Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen.

Autor: Bäbler, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21888

Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen

Von F. Bäbler, Zürich

Vor kurzem machte Oystein Ore[1]) in einer Note auf gewisse spezielle Eulersche Graphen aufmerksam. Sie sind dadurch charakterisiert, daß sie eine Ecke A besitzen, derart, daß ein Punkt, der von ihr ausgeht, den Graphen durchläuft und sich dabei nur an die Vorschrift hält, keine Kante zweimal zu durchlaufen, jedesmal den ganzen Graphen durchlaufen hat, wenn er das letztemal zum Ausgangspunkt zurückgekehrt ist. Es zeigt sich, daß diese Graphen identisch sind mit denjenigen, deren sämtliche Zykel durch eine bestimmte Ecke gehen. Wir werden derartige Graphen *Züge* nennen.

In diesem Aufsatz wird zunächst dieses Resultat von Ore in knapper Fassung noch einmal bewiesen und hierauf eine Reihe von Sätzen abgeleitet, welche die Struktur der Züge betreffen.

Einmal wird angezeigt, daß jeder Zug als direkte Summe[2]) gewisser Teilzüge aufgefaßt werden kann, welche wir *Primzüge* nennen. Diese sind dadurch charakterisiert, daß sie mit Ausnahme des Ausgangspunktes zu dem Restzug, welcher nach ihrer Entfernung aus dem Zuge entsteht, fremd sind, aber selber keine derartige Zerfällung in Teilzüge gestatten. Die Zerfällung ist eindeutig. Diese Tatsache ist einfach ein anderer Ausdruck für den Umstand, daß ein Zug, aus welchem man die Ecke A samt allen mit ihr verknüpften Kanten heraushebt, entweder ein Baum, eine Summe von Bäumen, eine Summe von Bäumen und isolierten Punkten oder von isolierten Punkten allein wird.

Anschließend wird die Frage nach der Existenz von Teilzügen bezüglich der Ecke A vollständig durch die Feststellung beantwortet, daß in einem Primzug je 2ν von A ausgehende Kanten immer genau einen Teilzug bestimmen.

---

[1]) *Oystein Ore:* A problem regarding the tracing of graphs, El. Math. Bd. VI, Nr. 3, p. 49—53, 1951.

[2]) Wir sagen, G sei die direkte Summe von $G_1, G_2, \ldots, G_n$, wenn: 1. die G_i paarweise kantenfremd sind und 2. die Vereinigungsmenge der Ecken bzw. der Kanten der G_i gerade, die Ecken bzw. die Kantenmengen von G sind.

Weiterhin wird die Feststellung von Ore, daß jeder Zug als direkte Summe von Zyklen aufgefaßt werden kann, in der Weise verschärft, daß wir angeben, wie viele solche Zykelbasen ein bestimmter gerade vorliegender Zug haben kann und wie diese Anzahlen mit der Zerfällung in Primzüge zusammenhängen.

Schließlich werden einige Anwendungen der vorangehenden Resultate auf andere Fragen der Graphentheorie gemacht. Insbesondere werden die Resultate, welche J. Senior[3]) letzthin bewiesen hat, auf kürzerem Wege hergeleitet. Die erwähnte Arbeit bezieht sich auf die Frage, unter welchen Voraussetzungen irgendeine Menge von positiven ganzen Zahlen als Menge der Grade der Ecken eines beliebigen bzw. eines schlingenlosen oder eines zusammenhängenden oder eines zusammenhängenden und schlingenlosen Graphen aufgefaßt werden kann, und unter welchen speziellen Voraussetzungen ein einziger Graph der letzten Art durch die Zahlenmenge bestimmt sei.

Die Beweise bestehen im wesentlichen in Konstruktionsvorschriften für Graphen aller Klassen, die in Betracht gezogen werden. Diese Vorschriften können sich, wenigstens in den Fällen, wo die Anzahl der Elemente in den betrachteten Zahlenmengen nicht sehr groß ist, dazu eignen, die Anzahl der verschiedenen zu diesen Zahlenmengen gehörigen Graphen festzustellen, falls man gewisse auf der Hand liegende Modifikationen dieser Vorschriften vornimmt.

I.

1. Ein Punkt P durchlaufe einen endlichen zusammenhängenden Eulerschen Graphen G von einer Ecke E ausgehend ganz oder teilweise, indem er dabei nur an die Vorschrift gebunden ist, keine Kante mehr als einmal zu durchlaufen. Jede Ecke, die er auf seinem Wege erreicht, kann er auch wieder verlassen, mit Ausnahme von E, die er ein letztesmal auf einer noch nicht durchlaufenen Kante schließlich erreichen muß. Wir nennen jede solche Durchlaufung *abgeschlossen* bezüglich E. Gibt es eine abgeschlossene Durchlaufung, bei der jede Kante von G durchlaufen wird, so heißt diese *vollständig bezüglich* E.

Es stellt sich nun die Frage, wodurch diejenigen Eulerschen Graphen charakterisiert sind, welche mindestens eine Ecke A besitzen derart, daß jede abgeschlossene Durchlaufung bezüglich A auch vollständig ist. Wir wollen jeden solchen Graphen einen *vollständigen Zug* bezüglich A oder einfach *Zug* nennen. A heißt sein Anfangspunkt.

---

[3]) *Senior, James K.:* Partitions and their representative graphs, Am. J. Math. 73, 663—689 (1951).

Wenn wir jeder Ecke eines Zuges Z[4]) ihren halben Grad als Vielfachheit zuordnen, so bewirkt jede vollständige Durchlaufung bezüglich A eine eineindeutige Abbildung von Z auf den Einheitskreis K[5]). Bei dieser Abbildung folgen sich die Bilder der Ecken sukzessive. Würden dabei zwei Bilder einer Ecke E^* zwischen zwei aufeinanderfolgende Bilder von A zu liegen kommen, so bestünde in Z ein Zykel, der die Ecke A nicht enthält. Dann könnte man den zwischen den beiden Bildern von E^* liegenden Bogen auf K in einen Punkt zusammenziehen, diesen als Bild von E^* betrachten und würde der neuen Abbildung eines Teiles der Kanten und Ecken von Z entsprechend eine abgeschlossene Durchlaufung von Z erhalten, die nicht vollständig wäre. *In einem Zug Z bezüglich A muß daher jeder Zykel die Ecke A enthalten.*

Nun sei G ein Eulerscher Graph, der eine Ecke A besitzt, welche in jedem seiner Zykel enthalten ist. Wir führen eine abgeschlossene Durchlaufung von G bezüglich A durch und entfernen nachher alle durchlaufenen Kanten und auch alle Ecken, von denen nur durchlaufene Kanten ausgehen. Es bleibt ein Eulerscher Restgraph G' übrig. Wenn G' nicht der Nullgraph wäre, so enthielte er mindestens einen Zykel, und dieser könnte entgegen der Voraussetzung nicht durch A gehen. Daher gilt: *Genau jeder Eulersche Graph, welcher eine Ecke besitzt, die auf allen seinen Zykeln liegt, ist ein Zug.*

Bemerkung: Die Überlegungen gelten unverändert für unendliche Eulersche Graphen endlichen Grades.

2. Aus diesen Feststellungen ergeben sich unmittelbar die folgenden Konsequenzen:

1. A ist eine Ecke maximalen Grades in Z.
2. Ist der Grad von $A = 2n$, so ist Z die direkte Summe von n Zyklen. Diese sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Wir nennen ein solches System von Zykeln eine *Basis* von Z.
3. Zwei Zykel C' und C'' in Z haben außer A höchstens eine weitere Ecke gemeinsam, wenn sie keine gemeinsame Kante haben. Sind gemeinsame Kanten vorhanden, so bilden diese einen zusammenhängenden Kantenzug, der A nicht als inneren Punkt enthält.
4. Es gibt in Z höchstens zwei Ecken maximalen Grades. Wenn es deren zwei gibt, heißt Z Strange. Jeder Zykel enthält beide.[6])

---

[4]) Z bezeichnet künftig immer einen Zug.

