Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammnenhangs.

Autor: Strebel, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21889

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 21.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die konforme Abbildung von Gebieten unendlich hohen Zusammenhangs

Von Kurt Strebel, Zürich

I. TEIL

Einleitung

1. Eine topologische Abbildung eines Gebietes G_z der z-Ebene[1]) in die w-Ebene führt G_z wiederum in ein Gebiet G_w über. Durch die Zuordnung der Gebietspunkte $z \leftrightarrow w$ von G_z und G_w wird eine eineindeutige Zuordnung der Randkomponenten $\Gamma_z \leftrightarrow \Gamma_w$ der beiden Gebiete induziert, in dem Sinne, daß jeder Punktfolge (z_n) aus G_z, die gegen eine Randkomponente Γ_z konvergiert[2]), eine Punktfolge (w_n) von G_w entspricht, die gegen eine und dieselbe Randkomponente Γ_w konvergiert und umgekehrt. Ist G_z von unendlich hohem Zusammenhang[3]), so ist die induzierte Zuordnung der Menge der Randkomponenten überdies topologisch, wenn man als Umgebungen einer Randkomponente Γ die Teilmenge derjenigen Randkomponenten betrachtet, die in einer Umgebung von Γ bezüglich der komplexen Ebene liegen.

An Stelle der Randkomponenten ist es im folgenden praktischer, die Komplementärkontinuen dieses Gebietes zu betrachten: Eine Randkomponente Γ eines Gebietes G hat als Komplement eine offene Menge, die im allgemeinen in mehrere einfach zusammenhängende Gebietskomponenten zerfällt. Eine derselben enthält das Gebiet G, sämtliche andern sind zu G fremd. Die Vereinigung der letztern mit Γ stellt ein zu G fremdes Kontinuum dar; wir nennen es das zu Γ gehörige Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}$ von G. Ein solches ist stets einfach zusammenhängend, das heißt sein Komplement besteht aus einem einzigen Gebiet (welches G enthält).

---

[1]) Darunter verstehen wir stets die durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossene Ebene mit einem dem Abstand auf der Kugel äquivalenten Umgebungsbegriff.

[2]) d. h. jede Umgebung von Γ_z enthält fast alle Punkte der Folge.

[3]) Zusammenhangszahl = Anzahl der Randkomponenten.

Bei einer bloß *topologischen Abbildung* etwa eines Gebietes G_z endlichen Zusammenhangs können nun die Komplementärkontinuen des Bildgebietes G_w als außerhalb voneinander liegende, einfach zusammenhängende Kontinuen beliebig vorgegeben werden, wenn nur ihre Anzahl gleich der Anzahl der Komplementärkontinuen von G_z ist. Dies ist jedoch bei einer eineindeutigen und *konformen Abbildung* $w(z)$ nicht mehr der Fall. Man wird vielmehr jedem Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_z$ von G_z eine ganze Klasse $C(\overline{\Gamma}_z)$ von einfach zusammenhängenden Kontinuen zuordnen müssen, aus der dann die Auswahl durch die konforme Abbildung selber getroffen wird. Wir wollen ein System $C_1, \ldots, C_n$ von solchen Klassen vollständig nennen, wenn jedes n-fach zusammenhängende Gebiet G_z mit beliebiger eineindeutiger Zuordnung $\overline{\Gamma}_z \leftrightarrow C(\overline{\Gamma}_z)$ ein konform äquivalentes Gebiet G_w besitzt, dessen $\overline{\Gamma}_z$ entsprechendes Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_w$ in der Klasse $C(\overline{\Gamma}_z)$ liegt. Man wird dabei bestrebt sein, die einzelnen Klassen gleichzeitig so eng zu wählen, daß bei gegebenem G_z das Gebiet G_w eindeutig bestimmt ist.

Ein einfaches Beispiel ist das sogenannte Koebesche Kreisnormierungsprinzip (Koebe [1]): Die Klassen $C_1, \ldots, C_n$ sind alle identisch und gleich der Menge aller Kreisscheiben und Punkte auf der Kugel. Dieses System ist vollständig, das heißt jedes beliebige n-fach zusammenhängende Gebiet G_z kann auf ein Gebiet G_w abgebildet werden, dessen sämtliche nicht-punktförmigen Randkomponenten Kreise oder Geraden sind, und G_w ist bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt. Allgemeinere Klassen C sind für den Fall endlichen Zusammenhangs u. a. von Grötzsch [1, 2] angegeben worden. Für Gebiete unendlich hohen Zusammenhangs ist die Frage jedoch noch fast gar nicht behandelt. Es tritt dabei auch für die Häufungsrandkomponenten eine ganz neue Situation auf: Durch die den unmittelbar benachbarten Komponenten aufgeprägte Gestalt wird diejenige der Häufungsrandkomponente zusätzlich beeinflußt.

Ein instruktives Beispiel ist ebenfalls von Grötzsch ([3], Strebel [1]) angegeben worden: Die Klasse C_1 besteht aus dem Einheitskreis $|w| \leq 1$; die übrigen Klassen $C_2, C_3, \ldots$ sind miteinander identisch und bestehen aus den radialen Schlitzen. Das System der Klassen $C_1, \ldots, C_n$ ist für jedes endliche n vollständig, das unendliche System jedoch nicht; das heißt es gibt Gebiete abzählbaren Zusammenhangs, die sich nicht auf ein Gebiet, das vom Einheitskreis und lauter radialen Schlitzen berandet ist, abbilden lassen. Die radialen Schlitze können ein Herausspringen eines solchen am Einheitskreise selbst bewirken.

Wir stellen uns nun folgendes Problem: Es sei G_z ein Gebiet abzählbaren Zusammenhangs. Jedem Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_z$ von G_z sei eine gewisse Klasse $C(\overline{\Gamma}_z)$ von einfach zusammenhängenden Kontinuen zugeordnet, so daß endlich viele von diesen Klassen stets ein vollständiges System bilden. Unter welchen (hinreichenden) Bedingungen über die Häufungsrandkomponenten von G_z gibt es eine konforme Abbildung $w(z)$, die jedes Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_z$ in ein $\overline{\Gamma}_w \in C(\overline{\Gamma}_z)$ überführt?

Im demnächst in derselben Zeitschrift erscheinenden zweiten Teil der Arbeit wird unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Gestalt der Randkomponenten Γ_w die Unität gewisser speziell normierter Abbildungen bewiesen.

§ 1. Der extremale Durchmesser eines Randpunktes

2. *Die extremale Länge einer Kurvenmenge*[4]). Es sei $\{\gamma\}$ eine Menge von rektifizierbaren Kurven[5]) in einem Gebiete G der z-Ebene, und $\varrho(z)$ eine reelle, nicht-negative Funktion in G, für die die Integrale

$$L_\varrho(\gamma) = \int_\gamma \varrho \,|\, dz \,| \quad \text{und} \quad F_\varrho(G) = \iint_G \varrho^2 dx dy$$

stets existieren und $0 < F_\varrho(G) < \infty$ ist. Jeder solchen Funktion ϱ ordnen wir die Zahl

$$\mu(\varrho, \{\gamma\}, G) = \frac{L_\varrho^2\{\gamma\}}{F_\varrho(G)}$$

zu, $L_\varrho\{\gamma\} = \inf\limits_{\{\gamma\}} L_\varrho(\gamma)$. Unter der extremalen Länge λ der Kurvenmenge $\{\gamma\}$ verstehen wir die obere Grenze der Zahlen μ für alle den obigen Bedingungen genügenden Vergleichsfunktionen ϱ:

$$\lambda\{\gamma\} = \sup_\varrho \mu(\varrho, \{\gamma\}, G) \ .$$

Die Zahl $\lambda\{\gamma\}$ ist unabhängig vom speziellen Gebiet G, in das die Kurvenmenge $\{\gamma\}$ eingebettet ist, und invariant gegenüber eineindeutiger konformer Abbildung. Ferner besitzt sie folgende leicht zu beweisenden *Eigenschaften*:

(2.1) Ist $\{\gamma_1\}$ eine Teilmenge der Kurvenmenge $\{\gamma\}$, so ist $\lambda\{\gamma_1\} \geq \lambda\{\gamma\}$.

---

[4]) Vgl. L. Ahlfors und A. Beurling [1].

[5]) Unter einer rektifizierbaren Kurve in G verstehen wir das stetige und rektifizierbare Bild eines Kreises oder das stetige Bild einer offenen Strecke, wobei das Bild jedes abgeschlossenen Teilintervalles der Parameterstrecke in G liege und rektifizierbar sei.

(2.2) Enthält jede Kurve der Menge $\{\gamma\}$ eine solche der Menge $\{\gamma_1\}$, so gilt $\lambda\{\gamma_1\} \leq \lambda\{\gamma\}$.

(2.3) Ist $\{\gamma\}$ die Vereinigungsmenge der beiden nicht notwendig elementfremden Kurvenmengen $\{\gamma_1\}$ und $\{\gamma_2\}$, so gilt die Ungleichung (Strebel [1])

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} \leq \lambda_1^{-\frac{1}{2}} + \lambda_2^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_k = \lambda\{\gamma_k\}, \quad k = 1, 2 .$$

3. *Die extremale Distanz eines Gebietspunktes von einer Randkomponente.* Wir betrachten eine Randkomponente Γ eines Gebietes G der z-Ebene. Γ' sei eine in G gelegene Jordankurve, die uns im folgenden als Hilfskurve dienen wird. In einem der durch Γ' erzeugten beiden Teile der Ebene liegt Γ: Wir bezeichnen diesen Teil als das Innere von Γ' und sagen von Jordankurven, die in G liegen und Γ und Γ' trennen, sie umfassen oder umschließen Γ.

Jedem Gebietspunkte z, der im Innern von Γ' liegt, ordnen wir auf folgende Art bezüglich G, Γ und Γ' eine positive Zahl

$$d(z) = d(z\,;\, G, \Gamma, \Gamma')$$

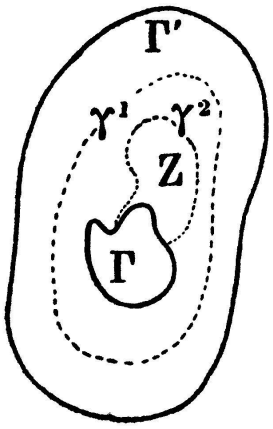

Fig. 1

zu, die wir die *extremale Distanz* [6]) (bezüglich Γ') des Punktes z von der Randkomponente Γ nennen wollen: $\{\gamma\}$ sei die Vereinigungsmenge aller in G und im Innern von Γ' gelegenen rektifizierbaren Jordankurven γ^1, die z und Γ umfassen, und Querschnitte γ^2, die z von Γ' trennen und auf Γ enden [7]) (Fig. 1). Unter $d(z)$ verstehen wir die extremale Länge dieser Kurvenmenge:

$$d(z) = \lambda\{\gamma\} .$$

Diese extremale Distanz $d(z)$ besitzt folgende *Eigenschaften:*

(3.1) Ist (z_n) eine Folge von Punkten, für die $d(z_n) \to 0$ geht, so folgt $z_n \to \Gamma$. Bilden wir nämlich das Innere von Γ' konform auf das Innere des Einheitskreises $|w| < 1$ ab [8]), wobei Γ' in $|w| = 1$ übergehe, so gilt $d(z_n) = d(w_n)$, letztere bezüglich $|w| = 1$ genommen. Wählen wir nun die Funktion $\varrho(w) = 1$ im Einheitskreis, so ist für jeden Punkt w_n

---

[6]) Die hier definierte extremale Distanz ist nicht identisch mit der bei Ahlfors und Beurling definierten extremalen Distanz zweier Randkomponenten.

