktion in  $G_z$ , so hat die Funktion  $\psi = (1 + 2\varepsilon)\varphi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) die Randwerte  $-\varepsilon$  auf  $\alpha_0$  und  $1 + \varepsilon$  auf  $\alpha_1$ . Auf allen

Wenden wir dies auf unsere spezielle Minimalfolge  $u_n$  an, so folgt daraus wegen der Harmonizität dieser Funktionen die gleichmäßige Konvergenz der Folge  $u_n(x, y) - u_n(x_0, y_0)$ , wo  $(x_0, y_0)$  ein fester Punkt von  $G_z$  ist, in jedem kompakten Teil von  $G_z$ . Der Limes  $u(x, y)$  dieser Folge ist entweder  $\equiv 0$  oder Realteil einer schlichten konformen Abbildung  $w(z) = u + iv$  ( $w(z_0) = 0$ ) von  $G_z$ . Sind  $z_1$  und  $z_2$  zwei beliebige Punkte von  $G_z$ , so gilt im zweiten Fall

$$|\Re \{w(z_1) - w(z_2)\}| \leq 1$$

$$|\Im \{w(z_1) - w(z_2)\}| \leq a, \quad a = \lim a_n,$$

wo  $a_n = \|u_n\|^2$  gleich der Höhe des Bildrechtecks von  $G_z^n$  mittels der Abbildung  $w_n = u_n + iv_n$  ist. Das bedeutet aber, daß das Bildgebiet  $G_w$  ganz in einem Rechteck der Höhe  $a$  und der Basis 1 liegt. Dabei werden die beiden freien Intervalle  $\beta_0$  und  $\beta_1$  von  $\Gamma_z$  auf je ein Intervall der beiden horizontalen Rechteckseiten abgebildet (die nicht die ganzen Seiten ausmachen müssen).

Um zu beweisen, daß  $\lim \|u - u_n\| = 0$  ist, wählen wir zu einer gegebenen positiven Zahl  $\varepsilon$  ein  $n$  so, daß für alle  $p > 0$   $\|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon$  ist und hernach ein in  $G_z$  kompaktes Teilgebiet  $D_z$ , so daß im Komplement  $G_z - D_z$   $\|u_n\|_{G-D} < \varepsilon$  und  $\|u\|_{G-D} < \varepsilon$  ist<sup>27)</sup>. Dann gilt für jedes  $p$

$$\|u_{n+p}\|_{G-D} = \|u_n + (u_{n+p} - u_n)\|_{G-D} < 2\varepsilon$$

und

$$\|u - u_{n+p}\|^2 = \|u - u_{n+p}\|_D^2 + \|u - u_{n+p}\|_{G-D}^2 < \|u - u_{n+p}\|_D^2 + 9\varepsilon^2.$$

Nun kann man außerdem zu  $D_z$  die Zahl  $p_0$  so wählen, daß für  $p > p_0$   $\|u - u_{n+p}\|_D < \varepsilon$  ist, woraus für  $p > p_0$

Querschnitten mit hinreichend großem  $n$  hat  $\psi$  somit Randwerte  $< 0$  bzw.  $> 1$ . Daraus ergibt sich aber leicht, daß für diese  $n$

$$\|u_n\| < \|\psi\| = (1 + \varepsilon) \|\varphi\|$$

und also  $\lim \|u_n\| \leq d$  ist.

<sup>28)</sup> Diese Relation ergibt sich folgendermaßen: Die Zahlen  $\|\varphi_n - \varphi_m\|$  sind beschränkt: Sei  $M$  eine gemeinsame obere Schranke. Dann gilt für jede reelle Zahl  $\lambda$

$$\|\varphi_n + \lambda(\varphi_m - \varphi_n)\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + 2\lambda(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) + \lambda^2 \|\varphi_m - \varphi_n\|^2 \geq d^2$$

und also

$$|(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n)|^2 \leq (\|\varphi_n\|^2 - d^2) M^2.$$

$(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n)$  geht also gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $\lambda = 1$  folgt

$$\|\varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + 2(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) + \|\varphi_m - \varphi_n\|^2$$

und somit die Behauptung.

<sup>27)</sup> Daß  $\|u\|$  endlich ist, folgt aus dem vorhergehenden Abbildungssatz; es ist aber auch ohne denselben zu beweisen, daß  $\|u\| \leq d$  ist.



$$\|u - u_{n+p}\| < \sqrt{10} \varepsilon$$

folgt. Daraus folgt insbesondere wegen

$$\|u_{n+p}\| + \|u - u_{n+p}\| \geq \|u\| \geq \|u_{n+p}\| - \|u - u_{n+p}\| ,$$

daß  $\|u\|^2 = d^2 = a$  ist. Das heißt für  $d > 0$ , daß das Bildgebiet  $G_w$  das Rechteck mit der Höhe  $a$  und der Basis 1, in dem es liegt, bis auf eine Menge vom Flächenmaß null ausfüllt<sup>28)</sup>. Aus der Beziehung  $\|\varphi_n - \varphi_m\| \rightarrow 0$ , die für jede Minimalfolge  $(\varphi_n)$  aus  $\{\varphi\}$  gilt, folgt schließlich noch  $\|u - \varphi_n\| \rightarrow 0$  für jede Minimalfolge, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Ist  $u^*(x, y)$  eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion in  $G_z$ , und  $(\varphi_n)$  eine Minimalfolge mit  $\lim \|\varphi_n - u^*\| = 0$ , so gilt auch  $\|u - u^*\| = 0$ . Die Differenz  $u - u^*$  ist somit stückweise konstant und daher konstant in  $G_z$ .