[5]) Aus dieser Abbildung liest man die charakteristische Eigenschaft in der Struktur der Züge fast unmittelbar ab. Ore leitet sie aus Satz 2, 3 und 4 und einem weitern Satz ab.

[6]) Ore Satz 5 und Satz 6.

5. Durchschneidet man jede von A ausgehende Kante in einem inneren Punkt und entfernt hierauf den Stern mit der Ecke A als Zentrum und den von ihr ausgehenden Kantenstücken als Kanten, so entsteht aus dem Zug ein kreisloser Graph, der zusammenhängend sein kann oder auch nicht.
6. Dasselbe Resultat hat im wesentlichen auch die Entfernung des Sterns, welcher A als Zentrum besitzt und die von dieser Ecke ausgehenden Kanten als Kanten. Es können dabei aber als Teile des Restgraphen isolierte Punkte entstehen.
7. Verbindet man jede Ecke ungeraden Grades in einem Baum durch eine ungerade Anzahl von Kanten mit einem festen Punkt A, den man als neue Ecke auffaßt, so entsteht ein Zug bezüglich A.[7]

   Verfährt man in einer Summe von getrennten Bäumen und isolierten Punkten mit den ersteren gleich wie eben und verbindet man jeden isolierten Punkt durch eine gerade Anzahl von Kanten mit A, so entsteht wiederum ein Zug.

   Daraus folgt, daß jede der beiden nachstehenden Konstruktionen jeden Zug liefert.

   Man geht aus von der Gesamtmenge $\{B\}$ aller endlichen Summen von paarweise fremden Bäumen, deren innere Ecken geraden Grades sind, und verbindet in jedem von ihnen die Ecken 1. Grades E^* mit einem festen Punkt A außerhalb jedes Baumes, worauf man die Ecken E^* ihrer Eigenschaft als Ecken entkleidet. Diese Zuordnung zwischen den Elementen aus $\{B\}$ und denjenigen der Gesamtheit $\{Z\}$ der Züge ist eineindeutig.

   Man zieht in analoger Weise die Menge $\{B; P\}$ der Summen aller paarweise fremden Bäume und isolierten Punkte in Betracht und verfährt, wie unter (7) beschrieben wurde. Diese Zuordnung der Elemente aus $\{B; P\}$ zu denen aus $\{Z\}$ ist nicht eineindeutig.

   Wenn der Grad von $A = 2n$ ist, so sagen wir: der Zug Z habe den Grad n.

3. Ehe wir zu der Anwendung der Züge für die Lösung gewisser spezieller Fragen der Graphentheorie übergehen, soll einiges abgeleitet werden, was die Struktur der Züge betrifft.

Greift man zwei von A ausgehende Kanten heraus, so entspricht diesen genau ein Zykel von Z, falls Z aus *einem* Baum gewonnen werden kann. Andernfalls kann es sein, daß zwei beliebigen von A ausgehenden Kanten kein Eulerscher Teilgraph von Z entspricht.

---

[7]) Ore Satz 5 und Satz 6.

Wir stellen uns nun die Frage: Unter welchen Voraussetzungen bestimmen 2ν beliebige von A ausgehende Kanten einen Teilzug Z_ν von Z, ferner: ist dieser Teilzug, wenn er existiert, eindeutig bestimmt? Präziser: wann gibt es eine Teilmenge M der Kanten und Ecken von Z, so daß diese mit A und den 2ν von dieser Ecke ausgehenden Kanten einen Zug bezüglich A bilden, und wann ist diese Menge eindeutig bestimmt?

4. Um einen genaueren Einblick in die Verhältnisse zu bekommen, ist es nützlich, zunächst von einer Basis B des Zuges Z_n [8]) auszugehen. Es ist möglich, daß gewisse Zykel aus B zu ihren Komplementärzügen bezüglich Z_n fremd sind. Fremd heißt: sie haben nur A gemein. Wir bilden die direkte Summe Z_j all dieser Zykel und wenden unsere Aufmerksamkeit dem Komplementärzug Z_{n-j} von Z_j bezüglich Z_n zu. Diejenigen Zykel aus B, welche nicht in Z_j sind — im extremen Fall alle —, bilden eine Basis B' von Z_{n-j}. Kein Zykel aus B' kann zu seinem Komplementärzug bezüglich Z_{n-j} fremd sein. Man betrachtet daher die sämtlichen direkten Summen von je zwei Zyklen aus B', scheidet unter ihnen diejenigen aus, welche zu ihren Komplementärzügen bezüglich Z_{n-j} fremd sind, bildet deren Summe Z_e und deren Komplementärzug Z_{n-j-e} bezüglich Z_{n-j}. Es ist zu bemerken, daß die Paare, welche Z_e bilden, ihrer Definition gemäß gegenseitig fremd sein müssen. Diejenigen Zykel aus B, welche weder in Z_e noch in Z_j sind, bilden eine Basis B'' von Z_{n-j-e}. Es ist klar, daß man nun die Gesamtheit der Summen von je dreien unter den Zykeln aus B'' und deren Komplementärzüge bezüglich Z_{n-j-e} im selben Sinne klassifiziert wie eben die Paare von Zykeln usw. Spätestens nach $\left[\frac{n}{2}\right]$ Schritten hat man Z_n auf diese Weise entweder in Teilzüge zerfällt, die paarweise fremd sind, oder man hat festgestellt, daß eine derartige Zerfällung nicht möglich ist. Im zweiten Fall nennt man Z_n einen *Primzug*, im ersten Fall heißt jeder der Teilzüge so. Wir werden sehen, daß diese, vorläufig von einer speziellen Basis aus gewonnenen, Primzüge von dieser Basis nicht abhängen, sondern einen invarianten, die Struktur von Z_n bestimmenden Charakter haben. Ihre Bedeutung liegt in dem

Satz: *Jeder Zug kann genau auf eine Weise in Primzüge zerlegt werden.*

Ehe wir dies beweisen, definieren wir ganz allgemein: *$\overline{Z}$ heißt Primzug von Z, wenn er die beiden folgenden Eigenschaften besitzt.*

---

[8]) Der Index i in Z_i bedeutet, wenn nichts anderes gesagt ist, künftig immer den Grad des Zuges.

1. $\overline{Z}$ *ist zu seinem Komplementärzug* $Z' = Z - \overline{Z}$ *fremd.*

2. $\overline{Z}$ *besitzt keinen Teilzug* Z^*, *so daß* Z^* *zu* $\overline{Z} - Z^*$ *fremd ist.*

Der Beweis des vorangehenden Satzes kann nun geführt werden, wie folgt.

Beweis: Wir sahen, daß durch das Herausheben des Sterns mit A als Zentrum aus Z ein Graph entsteht, welcher zykelfrei ist, also entweder ein Baum, eine Summe von Bäumen, ein isolierter Punkt oder eine Summe von Bäumen und Punkten oder von Punkten allein. Die Primzüge sind nun diejenigen Züge, welche man erhält, wenn man jeweils die von A nach den Ecken ungeraden Grades eines Baumes oder nach einem isolierten Punkte des Restgraphen G' laufenden Kanten wieder einsetzt. Die Zerfällung eines Zuges Z in Primzüge $Z^1, Z^2 \ldots Z^e$ zieht nämlich die Zerlegung seiner Ecken exklusive A in ebensoviele Teilmengen M_1, $M_2 \ldots M_e$ nach sich, derart, daß zwei Ecken E' und E'', die verschiedenen Teilmengen angehören, nur durch Kantenwege über A miteinander verknüpft sind.