[7]) Das sind topologische Bilder der Parameterstrecke $0 < t < 1$, deren in G kompakte Intervalle rektifizierbar sind, und die für $t \to 0$ und $t \to 1$ gegen Γ gehen.

[8]) Eine Abbildung des Durchschnittes des Innern von Γ' mit G in das innere des Einheitskreises genügt natürlich.

$$d(w_n) \geq \frac{L_\varrho^2\{\gamma\}}{F_\varrho(G)} \geq \frac{4a^2(w_n)}{\pi} ,$$

wo $a(w_n)$ den Abstand des Punktes w_n von der Randkomponente Γ_w (= Bild von Γ) bedeutet. Es folgt also aus $d(z_n) \to 0$ auch $a(w_n) \to 0$ und damit $z_n \to \Gamma$.

(3.2) Die Beziehung $d(z_n) \to 0$ ist unabhängig von der Hilfskurve Γ'. Seien Γ' und Γ'' zwei Hilfskurven, und für die Punktfolge (z_n) gehe

$$d(z_n; G, \Gamma, \Gamma') \to 0 .$$

Wir wählen eine dritte Hilfskurve Γ^* in G, die Γ sowohl von Γ' als auch von Γ'' trennt. Die Punkte der Folge (z_n) liegen nach obigem schließlich alle im Innern von Γ^*, und wir teilen für diese n die Menge der Konkurrenzkurven bezüglich Γ' ein in die Teilmenge derjenigen, die ganz im Innern von Γ^* liegen, und die der übrigen

$$\{\gamma_n\} = \{\gamma_n^*\} + \{\gamma_n^{**}\} ,$$

und bezeichnen die extremalen Längen dieser Kurvenmengen mit λ_n, λ_n^* und λ_n^{**}. Dann gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^*}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{**}}} .$$

Die Größen λ_n^{**} sind gleichmäßig nach unten beschränkt durch eine positive Schranke, was man analog wie (3.1) beweist, indem man eine spezielle Funktion ϱ betrachtet. Daraus folgt aber mit Hilfe der Ungleichung, daß mit $\lambda_n \to 0$ auch $\lambda_n^* \to 0$ gehen muß. Anderseits sind die Kurven γ_n^* die Konkurrenzkurven des Punktes z_n bezüglich Γ^*, und diese bilden eine Teilmenge der Konkurrenzkurven von z_n bezüglich Γ'': Die extremale Länge der letzten Menge ist somit $\leq \lambda_n^*$ und geht folglich mit λ_n gegen null.

Die Beziehung $d(z_n) \to 0$ ist somit allein durch das betrachtete Gebiet G, die Randkomponente Γ und die Folge (z_n) gegeben und insbesondere invariant gegenüber schlichter konformer Abbildung.

Ist Γ ein Punkt, so ist die extremale Länge der Menge der Querschnitte γ^2, die auf Γ enden und z von Γ' trennen, für jeden Punkt z gleich unendlich [9]), so daß also mit $\lambda\{\gamma\}$ auch $\lambda\{\gamma^1\} \to 0$ gehen muß [10]). Eine solche

[9]) Die extremale Länge dieser Kurven ist nämlich $\geq$ der extremalen Länge der Verbindungskurven zweier geeignet gewählter konzentrischer Kreise mit dem Mittelpunkt Γ und den Radien r_1 und $r_2 < r_1$, also $\geqslant (1/2\pi) \log (r_1/r_2)$, wobei r_1 festbleibt und r_2 beliebig klein gewählt werden kann.

[10]) Es folgt dies wiederum aus der Ungleichung (2.3).

punktförmige Randkomponente wird nach Grötzsch [6] vollkommen punktförmig genannt. Sie geht bei jeder schlichten konformen Abbildung von G wieder in einen Punkt über. Ist Γ ein Kontinuum, so ist $\lambda\{\gamma^1\}$ für jedes z größer als eine von z unabhängige positive Zahl, so daß mit $\lambda\{\gamma\}$ auch $\lambda\{\gamma^2\} \to 0$ gehen muß.

4. *Der extremale Durchmesser eines Randpunktes.* Die Randkomponente Γ von G sei nun eine Jordankurve[11]) oder ein Schlitz[12]), und ζ ein Punkt darauf. Dazu wählen wir wie oben eine Hilfskurve Γ'. Bezeichnen wir als das Innere von Γ denjenigen Teil der Ebene, der G enthält, so gibt es bei nichtpunktförmigem Γ im Durchschnitt einer hinreichend kleinen Umgebung von ζ mit dem Innern von Γ stets eine wohlbestimmte einfach zusammenhängende Gebietskomponente, die ζ als Randpunkt besitzt: Den Durchschnitt dieses Gebietes mit G nennen wir eine Nachbarschaft $N(\zeta)$ des Punktes ζ. Wir betrachten nur Nachbarschaften von ζ, die ganz im Innern der Hilfskurve Γ' liegen und ordnen jeder die Menge $\{\gamma_N\}$ derjenigen im Innern von Γ' liegenden Jordankurven und Querschnitte von G zu, die $N(\zeta)$ und Γ umfassen bzw. auf Γ enden und $N(\zeta)$ von Γ' trennen, (Fig. 2). Unter dem *extremalen Durchmesser* des Punktes ζ (bezüglich Γ') verstehen wir die untere Grenze der extremalen Längen der Kurvenmengen $\{\gamma_N\}$ für alle Nachbarschaften $N(\zeta)$:

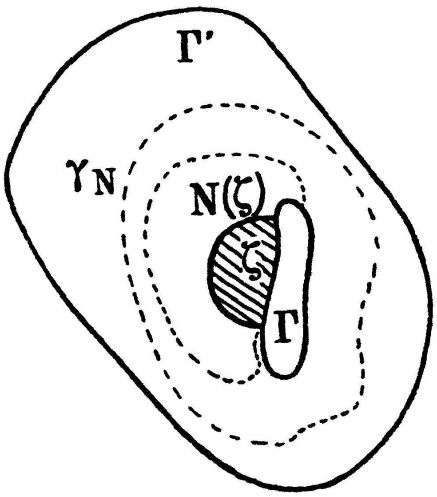

Fig. 2

$$d(\zeta) = d(\zeta; G, \Gamma') = \inf_{\{N(\zeta)\}} \lambda\{\gamma_N\} .$$

Dafür gilt nun wieder:

(4.1) Die Gleichung $d(\zeta) = 0$ ist unabhängig von der gewählten Hilfskurve Γ'.

Zum Beweis wählen wir irgendeine absteigende Folge von Nachbarschaften N_k des Punktes ζ, deren abgeschlossene Hüllen den Durchschnitt $\prod_{k=0}^{\infty} \overline{N}_k = \zeta$ haben (= Fundamentalfolge von Nachbarschaften von ζ). Es ist klar, daß

$$d(\zeta) = \lim_{k \to \infty} \lambda\{\gamma_{N_k}\}$$

[11]) Gemeint auf der Riemannschen Kugel: Sie kann also durch $z = \infty$ gehen.

[12]) Unter einem Schlitz verstehen wir einen zweiufrig zu nehmenden Jordanbogen; als Grenzfall lassen wir auch $\Gamma = \zeta$ zu.

ist. Nun teilen wir für jedes $k \geq 1$ die Menge $\{\gamma_{N_k}\}$ auf in die Teilmenge $\{\gamma^*_{N_k}\}$ derjenigen Kurven, die innerhalb N_0 verlaufen und die der übrigen. Die extremale Länge der zweiten Menge ist wiederum gleichmäßig für alle k durch eine positive Schranke nach unten beschränkt, was man wie oben beweist. Es muß somit $\lambda\{\gamma^*_{N_k}\} \to 0$ gehen. Da man die Nachbarschaft N_0 beliebig wählen kann, muß auch

$$d(\zeta\,; G, \Gamma'') = 0$$

sein für jede von Γ' verschiedene Hilfskurve Γ''.

Ist in einem Randpunkte ζ $d(\zeta) = 0$, so gilt ersichtlich für jede Folge $z_n \to \zeta$ $d(z_n) \to 0$. Ferner ist ζ notwendig ein erreichbarer Randpunkt; denn es existiert in dem Falle, wo Γ nicht punktförmig ist, eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten von G, deren Länge gegen null geht und die gegen ζ konvergieren. Wir werden uns insbesondere für den Fall interessieren, wo $d(\zeta) \equiv 0$ ist für jeden Punkt ζ auf Γ. Dann gilt für jede Folge $z_n \to \Gamma$ $d(z_n) \to 0$.

Satz. *Ist auf der Randkomponente Γ_z $d(\zeta) \equiv 0$, so ist bei jeder schlichten konformen Abbildung $w(z)$ von G_z, die Γ_z als ganzes wieder in eine Jordankurve (Schlitz, Punkt) Γ_w überführt, die induzierte Zuordnung der Punkte von Γ_z und Γ_w topologisch. Ferner ist dann $d(\omega) \equiv 0$ für die Punkte ω von Γ_w.*

Beweis. Wir können annehmen, daß keine von den beiden Randkomponenten Γ_z und Γ_w punktförmig ist. Sonst sind nämlich wegen $d(\zeta) = 0$ notwendig beide punktförmig und die Behauptung ist bewiesen. Ferner bedeutet es keine Einschränkung, vorauszusetzen, daß Γ_w den Punkt $w = \infty$ nicht enthalte. Zu einem beliebigen Punkte ζ auf Γ_z gibt es eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten γ_n, die ζ abtrennen[13]) und deren Bildlänge mit $n \to \infty$ gegen null geht; sonst bekäme man mit Hilfe der Funktion $\varrho = |dw/dz|$ einen Widerspruch gegen $d(\zeta) = 0$. Da Γ_w nach Voraussetzung eine Jordankurve ist, konvergiert somit die Bildfolge jeder Folge $z_n \to \zeta$ gegen einen und denselben Randpunkt ω auf Γ_w, und diese Zuordnung $\zeta \to \omega$ ist offensichtlich stetig. Die Zuordnung ist ferner einwertig. Würden nämlich zwei Punkte ζ_1 und ζ_2 auf denselben Punkt ω abgebildet, so gäbe es zwei Randwege von G_z, α_1 und α_2, die bzw. in ζ_1 und ζ_2 enden würden, und deren Bilder β_1 und β_2 in ω endeten. Die Punkte ζ_1 und ζ_2 teilen Γ_z in zwei Intervalle, von denen eines auf den Punkt ω abgebildet wird. Sei ζ ein Punkt dieses Intervalles und $N_0(\zeta)$ eine Nachbarschaft von ζ, die

[13]) D. h. zu irgendeiner Menge $\{\gamma_n\}$ gehören, wo $N(G)$ eine Nachbarschaft von G ist.

jedoch nicht Nachbarschaft von ζ_1 oder ζ_2 ist. Dann gilt für eine zu ζ gehörige Fundamentalfolge N_k von Nachbarschaften, deren Anfangselement die gegebene Nachbarschaft $N_0(\zeta)$ ist, nach früherem $\lambda\{\gamma^*_{N_k}\} \to 0$, wobei $\{\gamma^*_{N_k}\}$ die Menge der Querschnitte bedeutet, die in N_0 aber außerhalb N_k verlaufen. Anderseits ist aber diese extremale Länge für jedes k gleich unendlich, da die Bilder der Querschnitte $\gamma^*_{N_k}$ im Punkte ω enden[14]). Die Abbildung $\zeta \leftrightarrow \omega$ ist somit topologisch, und natürlich eine Abbildung von Γ_z auf Γ_w.

