Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Über analytische Abbildungen Riemannscher Flächen in sich.

Autor: Huber, Heinz

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21885

Über analytische Abbildungen Riemannscher Flächen in sich

Von Heinz Huber, Zürich

§ 1. Einleitung und Übersicht*

Ein Kreisring $\mathfrak{K}$: $0 < r < | z | < R$ in der komplexen z-Ebene hat folgende bemerkenswerte Eigenschaft [1]: Unter allen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{K}$ in sich sind die Automorphismen [2] von $\mathfrak{K}$ die einzigen, welche jede nicht nullhomotope geschlossene Kurve in $\mathfrak{K}$ auf eine ebensolche Kurve abbilden.

Indem wir nach analogen Erscheinungen bei komplizierteren Riemannschen Flächen suchten, wurden wir auf eine ausgedehnte, einfach zu definierende Klasse von Flächen geführt: auf die Riemannschen Flächen mit diskretem Modulspektrum. Es sei schon hier bemerkt, daß diese Klasse insbesondere (abgesehen von einigen trivialen Ausnahmefällen) alle Riemannschen Flächen endlichen Zusammenhanges enthält.

In dieser Arbeit soll nun gezeigt werden: Innerhalb der Menge aller analytischen Abbildungen in sich einer Riemannschen Fläche mit diskretem Modulspektrum sind die Automorphismen auf ähnliche Weise wie beim Kreisring stark ausgezeichnet. Die zu diesem Zwecke entwickelten Methoden liefern aber außerdem eine ganze Reihe weiterer Ergebnisse über Riemannsche Flächen und deren Abbildungen in sich.

Nach dieser allgemeinen Orientierung geben wir nun eine eingehende Übersicht über die wichtigsten Begriffe und Sätze dieser Arbeit.

1. *Wegklassen*

Unter einem Weg $p(t)$ auf der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ verstehen wir eine stetige Abbildung $p = p(t)$ des Intervalles $0 \leq t \leq 1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$. Den zu einem Weg $p(t)$ inversen Weg $p^{-1}(t)$ erklären wir

*) Vergleiche das Inhaltsverzeichnis am Ende der Arbeit.

[1]) Vergleiche [5]. Die obige Behauptung ist dort in Satz II, pag. 163, enthalten.

[2]) Unter einem Automorphismus einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ verstehen wir eine umkehrbar eindeutige und analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf sich selbst. Für die genaue Definition dieser Begriffe vergleiche man § 3, Nr. 1.

durch die Festsetzung: $p^{-1}(t) = p(1-t)$. Der Weg $p(t)$ heißt geschlossen, falls $p(0) = p(1)$.

Zwei geschlossene Wege $p_0(t)$, $p_1(t)$ auf $\mathfrak{R}$ heißen homotop (in Zeichen: $p_0(t) \sim p_1(t)$), wenn sie auf $\mathfrak{R}$ stetig ineinander deformiert werden können, das heißt wenn es eine solche stetige Abbildung $p = P(t, \tau)$ des Quadrates $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq \tau \leq 1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$ gibt, daß $P(t, 0) = p_0(t)$, $P(t, 1) = p_1(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ und $P(0, \tau) = P(1, \tau)$ für $0 \leq \tau \leq 1$. Insbesondere heißt ein geschlossener Weg $p_0(t)$ nullhomotop auf $\mathfrak{R}$, wenn er homotop zu einem „punktförmigen" Weg $p_1(t) \equiv q \in \mathfrak{R}$ ist.

Die Homotopierelation ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller geschlossenen Wege auf $\mathfrak{R}$ und bewirkt daher eine Klasseneinteilung dieser Menge in Wegklassen W. Die Klasse der nullhomotopen Wege nennen wir die Nullklasse von $\mathfrak{R}$.

2. *Gebiete auf Riemannschen Flächen*

Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet[3]) auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Dann definieren wir:

I. Ein Punkt $a \in \mathfrak{R}$ heißt isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$, wenn $a \notin \mathfrak{G}$ und wenn es eine solche Umgebung $\mathfrak{B}_a \subset \mathfrak{R}$ von a gibt, daß $\mathfrak{B}_a - a \subset \mathfrak{G}$.

II. Ein Randpunkt $a \in \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ heiße normaler Randpunkt, wenn es eine solche Umgebung $\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{R}$ von a gibt, daß jeder geschlossene Weg $p(t)$, welcher im Durchschnitt $\mathfrak{N}_a \cap \mathfrak{G}$ liegt, in $\mathfrak{G}$ nullhomotop ist.

III. Wir nennen $\mathfrak{G}$ ein Gebiet mit normalem Rand, falls jeder nichtisolierte Randpunkt von $\mathfrak{G}$ normal ist.

IV. Eine Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ heiße „auf den isolierten Randpunkt $a \in \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ reduzibel", wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

a) W ist nicht die Nullklasse von $\mathfrak{G}$.

b) Zu jeder Umgebung $\mathfrak{B}_a \subset \mathfrak{R}$ von a gibt es einen solchen Weg $p(t)$ in der Klasse W, daß $p(t) \in \mathfrak{B}_a - a$ für $0 \leq t \leq 1$.

3. *Der Modul einer Wegklasse*

Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus. Dann läßt sich ihre universelle Überlagerungsfläche konform auf die Poincarésche Halbebene abbilden. Dadurch wird der Fläche $\mathfrak{R}$ in bekannter Weise eine hyperbolische Metrik aufgeprägt[4]). Wir bezeichnen die hyperboli-

---

[3]) $\mathfrak{G}$ ist dann selbst eine Riemannsche Fläche.

[4]) Vergleiche § 5.

sche Länge eines Weges $p(t)$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\mu_{\mathfrak{R}}[p(t)]$. Wir ordnen nun jeder Wegklasse W von $\mathfrak{R}$ eine nicht negative Zahl, den Modul $M[W]$, zu, indem wir definieren [5]:

$$M[W] = \inf_{p(t) \in W} \mu_{\mathfrak{R}}[p(t)] \, .$$

Ist $M[W] > 0$, so nennen wir W eine hyperbolische Wegklasse und jeden ihrer Repräsentanten einen hyperbolischen Weg. Ist dagegen $M[W] = 0$ und ist W nicht die Nullklasse, so heiße W eine parabolische Wegklasse und jeder ihrer Repräsentanten ein parabolischer Weg.

In der Funktionentheorie treten vielfach Riemannsche Flächen $\mathfrak{G}$ auf, welche Teilgebiete einer fest gegebenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ sind (zum Beispiel Gebiete der komplexen Ebene usw.). Es erscheint dann wünschenswert, die metrischen Eigenschaften der Wegklassen von $\mathfrak{G}$ in Zusammenhang zu bringen mit (topologischen) Relativeigenschaften von $\mathfrak{G}$ bezüglich der einbettenden Fläche $\mathfrak{R}$. Wir beweisen hierüber das folgende Kriterium:

Satz A. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$; die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ sei kompakt. Dann gilt: Eine Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann parabolisch, wenn sie auf einen isolierten Randpunkt $a \in \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ reduzibel ist.

Einfache Beispiele zeigen, daß in Satz A auf die Kompaktheit von $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht verzichtet werden kann.

Da jedes Gebiet auf einer geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine kompakte abgeschlossene Hülle besitzt, so folgt aus Satz A sofort

Satz A$_1$. Ist $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$, so gilt: Eine Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann parabolisch, wenn sie auf einen isolierten Randpunkt von $\mathfrak{G}$ reduzibel ist.

Jede geschlossene Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 2$ ist ein Gebiet von hyperbolischem Typus ohne Randpunkte auf sich selbst. Daher folgt aus Satz A$_1$ sofort der auch auf andere Weise beweisbare und wohlbekannte [6])

---

[5]) In § 4 wird zwar aus beweistechnischen Gründen eine etwas anders lautende Definition gegeben; man erkennt indessen unmittelbar die Äquivalenz beider Definitionen.

[6]) Siehe zum Beispiel [12], pag. 208.

Satz A_1'. Auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 2$ ist jeder geschlossene, nicht nullhomotope Weg hyperbolisch.

Für den Spezialfall von Satz A, daß $\mathfrak{G}$ ein beschränktes Gebiet der komplexen z-Ebene ist, gibt es einen Beweis von Carathéodory [7]). Die Carathéodorysche Beweismethode ist aber auf unseren allgemeinen Fall nicht übertragbar, da sie wesentlich die Gültigkeit des Jordanschen Kurvensatzes in der z-Ebene voraussetzt. Die Hauptstütze unseres Beweises von Satz A bildet die folgende Verallgemeinerung des Großen Picardschen Satzes:

Satz 2, § 6. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle. Dann gilt: Jede analytische Abbildung A der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$ kann zu einer analytischen Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z| < 1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$ fortgesetzt werden.

Nimmt man speziell als Fläche $\mathfrak{R}$ die Riemannsche Kugel und als Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ die Kugel minus drei Punkte, so erhält man den Großen Picardschen Satz, welcher besagt, daß der Punkt $z = 0$ keine wesentliche Singularität sein kann für eine in $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ (eindeutige und) meromorphe Funktion, welche daselbst drei Werte ausläßt. Unsere Verallgemeinerung des Picardschen Satzes besteht also darin, daß wir die in $\mathfrak{k}$ meromorphe und daselbst drei Werte auslassende Funktion, welche ja als analytische Abbildung von $\mathfrak{k}$ in die dreifach punktierte Kugel gedeutet werden kann, ersetzen durch eine analytische Abbildung von $\mathfrak{k}$ in ein hyperbolisches Gebiet mit kompakter abgeschlossener Hülle auf einer beliebigen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Für den Beweis dieses verallgemeinerten Satzes benutzen wir außer den in der ganzen Arbeit verwendeten Grundlagen der Uniformisierungstheorie [8]) als spezifisch funktionentheoretische Hilfsmittel nur das Schwarzsche Lemma und den elementaren Satz von Casorati-Weierstraß, welcher besagt, daß eine für $0 < |z| < 1$ eindeutige und beschränkte regulär-analytische Funktion zu einer in der ganzen Kreisscheibe $|z| < 1$ regulären Funktion fortgesetzt werden kann. Wir erhalten so eine Beweisanordnung, welche, weil von verschiedenen Zufälligkeiten befreit, sogar eher durchsichtiger ist als die üblichen Beweise des klassischen Picardschen Satzes.

---

[7]) [1], Bd. 2, Nr. 335.

[8]) das ist im wesentlichen der Riemannsche Abbildungssatz und die darauf gründende Typenklassifikation der Riemannschen Flächen.

4. *Riemannsche Flächen mit diskretem Modulspektrum*

Eine hyperbolische Riemannsche Fläche heiße Fläche mit diskretem Modulspektrum, wenn es auf ihr für jede Zahl $m>0$ höchstens endlich viele Wegklassen W mit

$$0<M[W]<m \tag{1}$$

gibt. — Man beachte wohl, daß in dieser Definition dank der linken Hälfte der Ungleichung (1) keine Forderung über die Anzahl der allfällig vorhandenen parabolischen Wegklassen enthalten ist.

Die Eigenschaft einer Fläche, diskretes Modulspektrum zu besitzen, ist eine innere Eigenschaft dieser Fläche und invariant gegenüber eineindeutigen analytischen Abbildungen.

Es sei nun $\mathfrak{R}$ eine beliebige Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein hyperbolisches Teilgebiet von $\mathfrak{R}$. Dann liegt die folgende Fragestellung nahe: Gibt es (topologische) Relativeigenschaften von $\mathfrak{G}$ bezüglich der einbettenden Fläche $\mathfrak{R}$, deren Erfülltsein garantiert, daß $\mathfrak{G}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist? Wir beweisen hierüber den folgenden

Satz B. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ sei kompakt und der Rand von $\mathfrak{G}$ sei normal. Dann ist $\mathfrak{G}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum.