11. Wir betrachten die Menge derjenigen Kurven  $\gamma$  in  $G_z$ , die die beiden Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  verbinden. Für die extremale Länge  $\lambda\{\gamma\}$  dieser Kurvenmenge gilt

$$\lambda\{\gamma\} \geq \lambda\{\gamma_n\} = 1/a_n \quad n = 1, 2, \dots^{29)}$$

wo  $\{\gamma_n\}$  die entsprechende Kurvenmenge für das Gebiet  $G_z^n$  ist. Daraus folgt

$$\lambda\{\gamma\} \geq 1/a, \quad (a = \lim a_n) .$$

Ist  $\lambda\{\gamma\}$  endlich, so kann  $\|u\|^2 = a$  nicht null,  $u$  also keine Konstante sein.

Wir setzen nun voraus, daß  $G_z$  abzählbaren Zusammenhangs sei und  $\lambda\{\gamma\}$  endlich. Wegen der konformen Invarianz der Größe  $\lambda$  können wir dieselbe in  $G_w$  berechnen. Die Kurvenmenge  $\{\gamma\}$  geht bei der Abbildung  $G_z \rightarrow G_w$  über in die Menge derjenigen Kurven von  $G_w$ , die die Bilder der beiden Intervalle  $\beta$  (die auf den Seiten  $v = \text{konst}$  liegen) trennen. Die Menge  $\{\gamma'\}$  derjenigen Querschnitte  $v = \text{konst}$  von  $G_w$ , die die beiden Horizontalseiten trennen, ist eine Teilmenge von  $\{\gamma\}$ , somit  $\lambda\{\gamma\} \leq \lambda\{\gamma'\}$ . Wegen des abzählbaren Zusammenhangs und der Schlitz-eigenschaft von  $G_w$  gibt es auf jeder Geraden  $v = \text{konst.}$ , die  $G_w$  trifft, mit Ausnahme einer abzählbaren Ordinatenmenge, einen solchen Quer-

<sup>28)</sup> Es läßt sich nun mit den üblichen Methoden (Courant [2]) beweisen, daß die inneren Randkomponenten auf Schlitze abgebildet werden.

<sup>29)</sup> Die Ungleichung kommt daher, daß jede Kurve  $\gamma$  eine Kurve  $\gamma_n$  enthält. Die Gleichung beweist man zunächst für endlichen Zusammenhang und durch Ausschöpfung für beliebigen.

schnitt. Für eine beliebige Vergleichsfunktion  $\varrho(u, v)$  und einen beliebigen solchen Querschnitt  $\gamma'$  gilt

$$L_{\varrho}^2 \{\gamma'\} \leq L_{\varrho}^2(\gamma') = \left( \int_{\gamma'} \varrho(u, v) du \right)^2 \leq \int_{\gamma'} \varrho^2(u, v) du ,$$

und durch Integration nach  $v$

$$L_{\varrho}^2 \{\gamma'\} a \leq \iint \varrho^2(u, v) dudv \leq F_{\varrho}(G_w) .$$

Es muß deshalb auch  $\lambda \{\gamma'\} \leq 1/a$  sein, und wegen

$$1/a \leq \lambda \{\gamma\} \leq \lambda \{\gamma'\} \leq 1/a$$

muß überall das Gleichheitszeichen stehen. Ferner folgt, daß alle Strecken  $\gamma'$  ( $v = \text{konst.}$ ) bis auf höchstens diejenigen einer Ordinatenmenge vom Maß null die Länge 1 haben. Wäre dem nämlich nicht so, so gäbe es offenbar eine positive Zahl  $\varepsilon$  und eine Ordinatenmenge  $M$  von positivem Maß  $m$ , für die Länge des Querschnitts  $l(v) \leq 1 - \varepsilon$  ist. Die extremale Länge  $\lambda'_1$  dieser Menge von Strecken wäre nach derselben Berechnung  $\leq \frac{1-\varepsilon}{m}$ , die extremale Länge  $\lambda'_2$  der Menge der übrigen Strecken höchstens  $1/(a - m)$ . Die von den beiden Streckenmengen überdeckten Punktmengen sind punktfremd, so daß nach einem allgemeinen Satz (Ahlfors, Beurling [1]) über extremale Längen gilt

$$1/\lambda' \geq 1/\lambda'_1 + 1/\lambda'_2 \geq a - m + \frac{m}{1 - \varepsilon} > a ,$$

im Widerspruch zu  $\lambda' = 1/a$ . Das Gebiet  $G_w$  ist somit ein auf höchstens einer Ordinatenmenge vom Masse null horizontal geschlitztes Rechteck<sup>30)</sup>.