Da die Zuordnung $G_z \longleftrightarrow G_w$ auf die Randkomponenten Γ_z und Γ_w topologisch fortgesetzt werden kann, wird jede Nachbarschaft eines Punktes G in eine solche seines Bildpunktes ω übergeführt und umgekehrt. Da ferner die extremale Länge einer Kurvenmenge gegenüber eineindeutiger konformer Abbildung invariant ist, folgt, daß auch $d(\omega) \equiv 0$ sein muß.

§ 2. Die Abbildung einer Randkomponente durch eine Grenzfunktion

5. Im Gebiete G_z sei eine wachsende Folge von endlich vielfach zusammenhängenden, Jordan-berandeten Teilgebieten G_z^n gegeben, die G_z ausschöpft, und für jedes Gebiet G_z^n eine schlichte konforme Abbildung $w_n(z)$. Die Folge der Funktionen $w_n(z)$ konvergiere auf jedem kompakten Teil von G_z gleichmäßig. Der Limes ist somit entweder eine Konstante (eventuell $=\infty$), oder eine schlichte konforme Abbildung $w(z)$ des ganzen Gebietes G_z. Wir nehmen das letztere an und bezeichnen $w(z)$ als die Grenzfunktion der Folge $w_n(z)$.

Γ_z sei irgendeine Randkomponente von G_z. Sie zeichnet in jedem Gebiete G_z^n eindeutig eine Randkomponente Γ_z^n aus, durch die sie von G_z^n getrennt wird. Die Folge dieser Jordankurven Γ_z^n ist ineinandergeschachtelt und hat als Limes Γ_z. Wir bezeichnen die Bilder von G_z^n und Γ_z^n mittels der Funktion $w_n(z)$ mit $G_{w_n}^n$ bzw. $\Gamma_{w_n}^n$, diejenigen von G_z und Γ_z mittels $w(z)$ mit G_w, Γ_w. Wir interessieren uns für die Beziehungen, die zwischen den Randkomponenten $\Gamma_{w_n}^n$ und der Randkomponente Γ_w bestehen.

Ist γ_w irgendeine in G_w gelegene Jordankurve, und nennen wir denjenigen Teil der w-Ebene ihr Inneres, der Γ_w enthält, so entspricht ihr mittels der Abbildung $w(z)$ eine Jordankurve γ_z in G_z, deren Inneres Γ_z enthält. Für alle hinreichend großen n liegt die Kurve Γ_z^n ebenfalls im Innern von γ_z, und wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(w_n(z))$

[14]) Siehe Fußnote 9 Seite 105.

auf einer in G_z kompakten Umgebung von γ_z muß schließlich $\Gamma^n_{w_n}$ auch im Innern von γ_w liegen.

Wir führen nun zum Vergleich folgende Punktmengen der w-Ebene ein:

(1) Das zur Randkomponente Γ_w gehörige Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_w$ des Gebietes G_w.

(2) Die Menge Γ^∞_w. D. i. der $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \Gamma^n_{w_n}$ zusammen mit denjenigen Komponenten seines Komplementes, die ganz in $\overline{\Gamma}_w$ enthalten sind[15]).

(3) Die Menge ${}^\infty\Gamma_w$. D. i. die Vereinigung des $\underline{\lim}\, \Gamma^n_{w_n}$ mit denjenigen Komponenten seines Komplementes, die ganz in $\overline{\Gamma}_w$ liegen.

Für die drei Punktmengen gilt nach der obigen Bemerkung ersichtlich

$$\overline{\Gamma}_w \supseteq \Gamma^\infty_w \supseteq {}^\infty\Gamma_w \ .$$

6. Ist Γ_w ein Punkt, so liegt derselbe, wieder nach der obigen Bemerkung, sicher in ${}^\infty\Gamma_w$, so daß auch die umgekehrten Inklusionen erfüllt sind. Im andern Falle aber ist die Umkehrung i. a. nicht richtig, sondern läßt sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über das Gebiet G_z beweisen.

Satz. *Falls für jede Folge (z_n) von Punkten aus G_z, die gegen Γ_z konvergiert, die extremale Distanz $d(z_n) \to 0$ geht, so ist $\Gamma^\infty_w \supseteq \overline{\Gamma}_w$.*

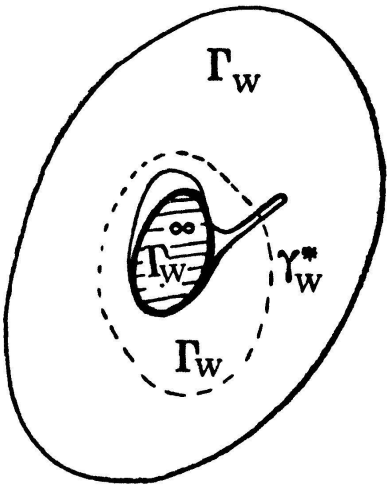

Fig. 3

Wir können von dem Fall, daß Γ_z ein Punkt ist, absehen, da dann auch Γ_w ein Punkt und der Satz also bewiesen ist. Die extremale Distanz $d(z)$ sei in G_z bezüglich einer festen Kurve Γ'_z und mit Hilfe der Kurven γ^2 allein berechnet[16]). Die Bilder $w_n(\Gamma'_z)$ konvergieren gleichmäßig gegen das Bild $w(\Gamma'_z)$, aber wir bezeichnen mit Γ'_w eine Jordankurve in G_w, die $w(\Gamma'_z)$ umfaßt, d. h. durch letztere von Γ_w getrennt wird. Für alle hinreichend großen n umfaßt Γ'_w auch $w_n(\Gamma'_z)$. Die in der w-Ebene, aber nicht notwendig in G_w gelegene Jordankurve γ^*_w umfasse Γ^∞_w, d. h. trenne Γ^∞_w von Γ'_w (Fig. 3). Nun wählen wir zu

[15]) Der $\overline{\lim}\, \Gamma^n_{w_n}$ ist die Menge derjenigen Punkte der Ebene, in deren jeder Umgebung Punkte von ∞ vielen $\Gamma^n_{w_n}$ liegen, der $\underline{\lim}\, \Gamma^n_{w_n}$ die Menge der Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte von fast allen $\Gamma^n_{w_n}$ liegen.

[16]) Siehe § 1, 3. Da bei nichtpunktförmiger Randkomponente Γ_z die extremale Länge der Menge $\{\gamma^1\}$ unabhängig von z nach unten beschränkt ist, geht mit $d(z)$ auch $\lambda\{\gamma^2\}$ gegen null.

einem gegebenen positiven ε in G_z eine Γ_z umschließende Jordankurve γ_z, für deren sämtliche Punkte z

$$d(z) = d(z\,;G_z, \Gamma_z, \Gamma'_z) < \varepsilon$$

ist, was es wegen $d(z) \to 0$ für $z \to \Gamma_z$ gibt. Für alle hinreichend großen Indizes n werden auch die Kurven Γ_z^n von γ_z umfaßt, und es gilt für die Punkte z von γ_z:

$$d_n(z) = d(z\,;G_z^n, \Gamma_z^n, \Gamma'_z) \leq d(z\,;G_z, \Gamma'_z) < \varepsilon\ ,$$

da jede Konkurrenzkurve für d eine solche für d_n enthält. Wegen der konformen Invarianz ist für jeden Punkt w der Kurve $w_n(\gamma_z)$

$$d(w\,;G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, w_n(\Gamma'_z)) < \varepsilon$$

und um so mehr

$$d(w\,;G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, \Gamma'_w) < \varepsilon\ ,$$

da hier die Menge der Konkurrenzkurven vergrößert wurde. Anderseits wird für alle hinreichend großen n das Kontinuum $\Gamma_{w_n}^n$ von γ_w^* umfaßt. Ziehen wir nun zum Vergleich die extremale Distanz $d^*(w)$ des Punktes w (falls es Punkte $w \in w_n(\gamma_z)$ außerhalb γ_w^* überhaupt gibt) von γ_w^* bezüglich des von γ_w^* und Γ'_w berandeten Ringgebietes heran: Jede Konkurrenzkurve für die Größe

$$d(w\,;G_{w_n}^n, \Gamma_{w_n}^n, \Gamma'_w)$$

enthält eine solche für $d^*(w)$, so daß um so mehr gilt

$$d^*(w) < \varepsilon\ .$$

Diese Beziehung kann aber nur für solche Punkte des zwischen γ_w^* und Γ'_w liegenden Ringgebietes gelten, die in einer schmalen Umgebung U_ε von γ_w^* liegen, in welcher also die Kurven $w_n(\gamma_z)$ für alle hinreichend großen n und somit wegen der gleichmäßigen Konvergenz auch $w(\gamma_z)$ liegen müssen. Da ε beliebig ist und U_ε mit ε gegen null geht, kann kein Punkt von $w(\gamma_z)$ im Äußern von γ_w^* liegen, woraus folgt, daß auch $\overline{\Gamma}_w$ von γ_w^* umfaßt wird. Da γ_w^* beliebig wählbar ist, muß

$$\overline{\Gamma}_w \subseteq \Gamma_w^\infty$$

gelten, w. z. b. w.

Eine beliebige Teilfolge der Folge $(w_n(z))$ konvergiert ebenfalls gegen $w(z)$, und es gilt somit für den lim. sup. der Bilder der entsprechenden Γ_z^n dieselbe eben bewiesene Inklusion. Daraus folgt aber, daß sogar

$${}^\infty\Gamma_w \supseteq \overline{\Gamma}_w$$

ist. Gäbe es nämlich einen Randpunkt ζ von $\overline{\Gamma}_w$ (d. h. einen Punkt von

Γ_w), der nicht zu ${}^{\infty}\Gamma_w$ gehört, so gäbe es eine Umgebung $U(\zeta)$ und eine Teilfolge der Abbildungen $w_n(z)$, für die die Durchschnitte $\Gamma^n_{w_n} \cdot U(\zeta)$ leer wären. Der lim. sup. der Randkomponenten $\Gamma^n_{w_n}$ für diese Teilfolge könnte von einer Jordankurve umschlossen werden, die nicht ganz $\overline{\Gamma}_w$ umschließt, im Widerspruch zum bewiesenen Satz.