Satz B zeigt zugleich, daß die Klasse der Riemannschen Flächen mit diskretem Modulspektrum sehr umfangreich ist. Daß es aber auch wirklich Flächen mit nichtdiskretem Modulspektrum gibt, wird sehr leicht aus den Sätzen von Nr. 5 hervorgehen [9]). Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß mit den in Satz B auftretenden Riemannschen Flächen $\mathfrak{G}$ die Gesamtheit aller Flächen mit diskretem Modulspektrum nicht erschöpft ist. Wir hoffen bei späterer Gelegenheit auf diese Frage zurückkommen zu können.

Da die abgeschlossene Hülle eines Teilgebietes einer geschlossenen Fläche von selbst kompakt ist, so folgt aus Satz B sofort der

Satz B_1. Jedes hyperbolische Gebiet mit normalem Rand auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche ist eine Fläche mit diskretem Modulspektrum.

Jede geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 2$

---

[9]) Diese Tatsache folgt zum Beispiel leicht aus Satz IV. Man vergleiche aber auch das Beispiel zu Satz V_1'.

ist ein hyperbolisches Gebiet auf sich selbst, dessen Rand trivialerweise normal ist. Daher folgt aus Satz B_1 unmittelbar

Satz $B_{1'}$. Jede geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 2$ ist eine Fläche mit diskretem Modulspektrum.

Dieser Satz $B_{1'}$ stimmt inhaltlich überein mit einem Ergebnis, das J. Nielsen[10]) auf ganz andere Weise erhalten hat.

Mit Hilfe eines bekannten, von Koebe[11]) herrührenden Einbettungssatzes für Riemannsche Flächen endlichen Zusammenhanges werden wir aus Satz B_1 mühelos noch den folgenden Satz gewinnen:

Satz C. Jede hyperbolische Riemannsche Fläche mit endlicher Bettischer Zahl ist eine Fläche mit diskretem Modulspektrum.

Beim Beweise des grundlegenden Satzes B stützen wir uns in erster Linie auf die folgende Verallgemeinerung eines bekannten Montelschen Satzes:

Satz 4, § 8. Es sei $\mathfrak{G}$ ein hyperbolisches Gebiet mit kompakter abgeschlossener Hülle auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. $\{A_n(p)\}$ sei eine Folge von analytischen Abbildungen einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{r}$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ von $\{A_n(p)\}$, welche auf $\mathfrak{r}$ stetig konvergiert[12]) gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{r}$ in die Fläche $\mathfrak{R}$.

Nimmt man speziell als Fläche $\mathfrak{R}$ die Riemannsche Kugel und als hyperbolisches Gebiet auf $\mathfrak{R}$ die Kugel minus drei Punkte, so erhält man offenbar den bekannten Montelschen Satz, welcher besagt, daß jede Folge von auf $\mathfrak{r}$ meromorphen Funktionen normal ist, wenn alle Funktionen der Folge drei feste Werte a, b, c nicht annehmen. Für den Beweis unserer Verallgemeinerung des Montelschen Satzes benötigen wir an spezifisch funktionentheoretischen Hilfsmitteln außer den Grundlagen der Uniformisierungstheorie nur das Schwarzsche Lemma.

5. *Analytische Abbildungen Riemannscher Flächen in sich*

I. Die von uns angewandte Methode zur Untersuchung analytischer Abbildungen einer hyperbolischen Fläche $\mathfrak{R}$ in sich besitzt eine funktionentheoretische und eine gruppentheoretische Komponente; sie kann

---

[10]) [12] pag. 209.

[11]) [8] § 37, pag. 139—141.

[12]) Über den von Carathéodory stammenden Begriff der stetigen Konvergenz vergleiche man § 7.

etwa folgendermaßen kurz angedeutet werden: Bekanntlich besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Wegklassen auf $\mathfrak{R}$ und den Klassen konjugierter Elemente der Fundamentalgruppe Γ von $\mathfrak{R}$[13]). Wir erklären nun auf der Gruppe Γ eine Klassenfunktion $M[S]$, indem wir jedem Element $S \in \Gamma$ als Funktionswert den Modul der zur Klasse von S gehörigen Wegklasse zuordnen[14]). — Jede (analytische) Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich induziert in bekannter Weise einen Endomorphismus der Fundamentalgruppe Γ[15]). Indem wir nun das Verhalten der Klassenfunktion $M[S]$ gegenüber diesen Endomorphismen untersuchen, werden wir zu unseren Sätzen über analytische Abbildungen Riemannscher Flächen in sich geführt. Der wesentliche Kern unserer Methode ist in den vier Lemmata von § 12 enthalten; sie bilden die Quelle, aus der alle unsere folgenden Sätze fließen.

II. Zunächst beweisen wir einige Sätze, welche noch ohne die Voraussetzung auskommen, daß die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ diskretes Modulspektrum besitze (Sätze I bis III).

Satz I. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit nichtabelscher Fundamentalgruppe. Dann ist die Gruppe $\mathfrak{W}$ aller analytischen Automorphismen von $\mathfrak{R}$, welche eine von der Nullklasse verschiedene Wegklasse W festlassen, eine zyklische Gruppe von endlicher Ordnung.

Die Voraussetzung, daß die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ nicht abelsch sei, ist dabei wesentlich; man sieht dies etwa am Beispiel eines Kreisringes, welcher ja sogar eine kontinuierliche Gruppe von Automorphismen besitzt, welche eine von der Nullklasse verschiedene Wegklasse festlassen.

Wir beweisen ferner:

Satz II. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit nichtabelscher Fundamentalgruppe[16]) und A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Dann gilt: Gibt es auf $\mathfrak{R}$ einen hyperbolischen Weg $p(t)$ derart, daß $A(p(t)) \sim p(t)$, so ist A ein periodischer *Automorphismus* von $\mathfrak{R}$.

Man überlegt sich sehr leicht an einfachen Beispielen, daß die Voraussetzung, der Weg $p(t)$ sei hyperbolisch, wesentlich ist für die Gültigkeit von Satz II. — Da jedes beschränkte Gebiet der komplexen z-Ebene von hyperbolischem Typus ist, so folgt aus Satz A und Satz II sofort

---

[13]) Siehe § 3, Nr. 4.

[14]) Siehe § 4.

[15]) Richtiger: Eine Klasse ähnlicher Endomorphismen. Siehe § 3, Nr. 5.

[16]) Eine solche Fläche ist stets von hyperbolischem Typus; vergleiche § 3, Nr. 6, IV.

Satz II'. Die Zusammenhangszahl[17]) des beschränkten Gebietes $\mathfrak{G}$ der z-Ebene sei größer als 2. Es sei A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{G}$ in sich und es gebe in $\mathfrak{G}$ einen weder nullhomotopen noch auf einen isolierten Randpunkt reduzibeln Weg $p(t)$ derart, daß $A(p(t)) \sim p(t)$. Dann ist A ein periodischer Automorphismus von $\mathfrak{G}$.

Dieser Spezialfall unseres Satzes II wurde von H. Cartan[18]) mit Hilfe seiner Theorie der Iteration analytischer Abbildungen beschränkter Gebiete bewiesen. Cartan zeigte allerdings nur, daß A ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, nicht aber die Periodizität von A. — Durch Kombination von Satz II mit den Sätzen A und A_1 würden sich noch weitere (und allgemeinere) Sätze vom Typus II' ergeben; wir wollen sie aber hier nicht explizite anführen.

Als Gegenstück zu Satz II beweisen wir den folgenden

Satz III. Es sei $\mathfrak{R}$ eine hyperbolische Riemannsche Fläche und A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Gibt es auf $\mathfrak{R}$ einen nicht nullhomotopen geschlossenen Weg $p(t)$ derart, daß $A(p(t)) \sim p^{-1}(t)$, so gilt:

1. A ist ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$.
2. A besitzt die Periode 2.
3. A besitzt mindestens einen Fixpunkt auf $\mathfrak{R}$.

Es ist bemerkenswert, daß hier im Gegensatz zu Satz II keine Voraussetzung über die metrische Natur des Weges $p(t)$ gemacht werden muß; in der Tat zeigt sich beim Beweise, daß ein Weg $p(t)$ von selbst hyperbolisch ist, wenn er die Voraussetzungen von Satz III erfüllt. Daß die Behauptung 3 nicht verschärft werden kann, lehrt das folgende Beispiel: Es sei $\mathfrak{R}$ die in den Punkten $z = \pm 1$ punktierte Kreisscheibe $|z| < 2$. Dann ist $A(z) = -z$ eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Wählen wir nun als nichtnullhomotopen Weg $p(t)$ in $\mathfrak{R}$ eine Lemniskate, welche die beiden Punkte $z = \pm 1$ umschlingt, so ist offenbar $A(p(t)) \sim p^{-1}(t)$. Und in der Tat ist A ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ mit der Periode 2, welcher den einzigen Fixpunkt $z = 0$ besitzt.

III. Die nun folgenden Sätze IV bis VI handeln von Flächen mit diskretem Modulspektrum. Wir beweisen zunächst den allgemeinen

Satz IV. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum und nichtabelscher Fundamentalgruppe. Dann hat die Gruppe $\mathfrak{A}$ aller analytischen Automorphismen von $\mathfrak{R}$ eine endliche Ordnung.

---

[17]) Zusammenhangszahl = Bettische Zahl + 1.

[18]) [2] pag. 771.

In diesem Satz ist nun eine ganze Reihe von bemerkenswerten Spezialfällen enthalten:

1. Da eine Riemannsche Fläche mit nichtabelscher Fundamentalgruppe stets von hyperbolischem Typus ist, so folgt aus Satz B und Satz IV sofort

Satz IV_1. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet mit nichtabelscher Fundamentalgruppe auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{G}$ sei kompakt und der Rand von $\mathfrak{G}$ normal. Dann hat die Gruppe aller analytischen Automorphismen von $\mathfrak{G}$ eine endliche Ordnung.

Da die abgeschlossene Hülle eines Teilgebietes einer geschlossenen Fläche von selbst kompakt ist, so enthält Satz IV_1 den

Satz IV_2. Jedes Gebiet mit normalem Rand und nichtabelscher Fundamentalgruppe auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche besitzt nur endlich viele analytische Automorphismen.

Da offenbar jedes endlichfach zusammenhängende Gebiet auf der Riemannschen Kugel, dessen Zusammenhangszahl größer als zwei ist, einen normalen Rand und eine nichtabelsche Fundamentalgruppe besitzt, so enthält Satz IV_2 insbesondere den wohlbekannten[19])

Satz $\mathrm{IV}_{2'}$. Jedes endlichfach zusammenhängende Gebiet auf der Riemannschen Kugel, dessen Zusammenhangszahl größer als zwei ist, besitzt nur endlich viele analytische Automorphismen.

Weil jede geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte $g \geq 2$ ein Gebiet auf sich selbst ist, dessen Fundamentalgruppe nichtabelsch und dessen Rand trivialerweise normal ist, so enthält Satz IV_2 ferner den

Satz $\mathrm{IV}_{2''}$. Jede geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte $g \geq 2$ besitzt nur endlich viele analytische Automorphismen.

Damit haben wir einen neuen Beweis dieses bekannten, zuerst von H. A. Schwarz aufgestellten Satzes[20]).

2. Aus Satz IV und Satz C folgt endlich

Satz IV_3. Jede Riemannsche Fläche mit nichtabelscher Fundamentalgruppe und endlicher Bettischer Zahl besitzt nur endlich viele analytische Automorphismen.

---

[19]) Siehe zum Beispiel [7], § 5, pag. 323—326.

[20]) [16] pag. 285—291. Vergleiche auch [6] pag. 241—259 und [14], pag. 16—19.