Umgekehrt führt nur dann jeder Kantenweg zwischen zwei Ecken, in Z über A, wenn sie getrennten Teilen von G' angehören.

Damit ist gezeigt: *jeder Zug ist eindeutig als direkte Summe von Primzügen darstellbar. Diese sind eineindeutig den paarweise fremden Teilgraphen zugeordnet, in welche der Restgraph* G' *zerfällt, der aus* Z *durch die Entfernung von* A *und den von dieser Ecke ausgehenden Kanten entsteht.*

Man kann nun die Menge $\{k\}$ der von A ausgehenden Kanten nach den Primzügen ordnen, welchen sie angehören. Dadurch erhält man e Kantenmengen $\{k\}_1$; $\{k\}_2 \ldots \{k\}_e$, wenn Z e Primzüge besitzt. Die zu $\{k\}_i$; $i = 1, 2 \ldots e$ gehörigen Kanten sollen in irgendeiner Reihenfolge mit $k_{i1}, k_{i2}, k_{i3} \ldots$ bezeichnet werden.

5. Wir können jetzt unmittelbar erkennen, wann einer Teilmenge $\{k\}^*$ der von A ausgehenden Kanten ein Teilzug von Z entsprechen kann. Das ist offensichtlich höchstens dann der Fall, wenn von den Kanten in $\{k\}^*$ zu jeder der Mengen $\{k\}_i$ entweder eine gerade Anzahl oder keine gehört. Wir werden zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen zu jeder Menge $\{k\}^*$ genau ein Teilzug von Z gehört. Der Beweis ist geführt, wenn wir bewiesen haben: *In jedem Primzug bestimmen* 2ν *von seinem Anfang* A *ausgehende Kanten eindeutig einen Teilzug* Z_ν.

Wir haben bereits gesehen, daß zwei beliebige Kanten in einem Primzug genau einen Zykel bestimmen, da es zwischen zwei beliebigen Ecken eines Baumes genau einen Weg gibt. Wir setzen als bewiesen voraus, daß es zu $2m$ von A ausgehenden Kanten immer genau einen Teilzug Z_m

gibt, und werden folgern, daß der Satz auch für $2(m+1)$ Kanten richtig bleibt.

Zunächst zeigen wir, daß es zu einer Menge M von $2m+2$ mit A inzidenten Kanten höchstens einen Teilzug Z' geben kann, und setzen zu diesem Zweck voraus, es gebe deren zwei Z' und Z''.

Es ist ausgeschlossen, daß Z' und Z'' einen gemeinsamen Zykel C besitzen. Denn nach unserer Induktionsvoraussetzung müßten die Züge $Z'-C$ und $Z''-C$ identisch sein und somit auch die ursprünglichen.

Nun sei $(C'_1, C'_2 \dots C'_{m+1}) = B'$ irgendeine Basis des Zuges Z'; $(C''_1, \dots C''_{m+1}) = B''$ eine Basis von Z'', M die Menge der mit A inzidenten Kanten. Der Zykel C'_{i1} aus B' enthalte die Kanten k_{i1} und k_{i2} aus M. k_{i2} liegt auch in einem Zykel C''_{e_1} aus B'', und dieser enthält außerdem die Kante k_{i_3} aus M. Diese liegt ihrerseits wiederum mit einer Kante k_{i_4} in einem Zykel C'_{i_2} aus B' usw. In der so gebildeten Kette von Zykeln, die abwechslungsweise zu B' und B'' gehören, existiert ein Zykel C''_{e_μ}, welcher k_{i_1} enthält. Man kann nun einen Punkt von derjenigen Ecke E' aus, in welcher sich C'_{i_1} und C''_{e_1} gabeln, auf C''_{e_1} laufen lassen bis zu derjenigen Ecke $E'' \neq A$, in welcher er C'_{i_2} trifft, hierauf auf C'_{i_2} bis zu der Ecke $E'' \neq A$, wo dieser sich mit C''_{e_2} vereinigt usw., bis man auf C''_{e_μ} zum Zykel C'_{i_1} zurückkehrt. Auf C'_{i_1} wandre der Punkt, ohne über A zu laufen, nach E' zurück. Es gäbe daher in Z einen geschlossenen Kantenweg, welcher A nicht enthält, im Widerspruch zu der charakteristischen Eigenschaft des Zuges.

Daß die Menge M einen Teilzug Z bestimmt, kann man etwa auf folgende Weise einsehen. Es sei M^* eine Teilmenge von M, aus $2m$ Kanten bestehend. M^* bestimmt eindeutig einen Teilzug Z^*; den beiden Kanten k' und k'', welche $M - M^*$ ausmachen, entspricht eindeutig ein Zykel C in Z_n. Sind Z^* und C kantenfremd, so ist die direkte Summe dieser beiden Züge der postulierte Zug. Andernfalls hat C mit einem oder mehreren Zykeln irgendeiner Basis von Z^* je einen Kantenzug — eventuell eine einzelne Kante — gemein. Die Kanten dieser Züge und auch ihre inneren Ecken, falls sie vom zweiten Grad bezüglich Z^* sind, läßt man aus der Summe weg und erhält dadurch den gewünschten Zug.

Wir haben also gezeigt:

In jedem Primzug bestimmen 2ν beliebige von A ausgehende Kanten eindeutig einen Teilzug. Ist Z nicht prim, so lautet der entsprechende Satz: *Wählt man 2ν von A ausgehende Kanten des Zuges so, daß jedem Primzug eine gerade Anzahl oder keine angehört, so bestimmen sie eindeutig einen Teilzug Z_ν.* Andere Teilzüge mit dem Anfangspunkt A existieren nicht.

6. Wie wir bereits festgestellt haben, kann jeder Zug als direkte Summe von n Zykeln $C_1, C_2 \ldots C_n$ aufgefaßt werden. Wie viele verschiedene derartige Basen erster Ordnung gibt es zu einem Zug Z_n?

Es ist leicht, diese Frage in zwei extremen Fällen zu beantworten.

1. Z_n sei prim und besitze außer A noch eine Ecke $2n$-ten Grades. Wählt man dann eine beliebige von A ausgehende Kante k, so bestimmt diese mit irgendeiner anderen k_j aus $\{k\}$ eindeutig einen Zykel C_j. Alle diese Zykel sind verschieden. Entfernt man aus Z_n irgendeinen Zykel C_j, so bleibt ein Zug Z^j_{n-1} übrig, der wiederum prim ist. Für alle diese Zykel ist ohne Zweifel die Anzahl der Basen dieselbe. Jede Basis von Z^j_{n-1} gibt mit C_j zusammen eine Basis von Z_n. Diese Basen sind alle verschieden. Sie sind auch verschieden von denjenigen, welche aus Z^k_{n-1} und C_k hervorgehen, für beliebiges $k \neq j$, und man erhält durch den angedeuteten Prozeß jede Basis von Z_n. Die Anzahl der verschiedenen Basen von Z_n ist daher $(2n - 1) \times$ Anzahl der Basen von Z^j_{n-1}. Die letztere ist nach derselben Schlußweise $= (2n - 3) \times$ Anzahl der Basen von Z^e_{n-3} usw., so daß man schließlich erhält

$$\textit{Anzahl der Basen von } Z_n = \prod_1^n (2n - 2\nu + 1) = a^s_n .$$

Nun sei Z_n keine Strange und $C_1, C_2 \ldots C_n$ eine Basis. Zu den C_i gehören die Kantenpaare k_{i1} und k_{i2} aus $\{k\}$; $i = 1; 2 \ldots n$. Zu diesem System von Kantenpaaren gibt es aber auch eine Basis in der Strange Z^*_n [9]), die aus A und einer zweiten Ecke A' und $\{k\}$ besteht. Sind 2 Basen zu Z_n verschieden, dann auch die entsprechenden zu Z^*_n. Der Zug Z_n kann also höchstens a^s_n Basen besitzen. Wir werden zeigen, daß es weniger sind.