Ist umgekehrt  $u = \lim u_n$  nicht konstant, so ist die extremale Länge  $\lambda'$  der Querschnitte  $\gamma'$  von  $G_w$  endlich, und somit gilt dasselbe für  $\lambda \{\gamma\}$ ; wir haben also den

**Satz.** *Ist das Streifengebiet  $G_z$  von abzählbarem Zusammenhang, so ist die extremale Länge der Kurven  $\{\gamma\}$  von  $G_z$ , die die beiden ausgezeichneten Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  verbinden, dann und nur dann endlich, wenn  $u = \lim u_n$  keine Konstante ist. Sie ist dann gleich der extremalen Länge der Querschnitte  $v = \text{konst.}$  von  $G_w$ , die die Länge 1 haben, und gleich  $1/a$ , wo  $a$  die Höhe des Rechteckes  $G_w$  bedeutet.*

12. *Vergleich zweier Extremalprobleme.* Wir betrachten im Streifengebiet  $G_z$  wiederum die Menge  $\{\varphi\}$  der reellen Funktionen  $\varphi(x, y)$ , und

<sup>30)</sup> Es folgt wieder, daß  $G$  das ganze Rechteck bis auf eine Menge vom Flächenmaß null ausfüllt. Der Beweis geht gleich, sobald die innere Schlitzmenge eine Horizontalprojektion vom linearen Maß null hat.

daneben die Menge  $\{w\}$  aller schlichten konformen Abbildungen  $w(z) = u(u, y) + i v(x, y)$ , die  $G_z$  in ein Rechteck  $G_w$  der Basislänge 1 abbilden, wobei  $\Gamma_z$  in die Rechteckskontur übergehen soll, und zwar so, daß die beiden Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  den Seiten  $u = 0$  und  $u = 1$  des Rechtecks entsprechen. Wir stellen die beiden Minimumprobleme:

(1) In der Menge  $\{\varphi\}$  eine Funktion  $\varphi$  zu finden, die das Dirichletintegral  $\|\varphi\|^2$  minimisiert.

(2) In der Menge  $\{w\}$  eine Abbildung  $w(z)$  zu finden, die die Höhe  $a(w)$  des Bildrechtecks minimisiert.

Diese beiden Variationsprobleme sind äquivalent. Beweis: Die Realteile  $u(x, y)$  der Abbildungen  $w(z)$  bilden eine Teilmenge von  $\{\varphi\}$ . Es ist somit für jede Abbildung  $w(z)$

$$a(w) \geq \|u\|^2 \geq \inf \|\varphi\|^2.$$

Umgekehrt kann man, wie man leicht sieht, mit Realteilen von solchen Abbildungen  $w(z)$ , für welche  $a(w) = \|u\|^2$  ist, eine Minimalfolge für das Problem (1) herstellen; es muß somit

$$\inf_{\{w\}} a(w) = \inf \|\varphi\|^2$$

sein. Ist nun  $\varphi$  die Lösung von (1), so ist  $\varphi$  Realteil einer Abbildung  $w(z)$ , und  $\|\varphi\|^2$  gleich der Höhe  $a$  des Bildrechtecks:  $w(z)$  somit eine Lösung von (2). Ist umgekehrt  $w(z)$  eine Lösung von (2), so ist  $u = \Re w$  in  $\{\varphi\}$  und  $\|u\|^2 = a(w)$ , also  $\|u\|^2 = \inf \|\varphi\|^2$ , das heißt  $u$  eine Lösung von (1).

Da die Lösung von (1) eindeutig ist, ist es auch diejenige von (2).

13. *Ein Hilfssatz über Ringgebiete.*  $G_z$  sei ein in der  $z$ -Ebene gelegenes Ringgebiet<sup>31)</sup>, das den unendlich fernen Punkt nicht enthält, und von dem keine der beiden Randkomponenten aus einem einzigen Punkt besteht. Mit  $d$  bezeichnen wir den Durchmesser der inneren Randkomponente, mit  $a$  den Abstand der beiden Randkomponenten. Wir wollen  $a$  nach unten abschätzen durch  $d$  und den Modul  $\mu$  von  $G_z$ . Dazu bilden wir  $G_z$  schlicht konform auf ein Kreisringgebiet  $G_w$  ab, so daß die innere Randkomponente in den Kreis  $|w| = 1$ , die äußere in den Kreis  $|w| = r > 1$  übergeht.  $w(z)$  sei die (bis auf eine Rotation in der  $w$ -Ebene bestimmte) Abbildung; die durch  $G_z$  allein bestimmte konforme Invariante  $\mu = \log r$  heißt der konforme Modul von  $G_z$ . Der Kreis  $\gamma_w: |w| = (1+r)/2$  wird durch die Umkehrfunktion  $z(w)$  auf eine analyti-

---

<sup>31)</sup> D. i. ein zweifach zusammenhängendes Gebiet.