Dieser Spezialfall von Satz IV darf seit den Arbeiten von Koebe als bekannt gelten, da er durch das Verfahren der „Verdoppelung" einer endlichfach zusammenhängenden Fläche[21]) und Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzipes auf Satz $\mathrm{IV}_{2''}$ zurückgeführt werden kann. Immerhin sind bei der exakten Durchführung dieses Beweises einige unangenehme Fallunterscheidungen und zusätzliche Betrachtungen nicht zu vermeiden; sie rühren vom möglichen Auftreten parabolischer Enden der Fläche her — ein Umstand, der sich bei unserer Beweismethode nicht bemerkbar macht.

Der folgende Satz zeigt nun deutlich die starke Auszeichnung der Automorphismen innerhalb der Menge aller analytischen Abbildungen in sich einer Riemannschen Fläche mit diskretem Modulspektrum.

Satz V. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum, welche keine parabolischen Wegklassen enthält. Dann gibt es zu jedem geschlossenen Weg $p(t)$ auf $\mathfrak{R}$ eine nur von der Homotopieklasse dieses Weges abhängige ganze Zahl $n \geq 1$ derart, daß gilt: Für jede analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich, welche kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist, ist der Weg $A^n(p(t))$ nullhomotop auf $\mathfrak{R}$.

Aus Satz A, Satz B und Satz V ergibt sich sofort

Satz V_1. Es sei $\mathfrak{G}$ ein hyperbolisches Gebiet auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{G}$ sei kompakt und jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ sei normal. Dann gibt es zu jedem geschlossenen Weg $p(t)$ in $\mathfrak{G}$ eine nur von der Homotopieklasse dieses Weges abhängige ganze Zahl $n \geq 1$ derart, daß gilt: Für jede analytische Abbildung A von $\mathfrak{G}$ in sich, welche kein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, ist der Weg $A^n(p(t))$ nullhomotop in $\mathfrak{G}$.

Dieser Satz enthält reichlich den folgenden Spezialfall:

Satz $\mathrm{V}_{1'}$. Es sei $\mathfrak{G}$ ein nicht einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der komplexen z-Ebene. Der Rand von $\mathfrak{G}$ sei normal und enthalte keine isolierten Punkte. Dann gilt: Führt die analytische Abbildung A von $\mathfrak{G}$ in sich keine von der Nullklasse verschiedene Wegklasse von $\mathfrak{G}$ in die Nullklasse über, so ist A ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$.

In der Tat: Ein beschränktes Gebiet der komplexen z-Ebene ist ein Gebiet von hyperbolischem Typus mit kompakter abgeschlossener Hülle. Da der Rand von $\mathfrak{G}$ normal ist und keine isolierten Punkte enthält, so ist

[21]) [8], § 37, pag. 139—141.

offenbar jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$ normal. Es sind also alle Voraussetzungen von Satz V_1 erfüllt. Da $\mathfrak{G}$ außerdem nicht einfach zusammenhängend ist, so gibt es in $\mathfrak{G}$ eine von der Nullklasse verschiedene Wegklasse W. Nach Voraussetzung sind dann die Wegklassen $A^k(W)$, $k = 1, 2, \ldots$, alle von der Nullklasse verschieden. Folglich muß A nach Satz V_1 ein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ sein, q. e. d. Dieser Satz $V_{1'}$ wurde von H. Cartan[22]) behauptet, ohne daß er dabei unsere einschränkende Voraussetzung machte, daß der Rand von $\mathfrak{G}$ normal sein soll. Daß ohne diese Voraussetzung Satz $V_{1'}$ aber unrichtig ist, erkennt man sehr leicht an folgendem Beispiel: Aus der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ entferne man die unendlich vielen „Kreisbogenschlitze"

$$\mathfrak{S}_n: \quad |z| = 2^{-n}, \quad |\arg z| \leq \pi/2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Die übrigbleibende Punktmenge $\mathfrak{G} = \mathfrak{k} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ ist nun wohl ein nicht einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet ohne isolierte Randpunkte, aber der Randpunkt $z = 0$ ist offenbar nicht normal. $A(z) = z/2$ ist eine analytische Abbildung von $\mathfrak{G}$ in sich, welche gewiß keine von der Nullklasse verschiedene Wegklasse von $\mathfrak{G}$ in die Nullklasse überführt. Offensichtlich ist aber $A(z)$ trotzdem kein Automorphismus von $\mathfrak{G}$[23]). Einfache Beispiele zeigen, daß für die Richtigkeit von Satz V die Nichtexistenz parabolischer Wegklassen auf $\mathfrak{R}$ wesentlich ist. Verzichtet man auf diese Voraussetzung, so läßt sich immerhin noch der folgende allgemeine Satz beweisen:

Satz VI. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum und nichtabelscher Fundamentalgruppe. Dann gilt: Unter allen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in sich sind die Automorphismen von $\mathfrak{R}$ die einzigen, welche jeden nicht null-homotopen geschlossenen Weg von $\mathfrak{R}$ auf einen ebensolchen Weg abbilden.

Durch Kombination von Satz VI mit den Sätzen aus Nr. 4 erhält man wieder eine ganze Reihe von spezielleren Resultaten. Wir beschränken uns darauf, ein einziges explizite anzuführen: Aus Satz VI und Satz C ergibt sich der besonders bemerkenswerte

Satz VI_1. Die Automorphismen einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ mit endlicher Bettischer Zahl und nichtabelscher Fundamentalgruppe sind

---

[22]) [2] pag. 772.

[23]) Daraus und aus Satz V ergibt sich noch, daß das Gebiet $\mathfrak{G}$ eine Riemannsche Fläche mit nicht diskretem Modulspektrum ist.

die einzigen analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in sich, welche jeden nicht nullhomotopen geschlossenen Weg von $\mathfrak{R}$ auf einen ebensolchen Weg abbilden.

IV. Nimmt man wiederum die Voraussetzung hinzu, daß $\mathfrak{R}$ keine parabolischen Wegklassen enthalte, so läßt sich für endlichfach zusammenhängende Flächen ein bedeutend prägnanteres Resultat gewinnen. Um dieses aber formulieren zu können, benötigen wir noch einen neuen Begriff:

Eine analytische Abbildung $A(p)$ einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ in sich heiße analytisch nullhomotop, wenn es eine solche stetige Abbildung $A(p, t)$ des topologischen Produktes $\mathfrak{R} \times \mathfrak{t}$[24]) in $\mathfrak{R}$ gibt, daß gilt:

1. $A(p, 0) = A(p)$, $A(p, 1) \equiv p_0 \in \mathfrak{R}$ für alle $p \in \mathfrak{R}$.

2. Für jedes feste $t \in \mathfrak{t}$ ist $A(p, t)$ eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich.

Mit Hilfe des eben eingeführten Begriffes läßt sich nun der angekündigte Satz folgendermaßen aussprechen:

Satz VII. Es sei $\mathfrak{R}$ eine hyperbolische Riemannsche Fläche ohne parabolische Wegklassen mit der endlichen Bettischen Zahl $b \geq 1$. Dann gilt: Ist die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist die b-fach iterierte Abbildung A^b analytisch nullhomotop[25]).

Dieser Satz enthält u. a. folgenden Spezialfall:

Satz VII$_1$. Es sei $\mathfrak{G}$ ein $(n \geq 2)$-fach zusammenhängendes Gebiet der Riemannschen Kugel ohne isolierte Randpunkte. Dann gilt: Ist die analytische Abbildung A von $\mathfrak{G}$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{G}$, so ist die iterierte Abbildung A^{n-1} analytisch nullhomotop[26]).

In der Tat: Ein $(n \geq 2)$-fach zusammenhängendes Gebiet der Riemannschen Kugel ohne isolierte Randpunkte ist eine hyperbolische Riemannsche Fläche mit der Bettischen Zahl $b = n - 1 \geq 1$; auf ihr gibt es nach Satz A_1 keine parabolischen Wegklassen.

Daß in Satz VII$_1$ der Exponent $n - 1$ durch keine kleinere Zahl ersetzt werden kann, zeigt uns das folgende Beispiel: Aus der Kreisscheibe $\mathfrak{K}$: $|z| < 1$ entferne man die $n - 1$ „Kreisbogenschlitze"

---

[24]) $\mathfrak{t}$ bedeute das Intervall $0 \leq t \leq 1$.

[25]) Für geschlossene Flächen $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 2$ gilt sogar: Ist die analytische Abbildung A einer $\mathfrak{F}_g$ in sich kein Automorphismus, so ist A konstant. (Siehe Satz 1, § 18 und die zugehörige Fußnote [53].)

[26]) Für den Spezialfall $n = 2$ vergleiche [5], pag. 163, Satz II.

$\mathfrak{S}_k$: $|z| = 2^{-k}$, $|\arg z| \leq \pi/2$, $k = 1, \ldots, n-1$. $n \geq 2$.

Die übrigbleibende Punktmenge $\mathfrak{G} = \mathfrak{R} - \bigcup_{k=1}^{n-1} \mathfrak{S}_k$ ist ein ($n \geq 2$)-fach zusammenhängendes Gebiet ohne isolierte Randpunkte. $A(z) = z/2$ ist nun eine analytische Abbildung von $\mathfrak{G}$ in sich, aber offenbar kein Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Und in der Tat ist hier die ($n-1$)-fach iterierte Abbildung $A^{n-1}(z)$ analytisch nullhomotop, während die Iterierten $A^k(z)$ für $k < n-1$ nicht analytisch nullhomotop sind. Satz VII_1 stellt eine beträchtliche Verschärfung von Resultaten von Maurice Heins und Michel Hervé dar. Heins[27]) gewann nämlich mit ganz andern Methoden das folgende, in unserem Satze reichlich enthaltene Ergebnis: Unter den Voraussetzungen von Satz VII_1 gibt es zu jeder analytischen Abbildung A von $\mathfrak{G}$ in sich, welche kein Automorphismus von $\mathfrak{G}$ ist, eine ganze Zahl $g = g(A, \mathfrak{G}) \geq 1$ derart, daß die g-fach iterierte Abbildung A^g jeden geschlossenen Weg in $\mathfrak{G}$ auf einen nullhomotopen Weg abbildet. Hervé zeigte dann in einer kürzlich erschienenen Arbeit[28]), daß es bei gegebenem Gebiete $\mathfrak{G}$ eine von A unabhängige solche Zahl $g = g(\mathfrak{G})$ gibt, ohne daß er allerdings die Art der Abhängigkeit dieser Zahl g vom Gebiete $\mathfrak{G}$ abklärte. Es sei noch bemerkt, daß mit Hilfe unseres Satzes VII_1 aus den von Hervé nur für nullhomotope Abbildungen entwickelten Abschätzungen der Starrheitskonstanten von $\mathfrak{G}$ sofort Abschätzungen dieser Konstanten für beliebige Abbildungen gewonnen werden können.

§ 2. Nichteuklidische Bewegungen

I. In dieser Arbeit bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}$ stets die komplexe Halbebene $\mathfrak{J}(\zeta) > 0$, $\zeta = \xi + i\eta$. Durch die Metrik $ds^2 = \frac{1}{\eta^2}(d\xi^2 + d\eta^2)$ wird in $\mathfrak{L}$ eine nichteuklidische Geometrie erklärt. (Poincarésches Modell der Lobatschewskyschen Ebene.) Ihre Geodätischen sind die zur reellen Achse $\eta = 0$ orthogonalen (euklidischen) Kreise und Geraden (im folgenden kurz Orthogonalkreise genannt). Die Länge eines (stetig differenzierbaren) Weges $\zeta(t) \in \mathfrak{L}$, $(0 \leq t \leq 1)$, bezeichnen wir mit $\mu[\zeta(t)]$; es ist

$$\mu[\zeta(t)] = \int_0^1 \frac{|\zeta'(t)|}{\mathfrak{J}(\zeta(t))} dt . \tag{1}$$

27) [3] Theorem 3.2, pag. 479.