Zerfällt Z_n in n Primzüge, so ist die Anzahl seiner Basen 1. Weiter folgt: zerfällt Z_n in i Prim-Strangen $Z_{n1}, Z_{n2} \ldots Z_{ni}$, so existieren

(*) $a_n = \prod_{\mu=1}^{\mu=i} \prod_{\gamma=1}^{\nu=n_\mu} (2n_\mu - 2\nu + 1)$ verschiedene Basen. Es gilt also $a_n < a^s_n$.

7. Nun sei Z_n prim, aber keine Strange. Entfernt man aus Z_n einen Zykel C_j, so entsteht ein Zug Z_{n-1}. Z_{n-1} ist prim, wenn C_1 durch höchstens eine Ecke von höherem als zweitem Grade geht. Andernfalls zerfällt er in Primzüge. Infolge unserer Voraussetzung muß Z_n mindestens zwei Ecken E' und E'' enthalten, deren Grad größer ist als 2. E' kann mit E'' in Z durch einen Kantenweg w_1 verbunden werden, welcher A nicht enthält. Von E' und auch von E'' führt je ein Weg w_2 bzw. w_3 nach A.

[9]) Das Zeichen Z^* bedeutet im folgenden immer eine solche Strange.

Diese Wege haben außer E' bzw. E'' keine Punkte mit w_1 gemein. Daher existiert in Z_n mindestens ein Zykel C, so daß der Zug $Z_n - C$ in mehrere Primzüge zerfällt. Sind diese Primzüge Strangen, so kann man nach (*) sofort die Anzahl der Basen von Z_n angeben. Sie ist kleiner, als wenn Z_n eine Strange wäre. Sind die Primzüge alle oder zum Teil keine Strangen, so besitzt jeder von ihnen höchstens so viele Basen wie eine Strange vom gleichen Grad. Damit ist unsere Behauptung bewiesen, d. h. *für die Basenanzahl* a_n *eines Zuges gilt die Ungleichung* $1 \leq a_n \leq \prod_1^n (2n - 2\nu + 1) = a_n^s$. Das Gleichheitszeichen wird links nur angenommen bei einem Zug, der aus n sonst punktfremdem Zykeln durch A besteht, das Gleichheitszeichen rechts nur für Strangen.

Daß nicht jede Zahl $1 < a < a_n^s$ Basenanzahl eines Zuges Z_n ist, kann leicht erkannt werden. Wir betrachten zu diesem Zweck den Zug Z_n^0, welcher außer A *nur zwei Ecken von höherem Grad hat*, E' vom Grad $2n - 2$ und E'' vom Grad 4. Nun wählt man in A eine Kante k, durch die nur Zykel C_k laufen, welche E'' enthalten. Nach Entfernung eines Zykels C_k aus Z_n^0 bleibt in zwei Fällen eine Strange vom Grade $n - 1$, in den übrigen $2n - 3$ Fällen je ein Zug, welcher als Primzüge eine Strange vom Grad $n - 2$ und einen Zykel besitzt. Die Anzahl der verschiedenen Basen ist daher

$$\begin{aligned} a &= 2\prod_1^{n-1}(2(n-1) - 2\nu + 1) + (2n-3)\prod_1^{n-2}(2(n-2) - 2\nu + 1) \\ &= 3\prod_1^{n-1}\bigl(2(n-1) - 2\nu + 1\bigr) = 3a_{n-1}^s . \end{aligned}$$

Besitzt der Primzug $\overline{Z}_n$ mehr als zwei Ecken höheren Grades, so folgt analog zu S. 88, daß jeder Basis von $\overline{Z}_n$ eine von Z_n^0 entspricht, je zwei verschiedenen zwei verschiedene. Das trifft erst recht zu, wenn $\overline{Z}_n$ nicht prim ist. Also ist keine zwischen $3a_{n-1}^s$ und a_n^s enthaltene Zahl Basenzahl eines Zuges n^{ten} Grades.

Betrachtet man andererseits einen Zug Z_n', welcher außer A eine einzige Ecke höheren, nämlich 4. Grades hat, so stellt man unmittelbar fest, daß die Anzahl seiner Basen $a_n' = 3$ ist. Es gibt also keinen Zug Z_n mit zwei Basen.

8. Diese Umstände legen die Frage nahe, welche Zahlen zwischen 1 und a_n^s Basenzahlen von Zügen n. Grades sein können. Unter der *Basenzahl* eines Zuges ist die Anzahl seiner verschiedenen Basen zu verstehen. Um diese Frage zu beantworten, stellen wir vorläufig einige Relationen

zwischen dem Grad eines Zuges und den Graden seiner Ecken auf. Zunächst sei der Zug n. Grades Z_n prim. Wir entfernen aus Z_n A samt einem Teil jeder Kante, welche von dieser Ecke ausgeht. Es bleibt ein Baum B_0 mit $2n$ Endkanten übrig. In B_0 hebt man alle Ecken 2. Grades als Ecken auf und erhält einen Baum B. $E_1, E_2 \ldots E_r = (E)$ seien die innern Ecken in B. Unter den Ecken in (E) gibt es mindestens eine, welche mit einer einzigen der anderen durch eine Kante k_0 in B verbunden ist. Die gegenteilige Annahme würde zur Existenz eines Zykels in B führen. E_1 sei eine dieser Ecken, ihr Grad $2n_1$. Von E_1 gehen $2n_1 - 1$ Endkanten aus. Nun entferne man aus B E_1 und alle von E_1 ausgehenden Endkanten samt Endpunkten sowie einen Teil der von dieser Ecke ausgehenden Kante k_0. Es entsteht ein Baum B'. Alle Endkanten von B' mit Ausnahme einer einzigen, sind auch Endkanten von B. Aus B' gewinnt man durch dasselbe Verfahren einen Baum B''. Die eliminierte Ecke sei E_2, ihr Grad $2n_2$. Die Anzahl der von ihr ausgehenden Endkanten ist $2n_2 - 1$. Alle Endkanten von B'' mit Ausnahme einer einzigen sind Endkanten von B'. So fortfahrend, kommt man nach $r - 1$ Schritten zu einem Baum $B^{(r-1)}$, welcher eine einzige innere Ecke etwa E_r vom Grad $2n_r$ hat. $B^{(r-1)}$ besitzt $2n_r$ Endkanten, davon sind nach dem Vorangehenden $r - 1$ nicht Endkanten von B. Daraus folgt die Relation

$$2n + r - 1 = \sum_1^r (2n_i - 1) + 1 \qquad \text{oder} \qquad \text{I.} \quad n + r - 1 = \sum_1^r n_i$$

und ferner, wenn man alle innern Ecken von B einbezieht,

$$\text{I}'. \quad n + m - 1 = \sum_1^m n_i .$$

Zerfällt Z_n in p Primzüge, so ergeben sich aus den vorangehenden Gleichungen unmittelbar die Relationen

$$\text{II.} \; n + \sum_1^p (r_k - 1) = \sum_{k=1}^p \; \sum_{i=1}^{r_k} n_{ki} \quad \text{bzw.} \quad \text{II}'. \; n + mnr - p = \sum_1^m n_i ,$$

wobei in II r_k und n_{ki} die analoge Bedeutung für den k^{ten} Primzug haben wie r und n_i für Z_n in I, und in II$'$, m die Anzahl der Ecken exklusive A in Z_n; n_i der Grad der Ecke E_i ist.