sche Jordankurve  $\gamma_z$  abgebildet, und jede Kreisscheibe vom Radius  $(r-1)/2$  um einen Punkt  $w$  von  $\gamma_w$  auf ein Teilgebiet von  $G_z$ , das einen Kreis vom Radius  $\frac{r-1}{8} \left| \frac{dz}{dw} \right|$  um den Mittelpunkt  $z(w)$  enthält. Es ist somit

$$a \geq \frac{r-1}{4} \min_{\gamma_w} \left| \frac{dz}{dw} \right|,$$

und nach dem Koebeschen Verzerrungssatz

$$\min_{\gamma_w} \left| \frac{dz}{dw} \right| \geq q \max_{\gamma_w} \left| \frac{dz}{dw} \right|,$$

wobei  $q$  eine nur vom konformen Modul von  $G_z$  abhängige positive Zahl ist. Daraus folgt für das Integral  $\int_{\gamma_w} |dz|$ :

$$2\pi \frac{r+1}{2} \max_{\gamma_w} \left| \frac{dz}{dw} \right| \geq \int_{\gamma_w} |dz| > 2d,$$

und für den Abstand  $a$

$$a \geq \frac{1}{2\pi} dq \frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{2\pi} dq \frac{e^\mu - 1}{e^\mu + 1}.$$

Es gilt also für den Durchmesser  $d$  der inneren Randkomponente des Ringgebietes  $G_z$

$$d \leq a \text{ konst.},$$

mit einer Konstanten, die nur vom Modul von  $G_z$  abhängt.

14. *Eine hinreichende Modulbedingung.* Wir betrachten eine Jordanrandkomponente (Schlitz)  $\Gamma_z$  eines Gebietes  $G_z$ .

**Satz.** *Gibt es in  $G_z$  ein System von außerhalb voneinander liegenden Ringgebieten, die den gesamten von  $\Gamma_z$  verschiedenen Rand von  $G_z$  umfassen (d. h. von  $\Gamma_z$  trennen), und deren Moduln oberhalb einer positiven Schranke liegen, so ist der extremale Durchmesser  $d(\zeta)$  jedes Punktes  $\zeta$  von  $\Gamma_z$  gleich null<sup>32)</sup>.*

*Beweis:* Wir ersetzen für ein solches System von Ringgebieten den von  $\Gamma_z$  verschiedenen Rand von  $G_z$  durch die inneren Randkomponenten der Ringgebiete, wodurch ein Gebiet  $G'_z$  von abzählbarem Zusammenhang entsteht, das in  $G_z$  enthalten ist und  $\Gamma_z$  als Randkomponente besitzt.  $\zeta$  sei ein Punkt auf  $\Gamma_z$ , und zur Vereinfachung der Darstellung nehmen

---

<sup>32)</sup> Falls  $\Gamma_z$  ein Punkt ist, so ist notwendig und hinreichend für  $d(\Gamma_z) = 0$ , daß es eine ineinandergeschachtelte Folge von Ringgebieten in  $G_z$  gibt, die  $\Gamma_z$  umschließen und deren Modulsumme gleich  $\infty$  ist (Grötzsch [6]).

wir an,  $z = \infty$  liege in  $G_z$ . Auf jedem Kreis  $|z - \zeta| = r$  mit hinreichend kleinem Radius  $r$  gibt es im Äußern von  $\Gamma_z$  einen wohlbestimmten Bogen, dessen Endpunkte auf  $\Gamma_z$  liegen und der  $\zeta$  von  $z = \infty$  trennt. Den Durchschnitt dieses Bogens mit  $G'_z$  nennen wir  $\gamma(r)$ ,  $\gamma(r)$  zusammen mit den von diesem Bogensystem getroffenen Randkomponenten ( $\neq \Gamma_z$ ) von  $G'_z$  nennen wir eine „Kette“  $c(r)$ . Ist  $w(z)$  eine beliebige schlichte konforme Abbildung von  $G'_z$  oder auch nur eines passenden Teilgebietes von  $G'_z$  mit einem Dirichlet-Integral  $\leq M$ , so gilt für die Länge  $l(r)$  des Bildes von  $\gamma(r)$

$$l^2(r) = \left( \int_{\gamma(r)} |w'| |dz| \right)^2 \leq 2\pi r \int_{\gamma(r)} |w'|^2 r d\varphi \quad (z - \zeta = re^{i\varphi})$$

und durch Integration

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{l^2(r)}{r} dr \leq 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \int_{\gamma(r)} |w'|^2 r dr d\varphi \leq 2\pi M. \quad (14.1)$$

Für den Durchmesser  $\bar{l}(r)$  des Bildes der Kette  $c(r)$  gilt:

$$\bar{l}(r) \leq l(r) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \leq l(r) + q \sum_k a_k \leq (1 + q) l(r). \quad (14.2)$$

Dabei bedeuten die Zahlen  $d_k$  die Durchmesser der Bilder der von  $\gamma(r)$  getroffenen Randkomponenten von  $G'_z$ , die  $a_k$  die Abstände der beiden Randkomponenten der denselben entsprechenden Ringgebiete, und  $q > 0$  eine feste Zahl.