28) [4] pag. 151.

Die Distanz zweier Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$ bezeichnen wir mit $\mu[\zeta_1, \zeta_2]$; es ist

$$\mu[\zeta_1, \zeta_2] = \log \frac{1 + \tau(\zeta_1, \zeta_2)}{1 - \tau(\zeta_1, \zeta_2)}, \qquad \tau(\zeta_1, \zeta_2) = \left| \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\bar{\zeta}_1 - \zeta_2} \right| . \tag{2}$$

Definition 1. Unter einer (nichteuklidischen) Bewegung von $\mathfrak{L}$ verstehen wir eine lineare Abbildung $L(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$, $ad - bc \neq 0$ der Halbebene $\mathfrak{L}$ auf sich selbst.

Bekanntlich können die Koeffizienten a, b, c, d einer Bewegung $L(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ stets so normiert werden, daß die a, b, c, d reell sind und daß $ad - bc = 1$. Statt $L(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$ schreiben wir dann auch etwa kurz $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. In dieser symbolischen Schreibweise soll aber die rechte Seite stets eine reelle unimodulare Matrix bedeuten. Zwei reelle unimodulare Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ liefern offenbar dann und nur dann dieselbe Bewegung $L(\zeta) = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d} = \frac{a'\zeta + b'}{c'\zeta + d'}$, wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Jeder Bewegung $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist demnach in eindeutiger Weise die Spur

$$\sigma(L) = |a + d| \tag{3}$$

zugeordnet.

II. Die Bewegungen von $\mathfrak{L}$ lassen sich bekanntlich in eindeutiger Weise in vier Klassen einteilen:

1. *Die Identität*; $I(\zeta) \equiv \zeta$.

2. *Elliptische Bewegungen.* Eine Bewegung L heißt elliptisch, falls $\sigma(L) < 2$. Jede elliptische Bewegung besitzt in der ζ-Ebene genau zwei Fixpunkte, und diese liegen symmetrisch zur reellen Achse.

3. *Parabolische Bewegungen.* Eine Bewegung L heißt parabolisch, falls $\sigma(L) = 2$ und $L \neq I$. Eine parabolische Bewegung besitzt in der abgeschlossenen ζ-Ebene einen einzigen Fixpunkt, und dieser ist Randpunkt von $\mathfrak{L}$. Zu jeder parabolischen Bewegung L von $\mathfrak{L}$ und zu jeder reellen Zahl $h \neq 0$ gibt es solche Bewegungen U von $\mathfrak{L}$, daß die Bewegung $L^* = ULU^{-1}$ die Gestalt $L^*(\zeta) = \zeta \pm h$ erhält.

4. *Hyperbolische Bewegungen.* Eine Bewegung heißt hyperbolisch, falls $\sigma(L) > 2$. Eine hyperbolische Bewegung besitzt in der abgeschlossenen ζ-Ebene genau zwei Fixpunkte, und diese sind Randpunkte

von $\mathfrak{L}$. Zu jeder hyperbolischen Bewegung L von $\mathfrak{L}$ gibt es solche Bewegungen V von $\mathfrak{L}$, daß die Bewegung $L^* = VLV^{-1}$ die Gestalt $L^*(\zeta) = \lambda \cdot \zeta$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$ erhält[29]). Dabei ist die Zahl $|\log \lambda| > 0$ durch L eindeutig bestimmt.

Sind S und T irgend zwei Bewegungen von $\mathfrak{L}$, so gehören die Bewegungen S und TST^{-1} stets zur selben Klasse.

III. Bekanntlich gilt:

Satz 1. Ist L eine Bewegung von $\mathfrak{L}$, so ist $\mu[L(\zeta(t))] = \mu[\zeta(t)]$ für jeden Weg $\zeta(t) \in \mathfrak{L}$ und $\mu[L(\zeta_1), L(\zeta_2)] = \mu[\zeta_1, \zeta_2]$ für alle $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$.

Satz 2. Jede analytische[30]) und topologische Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf sich selbst ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

Definition 2. Ist L eine Bewegung von $\mathfrak{L}$, so heiße die Zahl $M[L] = \inf\limits_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, L(\zeta)]$ der Modul von L.

Satz 3. Sind L und T Bewegungen von $\mathfrak{L}$, so ist $M[TLT^{-1}] = M[L]$.

Beweis. Nach Satz 1 ist $\mu[\zeta, TLT^{-1}(\zeta)] = \mu[T^{-1}(\zeta), L(T^{-1}(\zeta))]$. Beachtet man außerdem, daß der Punkt $T^{-1}(\zeta)$ gleichzeitig mit ζ alle Punkte von $\mathfrak{L}$ durchläuft, so folgt: $M[TLT^{-1}] = \inf\limits_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, TLT^{-1}(\zeta)]$ $= \inf\limits_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[T^{-1}(\zeta), L(T^{-1}(\zeta))] = \inf\limits_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, L(\zeta)] = M[L]$. q. e. d.

Mit Hilfe von (2) beweist man unschwer

Satz 4. a) Es ist $M[L] = 0$ dann und nur dann, wenn L keine hyperbolische Bewegung ist.

b) Ist L eine hyperbolische Bewegung, so ist $M[L] = \mu[\zeta, L(\zeta)]$ dann und nur dann, wenn $\zeta \in \mathfrak{L}$ ein Punkt des Orthogonalkreises durch die beiden Fixpunkte von L ist.

c) Hat die (hyperbolische) Bewegung L die Gestalt $L(\zeta) = \lambda \cdot \zeta$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, so ist $M[L] = |\log \lambda|$.

Man zeigt ferner leicht

Satz 5. Ist L eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ und n eine ganze Zahl, so ist $M[L^n] = |n| \cdot M[L]$.

---

[29]) In unserer symbolischen Schreibweise wird $L^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$.

[30]) Vergleiche § 3, Nr. 1.

IV. Man beweist sehr leicht die folgenden Hilfssätze:

Satz 6. Die Bewegung H habe die Gestalt $H(\zeta) = \lambda_H \cdot \zeta$, $\lambda_H > 0$, $\lambda_H \neq 1$. Dann hat jede Bewegung S von $\mathfrak{L}$, für welche $SHS^{-1} = H$ ist, die Gestalt $S(\zeta) = \lambda_S \cdot \zeta$, $\lambda_S > 0$.

Satz 6'. Die Bewegung P habe die Gestalt $P(\zeta) = \zeta + h_P$, $h_P \neq 0$ reell. Dann hat jede Bewegung S von $\mathfrak{L}$, für welche $SPS^{-1} = P$ gilt, die Gestalt $S(\zeta) = \zeta + h_S$, h_S reell.

Satz 7. Die Bewegung H habe die Gestalt $H(\zeta) = \lambda \cdot \zeta$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. Dann hat jede Bewegung S von $\mathfrak{L}$, für welche $SHS^{-1} = H^{-1}$ gilt, die Gestalt $S(\zeta) = -\frac{c_S}{\zeta}$, $c_S > 0$.

V.

Definition 3. Eine Bewegungsgruppe Γ von $\mathfrak{L}$ heiße eigentlich diskontinuierlich, falls die Punktmenge $\mathfrak{M}_\zeta = \bigcup_{S \in \Gamma} S(\zeta)$ für kein $\zeta \in \mathfrak{L}$ einen Häufungspunkt in $\mathfrak{L}$ besitzt.

Man zeigt leicht:

Satz 8. Es sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$, deren Elemente alle die Gestalt $S(\zeta) = \lambda_S \cdot \zeta$, $\lambda_S > 0$, haben. Dann ist Γ zyklisch von der Ordnung 1 oder ∞.

Satz 8'. Es sei Γ eine eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$, deren Elemente alle die Gestalt $S(\zeta) = \zeta + h_S$, h_S reell, haben. Dann ist Γ zyklisch von der Ordnung 1 oder ∞.

Satz 9. Die eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ von $\mathfrak{L}$ enthalte weder elliptische noch hyperbolische Elemente. Dann ist Γ zyklisch.

Beweis. Γ bestehe nicht aus der Identität allein. (Sonst wäre nichts zu beweisen!) Dann enthält Γ gewiß eine parabolische Bewegung P. Wir dürfen annehmen, P habe die Gestalt[31])

$$P(\zeta) = \zeta + h_P \,, \quad h_P \neq 0 \,, \text{ reell.} \tag{1}$$

Wir zeigen nun:

Jedes Element $S \in \Gamma$ hat die Gestalt $S(\zeta) = \zeta + h_S$, h_S reell. (2)

---

[31]) Hat P zunächst nicht diese Gestalt, so gibt es doch eine solche Bewegung V von L, daß $P^* = VPV^{-1}$ die Gestalt (1) erhält (vergleiche II). Statt der Gruppe Γ betrachte man dann die transformierte Gruppe $\Gamma^* = V\Gamma V^{-1}$, welche ebenfalls eigentlich diskontinuierlich ist und weder elliptische noch hyperbolische Bewegungen enthält.

In der Tat: Sei $S \in \Gamma$ und

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Da S nach Voraussetzung weder elliptisch noch hyperbolisch ist, so ist

$$\sigma(S) = | a + d | = 2 . \tag{4}$$

Aus (1) und (3) folgt sofort

$$\sigma(SP^n) = | h_P cn + a + d | . \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist für jedes ganze n $SP^n \in \Gamma$ weder elliptisch noch hyperbolisch, das heißt $\sigma(SP^n) = 2$. Folglich ist wegen (5) für alle ganzen n $| h_P cn + a + d | = 2$. Dies ist aber wegen $h_P \neq 0$ und wegen (4) nur möglich, wenn

$$c = 0 . \tag{6}$$

Wegen $ad - bc = 1$ folgt hieraus $ad = 1$. Daraus und aus (4) ergibt sich

$$a = d = \pm 1 . \tag{7}$$

Aus (3), (6), (7) folgt jetzt, daß S wirklich die Gestalt (2) besitzt. q. e. d.

Aus (2) und Satz 8′ folgt nun aber, daß die eigentlich diskontinuierliche Gruppe Γ zyklisch ist. Damit ist Satz 9 bewiesen.

§ 3. Allgemeines über Riemannsche Flächen und analytische Abbildungen

1. *Analytische Abbildungen Riemannscher Flächen*

I. Unter einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ verstehen wir im folgenden stets eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, welcher durch ein System ortsuniformisierender Parameter eine analytische Struktur aufgeprägt ist [32].

II. Es seien $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ zwei Riemannsche Flächen und $A(p)$ eine stetige Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$. p_0 sei ein Punkt von $\mathfrak{R}_1$, $z = t(p)$ sei eine zu p_0 gehörige Ortsuniformisierende und $w = \tau(q)$ eine zu $q_0 = A(p_0) \in \mathfrak{R}_2$ gehörige Ortsuniformisierende [33]. Dann ist $w = a(z) = \tau(A(t^{-1}(z)))$ eine in einer gewissen Umgebung von $z = 0$ eindeutige komplexe Funk-

[32]) Vergleiche [17], pag. 36.

[33]) $z = t(p)$ respektive $w = \tau(q)$ bildet eine gewisse Umgebung von $p_0 \in \mathfrak{R}_1$ respektive $q_0 \in \mathfrak{R}_2$ auf eine gewisse Umgebung des Nullpunktes der komplexen z- respektive w-Ebene topologisch ab.

tion. Falls nun diese Funktion $a(z)$ in einer Umgebung von $z = 0$ regulär analytisch ist, so heißt die Abbildung $A(p)$ analytisch im Punkte p_0. — Eine stetige Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ heißt analytisch, wenn sie in jedem Punkte $p \in \mathfrak{R}_1$ analytisch ist.