9. Die beiden Relationen erlauben uns bereits, die Frage nach den Basenzahlen vollständig zu beantworten. Wir gehen aus von einem Primzug Z_n vom Grade n. (E) soll dieselbe Bedeutung haben wie auf S. 10 Zeile 5 und E_1 wiederum eine der Ecken höheren Grades sein, die mit

einer einzigen ihrer Art durch eine Kante verbunden ist. Entfernt man aus dem Z_n entsprechenden Baum B alle Endkanten aus E_1 bis auf eine, so erhält man einen Baum B^*. Diesem entspricht ein Zug Z^0 vom Grad $n - n_1 + 1$. Da man $2n_1 - 1$ Möglichkeiten hat, eine Kante zu behalten, so bekommt man $2n_1 - 1$ verschiedene Teilzüge vom Grade $n - n_1 + 1$. Andererseits entspricht den entfernten $2n_1 - 2$ Kanten ein Teilzug $Z^*_{n_1-1}$ von Z_n. $Z^*_{n_1-1}$ ist eine Strange. Unsere Überlegungen zeigen, daß Z_n auf $2n_1 - 1$ Arten als direkte Summe von zwei Teilzügen Z^0 und $Z^*_{n_1-1}$ dargestellt werden kann[10]). In jedem Paar ist die direkte Summe jeder Basis von Z^0 mit jeder Basis von $Z^*_{n_1-1}$ eine Basis von Z_n. Die Anzahl der Basen von $Z^*_{n_1-1}$ ist $\prod\limits_1^{n_1-1} \big(2(n_1 - 1) - 2\nu + 1\big)$. Somit gilt die Gleichung: Basisanzahl von $Z_n = \prod\limits_1^{n_1} (2n_1 - 2\nu + 1) \times$ Basisanzahl von Z^0. Indem man auf Z^0 dieselben Überlegungen anwendet wie auf Z_n und so fortfährt, erhält man für die Basisanzahl a_n von Z_n

$$\text{III.}\quad a_n = \prod_{i=1}^{i=r} \prod_{\nu=1}^{\nu=n_i} (2n_i - 2\nu + 1) = \prod_{i=1}^{i=m} \prod_{\nu=1}^{\nu=n_i} (2n_i - 2\nu + 1)$$

oder

$$a_n = \prod_1^r (2n_i)! \;\Big/\; 2\prod_1^r n_i! = \prod_1^m (2n_i)! \;\Big/\; 2\prod_1^m n_i!$$

Wie man sieht, sind die Ecken zweiten Grades für die Basenanzahl belanglos, was natürlich auch unmittelbar der Anschauung entnommen werden kann. Die n_i müssen der Bedingung I bzw. I′ genügen, die wir noch in der Form I* $n - 1 = \sum\limits_1^r (n_i - 1)$ bzw. I*′ $n - 1 = \sum\limits_1^m (n_i - 1)$ schreiben.

10. Es ist leicht zu zeigen, daß die unter III dargestellten Zahlen alle als Basenzahlen von Primzügen wirklich vorkommen. Zu diesem Zwecke kann man von einem Kantenzug Π mit r inneren Ecken E_i ausgehen und in jeder Ecke E_i noch $2n_i - 2$ Endkanten einfügen. Dadurch erhält man einen Baum mit $\sum\limits_1^r 2(n_i - 1) + 2 = 2n$ Endkanten und daraus einen Zug Z vom Grad n. Die Eckengrade der Ecken E_i von Z_n genügen der Relation I*. Ihre Basenzahlen sind für jedes n und jedes System n_i, $i = 1, 2 \ldots r$, durch III bestimmt. Man kann daher sagen: *Basenzahlen der Primzüge n. Grades Z_n sind genau die Zahlen $a_n = \prod\limits_1^r (2n_i)! \,/\, 2\prod\limits_1^r n_i!$, wobei die r natürlichen Zahlen $n_i > 2$ sein und die*

[10]) Die Basenzahlen der Z^0 und der $Z^*_{n_1-1}$ hängen nicht von der Wahl der entfernten Kanten ab.

Relation $n - 1 = \sum_1^r (n_i - 1)$ *befriedigen müssen.* Man kann auch die Ecken vom Grade 2 mitzählen. Für diese ist $n_i = 1$. Im Produkt für a_n, das man nun von 1 bis m zu bilden hat, liefern sie Faktoren 1, in der nachfolgenden Summe Summanden Null.

Wenn Z in p Primzüge zerfällt, so gilt für jeden von ihnen die Gleichung III. Man erhält als Basenzahlen deshalb die Größen

$$a_n = \prod_1^m (2n_i)! \,/\, 2 \prod_1^m n_i! \text{ mit der Bedingung } n - p = \sum_1^m (n_i - 1)$$

wobei wieder m in die Anzahl der Ecken exklusive A ist und n_i ihre Grade.

11. Wir ziehen nun zunächst noch einige Folgerungen aus den Relationen II bzw. II' S. 12 für einen Zug. Zunächst folgt, daß die Anzahl der Ecken höheren als zweiten Grades durch den Grad des Zuges und die Anzahl seiner Primzüge beschränkt wird.

Es existiert höchstens eine Ecke vom Grad $h, n < h \leqslant 2n$. Wenn n gerade ist, existieren höchstens drei Ecken vom Grad n. Diese extremale Anzahl wird nur für $n = 4$ erreicht. Für alle höheren Grade sind deren zwei möglich, wenn Z_n prim ist, zu denen dann noch eine Ecke vierten Grades tritt. Ist $r = n - 1$, so sind sämtliche Ecken von Z_n außer A zweiten oder vierten Grades. Die Anzahl der Ecken zweiten Grades ist immer beliebig. Die Relationen II bzw. II' liefern auch unmittelbar einen ersten Anhaltspunkt dafür, ob ein etwa durch sein Inzidenzschema gegebener Eulerscher Graph ein Zug ist. Wenn $2n$ maximaler Eckengrad ist, so muß die $\sum (n_i - 1)$ über die anderen Ecken erstreckt, kleiner als n sein. Leider ist dies kein hinreichendes Kriterium.

II.

1. In einer kürzlich erschienenen Publikation stellt und beantwortet Herr I. Senior[11]) die folgenden Fragen:

Es sei $\Pi : p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$[12]) eine Menge von m ganzen positiven Zahlen. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hinsichtlich Π, damit die folgenden Klassen von Graphen nicht leer sind?

A. Die Klasse der Graphen G mit den Ecken E_i vom Grad p_i, $i = 1, 2 \ldots m$.

B. Die Unterklasse von A, welche aus schlingenlosen Graphen besteht.

---

[11]) Vergleiche Anmerkung 2, S. 81.

[12]) Die Zahlen jeder Menge Π sollen künftig immer in abnehmender Folge geordnet sein.

C. Die Unterklasse von A, welche aus zusammenhängenden Graphen besteht.

D. Die Klasse der gemeinsamen Elemente aus B und C.

Dazu tritt noch die Frage

E. Unter welchen Voraussetzungen enthält die Klasse D ein einziges Element?

Die Diskussion dieser Fragen wird an entscheidender Stelle wesentlich kürzer und gleichzeitig völlig durchsichtig, wenn man sich dabei der Eigenschaften der Züge bedient.