Seien nun  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  zwei den Punkt  $\zeta$  abtrennende Querschnitte von  $G'_z$ , wobei  $\gamma_0$  in  $|z - \zeta| < r_0$  und  $\gamma_1$  in  $|z - \zeta| > r_1 > r_0$  verlaufe. Das durch die beiden Jordanbögen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  und die beiden auf  $\Gamma_z$  liegenden Intervalle  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  begrenzte Streifengebiet unterwerfen wir mit  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  als ausgezeichneten Intervallen der Parallelschlitzabbildung. Es ist leicht zu sehen, daß unter den gemachten Voraussetzungen  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  auf die beiden vertikalen Seiten des Bildrechtecks abgebildet werden<sup>33)</sup>. Demzufolge ist die extremale Länge  $\lambda\{\gamma\}$  der Menge aller  $\zeta$  abtrennen-

---

<sup>33)</sup> Dies sieht man, indem man wie oben im Streifengebiet je eine Folge von Querschnitten  $\alpha_0^n$  und  $\alpha_1^n$  definiert, und die Parallelschlitzabbildung des Streifens annähert durch die Parallelschlitzabbildungen derjenigen Streifengebiete, die entstehen, wenn man alle außerhalb der Querschnitte  $\alpha_0^n$  und  $\alpha_1^n$  liegenden Komplementärkontinuen zum Streifen hinzunimmt, bei denen dann also  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  isoliert sind. Wegen der Beschränktheit der Dirichletintegrale dieser Näherungsabbildungen gilt gleichmäßig (14.1) und (14.2) für einen beliebigen Punkt  $\zeta'$  auf  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$ . Das bedeutet aber, daß es zwischen zwei von der Näherungsabbildung unabhängigen Radien  $r'_0$  und  $r'_1$  Ketten  $c(r')$  um den Punkt  $\zeta'$  geben muß, die ein Bild mit beliebig kleinem Durchmesser haben.

den Querschnitte  $\gamma$ , die in  $G_z$  zwischen  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  verlaufen, höchstens gleich dem reziproken Wert der Höhe  $a(\gamma_0, \gamma_1)$  des Bildrechtecks<sup>34)</sup>. Ferner hat das Bild jeder Kette  $c(r)$ ,  $r_0 \leq r \leq r_1$  einen Durchmesser  $\bar{l}(r) \geq 1$ . Geht nun bei festem  $\gamma_1$   $r_0 \rightarrow 0$  (damit gleichzeitig  $\gamma_0 \rightarrow \zeta$ ), so kann das Dirichletintegral  $a(\gamma_0, \gamma_1)$  der Parallelschlitzabbildungen nicht beschränkt bleiben, da es sonst wegen (14.1) Radien  $r$  geben müßte mit beliebig kleinem  $l(r)$  und damit wegen (14.2) mit beliebig kleinem  $\bar{l}(r)$ , im Widerspruch zu  $\bar{l}(r) \geq 1$ . Das bedeutet aber, daß mit  $r_0 \rightarrow 0$   $a(\gamma_0, \gamma_1)$  gegen  $\infty$  und demzufolge  $\lambda\{\gamma\} \rightarrow 0$  gehen muß.

## § 5. Das harmonische Maß einer Randkomponente

15. **Definition.**  $\Gamma_z$  sei eine Randkomponente von  $G_z$ . Wegen der Invarianz der im folgenden vorkommenden Begriffe gegenüber linearen Transformationen können wir das zu  $\Gamma_z$  gehörige Komplementärkontinuum  $\bar{\Gamma}_z$  von  $G_z$  als im Endlichen gelegen voraussetzen. Ferner sei  $(\gamma_z^n)$   $n = 0, 1, \dots$ , eine ineinandergeschachtelte Folge von Jordankurven des Gebietes  $G_z$ , die  $\bar{\Gamma}_z$  umfassen und gegen  $\Gamma_z$  konvergieren, und  $\omega_n(z)$  das harmonische Maß der Kurve  $\gamma_z^n$  bezüglich des von  $\gamma_z^n$  und  $\gamma_z^0 = \gamma_z$  berandeten Teilgebietes  $D_z^n$  von  $G_z$ <sup>35)</sup>. Die Folge der Funktionen  $\omega_n(z)$  konvergiert in  $D_z (= \sum_n D_z^n)$  gegen eine Funktion  $\omega(z)$ , und zwar gleichmäßig in jedem Gebiet  $D_z^k$ ,  $k$  fest<sup>36)</sup>. Diese harmonische und von der Wahl der Folge  $(\gamma_z^n)$  ( $n \geq 1$ ) unabhängige Funktion nennen wir das harmonische Maß von  $\Gamma_z$  bezüglich  $G_z, \gamma_z$ .