III. Ist A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$, B eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}_2$ in $\mathfrak{R}_3$, so ist $BA(p) = B(A(p))$ eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_3$.

IV. Eine *analytische und topologische* Abbildung einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ *auf* sich selbst nennen wir einen analytischen *Automorphismus* von $\mathfrak{R}$.

2. *Universelle Überlagerungsflächen*

I. Unter einer universellen Überlagerungsfläche einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ verstehen wir ein Paar $(\mathfrak{R}', \pi)$ bestehend aus einer einfach zusammenhängenden[34]) Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}'$ und einer analytischen Abbildung π von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}$, welche folgende Bedingung erfüllt: Ist $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$ ein beliebiges einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\mathfrak{R}$, so bildet π jede Komponente der offenen Menge $\pi^{-1}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{R}'$ topologisch auf $\mathfrak{G}$ ab. Die Abbildung π nennen wir Projektion, und wir sagen, der Punkt $p \in \mathfrak{R}'$ überlagere den Punkt $\pi(p) \in \mathfrak{R}$. Statt von der universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{R}', \pi)$ von $\mathfrak{R}$ zu sprechen, werden wir auch etwa sagen: Die Fläche $\mathfrak{R}'$ wird vermöge der Projektion π zur universellen Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. — Es gilt

Satz 1. a) Zu jeder Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ gibt es eine universelle Überlagerungsfläche $(\mathfrak{R}', \pi)$.

b) Ist $(\mathfrak{R}', \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$, G eine analytische und topologische Abbildung von $\mathfrak{R}'$ auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}''$ und definiert man

$$\pi_1(p) = \pi(G^{-1}(p)) \ , \qquad p \in \mathfrak{R}'' \ ,$$

so ist auch $(\mathfrak{R}'', \pi_1)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$.

c) Sind $(\mathfrak{R}', \pi_1)$, $(\mathfrak{R}'', \pi_2)$ irgend zwei universelle Überlagerungsflächen von $\mathfrak{R}$, so gibt es eine analytische und topologische Abbildung G von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ derart, daß

$$\pi_2(p) = \pi_1(G^{-1}(p)) \quad \text{für alle} \quad p \in \mathfrak{R}'' \ .$$

---

[34]) $\mathfrak{R}'$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jeder geschlossene Weg auf $\mathfrak{R}'$ nullhomotop ist.

3. *Decktransformationen. Fundamentalgruppe*

Sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche und $(\mathfrak{R}', \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Eine topologische Abbildung S von $\mathfrak{R}'$ auf sich selbst heißt Decktransformation von $(\mathfrak{R}', \pi)$, falls $\pi(S(p)) = \pi(p)$ für alle $p \in \mathfrak{R}'$. Jede Decktransformation von $(\mathfrak{R}', \pi)$ ist offenbar ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}'$. Es gilt der

Satz 2. Ist $p \in \mathfrak{R}'$, $q \in \mathfrak{R}'$ und $\pi(p) = \pi(q)$, so gibt es genau eine Decktransformation von $(\mathfrak{R}', \pi)$, welche den Punkt p in den Punkt q überführt.

Die Gesamtheit aller Decktransformationen einer universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{R}', \pi)$ von $\mathfrak{R}$ ist offensichtlich eine Gruppe; sie heiße die *Fundamentalgruppe* $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ *von* $(\mathfrak{R}', \pi)$. Wie aus dem untenstehenden Satz 4 hervorgehen wird, sind die Fundamentalgruppen zweier universeller Überlagerungsflächen derselben Fläche $\mathfrak{R}$ stets isomorph. Sofern wir nur die gruppentheoretische Struktur im Auge haben, können wir daher kurz von der Fundamentalgruppe Γ der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ sprechen.

Die Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ enthält stets höchstens abzählbar viele Elemente und ist eigentlich diskontinuierlich auf $\mathfrak{R}'$, das heißt die Punktmenge

$$\mathfrak{m}_p = \bigcup_{S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}} S(p)$$

hat für kein $p \in \mathfrak{R}'$ einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{R}'$.

4. *Die Zuordnung* $\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ *der Wegklassen von* $\mathfrak{R}$ *zu den Klassen konjugierter Elemente der Fundamentalgruppe* $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$

I. Wir definieren nun eine Abbildung $\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}(W)$ der Wegklassen W von $\mathfrak{R}$ auf die Klassen $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente der Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$: Sei W eine Wegklasse von $\mathfrak{R}$ und der geschlossene Weg $p(t)$ ein Repräsentant von W. Wir wählen einen solchen Punkt $q_0 \in \mathfrak{R}'$, daß $\pi(q_0) = p(0) = p(1)$. Dann gibt es genau einen Weg $q(t)$ auf $\mathfrak{R}'$ derart, daß $q(0) = q_0$ und $\pi(q(t)) = p(t)$ für $0 \leq t \leq 1$. Dann ist offenbar $\pi(q(0)) = \pi(q(1))$. Nach Satz 2 gibt es daher genau eine Decktransformation $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ derart, daß $q(1) = S(q(0))$. Nun definieren wir

$$\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}(W) = \mathfrak{K}_S ;$$

dabei bedeute $\mathfrak{K}_S$ diejenige Klasse konjugierter Elemente von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$, welche durch das Element S repräsentiert wird. Die so definierte Klasse

$\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}(W)$ konjugierter Elemente ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $p(t)$ von W und unabhängig von der Wahl des den Punkt $p(0)$ überlagernden Punktes $q_0 \in \mathfrak{R}'$. Es gilt ferner

Satz 3. Die Abbildung $\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}(W)$ ist eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung der Gesamtheit aller Wegklassen von $\mathfrak{R}$ auf die Gesamtheit aller Klassen konjugierter Elemente von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$.

Die inverse Abbildung $\Phi^{-1}_{(\mathfrak{R}', \pi)}$, welche die Klassen $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente auf die Wegklassen W abbildet, kann nun offenbar folgendermaßen beschrieben werden: Sei $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ ein beliebiger Repräsentant der Klasse $\mathfrak{K}$. Sei ferner q_0 ein beliebiger Punkt auf $\mathfrak{R}'$ und $q(t)$ ein Weg auf $\mathfrak{R}'$, welcher q_0 mit $S(q_0)$ verbindet. Dann ist $p(t) = \pi(q(t))$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{R}$, welcher gerade die Wegklasse $\Phi^{-1}_{(\mathfrak{R}', \pi)}(\mathfrak{K})$ repräsentiert.

II. Ist W_0 insbesondere die Nullklasse von $\mathfrak{R}$, so besteht die Klasse $\Phi(W_0)$ offenbar nur aus der Identität $I \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$.

III. Ist W eine Wegklasse und $p(t)$ ein Repräsentant von W, so bezeichnen wir die Bildklasse $\Phi(W)$ auch mit $\Phi[p(t)]$. Auf Grund dieser Verabredung gilt dann: Es ist $\Phi[p_1(t)] = \Phi[p_2(t)]$ dann und nur dann, wenn die geschlossenen Wege $p_1(t)$ und $p_2(t)$ auf $\mathfrak{R}$ homotop sind.

IV. Ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse konjugierter Elemente und S ein Repräsentant von $\mathfrak{K}$, so bezeichnen wir die Wegklasse $\Phi^{-1}(\mathfrak{K})$ auch mit $\Phi^{-1}[S]$. Auf Grund dieser Konvention gilt dann: Es ist $\Phi^{-1}[S_1] = \Phi^{-1}[S_2]$ dann und nur dann, wenn die Elemente $S_1, S_2 \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ konjugiert sind.

V. Ist $p(t)$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{R}$ und $S \in \Phi[p(t)]$, so ist $S^{-1} \in \Phi[p^{-1}(t)]$.

VI. Man beweist leicht

Satz 4. Es seien $(\mathfrak{R}', \pi_1)$ und $(\mathfrak{R}'', \pi_2)$ universelle Überlagerungsflächen der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ und es sei G die nach Satz 1c existierende analytische und topologische Abbildung von $\mathfrak{R}'$ auf $\mathfrak{R}''$ für welche gilt: $\pi_2(p) = \pi_1(G^{-1}(p))$ für alle $p \in \mathfrak{R}''$. Dann ist die Zuordnung

$$S \to GSG^{-1}\,, \qquad S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi_1)}$$

ein Isomorphismus der Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi_1)}$ auf die Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{R}'', \pi_2)}$ und es gilt

$$\Phi^{-1}_{(\mathfrak{R}', \pi_1)}[S] = \Phi^{-1}_{(\mathfrak{R}'', \pi_2)}[GSG^{-1}] \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi_1)}\,.$$

VII. Ein nicht nullhomotoper geschlossener Weg $p(t)$ auf $\mathfrak{R}$ heiße Kommutatorweg, falls $\Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}[p(t)]$ in der Kommutatoruntergruppe von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ enthalten ist. Aus Satz 4 folgt sofort, daß diese Definition unabhängig ist von der speziellen Wahl der universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{R}', \pi)$ von $\mathfrak{R}$.

5. *Induzierte Abbildungen und zugehörige Homomorphismen der Fundamentalgruppen*

I. Es sei A eine analytische Abbildung der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_1$ in die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_2$. $(\mathfrak{R}_1', \pi_1)$ bzw. $(\mathfrak{R}_2', \pi_2)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_2$.

Definition 1. Eine analytische Abbildung a von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$ heißt induziert durch die Abbildung A, wenn

$$\pi_2(a(p)) = A(\pi_1(p)) \qquad \text{für alle} \qquad p \in \mathfrak{R}_1' .$$

Es gilt der

Satz 5. a) Sei $p_0 \in \mathfrak{R}_1'$, $q_0 \in \mathfrak{R}_2'$ und $\pi_2(q_0) = A(\pi_1(p_0))$. Dann gibt es genau eine durch A induzierte Abbildung a von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$, welche p_0 in q_0 überführt.

b) Ist a eine durch A induzierte Abbildung von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$ und ist $T \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$, so ist auch Ta eine durch A induzierte Abbildung.

c) Sind a' und a'' zwei durch dieselbe Abbildung A induzierte Abbildungen von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$, so gibt es genau eine Decktransformation $T \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$ derart, daß $a'' = Ta'$.

II. Sei a eine durch A induzierte Abbildung von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$ und $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$. Dann ist offenbar $a(S(p))$ ebenfalls eine durch A induzierte Abbildung; daher gibt es nach Satz 5c zu jedem $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$ eine eindeutig bestimmte Decktransformation $T = \alpha(S) \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$ derart, daß $a(S(p)) = T(a(p))$ für alle $p \in \mathfrak{R}_1'$. Es gilt

Satz 6. a) Ist a irgendeine durch A induzierte Abbildung von $\mathfrak{R}_1'$ in $\mathfrak{R}_2'$, so gibt es zu jeder Decktransformation $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$ eine eindeutig bestimmte Decktransformation $T = \alpha(S) \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$ derart, daß $a(S(p)) = T(a(p))$ für alle $p \in \mathfrak{R}_1'$.

b) Die dadurch erklärte eindeutige Abbildung α von $\Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$ in $\Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$ ist ein Homomorphismus.

c) Sind a und a' zwei durch dieselbe Abbildung A induzierte Abbildungen, so sind die gemäß a) zu a respektive a' gehörigen Homomorphismen α respektive α' ähnlich, das heißt es gibt eine solche Decktransformation $R \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$, daß $\alpha'(S) = R \cdot \alpha(S) \cdot R^{-1}$ für alle $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$. Zu jeder analytischen Abbildung A von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ gehört somit eine Klasse $\mathfrak{H}_A$ ähnlicher Homomorphismen von $\Gamma_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}$ in $\Gamma_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}$.

d) Ist $p(t)$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{R}_1$ und $q(t) = A(p(t))$ sein Bildweg auf $\mathfrak{R}_2$, so gilt: Ist $S \in \Phi_{(\mathfrak{R}_1', \pi_1)}[p(t)]$ und $\alpha \in \mathfrak{H}_A$, so ist $\alpha(S) \in \Phi_{(\mathfrak{R}_2', \pi_2)}[q(t)]$.

III. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche, $(\mathfrak{R}', \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Dann folgt aus Satz 6 sofort der

Satz 6'. a) Ist a irgendeine durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{R}'$ in sich, so gibt es zu jeder Decktransformation $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ eine eindeutig bestimmte Decktransformation $T = \alpha(S) \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ derart, daß $a(S(p)) = T(a(p))$ für alle $p \in \mathfrak{R}'$.

b) Die dadurch erklärte eindeutige Abbildung α von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$ in sich ist ein Endomorphismus von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$.

c) Sind a und a' zwei durch dieselbe Abbildung A induzierte Abbildungen, so sind die gemäß a) zu a respektive a' gehörigen Endomorphismen α respektive α' ähnlich, das heißt es gibt eine solche Decktransformation $R \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$, daß $\alpha'(S) = R \cdot \alpha(S) \cdot R^{-1}$ für alle $S \in \Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$. Zu jeder analytischen Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich gehört somit eine Klasse $\mathfrak{E}_A$ ähnlicher Endomorphismen von $\Gamma_{(\mathfrak{R}', \pi)}$.

d) Ist $p(t)$ ein geschlossener Weg auf $\mathfrak{R}$ und $q(t) = A(p(t))$ sein Bildweg auf $\mathfrak{R}$, so gilt: Ist $S \in \Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}[p(t)]$ und $\alpha \in \mathfrak{E}_A$, so ist $\alpha(S) \in \Phi_{(\mathfrak{R}', \pi)}[q(t)]$.

Man beweist ferner sehr leicht den

Satz 7. Es seien A und B zwei analytische Abbildungen von $\mathfrak{R}$ in sich und es sei $\alpha \in \mathfrak{E}_A$, $\beta \in \mathfrak{E}_B$. Dann ist $\alpha\beta \in \mathfrak{E}_{AB}$.

6. *Die Typenklassifikation der Riemannschen Flächen*

I. Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche läßt sich bekanntlich analytisch und topologisch abbilden, entweder

(a) auf die Riemannsche Kugel $\mathfrak{K}$, oder
(b) auf die komplexe Ebene $\mathfrak{E}$: $|z| < \infty$, oder
(c) auf die Halbebene $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{J}(\zeta) > 0$.

Keine dieser drei Normalflächen kann analytisch und topologisch auf eine der beiden andern abgebildet werden. Dieser Sachverhalt gibt Anlaß zu folgender Klassifikation der einfachzusammenhängenden Flächen: Eine einfachzusammenhängende Riemannsche Fläche heiße von elliptischem, parabolischem oder hyperbolischem Typus, je nachdem ob Fall (a), Fall (b) oder Fall (c) eintritt.

II. Wegen Satz 1c gilt offenbar: Sind $(\mathfrak{R}', \pi_1)$, $(\mathfrak{R}'', \pi_2)$ zwei universelle Überlagerungsflächen derselben Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, so haben die einfachzusammenhängenden Flächen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ den gleichen Typus. Daher wird folgende Definition sinnvoll:

Definition 2. Ist $\mathfrak{R}$ eine beliebige Riemannsche Fläche und $(\mathfrak{R}' \pi)$ irgendeine universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$, so verstehen wir unter dem Typus von $\mathfrak{R}$ den Typus der einfachzusammenhängenden Fläche $\mathfrak{R}'$.

Durch diese Definition wird die Gesamtheit aller Riemannschen Flächen in eindeutiger Weise in drei Klassen eingeteilt. — Aus dem bisher Gesagten und aus Satz 1 folgt nun:

(a) Ist $\mathfrak{R}$ von elliptischem Typus, so wird die Riemannsche Kugel $\mathfrak{K}$ vermöge einer geeigneten Projektion zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{K}, \pi)$ von $\mathfrak{R}$.

(b) Ist $\mathfrak{R}$ von parabolischem Typus, so wird die komplexe Ebene $\mathfrak{E}$: $|z| < \infty$ vermöge einer geeigneten Projektion $p = \pi(z)$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{E}, \pi)$ von $\mathfrak{R}$.

(c) Ist $\mathfrak{R}$ von hyperbolischem Typus, so wird die Halbebene $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{J}(\zeta) > 0$ vermöge einer geeigneten Projektion $p = \pi(\zeta)$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \pi)$ von $\mathfrak{R}$.

III. Bekanntlich gilt[35]:

a) Eine Riemannsche Fläche von elliptischem Typus läßt sich stets analytisch und topologisch auf die Riemannsche Kugel abbilden; ihre Fundamentalgruppe ist daher von der Ordnung 1.

b) Eine Fläche von parabolischem Typus ist entweder eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 1 oder sie läßt sich analytisch und topologisch auf die ein- oder zweifach punktierte Riemannsche Kugel abbilden; ihre Fundamentalgruppe ist daher gewiß abelsch.

IV. Aus III folgt nun offenbar: Eine Riemannsche Fläche mit nichtabelscher Fundamentalgruppe ist stets von hyperbolischem Typus.

---

[35]) Vergleiche [17], pag. 150—152.

V. In einigen unserer Sätze werden die hyperbolischen Flächen mit abelscher Fundamentalgruppe eine Ausnahmerolle spielen, indem diese Sätze für solche Flächen entweder falsch oder inhaltslos werden. Wie man sich leicht überlegt, gilt: Eine hyperbolische Riemannsche Fläche mit abelscher Fundamentalgruppe läßt sich stets analytisch und topologisch abbilden, entweder

(a) auf den Einheitskreis $|z|<1$, oder
(b) auf den punktierten Einheitskreis $0<|z|<1$, oder
(c) auf einen Kreisring $0<r<|z|<1$.

In allen diesen Fällen ist die Fundamentalgruppe sogar zyklisch von der Ordnung 1 (Fall (a)) oder ∞ (Fälle (b), (c)).

VI. Mit Hilfe des elementaren Liouvilleschen Satzes beweist man leicht den

Satz 8. Ist $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus, so ist auch jedes Teilgebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$ eine Fläche von hyperbolischem Typus.

Daraus und aus der Aufzählung der nichthyperbolischen Flächen (vgl. III) ergibt sich leicht der

Satz 9. Ist $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von beliebigem Typus und sind a, b, c drei voneinander verschiedene Punkte von $\mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus.

§ 4. Die Moduln der Wegklassen einer hyperbolischen Riemannschen Fläche. Flächen mit diskretem Modulspektrum

I. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus; $(\mathfrak{L}, \pi)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Jede Decktransformation S von $(\mathfrak{L}, \pi)$ ist ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{L}$, also nach Satz 2, § 2 eine nichteuklidische Bewegung von $\mathfrak{L}$. Ist S von der Identität verschieden, so besitzt S offenbar keinen Fixpunkt in $\mathfrak{L}$, das heißt S ist entweder eine hyperbolische oder eine parabolische Bewegung von $\mathfrak{L}$. Die Fundamentalgruppe Γ_π [36]) der universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \pi)$ von $\mathfrak{R}$ ist also eine (eigentlich diskontinuierliche) Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$, welche keine elliptischen Elemente enthält.

---

[36]) Wir schreiben von nun an stets Γ_π statt $\Gamma_{(\mathfrak{L},\pi)}$ und Φ_π statt $\Phi_{(\mathfrak{L},\pi)}$.

II. Durch die Definition 2, § 2 wird jedem Element S der Fundamentalgruppe Γ_π von $(\mathfrak{L}, \pi)$ die nichtnegative Zahl $M[S]$ zugeordnet. Wegen Satz 3, § 2 ist $M[S]$ eine Klassenfunktion auf Γ_π. Daher wird durch die

Definition 1. $\qquad M[W] = M[S] \; , \qquad S \in \Phi_\pi(W)$

jeder Wegklasse W von $\mathfrak{R}$ in eindeutiger Weise eine nicht negative Zahl $M[W]$ zugeordnet, die wir den Modul der Wegklasse W nennen. Der so definierte Modul der Wegklasse W ist unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π, vermöge welcher $\mathfrak{L}$ zur universellen Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ wird. Dies folgt sofort aus Satz 4, § 3, Satz 2 und Satz 3, § 2.

III. Ist $M[W] > 0$, so nennen wir W eine hyperbolische Wegklasse und jeden ihrer Repräsentanten einen hyperbolischen Weg. $\Phi_\pi(W)$ besteht dann aus hyperbolischen Bewegungen von $\mathfrak{L}$[37]).

IV. Ist $M[W] = 0$ und W nicht die Nullklasse, so nennen wir W eine parabolische Wegklasse und jeden ihrer Repräsentanten einen parabolischen Weg. $\Phi_\pi(W)$ besteht dann aus parabolischen Bewegungen von $\mathfrak{L}$.

V. Man beweist sehr leicht, daß der Modul einer Wegklasse W von $\mathfrak{R}$ invariant ist gegenüber analytischen und topologischen Abbildungen von $\mathfrak{R}$, das heißt es gilt

Satz 1. Ist G eine analytische und topologische Abbildung der hyperbolischen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ auf die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$, so gilt für alle Wegklassen W von $\mathfrak{R}$: $M[W] = M[G(W)]$.

VI.

Definition 2. Eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ von hyperbolischem Typus heiße Fläche mit *diskretem Modulspektrum*, wenn es zu jeder Zahl $m > 0$ auf $\mathfrak{R}$ höchstens endlich viele Wegklassen W mit $0 < M[W] < m$ gibt.

Aus dieser Definition folgt sofort:

Satz 2. Es sei $\mathfrak{R}$ eine hyperbolische Riemannsche Fläche und $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Dann gilt:

a) $\mathfrak{R}$ besitzt dann und nur dann diskretes Modulspektrum, wenn für jedes $m > 0$ die Menge

---

[37]) Vergleiche Satz 4, § 2.

$$\mathfrak{m}_m = \{S \mid S \in \Gamma_\pi, \quad 0 < M[S] < m\}$$

in höchstens endlich viele Klassen konjugierter Elemente zerfällt.

b) Besitzt die Fläche $\mathfrak{R}$ diskretes Modulspektrum und ist Γ^* eine nichtleere, nur hyperbolische Elemente enthaltende Teilmenge von Γ_π, so gibt es ein Element $S_0 \in \Gamma^*$ derart, daß $M[S] \geq M[S_0] > 0$ für alle $S \in \Gamma^*$.

Aus Satz 1 folgt schließlich noch der

Satz 3. Die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ sei analytisch und topologisch abgebildet auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$ mit diskretem Modulspektrum. Dann ist auch $\mathfrak{R}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum.

§ 5. Die hyperbolische Metrik und das Schwarzsche Lemma

I. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus und $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Wir führen nun auf $\mathfrak{R}$ ein Längenmaß $\mu_{\mathfrak{R}}$ ein:

Definition 1. Sei $p(t)$ ein (stetig differenzierbarer) Weg auf $\mathfrak{R}$ und $\zeta(t) \in \mathfrak{L}$ ein Überlagerungsweg von $p(t)$, das heißt $\pi(\zeta(t)) = p(t)$. Dann definieren wir $\mu_{\mathfrak{R}}[p(t)] = \mu[\zeta(t)]$. Dabei bezeichnet $\mu[\zeta(t)]$ die hyperbolische Länge des Weges $\zeta(t)$ in der Halbebene $\mathfrak{L}$ [38]). Die so definierte $\mu_{\mathfrak{R}}$-Länge des Weges $p(t)$ auf $\mathfrak{R}$ ist unabhängig von der speziellen Wahl des Überlagerungsweges $\zeta(t)$ von $p(t)$, denn zwei verschiedene Überlagerungswege von $p(t)$ gehen durch eine Decktransformation von $(\mathfrak{L}, \pi)$, also durch eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ auseinander hervor und haben daher nach Satz 1, § 2 dieselbe hyperbolische Länge. $\mu_{\mathfrak{R}}[p(t)]$ ist aber auch unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π, vermöge welcher $\mathfrak{L}$ zur universellen Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ wird. Dies folgt aus Satz 1c, § 3, Satz 1 und Satz 2, § 2.