2. Die Anwort auf die Frage A folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß die Gradsumme jedes Graphen um 2 herabgesetzt wird, wenn man aus ihm eine Kante entfernt (samt Endpunkt, wenn es eine Endkante ist). Daher muß $\sum\limits_1^m p_i = 2\,S$ eine gerade Zahl sein. Daraus schließt man weiter, daß die Anzahl der ungeraden Zahlen in Π gerade sein muß. Sind diese beiden Voraussetzungen hinsichtlich Π erfüllt, so ist es umgekehrt leicht, wenigstens einen Graphen G_0 mit einer Eckenmenge $E_1, E_2 \ldots E_m$ anzugeben, welcher zur Klasse A gehört. Man wähle nach Belieben m Punkte E_i, ordne $2u$ unter ihnen zu Paaren, wenn in Π $2u$ ungerade Zahlen vorkommen, verbinde die Punkte eines jeden Paares und lege durch jeden Punkt $E_i \left[\frac{p_i}{2}\right]$ Schlingen.

Zwei weitere einfache Bemerkungen führen leicht zu notwendigen Bedingungen für die Klassen B, C und D.

2′. In einem Baum gilt die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\sum_1^m p_i - m + 1 = S - m + 1 = 0,$$

wobei p_i, m und S dieselbe Bedeutung haben wie oben. Jeder zusammenhängende Graph kann aus einem Baum durch Verbindung von Ecken gewonnen werden. Daher gilt für jeden zusammenhängenden Graphen, also für die Klasse C

$$\text{I.}\quad F_2(\Pi) = S - m + 1 \geqslant 0\,;\quad S = \tfrac{1}{2}\sum_1^m p_i\,.$$

2″. Gehen alle Kanten eines schlingenlosen Graphen von der Ecke E_1 aus, so ist $p_1 = \sum\limits_2^m p_i$ oder $F_1(\Pi) = S - p_1 = 0$. Sind nicht alle Kanten von G mit E_1 inzident, so muß daher $S - p_1 > 0$ gelten. Notwendig für die Existenz von Graphen der Klasse B ist also

$$\text{II.}\quad F_1(\Pi) = \tfrac{1}{2}\sum_1^m p_i - p_1 = S - p_1 \geqslant 0\,.$$

Aus den Definitionen von F_1 und von F_2 erkennt man unmittelbar: *Die beiden Relationen eines jeden der folgenden Paare von Ungleichungen,* $F_1(\Pi) < 0$ *und* $F_2(\Pi) \leqslant 0$, bzw. $F_1(\Pi) \leqslant 0$ *und* $F_1(\Pi) < 0$, *sind nicht miteinander verträglich.*

Ferner folgt aus dem Vorangehenden:

a) (2, 1)[13]) *Jeder Menge* Π *mit* $F_1(\Pi) \leqslant 0$ *entspricht genau ein zusammenhängender Graph mit minimaler Schlingenzahl. Gilt* $F_1(\Pi) = 0$ *so ist der Graph schlingenlos.*

Faßt man die beiden vorangehenden Bedingungen zusammen, so hat man als notwendige Bedingung für die Existenz der Klasse D

$$\text{III.} \quad F_1(\Pi) \geqslant 0;\ F_2(\Pi) \geqslant 0\,.$$

3. Wir werden sehen, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind. Für C ist das leicht zu erkennen. Es sei $p_1 \geqslant \ldots \geqslant p_r > 1,\ p_{r+1} = 1$. Dann folgt aus

$$S - m + 1 \geqslant 0 \qquad 2S - 2m + 2 \geqslant 0$$

oder

$$\sum_1^r p_i + m - r - 2m + 2 = \sum_1^r (p_i - 2) + 2 - (m - r) \geqslant 0\,.$$

Wenn man die Ecken $E_1, E_2 \ldots E_r$ der Reihe nach verbindet, so genügt die restliche Gradsumme $\sum\limits_1^r (p_i - 2) + 2$ dieser Ecken mindestens zur Verknüpfung mit den $m - r$ Ecken ersten Grades. Falls $F_2(\Pi) = 0$ ist, führt die eben erwähnte Konstruktion zu einem Baum B. Schneidet man jede Kante E_iE_{i+1}; $1 \leqslant i \leqslant r - 1$ in einem inneren Punkte durch, so zerfällt B in r Sterne mit den Zentren E_i. Fügt man diese Sterne irgendwie wieder zusammen, indem man mit zweien beginnt, in jedem eine Endkante wählt, deren Endpunkte verschmilzt und gleichzeitig als Ecken aufhebt, dann einen dritten Stern nimmt und diesen auf dieselbe Weise mit dem ersten oder dem zweiten verknüpft usw., kommt man wieder zu einem Baum, welcher Π entspricht. Ist $r > 3$ und hat mindestens ein Stern 3 oder mehr Kanten, so kann man auf diese Weise immer einen Baum B' konstruieren, der von B verschieden ist.

(d') Ist dagegen $p_1 = 2$, so erhält man immer einen Streckenzug aus $r + 2$ Kanten.

---

[13]) Mit den in ( ) hinter die Zeichen a), b) ... gesetzten Zahlenpaaren indiziert Herr *Senior* dieselben Resultate.

Ist $r = 3$ und $p_1 \neq p_3$, so ist entweder der Baum, welcher der Eckenfolge $E_1E_3E_2$ oder derjenige, welcher der Folge $E_2E_1E_3$ entspricht, von demjenigen verschieden, welcher zu $E_1E_2E_3$ gehört.

b) *Ist dagegen* $r = 3$ *und* $p_1 = p_3$, $F_2(\Pi) = 0$, *so ist der Baum eindeutig bestimmt.*

3′. c) (2, 2) $m = 3$ $F_1(\Pi) < 0$. Die eindeutig bestimmten Lösungen der beiden Gleichungen $p' + p'' = p_1$ und $p_2 - p' = p_3 - p''$ sind ganz und positiv, und außerdem gilt $p' \leqslant p_2$; $p'' \leqslant p_3$. *Es gibt also einen einzigen schlingenlosen Graphen, und er ist zusammenhängend.*

d) (2, 4) $p_1 = 2$. Ist $F_2(\Pi) > 0$, so gibt es einen einzigen Graphen. Dieser ist ein Zykel. Berücksichtigt man noch d', so kann man sagen: *Ist* $p_1 = 2$; $F_2(\Pi) \geqslant 0$ *so ist durch* Π *ein einziger Graph bestimmt.*

e) (2, 3) $p_3 = 1$; $F_1(\Pi) = 0$, dann ist E_1 mit E_2 durch p_2 Kanten und mit jeder der Ecken E_i $i \geqslant 3$ durch eine Kante zu verbinden. Nun sei $F_1(\Pi) > 0$; $F_2(\Pi) \geqslant 0$, und $s = m - 2$. Die beiden Gleichungen $s' + s'' = s$ und $s' - s'' = p_1 - p_2$ haben die eindeutig bestimmten Lösungen $0 < s' = \frac{p_1 - p_2 + s}{2} = \frac{p_1 - p_2 - s}{2} + s < s$ und $s'' = \frac{p_2 - p_1 + s}{2} > 0$. Zudem ist, weil $2(p_2 + s)$ und $p_1 + p_2 + s$ gerade sind, auch $p_1 - p_2 - s$ gerade, also s' ganz; s'' ganz. *Es existiert also ein einziger Graph.*

4. Wir setzen nun $F_1(\Pi) > 0$; $F_2(\Pi) > 0$, $p_1 > 2, p_3 > 1$ $m > 3$ voraus und wenden uns wieder allgemeinen Betrachtungen zu. Unser erster Schritt in der Konstruktion eines zur Zahlenmenge Π gehörigen zusammenhängenden schlingenlosen Graphen G besteht darin, daß wir mit Π in bestimmter Weise eine Zahlenmenge Π' verknüpfen, für welche $F_1(\Pi') \geqslant 0$ und $F_2(\Pi') \geqslant$ gilt, wenn die entsprechenden Relationen für Π erfüllt sind. Π' besteht aus lauter geraden Zahlen, und die Konstruktion eines zugehörigen schlingenlosen und zusammenhängenden Graphen G' wird sich mühelos mit Hilfe eines Zuges ergeben. Der Übergang von G' zu G erfolgt dann rückwärts auf Grund des Verfahrens, durch welches Π' aus Π gewonnen wurde. Für die eben erwähnte Verknüpfung haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden.