Beachtet man, daß es beim Beweis unwesentlich ist, daß die Gebiete G^n_z endlichen Zusammenhangs und in G_z kompakt sind, sondern die Jordankurven Γ^n_z ganz oder teilweise durch Γ_z selber ersetzt werden können, so ergibt sich der

Hauptsatz. *Ist $w(z)$ eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes G_z und Limes der in jedem kompakten Teil von G_z gleichmäßig konvergenten Folge $w_n(z)$, und geht für eine Randkomponente Γ_z die extremale Distanz $d(z) \to 0$ für $z \to \Gamma_z$, so konvergieren die Bilder der Γ_z entsprechenden Randkomponenten der Ausschöpfungsgebiete gegen $\Gamma_w = w(\Gamma_z)$.*

Die Konvergenz ist dabei so zu verstehen, daß der lim. sup. und der lim. inf. dieser Bildkomponenten zusammen mit denjenigen Komponenten ihrer Komplemente, die G_w nicht enthalten, gleich dem Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_w$ sind.

§ 3. Konforme Abbildung von Gebieten abzählbar unendlich hohen Zusammenhangs

7. Ein bekannter Abbildungssatz (Courant [1]) für endlich vielfach zusammenhängende Gebiete sei vorausgeschickt: Ein Gebiet G_z mit den Randkomponenten $\Gamma^1_z, \ldots, \Gamma^n_z$ (wobei man Γ^1_z als Jordankurve voraussetzen darf) kann stets auf ein Gebiet G_w mit den Randkomponenten $\Gamma^1_w, \ldots, \Gamma^n_w$, $\Gamma^k_z \leftrightarrow \Gamma^k_w$, abgebildet werden, welches folgende Bedingungen erfüllt:

Γ^1_w ist eine gegebene, im Endlichen gelegene Jordankurve, die G_w in ihrem Innern enthält, und ein gewisser gegebener Punkt von Γ^1_z entspricht einem gegebenen Punkt von Γ^1_w [17]).

Γ^2_w gehört einer Klasse von Kurven an, die bezüglich eines festen, im Innern von Γ^1_w gelegenen Punktes sternförmig und homothetisch sind.

Die Jordankurven $\Gamma^3_w, \ldots, \Gamma^n_w$ gehören gegebenen Homothetieklassen [18]) von nicht-konkaven Jordankurven an, wozu wir als Grenzfall auch die Schlitze zählen.

---

[17]) Diese Punktzuordnung ist nur für den später folgenden Eindeutigkeitsbeweis wesentlich.

[18]) Zwei Kurven heißen homothetisch, wenn sie durch eine Transformation

$$a(w - w_0) + w_0, \quad a \geq 0, \quad w_0 \text{ beliebig},$$

miteinander verknüpft sind.

Sei nun G_z ein Gebiet mit abzählbar vielen Randkomponenten, Γ_z^1 (= Jordankurve) isoliert, die übrigen, $\Gamma_z^2, \Gamma_z^3, \ldots$ beliebig. Die Normierungsbedingungen für G_w seien dieselben, wobei wir nun zu den Klassen, denen die Kurven Γ_w^k $(k \geq 2)$ angehören sollen, auch die Punkte zulassen. Wir wollen, unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen über die Häufungsrandkomponenten von G_z die Existenz einer Abbildung $w(z)$ auch in diesem Falle beweisen. Die Kreisnormierung bildet natürlich einen Spezialfall davon.

8. Allgemeiner stellen wir uns das in der Einleitung angegebene Problem: Diejenigen unendlich vielfach zusammenhängenden Gebiete zu charakterisieren, auf die ein beliebiger für endlichen Zusammenhang gültiger Existenzsatz der konformen Abbildung erweitert werden kann.

Zu diesem Zwecke schöpfen wir das Gebiet G_z durch eine wachsende Folge von kompakten oder nicht-kompakten, endlich vielfach zusammenhängenden Gebieten aus:

$$G_z^1 \subseteq G_z^1 \subseteq \ldots \subseteq G_z^n = \ldots \subseteq G_z \,.$$

jedem der endlich vielen Komplementärkontinuen der Gebiete G_z^n ordnen wir eine Klasse C von einfachzusammenhängenden Kontinuen der w-Ebene zu, so daß die den Gliedern jeder ineinandergeschachtelten Folge von Komplementärkontinuen zugeordneten Klassen schließlich identisch ist. Außerdem sollen für die Klassen C folgende beiden *Bedingungen* erfüllt sein:

(8.1) Jedes System von endlich vielen Klassen C ist vollständig[19]).

(8.2) Der Limes einer konvergenten Folge von Kontinuen einer und derselben Klasse liegt stets wieder in der Klasse.

Für jedes Gebiet G_z^n gibt es also eine eineindeutige konforme Abbildung $w_n(z)$, die jede Randkomponente in ein Kontinuum der ihr zugeordneten Klasse überführt. Wir nehmen nun weiter an:

(8.3) Die Folge $(w_n(z))$ enthalte eine in jedem kompakten Teil von G_z gleichmäßig konvergente Teilfolge, deren Limes keine Konstante ist[20]).

Der Limes $w(z)$ einer gewissen konvergenten Teilfolge von Abbildungen $w_n(z)$ ist somit eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes G_z. Jedes Komplementärkontinuum $\overline{\Gamma}_z$ von G_z bestimmt eine ineinandergeschachtelte Folge von Komplementärkontinuen der Gebiete G_z^n, deren

---

[19]) D. h. ein endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet besitzt stets ein konform äquivalentes, dessen Komplementärkontinuen in den entsprechenden Klassen liegen.

[20]) Diese letzte Bedingung muß sich im konkreten Fall aus gewissen Normierungsbedingungen für die Abbildungen $w_n(z)$ ergeben.

Limes es ist. Den Komplementärkontinuen der Folge ist schließlich allen dieselbe Klasse C zugeordnet. Das Gebiet G_z habe nun die *Eigenschaft*:

(8.4) Für jede Folge (z_n) aus G_z, die gegen den Rand von G_z geht, geht $d(z_n) \to 0$.

Dann liegt das Bild $\overline{\Gamma}_w$ von $\overline{\Gamma}_z$ ebenfalls in der Klasse C.

9. Die Anzahl der verschiedenen Klassen C von Kontinuen der w-Ebene, die auf diese Art den Randkomponenten von G_z zugeordnet werden, ist notwendig abzählbar, weil die Anzahl der Randkomponenten der Gebiete G_z^n abzählbar ist. Wir wollen nun umgekehrt für ein Gebiet G_z abzählbaren Zusammenhangs von einer Zuordnung $\Gamma_z \to C(\Gamma_z)$ der Klassen zu den Randkomponenten von G_z ausgehen. Es ist eine spezielle Ausschöpfung des Gebietes G_z zu finden, die es gestattet, die gegebene Zuordnung $\Gamma_z \to C(\Gamma_z)$ auf die Ausschöpfungsgebiete zu übertragen. Zu diesem Zwecke bilden wir die aufeinanderfolgenden Ableitungen der Menge $\{\Gamma_z\}$ der Randkomponenten von G_z[21]:

$$\{\Gamma_z\}^1, \{\Gamma_z\}^2, \ldots, \{\Gamma_z\}^n, \ldots, \{\Gamma_z\}^\omega, \{\Gamma_z\}^{\omega+1} \ldots ,$$

wobei also $\{\Gamma_z\}^1$ die Menge der Häufungsrandkomponenten ist, $\{\Gamma_z\}^2$ die Menge der Häufungskomponenten von $\{\Gamma_z\}^1$; $\{\Gamma_z\}^\omega$ ist gleich dem Durchschnitt der Mengen $\{\Gamma_z\}^n$ für alle natürlichen Zahlen usw. Solche Ableitungen gibt es nur abzählbar viele nicht-leere, und eine letzte. Diese enthält daher nur endlich viele Komponenten von $\{\Gamma_z\}$. Jede einzelne davon trennen wir von einem ein für allemal fest gewählten Punkt $z_0 \in G_z$ durch eine in G_z verlaufende Jordankurve, so, daß diese Jordankurven alle außerhalb voneinander und je in einer Umgebung vom Radius ε_1 der zugehörigen Häufungsrandkomponente von G_z verlaufen. Durch diese Jordankurven wird eine gewisse Teilmenge von Randkomponenten des Gebietes G_z vom Punkte z_0 getrennt. Mit der Menge der übrigen verfahren wir analog, d. h. wir bilden wieder die letzte nichtverschwindende Ableitung und trennen diese endlich vielen Randkomponenten durch ebensoviele in G_z verlaufende Jordankurven vom Punkte z_0, wobei diese Jordankurven nun auch außerhalb der zuerst gezogenen verlaufen sollen. Es ist leicht zu sehen, daß nach endlich vielen Schritten nur mehr endlich viele isolierte Komponenten von $\{\Gamma_z\}$ übrigbleiben[22]. Das von diesen und den endlich vielen eingeführten Jordankurven berandete Teilgebiet von G_z bezeichnen wir mit G_z^1. Falls gewisse isolierte Randkomponenten von G_z zur Normierung der Abbildung besonders

[21]) Wir bezeichnen die Menge mit $\{\Gamma_z\}$, irgendeine einzelne Komponente davon mit Γ_z.

[22]) Der Beweis ist in der Arbeit [2] des Verf. durchgeführt.

ausgezeichnet sind, wie dies im eingangs erwähnten Beispiel Γ^1 ist, kann man die Ausschöpfung so einrichten, daß dieselben auch wieder als Randkomponenten von G_z^1 auftreten.

Um das Gebiet G_z^2 zu erhalten, führen wir dasselbe Verfahren mit denjenigen einzelnen Teilmengen von $\{\Gamma_z\}$ durch, die von den oben konstruierten Jordankurven umfaßt (d. h. von z_0 getrennt) werden. Dabei wählen wir die neuen Jordankurven in einer ε_2-Umgebung der zugehörigen Randkomponenten von G_z, und so, daß $G_z^1 \subseteq G_z^2$ ist. Indem wir diese Konstruktion für jede natürliche Zahl n ausführen und dabei die Zahlen $\varepsilon_n \to 0$ gehen lassen, erhalten wir eine Ausschöpfung

$$G_z^1 \subset G_z^2 \subset \cdots \subset G_z$$

des Gebietes G_z. Jeder Randkomponente des Gebietes G_z^n $(n = 1, 2, \ldots)$ ist eindeutig eine Randkomponente Γ_z von G_z zugeordnet, nämlich entweder sie selber oder diejenige, zu der sie konstruiert wurde: Letztere ist die letzte nicht-verschwindende Ableitung des von der ersten umschlossenen Teils von $\{\Gamma_z\}$. Wir ordnen ihr nun die Klasse $C(\Gamma_z)$ von Kontinuen der w-Ebene zu.