Für die harmonischen Maße  $\omega(z)$  und  $\omega'(z)$  bezüglich zweier verschiedener Kurven  $\gamma_z$  und  $\gamma'_z$  gilt: Zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon$  gibt es eine Umgebung  $U_\varepsilon$  von  $\Gamma_z$  in der

$$|\omega(z) - \omega'(z)| < \varepsilon$$

<sup>34)</sup> Die extremale Länge der in  $G'_z$  verlaufenden Querschnitte  $\gamma$  ist nämlich gleich  $1/a(\gamma_0, \gamma_1)$ .

<sup>35)</sup> Sind sämtliche Randkomponenten von  $D_z^n$  Kontinua, so kann man  $\omega_n(z)$  als diejenige in  $D_z^n$  harmonische und beschränkte Funktion definieren, die auf  $\gamma_z^n$  den Wert 1, auf den übrigen Randkomponenten von  $D_z^n$  den Wert null annimmt. Sind gewisse punktförmig, so muß man  $\omega_n(z)$  durch eine Ausschöpfung von  $D_z^n$  definieren, indem man die von  $\gamma_z$  und  $\gamma_z^n$  verschiedenen Randkomponenten zunächst durch Jordankurven abschließt und dann zur Grenze übergeht.

<sup>36)</sup> Die monoton fallende Folge von positiven harmonischen Funktionen  $\omega_n(z)$  konvergiert vermöge des Harnackschen Prinzips auf jedem kompakten Teil von  $D_z$  gleichmäßig. Andererseits nimmt die Differenz  $\omega_n - \omega_{n+p} > 0$  ( $n \geq k, p > 0$ ) ihr Maximum bezüglich  $D_z^k$  auf  $\gamma_z^k$  an, wobei  $\gamma_z^k$  in  $D_z$  ja kompakt ist.



ist. Das ergibt sich folgendermaßen: In einer der (einfach zusammenhängenden) Komponenten des Durchschnittes der beiden Innengebiete von  $\gamma_z$  und  $\gamma'_z$  liegt  $\bar{\Gamma}_z$ . Durch Entfernen von  $\bar{\Gamma}_z$  erhält man daraus ein zweifach zusammenhängendes Gebiet  $D_z^*$ :  $u(z)$  sei das harmonische Maß von  $\Gamma_z$  bezüglich  $D_z^*$ . Die Funktionen  $\omega(z)$  und  $\omega'(z)$  seien durch dieselbe Folge  $(\gamma_z^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  von Jordankurven definiert, die in  $D_z^*$  liegen. Dann gilt für die Näherungsfunktionen  $\omega_n$  und  $\omega'_n$

$$|\omega_n - \omega'_n| \leq 1 - u$$

und somit

$$|\omega - \omega'| \leq 1 - u ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Ist  $\zeta$  ein Punkt auf  $\Gamma_z$ , so verstehen wir unter dem limes superior der Funktion  $\omega$  im Randpunkte  $\zeta$  die Zahl

$$\overline{\lim} \omega(\zeta) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \left( \sup_{|z - \zeta| < \varrho} \omega(z) \right) .$$

Dieser ist in jedem Randpunkte  $\zeta$  von  $\Gamma_z$  definiert, aber i. a. nicht konform invariant, da schon der Begriff des Randpunktes es in diesem gewöhnlichen Sinne nicht ist.

Der  $\overline{\lim} \omega(\zeta)$  ist entweder null oder 1 in jedem Punkte  $\zeta$ . Zum Beweis nehmen wir an, es sei in einem Punkte  $\zeta$  der  $\overline{\lim} \omega(\zeta) = M < 1$ . Dann gibt es eine positive Zahl  $\varrho$ , so daß in jedem Punkte  $z$  von  $G_z$ ,  $|z - \zeta| < \varrho$   $\omega(z) < (1 + M)/2$  ist. Der Durchschnitt von  $|z - \zeta| \leq \varrho/2$  mit  $\bar{\Gamma}_z$  zerfällt in eine Menge von Kontinuen, deren eines den Punkt  $\zeta$  enthält. Dieses, das heißt dessen Rand, berandet mit  $|z - \zeta| = \varrho$  zusammen ein zweifach zusammenhängendes Gebiet.  $u(z)$  sei das harmonische Maß des Kreises  $|z - \zeta| = \varrho$  bezüglich dieses Ringgebietes. Das Maß  $\omega(z)$  sei durch das Kurvensystem  $(\gamma_z, \gamma_z^n)$   $n = 1, 2, \dots$  definiert, wobei  $|z - \zeta| \leq \varrho$  im Innern von  $\gamma_z$  liegen möge. Wir betrachten die Funktionen

$$\varphi_n(z) = \frac{1 + M}{2} \cdot \omega_n(z) ,$$

deren Limes  $[(1 + M)/2] \cdot \omega(z)$  ist. Für alle hinreichend großen  $n$  hat  $D_z^n$  mit  $|z - \zeta| < \varrho$  einen nicht-leeren Durchschnitt, der in einzelne Gebiete zerfällt. Jeder Randpunkt eines solchen Teilgebietes ist entweder ein Punkt von  $\gamma_z^n$ , von  $|z - \zeta| = \varrho$ , oder ein nicht auf  $\Gamma_z$  liegender Randpunkt von  $G_z$ . Aus dem Maximumprinzip ergibt sich somit die Abschätzung<sup>37)</sup>