A. Alle p_i sind gerade. Dann ist $\Pi' = \Pi$.

B. Es gibt in Π r ungerade Zahlen > 1, q gerade und deren s, die gleich 1 sind. Immer gilt $r + s = 2t$; $|r - s| = 2u$; t ganz, u ganz. Wir vermindern zunächst alle ungeraden Zahlen aus Π um 1 und erhalten dadurch eine Zahlenmenge Π^* mit $n \leqslant m$ Elementen. Nun sei

(B_1) $p_1^* = p_2^* = \ldots = p_k^* > p_{k+1}^*$. Ist für Π

(B_1') $r \geqslant s$, so setzen wir $\Pi' = \Pi^*$. Gilt dagegen

(B_1'') $s > r$, so vermindern wir sukzessive je eine der maximalen Zahlen aus Π^* um 2, und zwar wählen wir bei jedem Schritt diejenige mit dem größten Index. Im ganzen führen wir u solche Schritte aus. Die sich ergebende Zahlenmenge ist Π'. Gilt

(B_2) $p_1^* - p_2^* = 2v > 0$, so unterscheiden wir die folgenden Fälle:

(B_2') $v \geqslant t$. Dann setzen wir $p_1' = p_1 - 2t$, wenn p_1 gerade ist bzw. $p_1' = p_1 - 2t + 1$ für ungerades $p_1 \cdot p_1'$ bildet mit den übrigen Zahlen aus Π^* zusammen Π'.

Ist $v < t$, so hat man zwei Fälle zu unterscheiden.

(B_2'') $2v + r \geqslant s$. Dann setzt man $p_1' = p_1^* - 2v$ und $p_i' = p_i^*$; $i > 1$. Ist dagegen

(B_2''') $2v + r < s$, dann vermindert man erst p_1^* um $2v$ und geht hierauf vor wie unter (B_1''), indem man $\frac{1}{2}(s - r - 2v) = l$ Schritte ausführt.

Die Reduktion von Π auf Π' ist so eingerichtet, daß $F_1(\Pi) > 0$ auf $F_1(\Pi') \geqslant 0$ führt. Da ferner für eine Zahlenmenge Z, deren Elemente alle größer sind als 1, immer $F_2(Z) > 0$ ist, hat man $F_2(\Pi') > 0$. Es ist für das Folgende darüber hinaus wichtig, daß durch die Reduktion jedem $p_i > 1$ ein $p_i' > 1$ zugeordnet wird. Gibt es nämlich in Π q gerade, r ungerade Zahlen > 1 und s Zahlen $= 1$, so kann man $F_2(\Pi) > 0$ in der Form $\frac{1}{2}\sum_1^m p_i - q - r > s - 1$ schreiben. Daraus folgt $\frac{1}{2}\sum_1^n p_i^* - q - r \geqslant \frac{1}{2}(s - r)$ und daraus weiter, daß es möglich ist, gewisse unter den p_i^* um insgesamt $s - r$ zu verkleinern, jede um eine gerade Zahl, so daß keine einzige dieser Zahlen auf Null reduziert wird.

5. Zu Π' gehört ein Graph G_0', bestehend aus den Ecken E_i, welche je $\frac{p_i'}{2}$ Schlingen tragen $i = 1, 2, \ldots n$. Wie man aus G_0' einen zusammenhängenden schlingenlosen Graphen gewinnen kann, geben wir jetzt an.

Wir wählen zu diesem Zweck auf jeder Schlinge einen inneren Punkt und ziehen alle diese Punkte in einen einzigen A zusammen. Dadurch erhalten wir einen Zug Z. Diesen denken wir uns zunächst irgendwie von A aus durchlaufen und die Ecken in der Reihenfolge, in welcher man sie antrifft, aufgeschrieben. Man erhält so eine Eckenfolge $E_{i_1}, E_{i_2} \ldots E_{i_n}$, wobei alle Indizes Zahlen von 1 bis n sind. Kann man die Durchlaufung so durchführen, daß nie zwei aufeinanderfolgende Indizes gleich und der erste vom letzten verschieden ist, so erhält man aus Z dadurch einen schlingenlosen zusammenhängenden Graphen G', daß man jedes Wegstück zwischen jeder Ecke und der nachfolgenden als einzige Kante betrachtet und desgleichen die beiden Wegstücke AE_{i_1} und $E_{i_h}A$ zusammen.

Ehe wir zeigen, daß es solche Durchlaufungen gibt, führen wir zur Abkürzung der Schreibweise einige Bezeichnungen ein.

Statt von der Durchlaufung von Z sprechen wir von der *Koppelung der Ecken.*

Wir nennen dabei die Anzahl der noch nicht durchlaufenen Schlingen durch jede Ecke jedesmal, wenn wir uns während der Durchlaufung in A befinden, die *momentane Koppelungsvalenz* der Ecke.

Hat ein Teil der Eckenfolge die Gestalt $E_i E_k E_i E_e \ldots E_i E_x$, so sagen wir, die Koppelung sei dort *alternierend* bezüglich E_i.

Hat dagegen ein Teil der Eckenfolge die Form $E_i E_{i+1} E_{i+2} \ldots$, so nennen wir diesen Teil eine *geordnete* Koppelung.

6. Nach diesen Vorbereitungen sind wir imstande, die Koppelungen, welche uns zum Ziele führen, kurz zu beschreiben.

α) $p_1' = p_2' = \ldots = p_e' > p_{e+1}$ (möglicherweise existiert p_{e+1} nicht). Wir koppeln im ersten Schritt die Ecken E_1 bis E_e geordnet. Es kann sein, daß damit die Koppelung bereits beendigt ist. Wenn nicht, so nehmen wir als zweiten Schritt die geordnete Koppelung aller Ecken von maximaler momentaner Koppelungsvalenz vor. Ist die Koppelung dann noch nicht beendigt, so fährt man in derselben Weise fort bis zum Schluß.

β) p_1' ist eigentlich maximal. Dann koppelt man zunächst alternierend bezüglich E_1, indem man bei jedem Schritt auf E_1 diejenige Ecke maximaler Koppelungsvalenz folgen läßt, welche den größten Index trägt. Erreicht man dabei das Stadium, in dem die momentane Koppelungsvalenz von E_1 nicht mehr eigentlich maximal ist, so fährt man wie unter α) mit geordneter Koppelung fort bis zum Schluß. Mindestens der letzte Schritt muß wegen $F_1(\Pi') > 0$ von der letzten Art sein, und zwar müssen dabei mindestens die Ecken $E_1 E_2 E_3$ geordnet gekoppelt werden.

Der gewonnene schlingenlose zusammenhängende Graph G' enthält daher mindestens einen Zykel, und dieser ist mindestens dreigliedrig.

7. Der Übergang von G' zu einem Graphen G, welcher Π entspricht, vollzieht sich nun auf folgende Weise:

(B_1') Man läßt von s unter den Ecken ursprünglich ungeraden Grades $p_i > 1$ je eine Endkante ausgehen. Die übrigen faßt man zu Paaren zusammen und verbindet jedes Paar durch eine Kante.

(B_1'') Man fügt in jeder Ecke $p_i - p_i'$ Endkanten an.

(B_2') Man fügt in der Ecke E_1 s Endkanten an und verbindet sie mit allen anderen, deren Grad ursprünglich ungerade und größer als 1 war.