Betrachten wir anderseits irgendeine Randkomponente Γ_z von G_z. Ist sie isoliert, so wird sie schließlich auch Randkomponente von G_z^n sein. Andernfalls bestimmt sie in jedem G_z^n eindeutig eine Randkomponente, die sie von G_z^n trennt. Die Folge (Γ_z^n) der dadurch ausgezeichneten Randkomponenten der Gebiete G_z^n ist ineinandergeschachtelt und konvergiert gegen Γ_z. Es ist zu zeigen, daß die den Γ_z^n zugeordneten Klassen schließlich gleich derjenigen von Γ_z sind, das heißt daß Γ_z schließlich stets die letzte nicht-verschwindende Ableitung der von Γ_z^n umschlossenen Teilmenge von $\{\Gamma_z\}$ ist. Dies folgt aber leicht: Γ_z ist nämlich isolierte Komponente einer wohlbestimmten Ableitung $\{\Gamma_z\}^\alpha$, und die Ableitungen der von den Γ_z^n umschlossenen Teilmengen von $\{\Gamma_z\}$ sind gleich den von Γ_z^n umschlossenen Teilmengen der entsprechenden Ableitungen der ganzen Menge. Für alle hinreichend nahe an Γ_z gelegenen Kurven ist somit α die Ordnung der letzten nicht-verschwindenden Ableitung des von Γ_z^n umschlossenen Teils von $\{\Gamma_z\}$ und Γ_z die einzige Komponente dieser Ableitung. Die Zuordnung der Klassen C zu den Randkomponenten der endlich vielfach zusammenhängenden Ausschöpfungsgebiete G_z^n, $\Gamma_z^n \to C$, ist somit wohldefiniert und induziert die gegebene Zuordnung

$$\Gamma_z \to C(\Gamma_z) \ .$$

Wir haben damit, falls man noch Bedingungen (8.1, 8.2) über die vor-

gegebenen Klassen von Komplementärkontinuen und die Bedingung (8.3) berücksichtigt, folgendes bewiesen:

Satz. *Jeder Existenzsatz der konformen Abbildung für endlichen Zusammenhang gilt auch für ein Gebiet G_z abzählbaren Zusammenhangs, für welches $d(z) \to 0$ konvergiert, wenn z gegen eine beliebige Randkomponente von G_z geht. Dabei bedeutet $d(z)$ die extremale Distanz des Punktes z von dieser Randkomponente, bezüglich irgendeiner Hilfskurve in G_z.*

Insbesondere ist damit der in Nr. 7 behauptete Abbildungssatz bewiesen, da natürlich auch die dort verlangte Zuordnung eines Punktes auf dem Rand von den Näherungsabbildungen auf die Grenzabbildung übergeht.

§ 4. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $d \equiv 0$ ist auf einer Randkomponente

10. *Hilfssätze über Streifengebiete.* Wir wollen in diesem Paragraphen eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß der extremale Durchmesser $d(\zeta)$ jedes Punktes ζ auf einer Jordanrandkomponente (Schlitz) null ist. Zu diesem Zwecke vergleichen wir die extremale Länge der ζ abtrennenden Querschnitte γ, die zur Definition von $d(\zeta)$ verwendet wurden, mit den Moduln gewisser Streifengebiete, die wir in das betrachtete Gebiet legen.

Unter einem Streifengebiet G_z verstehen wir ein im Endlichen gelegenes Gebiet, dessen äußere Randkomponente Γ_z eine Jordankurve ist, auf der zwei abgeschlossene, getrennte Intervalle α_0 und α_1 ausgezeichnet sind. Wir machen überdies die Voraussetzung, daß sich die im Innern von Γ_z gelegenen Randkomponenten von G_z nur gegen α_0 und α_1 häufen, die beiden Komplementärintervalle β auf Γ_z also freie Jordanbogen sind. Bekanntlich gibt es in dem Falle, wo Γ_z isoliert ist, eine schlichte konforme Abbildung $w = u + iv$ von G_z auf ein Rechteck G_w, wobei die Intervalle α_0 und α_1 in die Seiten $u = 0$ und $u = 1$, die Komplementärintervalle in die Seiten $v = 0$ und $v = a$, und die innern Randkomponenten in Schlitze $v =$ konst. oder Punkte übergeführt werden. Überdies besitzt die Funktion $u(x, y)$ eine Minimaleigenschaft, die man etwa mit Hilfe des Dirichletintegrals von u formulieren kann: In der Klasse $\{\varphi\}$ aller in G_z stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi(x, y)$ mit den Randwerten 0 auf α_0 und 1 auf α_1 ist $u(x, y)$ diejenige, die das Dirichletintegral

$$\| \varphi \|^2 = \iint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\, dx dy$$

minimisiert[23]). Wir nennen $w(z)$ die Parallelschlitzabbildung des Streifens G_z.

Sind die beiden Intervalle α_0 und α_1 nicht isoliert, so gibt es i. A. keine Funktion in $\{\varphi\}$, welche dem Dirichletintegral den kleinsten Wert erteilt. Jedenfalls aber gibt es darin eine Minimalfolge (φ_n), d. i. eine Folge mit der Eigenschaft $\| \varphi_n \| \to d = \inf\limits_{\{\varphi\}} \| \varphi \|$. Es gilt nun der

Satz. *Es gibt eine in G_z harmonische Funktion $u(x, y)$ mit der Eigenschaft, daß $\| u - \varphi_n \| \to 0$ geht für jede Minimalfolge (φ_n). Sie ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt durch die beiden Eigenschaften: (a) $u(x, y)$ ist in G_z stetig und stückweise stetig differenzierbar; (b) $\| u - \varphi_n \| \to 0$ für eine Minimalfolge (φ_n).*

Zum Beweis konstruieren wir zunächst eine spezielle Minimalfolge $u_n(x, y)$: Zu den beiden Bogen α_0 und α_1 geben wir je eine ineinandergeschachtelte Folge von Querschnitten α_0^n bzw. α_1^n des Gebietes G_z[24]), die gegen α_0 bzw. α_1 konvergieren und auf den Komplementärbögen β enden (Fig. 4). Die von den beiden Querschnitten α_0^n und α_1^n und den dieselben verbindenden beiden Intervallen der Bogen β berandeten Teilgebiete G_z^n sind wieder Streifengebiete mit den beiden ausgezeichneten Intervallen α_0^n und α_1^n. Die Funktion $u_n(x, y)$ sei darin die Lösung des Minimumproblems für G_z^n. Wir ergänzen diese Funktionen in den beiden durch α_0^n und α_1^n abgetrennten Teilen von G_z durch 0 bzw. 1 und erhalten dadurch eine Folge von Vergleichsfunktionen für das Gebiet G_z; ebenso ist u_n natürlich eine Vergleichsfunktion für das Gebiet G_z^{n+1}, so daß also für jedes n gilt:

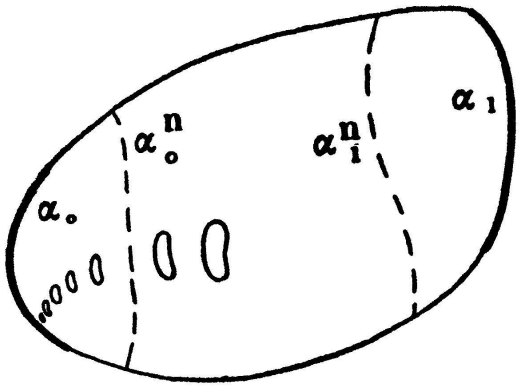

Fig. 4

$$\| u_n \| \geq \| u_{n+1} \| \geq d \ .$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Folge dieser erweiterten Funktionen $u_n(x, y)$ eine Minimalfolge für das Gebiet G_z bildet[25]). Nun ist aber bekanntlich jede Minimalfolge (φ_n) eine Fundamentalfolge, d. h. es gilt

$$\| \varphi_n - \varphi_m \| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty^{26)} \ .$$

[23]) Im Falle endlichen Zusammenhangs von G_z impliziert die gegebene geometrische Charakterisierung von G_w diese Minimaleigenschaft.

[24]) Das sind hier topologische, glatte Bilder einer abgeschlossenen Strecke, die mit Ausnahme der Endpunkte in G liegen.

[25]) Ist nämlich $\varphi(x, y)$ eine beliebige Vergleichsfunktion in G_z, so hat die Funktion $\psi = (1 + 2\varepsilon)\varphi - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ die Randwerte $-\varepsilon$ auf α_0 und $1 + \varepsilon$ auf α_1. Auf allen

Wenden wir dies auf unsere spezielle Minimalfolge u_n an, so folgt daraus wegen der Harmonizität dieser Funktionen die gleichmäßige Konvergenz der Folge $u_n(x, y) - u_n(x_0, y_0)$, wo (x_0, y_0) ein fester Punkt von G_z ist, in jedem kompakten Teil von G_z. Der Limes $u(x, y)$ dieser Folge ist entweder $\equiv 0$ oder Realteil einer schlichten konformen Abbildung $w(z) = u + iv$ $(w(z_0) = 0)$ von G_z. Sind z_1 und z_2 zwei beliebige Punkte von G_z, so gilt im zweiten Fall

$$| \Re \{w(z_1) - w(z_2)\} | \leq 1$$

$$| J \{w(z_1) - w(z_2)\} | \leq a, \quad a = \lim a_n ,$$

wo $a_n = || u_n ||^2$ gleich der Höhe des Bildrechtecks von G_z^n mittels der Abbildung $w_n = u_n + iv_n$ ist. Das bedeutet aber, daß das Bildgebiet G_w ganz in einem Rechteck der Höhe a und der Basis 1 liegt. Dabei werden die beiden freien Intervalle β_0 und β_1 von Γ_z auf je ein Intervall der beiden horizontalen Rechteckseiten abgebildet (die nicht die ganzen Seiten ausmachen müssen).

Um zu beweisen, daß $\lim || u - u_n || = 0$ ist, wählen wir zu einer gegebenen positiven Zahl ε ein n so, daß für alle $p > 0$ $|| u_{n+p} - u_n || < \varepsilon$ ist und hernach ein in G_z kompaktes Teilgebiet D_z, so daß im Komplement $G_z - D_z$ $|| u_n ||_{G-D} < \varepsilon$ und $|| u ||_{G-D} < \varepsilon$ ist[27]). Dann gilt für jedes p

$$|| u_{n+p} ||_{G-D} = || u_n + (u_{n+p} - u_n) ||_{G-D} < 2\varepsilon$$

und

$$|| u - u_{n+p} ||^2 = || u - u_{n+p} ||_D^2 + || u - u_{n+p} ||_{G-D}^2 < || u - u_{n+p} ||_D^2 + 9\varepsilon^2 .$$

Nun kann man außerdem zu D_z die Zahl p_0 so wählen, daß für $p > p_0$ $|| u - u_{n+p} ||_D < \varepsilon$ ist, woraus für $p > p_0$

Querschnitten mit hinreichend großem n hat ψ somit Randwerte < 0 bzw. > 1. Daraus ergibt sich aber leicht, daß für diese n

$$|| u_n || < || \psi || = (1 + \varepsilon) || \varphi ||$$

und also $\lim || u_n || \leq d$ ist.