II. Man beweist auf Grund der Definition 1 sehr leicht den

Satz 1. Es sei $\mathfrak{k}$ die punktierte Kreisscheibe $0 < |z| < 1$ und $p_\varrho(t) = \varrho\, e^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$. $(0 < \varrho < 1)$. Dann ist

$$\mu_{\mathfrak{k}}[p_\varrho(t)] = 2\pi / \log(1/\varrho) \; .$$

III. Mit Hilfe des Längenmaßes $\mu_{\mathfrak{R}}[p(t)]$ definieren wir nun die Distanz $\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2]$ zweier Punkte $p_1, p_2 \in \mathfrak{R}$.

---

[38]) Vergleiche § 2, I.

Definition 2. Es sei $W(p_1, p_2)$ die Menge aller (stetig differenzierbaren Wege) $p(t)$ auf $\mathfrak{R}$, für welche $p(0) = p_1$, $p(1) = p_2$ ist. Dann setzen wir $\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2] = \inf\limits_{p(t) \in W(p_1, p_2)} \mu_{\mathfrak{R}}[p(t)]$.

Wie man leicht sieht, gilt

Satz 2. Ist $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$, $\pi(\zeta_1) = p_1$, $\pi(\zeta_2) = p_2$, so ist

$$\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2] = \inf_{S \in \Gamma_\pi} \mu[\zeta_1, S(\zeta_2)]$$

und es gibt (wegen der eigentlichen Diskontinuität von Γ_π) stets ein solches Element $S^* \in \Gamma_\pi$, daß $\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2] = \mu[\zeta_1, S^*(\zeta_2)]$. Mit Hilfe von Satz 2 überzeugt man sich leicht, daß $\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2]$ alle Axiome erfüllt, die man üblicherweise von einer Distanzfunktion fordert. (Insbesondere auch die Dreiecksungleichung!) Aus Satz 2 und aus der eigentlichen Diskontinuität von Γ_π folgt ferner:

Satz 3. Die durch die Distanzfunktion $\mu_{\mathfrak{R}}[p_1, p_2]$ auf $\mathfrak{R}$ induzierte Topologie ist äquivalent mit derjenigen Topologie, welche der Riemannschen Fläche a priori zukommt.

IV.

Definition 3. Eine Punktmenge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ heiße metrisch beschränkt, wenn es einen Punkt $p_0 \in \mathfrak{R}$ und eine positive Zahl $m < \infty$ derart gibt, daß $\mu_{\mathfrak{R}}[p, p_0] < m$ für alle $p \in \mathfrak{M}$.

Man überlegt sich leicht, daß jede hyperbolische Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ bezüglich der Metrik $\mu_{\mathfrak{R}}$ vollständig ist, das heißt es gilt

Satz 4. Jede metrisch beschränkte unendliche Punktfolge $\{p_n\} \in \mathfrak{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{R}$.

Aus Satz 3 und Satz 4 folgt sofort

Satz 5. Eine unendliche Punktfolge $\{p_n\} \in \mathfrak{R}$ konvergiert dann und nur dann gegen einen Punkt $p \in \mathfrak{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ so gibt, daß $\mu_{\mathfrak{R}}[p_n, p_m] < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$.

V. Das Schwarzsche Lemma kann in der invarianten Fassung von Pick[39]) folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz 6. Es sei $a(\zeta)$ eine analytische Abbildung der Halbebene $\mathfrak{L}$ in sich. Dann gilt:

---

[39]) Vergleiche [13], pag. 1—6.

a) Ist $\zeta(t)$ ein (stetig differenzierbarer) Weg in $\mathfrak{L}$ und ist $\zeta^*(t) = a(\zeta(t))$ sein Bildweg, so ist $\mu[\zeta^*(t)] \leq \mu[\zeta(t)]$.

b) Für je zwei Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$ ist $\mu[a(\zeta_1), a(\zeta_2)] \leq \mu[\zeta_1, \zeta_2]$.

c) Gibt es zwei Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$ derart, daß $\mu[a(\zeta_1), a(\zeta_2)] = \mu[\zeta_1, \zeta_2] > 0$, so ist $a(\zeta)$ eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

VI. Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ hyperbolische Riemannsche Flächen; $(\mathfrak{L}, \pi_1)$ respektive $(\mathfrak{L}, \pi_2)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}_1$ respektive $\mathfrak{R}_2$. Es sei $A(p)$ eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ und $a(\zeta)$ eine durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich (vgl. Definition 1, § 3, Nr. 5!). Wendet man nun auf $a(\zeta)$ den Satz 6a an und beachtet man die Definitionen 1 und 2, so folgt sofort:

Satz 7. Es sei $A(p)$ eine analytische Abbildung der hyperbolischen Fläche $\mathfrak{R}_1$ in die hyperbolische Fläche $\mathfrak{R}_2$. Dann gilt:

a) Ist $p(t)$ ein (stetig differenzierbarer) Weg auf $\mathfrak{R}_1$ und $q(t) = A(p(t))$ sein Bildweg auf $\mathfrak{R}_2$, so ist

$$\mu_{\mathfrak{R}_2}[q(t)] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[p(t)] \, .$$

b) Für zwei beliebige Punkte $p_1, p_2 \in \mathfrak{R}_1$ gilt stets

$$\mu_{\mathfrak{R}_2}[A(p_1), A(p_2)] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[p_1, p_2] \, .$$

§ 6. Verallgemeinerung des Großen Picardschen Satzes

Satz 1. Es sei $A(z)$ eine analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ von hyperbolischem Typus. Dann liegt genau einer der beiden folgenden Tatbestände vor:

(a) Es gibt einen Punkt $a_0 \in \mathfrak{R}$ derart, daß die Abbildung

$$A^*(z) = A(z) \quad \text{für} \quad 0 < |z| < 1 \, , \qquad A^*(0) = a_0$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z| < 1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$ ist.

(b) Für jede unendliche Punktfolge

$$\{z_n\}: \quad 0 < |z_n| < 1 \, , \qquad \lim_{n \to \infty} z_n = 0$$

ist die Punktfolge $\{A(z_n)\}$ auf $\mathfrak{R}$ divergent [40]).

---

[40]) Eine Punktfolge $\{p_n\} \subset \mathfrak{R}$ heißt divergent auf $\mathfrak{R}$, wenn sie auf $\mathfrak{R}$ keinen Häufungspunkt besitzt.

Beweis. 1. Offenbar können nicht beide Tatbestände zugleich erfüllt sein. Liegt der Tatbestand (b) nicht vor, so gibt es offenbar eine Punktfolge

$$\{z_n\}: \quad 0 < |z_n| < 1 \ , \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \tag{1}$$

derart, daß die Punktfolge $\{A(z_n)\}$ gegen einen Punkt $a_0 \in \mathfrak{R}$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} A(z_n) = a_0 \in \mathfrak{R} \ . \tag{2}$$

Wir haben zu zeigen, daß dann der Tatbestand (a) vorliegt.

2. Wir zeigen zunächst:

(I) Für jedes feste ϱ, $(0 < \varrho < 1)$, ist der geschlossene Weg $A(\varrho\, e^{2\pi i t})$, $0 \leq t \leq 1$, nullhomotop auf $\mathfrak{R}$.

Beweis. Wir betrachten die geschlossenen Wege

$$q_n(t) = A(z_n\, e^{2\pi i t}) \ , \qquad 0 \leq t \leq 1 \ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

auf $\mathfrak{R}$. Dann gilt offenbar für jedes $n \geq 1$

$$q_n(0) = A(z_n) \tag{4}$$

$$q_n(t) \sim A(\varrho\, e^{2\pi i t}) \ , \qquad (0 < \varrho < 1) \ . \tag{5}$$

Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{\mathfrak{R}}[q_n(t)] = 0 \ . \tag{6}$$

In der Tat: Aus (3), Satz 1 und Satz 7a, § 5 folgt

$$\mu_{\mathfrak{R}}[q_n(t)] \leq \mu_{\mathfrak{k}}[z_n\, e^{2\pi i t}] = 2\pi/\log(1/|z_n|) \ .$$

Hieraus und aus (1) folgt aber die Behauptung (6). q. e. d.

Es sei nun $\mathfrak{V}_{a_0} \subset \mathfrak{R}$ eine einfachzusammenhängende Umgebung des Punktes $a_0 \in \mathfrak{R}$. Dann folgt offenbar aus (2), (4) und (6): Es gibt einen Index n_0 derart, daß der geschlossene Weg $q_{n_0}(t)$ in der einfachzusammenhängenden Umgebung $\mathfrak{V}_{a_0}$ liegt. Dieser Weg $q_{n_0}(t)$ ist daher nullhomotop auf $\mathfrak{R}$. Wegen (5) ist darum auch der Weg $A(\varrho\, e^{2\pi i t})$ nullhomotop auf $\mathfrak{R}$. q. e. d.

3. Die Halbebene $\mathfrak{L}$ wird offenbar vermöge der Projektion

$$z = \pi_1(\zeta) = e^{i\zeta} \tag{7}$$

zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \pi_1)$ von $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$. Da $\mathfrak{R}$ von hyperbolischem Typus ist, so wird der Einheitskreis $\mathfrak{E}$: $|w| < 1$

vermöge einer geeigneten Projektion $p = \pi_2(w)$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{E}, \pi_2)$ von $\mathfrak{R}$. Die analytische Abbildung A von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{R}$ induziert dann eine analytische Abbildung $w = a(\zeta)$ von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{E}$. Sei $\alpha \in \mathfrak{H}_A$ der zugehörige Homomorphismus der Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{L}, \pi_1)}$ in die Fundamentalgruppe $\Gamma_{(\mathfrak{E}, \pi_2)}$. $\Gamma_{(\mathfrak{L}, \pi_1)}$ ist offenbar die von der Decktransformation

$$T(\zeta) = \zeta + 2\pi \tag{8}$$

erzeugte zyklische Gruppe und es ist $T \in \Phi_{(\mathfrak{L}, \pi_1)}[\varrho\, e^{2\pi i t}]$. Daher ist nach Satz 6d, § 3 $\alpha(T) \in \Phi_{(\mathfrak{E}, \pi_2)}[A(\varrho\, e^{2\pi i t})]$. Daraus und aus (I) folgt aber, daß $\alpha(T)$ die Identität ist. Folglich gilt nach Satz 6a, § 3: $a(T(\zeta)) = a(\zeta)$, also wegen (8) $a(\zeta + 2\pi) = a(\zeta)$. Daher ist

$$\bar{a}(z) = a(-i \log z) \tag{9}$$

eine (eindeutige!) analytische Abbildung von $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in den Einheitskreis $\mathfrak{E}$: $|w| < 1$. Daraus schließen wir mit Hilfe des elementaren Satzes von Casorati-Weierstraß: Es gibt einen Punkt $w_0 \in \mathfrak{E}$ derart, daß die Abbildung

$$a^*(z) = \bar{a}(z) \quad \text{für} \quad 0 < |z| < 1 \,, \qquad a^*(0) = w_0 \tag{10}$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z| < 1$ in die Kreisscheibe $\mathfrak{E}$ ist. Setzen wir jetzt

$$A^*(z) = \pi_2(a^*(z)) \,, \tag{11}$$

so gilt daher:

(II) $A^*(z)$ ist eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z| < 1$ in die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$.