---

<sup>37)</sup> Dabei muß man  $\omega$  unter Umständen zunächst durch die kleinere Funktion  $\omega'$  ersetzen, indem in  $D_z^n$  der Rand von  $G_z$  durch Jordankurven ausgeschlossen wird, auf denen  $\omega' = 0$  ist. Für die Funktion  $\omega'$  gilt die Ungleichung, und wegen  $\omega' \rightarrow \omega$  auch für  $\omega$ .

$$\varphi_n + u \geq \omega ,$$

und demzufolge

$$[(1 + M)/2] \cdot \omega + u \geq \omega ,$$

woraus folgt, daß  $u \geq [(1 - M)/2] \cdot \omega$  ist. Nun ist aber der limes superior von  $u(z)$  im Punkte  $\zeta$  gleich null, somit auch der von  $\omega(z)$ .

16. Das Gebiet  $G_z$  werde durch die wachsende Gebietsfolge  $G_z^n$  ausgeschöpft,  $n = 0, 1, \dots$ , deren Rand aus je endlich vielen Jordankurven besteht. Dann bestimmt die Randkomponente  $\Gamma_z$  eine Fundamentalfolge von Randkurven  $\gamma_z^n$  der Gebiete  $G_z^n$ , die wir zur Definition des harmonischen Maßes  $\omega(z)$  von  $\Gamma_z$  bezüglich  $G_z$ ,  $\gamma_z (= \gamma_z^0)$  verwenden können. Ist  $w(z) = f(z)$  eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes  $G_z$  auf ein Gebiet  $G_w$ , so ist das harmonische Maß der Bildkomponente  $\Gamma_w$  von  $\Gamma_z$  bezüglich des Bildes  $\gamma_w$  von  $\gamma_z$  und  $G_w$

$$\bar{\omega}(w) = \omega(z(w)) .$$

Denn die Kurvenfolge  $(\gamma_z^n)$  geht mittels der Abbildung  $f(z)$  in eine Kurvenfolge  $(\gamma_w^n)$  über, die man als definierende Folge verwenden kann, und für die harmonischen Masse dieser Annäherungskurven ist die Übertragbarkeit evident.

Jedes Gebiet  $G_z^n$  werde nun durch eine schlichte konforme Abbildung  $w_n = f_n(z)$  auf ein Gebiet  $G_{w_n}^n$  abgebildet, und die Abbildungsfolge  $f_n(z)$  konvergiere in jedem kompakten Teil von  $G_z$  gleichmäßig gegen die Abbildung  $w = f(z)$ . Die harmonischen Maße der Randkomponenten  $\gamma_{w_n}^n = f_n(\gamma_z^n)$  — die keine Jordankurven zu sein brauchen — bezüglich der Kurven  $\gamma_{w_n} = f_n(\gamma_z)$  und der Gebiete  $G_{w_n}^n$  sind die Funktionen

$$\bar{\omega}_n(w_n) = \omega_n(f_n^{-1}(w_n)) ,$$

wobei  $\omega_n(z)$  das harmonische Maß der Kurve  $\gamma_z^n$  bezüglich  $G_z^n$ ,  $\gamma_z$  bedeutet,  $n \geq 1$ . Wir behaupten nun, daß diese in jedem kompakten Teil  $B_w$  des Bildgebietes  $D_w$  von  $D_z$  gleichmäßig gegen  $\bar{\omega}(w)$  konvergieren.

*Beweis.* Dieser kompakte Teil  $B_w$  liegt schließlich in jedem Gebiet  $G_{w_n}^n$ , und somit ist  $\bar{\omega}_n(w)$  auf  $B_w$  definiert. Die Differenz

$$| \bar{\omega}_n(w) - \bar{\omega}(w) |$$

nimmt in einem Punkte von  $B_w$  ihr Maximum bezüglich  $B_w$  an, und diese Punkte haben für  $n \rightarrow \infty$  einen Häufungspunkt  $w^*$  in  $B_w$ . Wir wählen zu einer gegebenen Zahl  $\varepsilon > 0$  den Radius  $r$  so, daß im Kreise  $C_w(r)$ :  $|w - w^*| \leq r$ ,  $|\bar{\omega}(w') - \bar{\omega}(w'')| < \varepsilon$  ist. Das Urbild  $C_z = f^{-1}(C_w)$  ist ein gewisses einfach zusammenhängendes, abgeschlossenes Gebiet von  $G_z$ , und



wir können  $N_1$  so wählen, daß für  $n > N_1$  auf  $C_z$   $|f_n(z) - f(z)| \leq r/2$  ist. Der Kreis  $C_w(r/2)$  wird somit vom Bilde  $f_n(C_z)$  für  $n > N_1$  überdeckt. Nun wählen wir  $N_2 > N_1$  so, daß für  $n > N_2$   $|\omega_n(z) - \omega(z)| < \varepsilon$  ist auf  $C_z$ . Also gilt für jeden Punkt  $w$  von  $C_w(r/2)$