[26]) Diese Relation ergibt sich folgendermaßen: Die Zahlen $|| \varphi_n - \varphi_m ||$ sind beschränkt: Sei M eine gemeinsame obere Schranke. Dann gilt für jede reelle Zahl λ

$$|| \varphi_n + \lambda(\varphi_m - \varphi_n) ||^2 = || \varphi_n ||^2 + 2\lambda(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) + \lambda^2 || \varphi_m - \varphi_n ||^2 \geq d^2$$

und also

$$| (\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) |^2 \leq (|| \varphi_n ||^2 - d^2) M^2 .$$

$(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n)$ geht also gegen 0 für $n \to \infty$. Für $\lambda = 1$ folgt

$$|| \varphi_m ||^2 = || \varphi_n ||^2 + 2(\varphi_n, \varphi_m - \varphi_n) + || \varphi_m - \varphi_n ||^2$$

und somit die Behauptung.

[27]) Daß $|| u ||$ endlich ist, folgt aus dem vorhergehenden Abbildungssatz; es ist aber auch ohne denselben zu beweisen, daß $|| u || \leq d$ ist.

$$\| u - u_{n+p} \| < \sqrt{10}\,\varepsilon$$

folgt. Daraus folgt insbesondere wegen

$$\| u_{n+p} \| + \| u - u_{n+p} \| \geq \| u \| \geq \| u_{n+p} \| - \| u - u_{n+p} \| ,$$

daß $\| u \|^2 = d^2 = a$ ist. Das heißt für $d > 0$, daß das Bildgebiet G_w das Rechteck mit der Höhe a und der Basis 1, in dem es liegt, bis auf eine Menge vom Flächenmaß null ausfüllt[28]). Aus der Beziehung $\| \varphi_n - \varphi_m \| \to 0$, die für jede Minimalfolge (φ_n) aus $\{\varphi\}$ gilt, folgt schließlich noch $\| u - \varphi_n \| \to 0$ für jede Minimalfolge, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Ist $u^*(x, y)$ eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion in G_z, und (φ_n) eine Minimalfolge mit $\lim \| \varphi_n - u^* \| = 0$, so gilt auch $\| u - u^* \| = 0$. Die Differenz $u - u^*$ ist somit stückweise konstant und daher konstant in G_z.

11. Wir betrachten die Menge derjenigen Kurven γ in G_z, die die beiden Intervalle α_0 und α_1 verbinden. Für die extremale Länge $\lambda\{\gamma\}$ dieser Kurvenmenge gilt

$$\lambda\{\gamma\} \geq \lambda\{\gamma_n\} = 1/a_n \qquad n = 1, 2, \ldots \text{[29])}$$

wo $\{\gamma_n\}$ die entsprechende Kurvenmenge für das Gebiet G_z^n ist. Daraus folgt

$$\lambda\{\gamma\} \geq 1/a \ , \qquad (a = \lim a_n) \ .$$

Ist $\lambda\{\gamma\}$ endlich, so kann $\| u \|^2 = a$ nicht null, u also keine Konstante sein.

Wir setzen nun voraus, daß G_z abzählbaren Zusammenhangs sei und $\lambda\{\gamma\}$ endlich. Wegen der konformen Invarianz der Größe λ können wir dieselbe in G_w berechnen. Die Kurvenmenge $\{\gamma\}$ geht bei der Abbildung $G_z \to G_w$ über in die Menge derjenigen Kurven von G_w, die die Bilder der beiden Intervalle β (die auf den Seiten $v =$ konst liegen) trennen. Die Menge $\{\gamma'\}$ derjenigen Querschnitte $v =$ konst von G_w, die die beiden Horizontalseiten trennen, ist eine Teilmenge von $\{\gamma\}$, somit $\lambda\{\gamma\} \leq \lambda\{\gamma'\}$. Wegen des abzählbaren Zusammenhangs und der Schlitzeigenschaft von G_w gibt es auf jeder Geraden $v =$ konst., die G_w trifft, mit Ausnahme einer abzählbaren Ordinatenmenge, einen solchen Quer-

---

[28]) Es läßt sich nun mit den üblichen Methoden (Courant [2]) beweisen, daß die innern Randkomponenten auf Schlitze abgebildet werden.

[29]) Die Ungleichung kommt daher, daß jede Kurve γ eine Kurve γ_n enthält. Die Gleichung beweist man zunächst für endlichen Zusammenhang und durch Ausschöpfung für beliebigen.

schnitt. Für eine beliebige Vergleichsfunktion $\varrho(u, v)$ und einen beliebigen solchen Querschnitt γ' gilt

$$L_\varrho^2\{\gamma'\} \leq L_\varrho^2(\gamma') = \Big(\int_{\gamma'} \varrho(u, v)\, du\Big)^2 \leq \int_{\gamma'} \varrho^2(u, v)\, du \ ,$$

und durch Integration nach v

$$L_\varrho^2\{\gamma'\}\, a \leq \iint \varrho^2(u, v)\, du\, dv \leq F_\varrho(G_w) \ .$$

Es muß deshalb auch $\lambda\{\gamma'\} \leq 1/a$ sein, und wegen

$$1/a \leq \lambda\{\gamma\} \leq \lambda\{\gamma'\} \leq 1/a$$

muß überall das Gleichheitszeichen stehen. Ferner folgt, daß alle Strecken γ' ($v =$ konst.) bis auf höchstens diejenigen einer Ordinatenmenge vom Maß null die Länge 1 haben. Wäre dem nämlich nicht so, so gäbe es offebar eine positive Zahl ε und eine Ordinatenmenge M von positivem Maß m, für die Länge des Querschnitts $l(v) \leq 1 - \varepsilon$ ist. Die extremale Länge λ_1' dieser Menge von Strecken wäre nach derselben Berechnung $\leq \frac{1-\varepsilon}{m}$, die extremale Länge λ_2' der Menge der übrigen Strecken höchstens $1/(a - m)$. Die von den beiden Streckenmengen überdeckten Punktmengen sind punktfremd, so daß nach einem allgemeinen Satz (Ahlfors, Beurling [1]) über extremale Längen gilt

$$1/\lambda' \geq 1/\lambda_1' + 1/\lambda_2' \geq a - m + \frac{m}{1-\varepsilon} > a \ ,$$

im Widerspruch zu $\lambda' = 1/a$. Das Gebiet G_w ist somit ein auf höchstens einer Ordinatenmenge vom Masse null horizontal geschlitztes Rechteck[30]).

Ist umgekehrt $u = \lim u_n$ nicht konstant, so ist die extremale Länge λ' der Querschnitte γ' von G_w endlich, und somit gilt dasselbe für $\lambda\{\gamma\}$; wir haben also den

Satz. *Ist das Streifengebiet G_z von abzählbarem Zusammenhang, so ist die extremale Länge der Kurven $\{\gamma\}$ von G_z, die die beiden ausgezeichneten Intervalle α_0 und α_1 verbinden, dann und nur dann endlich, wenn $u = \lim u_n$ keine Konstante ist. Sie ist dann gleich der extremalen Länge der Querschnitte $v =$ konst. von G_w, die die Länge 1 haben, und gleich $1/a$, wo a die Höhe des Rechteckes G_w bedeutet.*

12. *Vergleich zweier Extremalprobleme.* Wir betrachten im Streifengebiet G_z wiederum die Menge $\{\varphi\}$ der reellen Funktionen $\varphi(x, y)$, und

[30]) Es folgt wieder, daß G das ganze Rechteck bis auf eine Menge vom Flächenmaß null ausfüllt. Der Beweis geht gleich, sobald die innere Schlitzmenge eine Horizontalprojektion vom linearen Maß null hat.

daneben die Menge $\{w\}$ aller schlichten konformen Abbildungen $w(z) = u(u, y) + iv(x, y)$, die G_z in ein Rechteck G_w der Basislänge 1 abbilden, wobei Γ_z in die Rechteckskontur übergehen soll, und zwar so, daß die beiden Intervalle α_0 und α_1 den Seiten $u = 0$ und $u = 1$ des Rechtecks entsprechen. Wir stellen die beiden Minimumprobleme:

(1) In der Menge $\{\varphi\}$ eine Funktion φ zu finden, die das Dirichletintegral $\| \varphi \|^2$ minimisiert.

(2) In der Menge $\{w\}$ eine Abbildung $w(z)$ zu finden, die die Höhe $a(w)$ des Bildrechtecks minimisiert.

Diese beiden Variationsprobleme sind äquivalent. Beweis: Die Realteile $u(x, y)$ der Abbildungen $w(z)$ bilden eine Teilmenge von $\{\varphi\}$. Es ist somit für jede Abbildung $w(z)$

$$a(w) \geq \| u \|^2 \geq \inf \| \varphi \|^2 .$$

Umgekehrt kann man, wie man leicht sieht, mit Realteilen von solchen Abbildungen $w(z)$, für welche $a(w) = \| u \|^2$ ist, eine Minimalfolge für das Problem (1) herstellen; es muß somit

$$\inf_{\{w\}} a(w) = \inf \| \varphi \|^2$$

sein. Ist nun φ die Lösung von (1), so ist φ Realteil einer Abbildung $w(z)$, und $\| \varphi \|^2$ gleich der Höhe a des Bildrechtecks: $w(z)$ somit eine Lösung von (2). Ist umgekehrt $w(z)$ eine Lösung von (2), so ist $u = \Re w$ in $\{\varphi\}$ und $\| u \|^2 = a(w)$, also $\| u \|^2 = \inf_{\{\varphi\}} \| \varphi \|^2$, das heißt u eine Lösung von (1).

Da die Lösung von (1) eindeutig ist, ist es auch diejenige von (2).

