Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Über die untere Grenze der Ordnung n-stufig nichtkommutativer Gruppen.

Autor: Szépál, I.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21886

INHALTSVERZEICHNIS

Über die untere Grenze der Ordnung n-stufig nichtkommutativer Gruppen

Von I. Szélpál, Szeged (Ungarn)

In einer Arbeit[1]) hat *L. Rédei* die Stufenzahl n $(\geqq 0)$ der Nichtkommutativität für endliche Gruppen folgendermaßen definiert: Durch die Stufenzahl $n = 0$ sind die kommutativen Gruppen charakterisiert, und für eine beliebige Gruppe G soll n um 1 größer sein als das Maximum der Stufenzahlen der echten Untergruppen von G. Bezüglich dieser Stufenzahl will ich jetzt folgenden Satz beweisen:

[1]) *L. Rédei*, Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie, Comment. Math. Helv. *20* (1947), 225—264.

Die untere Grenze der Ordnung einer n-stufig nichtkommutativen Gruppe ist 3.2^n.

Zum Beweis konstruiere ich zunächst eine Gruppe G von der Ordnung 3.2^n, die n-stufig nichtkommutativ ist. G sei das direkte Produkt von $n-1$ Gruppen 2-ter Ordnung $Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ und von der symmetrischen Gruppe S_6 der Ordnung 6:

$$G = Z_1 \times \cdots \times Z_{n-1} \times S_6 .$$

Da S_6 eine 1-stufig nichtkommutative Gruppe ist, sieht man auf Grund der Untergruppenkette

$$G \supset Z_2 \times \cdots \times Z_{n-1} \times S_6 \supset \cdots \supset Z_{n-1} \times S_6 \supset S_6 ,$$

daß G eine mindestens n-stufig nichtkommutative Gruppe ist. Andererseits aber ist G höchstens n-stufig nichtkommutativ, da das letzte Glied U_n einer beliebigen (streng abnehmenden) Untergruppenkette

$$G \supset U_1 \supset \cdots \supset U_n$$

als eine Gruppe von Primzahlordnung (oder von der Ordnung 1) immer kommutativ ist.

Es soll nur noch gezeigt werden, daß eine beliebige Gruppe G von einer Ordnung $< 3.2^n$ höchstens $(n-1)$-stufig nichtkommutativ ist. Das ist für $n = 1$ klar. Nehmen wir an, daß die Behauptung für $n-1$ statt n schon bewiesen ist, und betrachten wir eine Gruppe G von einer Ordnung $< 3.2^n$. Dann ist die Ordnung einer beliebigen echten Untergruppe H von $G < 3.2^{n-1}$, folglich ist H nach der Annahme höchstens $(n-2)$-stufig nichtkommutativ. Damit ist gezeigt, daß die Gruppe G höchstens $(n-1)$-stufig nichtkommutativ ist, und der Beweis des Satzes beendet.

(Eingegangen den 5. Juli 1952.)