(B_2'') Man kann möglichst viele Endkanten von E_1 ausgehen lassen, alle, wenn $s \leqslant 2v$ und p_1 gerade, bzw. $s \leqslant 2v + 1$ und p_1 ungerade ist. Dann verknüpft man E_1 noch mit $2v - s$ bzw. $2v + 1 - s$ Ecken E^*, deren Grad $p_i' = p_i - 1 \geqslant 2$ ist, und verbindet die übrigbleibenden E^* zu Paaren.

Ist $s > 2v$, so zieht man von E aus $2v$ bzw. $2v + 1$ Endkanten, dazu $s - 2v$ bzw. $s - 2v - 1$ Endkanten von beliebigen unter den Ecken E^* aus, von jeder eine, und verknüpft schließlich wieder die restlichen E^* zu Paaren.

(B_2''') Man läßt von jeder Ecke $p_i - p_i'$ Endkanten ausgehen.

8. Zum Schluß soll jetzt gezeigt werden, daß mit zwei Ausnahmen zu jedem Π, welches den Voraussetzungen $F_1(\Pi) > 0$, $F_2(\Pi) > 0$, $p_1 > 2$, $p_3 \geqslant 2$, $m > 3$ genügt, mindestens zwei verschiedene Graphen existieren. Um dies zu beweisen, gehen wir von dem Graphen G aus, dessen Existenz eben sichergestellt worden ist, und leiten aus ihm durch geeignete Umformungen einen zweiten von ihm verschiedenen Graphen G_1 ab.

Bemerkung. Dabei ist uns insbesondere der Umstand nützlich, daß in G jede Ecke höheren Grades mit E_1 in mindestens einem Zykel liegt, so daß man eine von E_1 ausgehende Kante entfernen darf, ohne den Zusammenhang zu zerstören.

D. Jede Zahl p_i in Π ist größer als 1.

(D_1) Falls $F_1(\Pi) > 1$ ist, existiert in G mindestens ein Zykel C^*. $E_1 E_2 \ldots E_h E_1$ mit $h \geqslant 4$. Wenn irgendeine Ecke E_i; $1 < i \leqslant h$ bereits mit E_1 verknüpft ist, ersetzt man C^* durch zwei Zykel C' und C'', wobei C' E_1 und eine von E_i verschiedene Ecke E_k aus C^* enthält, C'' dagegen E_i und alle Ecken aus C^* außer E_1 und E_i. Die zusätzliche Voraussetzung ist erfüllt, wenn $p_1 > 3$ ist. Für $p_1 = p_2 = 3$ kann man E_1 und E_2 als Paar wählen, das in G durch eine Kante verknüpft ist, also $E_i = E_2$ setzen.

(D_2) $F_1(\Pi) = 1$. In G existiert ein Zykel C: $E_1 E_2 E_3 E_1$. Ist $p_2 \neq p_m$, so kann man die Koppelung der Ecken so abändern, daß an Stelle von C z. B. der Zykel $\overline{C}$: $E_1 E_3 E_m E_1$ tritt. In allen Fällen ist der neue Graph G_1 von G verschieden.

(f) (2, 5) *Dagegen entspricht einem Π mit $F_1(\Pi) = 1$, $p_2 = p_m$ genau ein Graph.* Das folgt unmittelbar aus unserer Konstruktion.

H. $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_h > 1$, $p_{h+1} = \ldots = p_m = 1$.

(H_1) p_1 sei eigentlich maximal und alle Endkanten gehen von E_1 aus. Wegen $p_3 \geqslant 2$ und $F_1(\Pi) \geqslant 1$ gibt es dann in G mindestens einen Zykel C: $E_1 E_2 \ldots E_j E_1$ mit mindestens drei Ecken. Man entfernt aus C die Kante $E_2 E_3$, setzt in E_2 eine Endkante ein, entfernt eine solche, welche von E_1 ausgeht, und verbindet E_1 mit E_3.

(H_1') p_1 ist eigentlich maximal, und es geht von einer anderen Ecke E_i ($p_i > 2$) eine Endkante k aus. Nun entfernt man k und eine Kante $E_1 E_k$, $k \neq i$ verbindet dann E_i mit E_k und setzt in E_1 eine Endkante an. In beiden Fällen sind die neuen Graphen von den ursprünglichen verschieden.

(H_2) $p_1 = p_2$. Wenn von einer Ecke E_j in G Endkanten ausgehen, so ist ihre Anzahl gerade oder ungerade, je nachdem p_j gerade oder ungerade ist. Ferner existiert in G mindestens ein Zykel, auf welchem alle Ecken liegen, deren Grad höher als 1 ist.

(H_2') Falls in G mehr als eine Endkante existiert, können zwei Fälle eintreten.

1. Alle Endkanten gehen von einer einzigen Ecke E_k aus. Dann sind es deren zwei. Alle Ecken höheren Grades liegen in mindestens einem Zykel C. Man entfernt aus diesem eine Kante $E_i E_e$; $i \neq k$, $e \neq k$, desgleichen eine Endkante aus E_k, setzt eine Endkante in E_i an und verbindet E_e mit E_k.

2. Es gehen von mindestens zwei Ecken E_i und E_k Endkanten aus, von E_k höchstens so viele wie von E_i. Es gibt immer eine Kante $E_i E_l$; $l \neq k$ (vgl. Bem. zu H_2). Diese Kante entfernt man, ebenso eine von E_k ausgehende Endkante, setzt eine Endkante in E_i ein und verbindet E_k mit E_e.

(H_2'') In G existiere eine einzige Endkante. Sie geht von einer Ecke ungeraden Grades E_i aus. Ist $p_1 > p_{m-1}$, so kann man durch ein völlig gleichartiges Verfahren wie in den vorangehenden Fällen einen Graphen G_1 konstruieren, in welchem die Endkante von einer Ecke E_e ausgeht, deren Grad $p_e \neq p_i$ ist. Ist $p_1 = p_{m-1}$ und $m > 4$, ersetzt man den Zykel C, dem alle Ecken E_i, $i \neq m$ angehören, wie in D_1 durch zwei Zykel C' und C'', und man erhält so einen Graphen G_1, der von G verschieden ist. Dagegen gilt:

(g) *Wenn $p_1 = p_3 > 1$, $p_4 = 1$, $m = 4$ gilt, so ist durch Π eindeutig* *ein Graph bestimmt.* Denn Π' bestimmt nach *S.* 15 (2, 2) eindeutig einen Graphen, und es ist bedeutungslos, von welcher Ecke die Endkante ausgeht[14]).

Damit ist auch unsere letzte Behauptung bewiesen.

9. Wir haben schließlich noch zu zeigen, daß jeder Menge Π mit $F_1(\Pi) \geqslant 0$ ein schlingenloser Graph entspricht. Das ist bereits bewiesen für $F_1(\Pi) \geqslant 0$ und $F_2(\Pi) \geqslant 0$. Es bleibt noch der Beweis für $F_1(\Pi) > 0$; $F_2(\Pi) < 0$ zu erbringen. In diesem Falle gehen wir von Π zu einer Menge Π^* über, für welche $F_2(\Pi^*) = 0$ gilt. Um diese Menge zu erhalten, muß man entweder eine geeignete gerade Anzahl von Einern aus Π weglassen oder eine ungerade Anzahl von ihnen streichen und ein $p_i > 1$ durch $p_i^* = p_i - 1$ ersetzen. Der Menge Π^* entspricht mindestens ein Baum, also ein schlingenloser Graph. Umsomehr gehört auch der Menge Π mindestens ein schlingenloser Graph.

(Eingegangen den 9. Mai 1952.)

[14]) Die Fälle g) und b), S. 16, treten an die Stelle der Fälle (2.6), (2.6′) und (2.6″) bei *Senior.*