13. *Ein Hilfssatz über Ringgebiete.* G_z sei ein in der z-Ebene gelegenes Ringgebiet[31]), das den unendlich fernen Punkt nicht enthält, und von dem keine der beiden Randkomponenten aus einem einzigen Punkt besteht. Mit d bezeichnen wir den Durchmesser der innern Randkomponente, mit a den Abstand der beiden Randkomponenten. Wir wollen a nach unten abschätzen durch d und den Modul μ von G_z. Dazu bilden wir G_z schlicht konform auf ein Kreisringgebiet G_w ab, so daß die innere Randkomponente in den Kreis $|w| = 1$, die äußere in den Kreis $|w| = r > 1$ übergeht. $w(z)$ sei die (bis auf eine Rotation in der w-Ebene bestimmte) Abbildung; die durch G_z allein bestimmte konforme Invariante $\mu = \log r$ heißt der konforme Modul von G_z. Der Kreis γ_w: $|w| = (1 + r)/2$ wird durch die Umkehrfunktion $z(w)$ auf eine analyti-

[31]) D. i. ein zweifach zusammenhängendes Gebiet.

sche Jordankurve γ_z abgebildet, und jede Kreisscheibe vom Radius $(r-1)/2$ um einen Punkt w von γ_w auf ein Teilgebiet von G_z, das einen Kreis vom Radius $\frac{r-1}{8}\left|\frac{dz}{dw}\right|$ um den Mittelpunkt $z(w)$ enthält. Es ist somit

$$a \geq \frac{r-1}{4} \operatorname*{Min}_{\gamma_w} \left|\frac{dz}{dw}\right|,$$

und nach dem Koebeschen Verzerrungssatz

$$\operatorname*{Min}_{\gamma_w} \left|\frac{dz}{dw}\right| \geq q \operatorname*{Max}_{\gamma_w} \left|\frac{dz}{dw}\right|,$$

wobei q eine nur vom konformen Modul von G_z abhängige positive Zahl ist. Daraus folgt für das Integral $\int_{\gamma_w} |dz|$:

$$2\pi \frac{r+1}{2} \operatorname*{Max}_{\gamma_w} \left|\frac{dz}{dw}\right| \geq \int_{\gamma_w} |dz| > 2d\ ,$$

und für den Abstand a

$$a \geq \frac{1}{2\pi} dq \frac{r-1}{r+1} = \frac{1}{2\pi} dq \frac{e^{\mu}-1}{e^{\mu}+1}\ .$$

Es gilt also für den Durchmesser d der innern Randkomponente des Ringgebietes G_z

$$d \leq a \text{ konst.}\ ,$$

mit einer Konstanten, die nur vom Modul von G_z abhängt.

14. *Eine hinreichende Modulbedingung.* Wir betrachten eine Jordanrandkomponente (Schlitz) Γ_z eines Gebietes G_z.

Satz. *Gibt es in G_z ein System von außerhalb voneinander liegenden Ringgebieten, die den gesamten von Γ_z verschiedenen Rand von G_z umfassen (d. h. von Γ_z trennen), und deren Moduln oberhalb einer positiven Schranke liegen, so ist der extremale Durchmesser $d(\zeta)$ jedes Punktes ζ von Γ_z gleich null*[32]).

Beweis: Wir ersetzen für ein solches System von Ringgebieten den von Γ_z verschiedenen Rand von G_z durch die innern Randkomponenten der Ringgebiete, wodurch ein Gebiet G_z' von abzählbarem Zusammenhang entsteht, das in G_z enthalten ist und Γ_z als Randkomponente besitzt. ζ sei ein Punkt auf Γ_z, und zur Vereinfachung der Darstellung nehmen

[32]) Falls Γ_z ein Punkt ist, so ist notwendig und hinreichend für $d(\Gamma_z) = 0$, daß es eine ineinandergeschachtelte Folge von Ringgebieten in G_z gibt, die Γ_z umschließen und deren Modulsumme gleich ∞ ist (Grötzsch [6]).

wir an, $z=\infty$ liege in G_z. Auf jedem Kreis $|z-\zeta|=r$ mit hinreichend kleinem Radius r gibt es im Äußern von Γ_z einen wohlbestimmten Bogen, dessen Endpunkte auf Γ_z liegen und der ζ von $z=\infty$ trennt. Den Durchschnitt dieses Bogens mit G_z' nennen wir $\gamma(r)$, $\gamma(r)$ zusammen mit den von diesem Bogensystem getroffenen Randkomponenten ($\neq \Gamma_z$) von G_z' nennen wir eine „Kette" $c(r)$. Ist $w(z)$ eine beliebige schlichte konforme Abbildung von G_z' oder auch nur eines passenden Teilgebietes von G_z' mit einem Dirichlet-Integral $\leq M$, so gilt für die Länge $l(r)$ des Bildes von $\gamma(r)$

$$l^2(r)=\Big(\int_{\gamma(r)}|w'|\,|dz|\Big)^2\leq 2\pi r\int_{\gamma(r)}|w'|^2 r\,d\varphi \quad (z-\zeta=re^{i\varphi})$$

und durch Integration

$$\int_{r_0}^{r_1}\frac{l^2(r)}{r}\,dr\leq 2\pi\int_{r_0}^{r_1}\int_{\gamma(r)}|w'|^2\,r\,dr\,d\varphi\leq 2\pi M\ . \tag{14.1}$$

Für den Durchmesser $\bar{l}(r)$ des Bildes der Kette $c(r)$ gilt:

$$\bar{l}(r)\leq l(r)+\sum_{k=1}^{\infty}d_k\leq l(r)+q\sum_k a_k\leq(1+q)\,l(r)\ . \tag{14.2}$$

Dabei bedeuten die Zahlen d_k die Durchmesser der Bilder der von $\gamma(r)$ getroffenen Randkomponenten von G_z', die a_k die Abstände der beiden Randkomponenten der denselben entsprechenden Ringgebiete, und $q>0$ eine feste Zahl.

Seien nun γ_0 und γ_1 zwei den Punkt ζ abtrennende Querschnitte von G_z', wobei γ_0 in $|z-\zeta|<r_0$ und γ_1 in $|z-\zeta|>r_1>r_0$ verlaufe. Das durch die beiden Jordanbogen γ_0 und γ_1 und die beiden auf Γ_z liegenden Intervalle α_0 und α_1 begrenzte Streifengebiet unterwerfen wir mit α_0 und α_1 als ausgezeichneten Intervallen der Parallelschlitzabbildung. Es ist leicht zu sehen, daß unter den gemachten Voraussetzungen α_0 und α_1 auf die beiden vertikalen Seiten des Bildrechtecks abgebildet werden[33]). Demzufolge ist die extremale Länge $\lambda\{\gamma\}$ der Menge aller ζ abtrennen-

---

[33]) Dies sieht man, indem man wie oben im Streifengebiet je eine Folge von Querschnitten α_0^n und α_1^n definiert, und die Parallelschlitzabbildung des Streifens annähert durch die Parallelschlitzabbildungen derjenigen Streifengebiete, die entstehen, wenn man alle außerhalb der Querschnitte α_0^n und α_1^n liegenden Komplementärkontinuen zum Streifen hinzunimmt, bei denen dann also α_0 und α_1 isoliert sind. Wegen der Beschränktheit der Dirichletintegrale dieser Näherungsabbildungen gilt gleichmäßig (14.1) und (14.2) für einen beliebigen Punkt ζ' auf α_0 und α_1. Das bedeutet aber, daß es zwischen zwei von der Näherungsabbildung unabhängigen Radien r_0' und r_1' Ketten $c(r')$ um den Punkt ζ' geben muß, die ein Bild mit beliebig kleinem Durchmesser haben.

den Querschnitte γ, die in G_z zwischen γ_0 und γ_1 verlaufen, höchstens gleich dem reziproken Wert der Höhe $a(\gamma_0, \gamma_1)$ des Bildrechtecks[34]). Ferner hat das Bild jeder Kette $c(r)$, $r_0 \leq r \leq r_1$ einen Durchmesser $\bar{l}(r) \geq 1$. Geht nun bei festem γ_1 $r_0 \to 0$ (damit gleichzeitig $\gamma_0 \to \zeta$), so kann das Dirichletintegral $a(\gamma_0, \gamma_1)$ der Parallelschlitzabbildungen nicht beschränkt bleiben, da es sonst wegen (14.1) Radien r geben müßte mit beliebig kleinem $l(r)$ und damit wegen (14.2) mit beliebig kleinem $\bar{l}(r)$, im Widerspruch zu $\bar{l}(r) \geq 1$. Das bedeutet aber, daß mit $r_0 \to 0$ $a(\gamma_0, \gamma_1)$ gegen ∞ und demzufolge $\lambda\{\gamma\} \to 0$ gehen muß.

§ 5. Das harmonische Maß einer Randkomponente

15. **Definition.** Γ_z sei eine Randkomponente von G_z. Wegen der Invarianz der im folgenden vorkommenden Begriffe gegenüber linearen Transformationen können wir das zu Γ_z gehörige Komplementärkontinuum $\bar{\Gamma}_z$ von G_z als im Endlichen gelegen voraussetzen. Ferner sei (γ_z^n) $n = 0, 1, \ldots,$ eine ineinandergeschachtelte Folge von Jordankurven des Gebietes G_z, die $\bar{\Gamma}_z$ umfassen und gegen Γ_z konvergieren, und $\omega_n(z)$ das harmonische Maß der Kurve γ_z^n bezüglich des von γ_z^n und $\gamma_z^0 = \gamma_z$ berandeten Teilgebietes D_z^n von G_z[35]). Die Folge der Funktionen $\omega_n(z)$ konvergiert in D_z $(= \sum_n D_z^n)$ gegen eine Funktion $\omega(z)$, und zwar gleichmäßig in jedem Gebiet D_z^k, k fest[36]). Diese harmonische und von der Wahl der Folge (γ_z^n) $(n \geq 1)$ unabhängige Funktion nennen wir das harmonische Maß von Γ_z bezüglich G_z, γ_z.

Für die harmonischen Maße $\omega(z)$ und $\omega'(z)$ bezüglich zweier verschiedener Kurven γ_z und γ_z' gilt: Zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine Umgebung U_ε von Γ_z in der

$$|\omega(z) - \omega'(z)| < \varepsilon$$

---

[34]) Die extremale Länge der in G_z' verlaufenden Querschnitte γ ist nämlich gleich $1/a(\gamma_0, \gamma_1)$.

[35]) Sind sämtliche Randkomponenten von D_z^n Kontinua, so kann man $\omega_n(z)$ als diejenige in D_z^n harmonische und beschränkte Funktion definieren, die auf γ_z^n den Wert 1, auf den übrigen Randkomponenten von D_z^n den Wert null annimmt. Sind gewisse punktförmig, so muß man $\omega_n(z)$ durch eine Ausschöpfung von D_z^n definieren, indem man die von γ_z und γ_z^n verschiedenen Randkomponenten zunächst durch Jordankurven ausschließt und dann zur Grenze übergeht.

[36]) Die monoton fallende Folge von positiven harmonischen Funktionen $\omega_n(z)$ konvergiert vermöge des Harnackschen Prinzips auf jedem kompakten Teil von D_z gleichmäßig. Anderseits nimmt die Differenz $\omega_n - \omega_{n+p} > 0$ $(n \geq k,\ p > 0)$ ihr Maximum bezüglich D_z^k auf γ_z^k an, wobei γ_z^k in D_z ja kompakt ist.

ist. Das ergibt sich folgendermaßen: In einer der (einfach zusammenhängenden) Komponenten des Durchschnittes der beiden Innengebiete von γ_z und γ'_z liegt $\overline{\Gamma}_z$. Durch Entfernen von $\overline{\Gamma}_z$ erhält man daraus ein zweifach zusammenhängendes Gebiet D_z^*: $u(z)$ sei das harmonische Maß von Γ_z bezüglich D_z^*. Die Funktionen $\omega(z)$ und $\omega'(z)$ seien durch dieselbe Folge (γ_z^n), $n = 1, 2, \ldots$ von Jordankurven definiert, die in D_z^* liegen. Dann gilt für die Näherungsfunktionen ω_n und ω'_n

$$|\omega_n - \omega'_n| \leq 1 - u$$

und somit

$$|\omega - \omega'| \leq 1 - u ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Ist ζ ein Punkt auf Γ_z, so verstehen wir unter dem limes superior der Funktion ω im Randpunkte ζ die Zahl

$$\overline{\lim}\, \omega(\zeta) = \lim_{\varrho \to 0} \left(\sup_{|z-\zeta|<\varrho} \omega(z) \right) .$$

Dieser ist in jedem Randpunkte ζ von Γ_z definiert, aber i. a. nicht konform invariant, da schon der Begriff des Randpunktes es in diesem gewöhnlichen Sinne nicht ist.