$$\begin{aligned} |\bar{\omega}_n(w) - \bar{\omega}(w)| &= |\omega_n(f_n^{-1}(w)) - \omega(f^{-1}(w))| \\ &= |\omega_n(f_n^{-1}(w)) - \omega(f_n^{-1}(w)) + \omega(f_n^{-1}(w)) - \omega(f^{-1}(w))| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Sei nun wieder  $\Gamma_w^\infty$  der limes superior der Randkomponenten  $\gamma_{w_n}^n$ . Wir bilden das harmonische Maß  $\omega^\infty(w)$  von  $\Gamma_w^\infty$  bezüglich des von  $\Gamma_w^\infty$  und  $\gamma_w$  berandeten Ringgebietes. Dann gilt

$$\omega^\infty(w) \geq \bar{\omega}(w).$$

Sind nämlich  $\beta$  und  $\beta^\infty$  zwei Jordankurven, die bzw.  $\gamma_w$  und  $\Gamma_w^\infty$  umfassen, und wobei  $\beta^\infty$  im Innern von  $\gamma_w$  liegt, so gilt für das harmonische Maß  $\omega^*(w)$  von  $\beta^\infty$  bezüglich  $\beta$  für alle hinreichend großen  $n$

$$\bar{\omega}_n(w) \leq \omega^*(w),$$

weil für alle hinreichend großen  $n$  die Jordankurve  $\beta^\infty$  das Randkontinuum  $\gamma_{w_n}^n$  und  $\beta$  die Kurve  $\gamma_{w_n}$  umfaßt. Durch Grenzübergang ergibt sich

$$\bar{\omega}(w) \leq \omega^*(w),$$

und, da  $\omega^\infty$  durch  $\omega^*$  beliebig angenähert werden kann, auch die behauptete Ungleichung.

Ist nun  $w$  ein Punkt auf  $\Gamma_w$ , der nicht auf  $\Gamma_w^\infty$  liegt, so ist  $\omega^\infty(w) < 1$  und somit  $\lim \bar{\omega}(w) = 0$ . Durch Übergang zu einer Teilfolge der Folge  $(f_n(z))$  kann man wie in (6) dasselbe für den limes inf.  ${}^\infty\Gamma_w$  der Folge  $\gamma_{w_n}^n$  zeigen. Es gilt somit der

**Satz:** In jedem Punkte  $w$  der Randkomponente  $\Gamma_w$ , der nicht zu  ${}^\infty\Gamma_w$  gehört (bezüglich der Abbildungsfolge  $(f_n(z))$ ) ist das harmonische Maß von  $\Gamma_w$  gleich null.

Insbesondere folgt daraus für isolierte Randkomponenten wieder die Gleichung  ${}^\infty\Gamma_w = \Gamma_w^\infty = \bar{\Gamma}_w$ , denn das harmonische Maß einer solchen hat überall auf  $\Gamma_w$  den Randwert 1. Allgemein kann man sagen:

**Satz.** Hat eine Häufungsrandkomponente  $\Gamma_z$  eines Gebietes  $G_z$  die Eigenschaft, daß sie bei jeder<sup>38)</sup> schlichten konformen Abbildung  $w(z)$  in

---

<sup>38)</sup> Es genügt, Abbildungen in das Innere des Einheitskreises zu betrachten, wobei  $\Gamma_z$  in die Kreisperipherie übergeht.

eine Randkomponente  $\Gamma_w$  des Bildgebietes  $G_w$  übergeht, in deren jedem Punkte der limes superior des harmonischen Maßes gleich 1 ist, so gilt für jede Abbildungsfolge  $(f_n(z))$  die Beziehung  ${}^\infty\Gamma_w = \Gamma_w^\infty = \bar{\Gamma}_w$ .

Diese Bedingung ist aber vermutlich schwächer als die oben mit Hilfe der extremalen Längen formulierte.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] *L. Ahlfors, A. Beurling*, Conformal invariants and functiontheoretic null-sets, Acta math. 83 (1950).
- [2] *R. Courant*, Dirichlet's prinzip, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience publishers, New York 1950.
- [3] *H. Grötzsch*, Zur Theorie der konformen Abbildungschlichter Bereiche I und II, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 87 (1935).
- [4] *H. Grötzsch*, Zur Theorie der konformen Abbildung, Hallische Monogr. 16 (1950).
- [5] *H. Grötzsch*, Über Extremalprobleme bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 84 (1932).
- [6] *H. Grötzsch*, Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 87 (1935).
- [7] *P. Koebe*, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche, Math. Z. 7 (1920).
- [8] *H. Meschkowski*, Über die Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche I, Math. Ann. 123 (1951).
- [9] *K. Strebel*, Eine Ungleichung für extremale Längen, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 90 (1951).
- [10] *K. Strebel*, Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 101 (1951).

(Eingegangen den 10. Juli 1952.)