Der $\overline{\lim}\, \omega(\zeta)$ ist entweder null oder 1 in jedem Punkte ζ. Zum Beweis nehmen wir an, es sei in einem Punkte ζ der $\overline{\lim}\, \omega(\zeta) = M < 1$. Dann gibt es eine positive Zahl ϱ, so daß in jedem Punkte z von G_z, $|z - \zeta| < \varrho$ $\omega(z) < (1 + M)/2$ ist. Der Durchschnitt von $|z - \zeta| \leq \varrho/2$ mit $\overline{\Gamma}_z$ zerfällt in eine Menge von Kontinuen, deren eines den Punkt ζ enthält. Dieses, das heißt dessen Rand, berandet mit $|z - \zeta| = \varrho$ zusammen ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. $u(z)$ sei das harmonische Maß des Kreises $|z - \zeta| = \varrho$ bezüglich dieses Ringgebietes. Das Maß $\omega(z)$ sei durch das Kurvensystem (γ_z, γ_z^n) $n = 1, 2, \ldots$ definiert, wobei $|z - \zeta| \leq \varrho$ im Innern von γ_z liegen möge. Wir betrachten die Funktionen

$$\varphi_n(z) = \frac{1+M}{2} \cdot \omega_n(z) ,$$

deren Limes $[(1 + M)/2] \cdot \omega(z)$ ist. Für alle hinreichend großen n hat D_z^n mit $|z - \zeta| < \varrho$ einen nicht-leeren Durchschnitt, der in einzelne Gebiete zerfällt. Jeder Randpunkt eines solchen Teilgebietes ist entweder ein Punkt von γ_z^n, von $|z - \zeta| = \varrho$, oder ein nicht auf Γ_z liegender Randpunkt von G_z. Aus dem Maximumprinzip ergibt sich somit die Abschätzung[37])

[37]) Dabei muß man ω unter Umständen zunächst durch die kleinere Funktion ω' ersetzen, indem in D_z^n der Rand von G_z durch Jordankurven ausgeschlossen wird, auf denen $\omega' = 0$ ist. Für die Funktion ω' gilt die Ungleichung, und wegen $\omega' \to \omega$ auch für ω.

$$\varphi_n + u \geq \omega \ ,$$

und demzufolge

$$[(1 + M)/2] \cdot \omega + u \geq \omega \ ,$$

woraus folgt, daß $u \geq [(1 - M)/2] \cdot \omega$ ist. Nun ist aber der limes superior von $u(z)$ im Punkte ζ gleich null, somit auch der von $\omega(z)$.

16. Das Gebiet G_z werde durch die wachsende Gebietsfolge G_z^n ausgeschöpft, $n = 0, 1, \ldots,$ deren Rand aus je endlich vielen Jordankurven besteht. Dann bestimmt die Randkomponente Γ_z eine Fundamentalfolge von Randkurven γ_z^n der Gebiete G_z^n, die wir zur Definition des harmonischen Maßes $\omega(z)$ von Γ_z bezüglich G_z, γ_z $(= \gamma_z^0)$ verwenden können. Ist $w(z) = f(z)$ eine schlichte konforme Abbildung des Gebietes G_z auf ein Gebiet G_w, so ist das harmonische Maß der Bildkomponente Γ_w von Γ_z bezüglich des Bildes γ_w von γ_z und G_w

$$\bar{\omega}(w) = \omega\big(z(w)\big) \ .$$

Denn die Kurvenfolge (γ_z^n) geht mittels der Abbildung $f(z)$ in eine Kurvenfolge (γ_w^n) über, die man als definierende Folge verwenden kann, und für die harmonischen Masse dieser Annäherungskurven ist die Übertragbarkeit evident.

Jedes Gebiet G_z^n werde nun durch eine schlichte konforme Abbildung $w_n = f_n(z)$ auf ein Gebiet $G_{w_n}^n$ abgebildet, und die Abbildungsfolge $f_n(z)$ konvergiere in jedem kompakten Teil von G_z gleichmäßig gegen die Abbildung $w = f(z)$. Die harmonischen Maße der Randkomponenten $\gamma_{w_n}^n = f_n(\gamma_z^n)$ — die keine Jordankurven zu sein brauchen — bezüglich der Kurven $\gamma_{w_n} = f_n(\gamma_z)$ und der Gebiete $G_{w_n}^n$ sind die Funktionen

$$\bar{\omega}_n(w_n) = \omega_n\big(f_n^{-1}(w_n)\big) \ ,$$

wobei $\omega_n(z)$ das harmonische Maß der Kurve γ_z^n bezüglich G_z^n, γ_z bedeutet, $n \geq 1$. Wir behaupten nun, daß diese in jedem kompakten Teil B_w des Bildgebietes D_w von D_z gleichmäßig gegen $\bar{\omega}(w)$ konvergieren.

Beweis. Dieser kompakte Teil B_w liegt schließlich in jedem Gebiet $G_{w_n}^n$, und somit ist $\overline{\omega}_n(w)$ auf B_w definiert. Die Differenz

$$|\ \bar{\omega}_n(w) - \bar{\omega}(w)\ |$$

nimmt in einem Punkte von B_w ihr Maximum bezüglich B_w an, und diese Punkte haben für $n \to \infty$ einen Häufungspunkt w^* in B_w. Wir wählen zu einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ den Radius r so, daß im Kreise $C_w(r)$: $|\ w - w^*\ | \leq r$, $|\ \bar{\omega}(w') - \bar{\omega}(w'')\ | < \varepsilon$ ist. Das Urbild $C_z = f^{-1}(C_w)$ ist ein gewisses einfach zusammenhängendes, abgeschlossenes Gebiet von G_z, und

wir können N_1 so wählen, daß für $n > N_1$ auf C_z $|f_n(z) - f(z)| \leq r/2$ ist. Der Kreis $C_w(r/2)$ wird somit vom Bilde $f_n(C_z)$ für $n > N_1$ überdeckt. Nun wählen wir $N_2 > N_1$ so, daß für $n > N_2$ $|\omega_n(z) - \omega(z)| < \varepsilon$ ist auf C_z. Also gilt für jeden Punkt w von $C_w(r/2)$

$$|\bar{\omega}_n(w) - \bar{\omega}(w)| = |\omega_n(f_n^{-1}(w)) - \omega(f^{-1}(w))|$$
$$= |\omega_n(f_n^{-1}(w)) - \omega(f_n^{-1}(w)) + \omega(f_n^{-1}(w)) - \omega(f^{-1}(w))| < 2\varepsilon .$$

Sei nun wieder Γ_w^∞ der limes superior der Randkomponenten $\gamma_{w_n}^n$. Wir bilden das harmonische Maß $\omega^\infty(w)$ von Γ_w^∞ bezüglich des von Γ_w^∞ und γ_w berandeten Ringgebietes. Dann gilt

$$\omega^\infty(w) \geq \bar{\omega}(w) .$$

Sind nämlich β und β^∞ zwei Jordankurven, die bzw. γ_w und Γ_w^∞ umfassen, und wobei β^∞ im Innern von γ_w liegt, so gilt für das harmonische Maß $\omega^*(w)$ von β^∞ bezüglich β für alle hinreichend großen n

$$\bar{\omega}_n(w) \leq \omega^*(w) ,$$

weil für alle hinreichend großen n die Jordankurve β^∞ das Randkontinuum $\gamma_{w_n}^n$ und β die Kurve γ_{w_n} umfaßt. Durch Grenzübergang ergibt sich

$$\bar{\omega}(w) \leq \omega^*(w) ,$$

und, da ω^∞ durch ω^* beliebig angenähert werden kann, auch die behauptete Ungleichung.

Ist nun w ein Punkt auf Γ_w, der nicht auf Γ_w^∞ liegt, so ist $\omega^\infty(w) < 1$ und somit $\overline{\lim}\, \bar{\omega}(w) = 0$. Durch Übergang zu einer Teilfolge der Folge $(f_n(z))$ kann man wie in (6) dasselbe für den limes inf. ${}^\infty\Gamma_w$ der Folge $\gamma_{w_n}^n$ zeigen. Es gilt somit der

Satz: *In jedem Punkte w der Randkomponente Γ_w, der nicht zu ${}^\infty\Gamma_w$ gehört (bezüglich der Abbildungsfolge $(f_n(z))$) ist das harmonische Maß von Γ_w gleich null.*

Insbesondere folgt daraus für isolierte Randkomponenten wieder die Gleichung ${}^\infty\Gamma_w = \Gamma_w^\infty = \bar{\Gamma}_w$, denn das harmonische Maß einer solchen hat überall auf Γ_w den Randwert 1. Allgemein kann man sagen:

Satz. *Hat eine Häufungsrandkomponente Γ_z eines Gebietes G_z die Eigenschaft, daß sie bei jeder*[38]) *schlichten konformen Abbildung $w(z)$ in*

---

[38]) Es genügt, Abbildungen in das Innere des Einheitskreises zu betrachten, wobei Γ_z in die Kreisperipherie übergeht.

eine Randkomponente Γ_w des Bildgebietes G_w übergeht, in deren jedem Punkte der limes superior des harmonischen Maßes gleich 1 *ist, so gilt für jede Abbildungsfolge* $(f_n(z))$ *die Beziehung* ${}^{\infty}\Gamma_w = \Gamma_w^{\infty} = \overline{\Gamma}_w$.

Diese Bedingung ist aber vermutlich schwächer als die oben mit Hilfe der extremalen Längen formulierte.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *L. Ahlfors, A. Beurling,* Conformal invariants and functiontheoretic nullsets, Acta math. 83 (1950).

[2] *R. Courant,* Dirichlet's prinziple, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience publishers, New York 1950.

[3] *H. Grötzsch,* Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche I und II, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 87 (1935).

[4] *H. Grötzsch,* Zur Theorie der konformen Abbildung, Hallische Monogr. 16 (1950).

[5] *H. Grötzsch,* Über Extremalprobleme bei schlichter konformer Abbildung schlichter Bereiche, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 84 (1932).

[6] *H. Grötzsch,* Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. 87 (1935).

[7] *P. Koebe,* Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung VI. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche, Math. Z. 7 (1920).

[8] *H. Meschkowski,* Über die Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche I, Math. Ann. 123 (1951).

[9] *K. Strebel,* Eine Ungleichung für extremale Längen, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 90 (1951).

[10] *K. Strebel,* Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I 101 (1951).

(Eingegangen den 10. Juli 1952.)