Wegen (11), (10), (9) und (7) gilt aber für $0 < |z| < 1$:

$$A^*(z) = \pi_2(a^*(z)) = \pi_2(a(-i \log z)) = A(\pi_1(-i \log z)) = A(z) \,. \tag{12}$$

Aus (II) und (12) folgt nun offenbar, daß der Tatbestand (a) erfüllt ist. Damit ist unser Satz 1 bewiesen.

Satz 2. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$. Dann gilt: Ist A eine analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$, so gibt es einen Punkt $a_0 \in \mathfrak{R}$ derart, daß die Abbildung

$$A^*(z) = A(z) \quad \text{für} \quad 0 < |z| < 1 \,, \qquad A^*(0) = a_0$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z|<1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$ ist.

Beweis. Da $\mathfrak{G}$ von hyperbolischem Typus ist, so liegt nach Satz 1 genau einer der beiden folgenden Tatbestände vor:

(I) Es gibt einen Punkt $a_0 \in \mathfrak{G}$ derart, daß die Abbildung

$$A^*(z) = A(z) \quad \text{für} \quad 0<|z|<1 , \qquad A^*(0) = a_0$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z|<1$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$ ist.

(II) Für jede Punktfolge

$$\{z_n\}: \quad 0<|z_n|<1 , \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

ist die Punktfolge $\{A(z_n)\}$ in $\mathfrak{G}$ divergent.

Liegt der Tatbestand (I) vor, so haben wir offenbar nichts mehr zu beweisen. Es sei also der Tatbestand (II) erfüllt. Wir wählen drei voneinander verschiedene Punkte

$$a, b, c \in \mathfrak{G} . \tag{1}$$

Dann folgert man leicht aus (II): Es gibt eine punktierte Kreisscheibe $\mathfrak{k}'$: $0<|z|<r<1$ derart, daß für alle $z \in \mathfrak{k}'$ $A(z) \neq a, b, c$ ist; es gilt also

(III) $A(z)$ ist eine analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}'$: $0<|z|<r<1$ in die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$.

Wir zeigen ferner:

(IV) Ist $0<|z_n|<r$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, so besitzt die Punktfolge $\{A(z_n)\}$ mindestens einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$.

In der Tat: Es ist $A(z_n) \in \mathfrak{G} \subset \overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ für alle $n \geq 1$. Da aber nach Voraussetzung $\overline{\mathfrak{G}}$ kompakt ist, so folgt daraus, daß die unendliche Punktfolge $\{A(z_n)\}$ mindestens einen Häufungspunkt $h \in \overline{\mathfrak{G}}$ besitzt. Wegen (II) und (1) kann aber h mit keinem der drei Punkte a, b, c zusammenfallen. Daher ist $h \in \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$. Nach Satz 9, § 3 ist $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus. Daher folgt jetzt aus (III), (IV) nach Satz 1: Es gibt einen Punkt $a_0 \in \mathfrak{R}'$ derart, daß die Abbildung

$$A^*(z) = A(z) \quad \text{für} \quad 0<|z|<r , \qquad A^*(0) = a_0$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z|<r$ in die Fläche $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$ ist. — Damit ist aber offenbar unser Satz 2 vollständig bewiesen.

§ 7. Hilfssätze über stetige Konvergenz von Abbildungsfolgen

In diesem Abschnitt werden einige leicht zu beweisende Hilfssätze über stetige Konvergenz zusammengestellt.

I. Wir erinnern zunächst an den von Carathéodory[41]) eingeführten Begriff der stetigen Konvergenz: Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ etwa reguläre Hausdorffsche Räume, in denen das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist[42]). Eine Folge $\{A_n(p)\}$ von Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ heißt stetig konvergent in $\mathfrak{R}_1$, falls für jede in $\mathfrak{R}_1$ konvergente Punktfolge $\{p_n\}$ die Punktfolge $\{A_n(p_n)\}$ in $\mathfrak{R}_2$ konvergiert. Aus dieser Definition folgt sofort: Ist die Folge $\{A_n(p)\}$ stetig konvergent, so existiert insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} A_n(p) = A(p) \in \mathfrak{R}_2 \quad \text{für alle} \quad p \in \mathfrak{R}_1$$

und es gilt für jede gegen $p \in \mathfrak{R}_1$ konvergente Punktfolge $\{p_n\} \subset \mathfrak{R}_1$

$$\lim_{n\to\infty} A_n(p_n) = A(p) \ .$$

Wir sagen dann auch: Die Folge $\{A_n(p)\}$ konvergiert in $\mathfrak{R}_1$ stetig *gegen* die Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$. — Man überlegt sich sofort, daß auch jede Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ von $\{A_n(p)\}$ in $\mathfrak{R}_1$ stetig gegen $A(p)$ konvergiert. Schließlich beweist man leicht den

Satz 1. Die Folge $\{A_n(p)\}$ von Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ konvergiere in $\mathfrak{R}_1$ stetig *gegen* die Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{B}_q \subset \mathfrak{R}_2$ des Punktes $q = A(p) \in \mathfrak{R}_2$ eine solche Umgebung $\mathfrak{B}_p \subset \mathfrak{R}_1$ des Punktes $p \in \mathfrak{R}_1$ und einen solchen Index n_0, daß $A_n(\mathfrak{B}_p) \subset \mathfrak{B}_q$ für alle $n > n_0$.

II. Mit Hilfe des in I Gesagten beweist man leicht

Satz 2. Die Folge $\{p_k(t)\}$ von geschlossenen Wegen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ konvergiere im Intervall $0 \leq t \leq 1$ stetig gegen den Punkt $p(t) \equiv p_0 \in \mathfrak{R}$. Dann gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{B}_{p_0} \subset \mathfrak{R}$ von p_0 einen solchen Index k_0, daß $p_k(t) \in \mathfrak{B}_{p_0}$ für $0 \leq t \leq 1$ und alle $k > k_0$.

Satz 3. Die Folge $\{p_k(t)\}$ von geschlossenen Wegen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{G}$ konvergiere im Intervall $0 \leq t \leq 1$ stetig gegen

---

41) Vergleiche [1], Band 1.

42) Riemannsche Flächen und auch das Intervall $0 \leq t \leq 1$ der reellen Zahlgeraden sind offenbar solche Räume.

den geschlossenen Weg $p(t)$ auf $\mathfrak{G}$. Dann gibt es einen solchen Index k_0, daß für alle $k > k_0$ die Wege $p_k(t)$ und $p(t)$ auf $\mathfrak{G}$ homotop sind.

III. Mit Hilfe von Satz 1 folgert man aus klassischen Tatsachen der Funktionentheorie leicht die beiden folgenden Sätze:

Satz 4. Es sei $\{A_n(p)\}$ eine Folge von analytischen Abbildungen der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}_1$ in die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_2$. Dann gilt: Ist die Folge $\{A_n(p)\}$ auf $\mathfrak{R}_1$ stetig konvergent, so konvergiert sie stetig gegen eine *analytische* Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$.

Satz 5. Es seien $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ Riemannsche Flächen und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet auf $\mathfrak{R}_2$. $\{A_n(p)\}$ sei eine Folge von analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}_2$, welche auf $\mathfrak{R}_1$ stetig gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$ konvergiert. Dann gilt: Ist $A(p)$ nicht konstant, so ist $A(p)$ sogar eine Abbildung von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{G}$.

§ 8. Verallgemeinerung des Montelschen Satzes über Folgen meromorpher Funktionen mit drei Ausnahmewerten

Satz 1. Es seien $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ Riemannsche Flächen von hyperbolischem Typus und $\{A_n(p)\}$ eine Folge von analytischen Abbildungen von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$. Dann liegt genau einer der beiden folgenden Tatbestände vor:

(a) Es gibt eine Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$, welche auf $\mathfrak{R}_1$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$.

(b) Für jede konvergente Punktfolge $\{p_k\}$ auf $\mathfrak{R}_1$ und für jede Teilfolge $\{n_k\}$ der Folge $\{n\}$ der natürlichen Zahlen ist die Punktfolge $\{A_{n_k}(p_k)\}$ auf $\mathfrak{R}_2$ divergent.

Beweis. 1. Offensichtlich können nicht beide Tatbestände gleichzeitig erfüllt sein. Liegt der Tatbestand (b) nicht vor, so gibt es offenbar eine Punktfolge $\{q_k\} \subset \mathfrak{R}_1$ und eine Teilfolge $\{n_k\}$ derart, daß

$$q_k \in \mathfrak{R}_1 \ , \qquad \lim_{k\to\infty} q_k = q \in \mathfrak{R}_1 \ , \qquad \lim_{k\to\infty} A_{n_k}(q_k) = a \in \mathfrak{R}_2 \ . \tag{1}$$

Wir haben zu zeigen, daß dann der Tatbestand (a) vorliegt.

2. Zunächst wählen wir eine Punktfolge $\{r_j\}$, welche auf $\mathfrak{R}_1$ überall dicht liegt. Dann zeigen wir:

(I) Für jeden festen Index j ist die Punktfolge $\{A_{n_k}(r_j)\}$ metrisch beschränkt auf $\mathfrak{R}_2$.

In der Tat: Es ist

$$\mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(r_j), a] \leq \mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(r_j), A_{n_k}(q_k)] + \mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(q_k), a] \ . \tag{2}$$

Aus dem Schwarzschen Lemma (Satz 7b, § 5) und aus der Dreiecksungleichung folgt aber:

$$\mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(r_j), A_{n_k}(q_k)] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[r_j, q_k] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[r_j, q] + \mu_{\mathfrak{R}_1}[q, q_k] \ . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich nun:

$$\mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(r_j), a] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[r_j, q] + \mu_{\mathfrak{R}_1}[q_k, q] + \mu_{\mathfrak{R}_2}[A_{n_k}(q_k), a] \ . \tag{4}$$

Wegen (1) ist aber offenbar die rechte Seite der Ungleichung (4) für jedes feste j beschränkt. q. e. d.

3. Aus (I) und Satz 4, § 5 folgert man nun in bekannter Weise mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens:

(II) Es gibt eine Teilfolge $\{n_{k_l}\}$ der Folge $\{n_k\}$ derart, daß die Folge $\{a_l(p)\} = \{A_{n_{k_l}}(p)\}$ in jedem Punkte r_j konvergiert.

Wir zeigen jetzt:

(III) Für jede konvergente Punktfolge $\{p_l\}$ auf $\mathfrak{R}_1$ ist die Punktfolge $\{a_l(p_l)\}$ auf $\mathfrak{R}_2$ konvergent.

Beweis. Sei $\{p_l\}$ eine konvergente Punktfolge auf $\mathfrak{R}_1$ und

$$\lim_{l \to \infty} p_l = p \in \mathfrak{R}_1 \ . \tag{5}$$

Wegen Satz 5, § 5 haben wir nur zu zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine ganze Zahl $N(\varepsilon)$ derart, daß $\mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_m(p_m)] < \varepsilon$ für alle $l, m > N(\varepsilon)$. Da die Punktfolge $\{r_j\}$ auf $\mathfrak{R}_1$ überall dicht ist, gibt es einen Index j_0 derart, daß

$$2\mu_{\mathfrak{R}_1}[p, r_{j_0}] < \varepsilon/4 \ . \tag{6}$$

Aus (5) und (II) folgt ferner: Es gibt eine ganze Zahl $N(\varepsilon)$ derart, daß

$$\mu_{\mathfrak{R}_1}[p_l, p] < \varepsilon/4, \quad \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(r_{j_0}), a_m(r_{j_0})] < \varepsilon/4 \quad \text{für alle} \quad l, m > N(\varepsilon) \ . \tag{7}$$

Wegen der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_m(p_m)] &\leq \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_l(r_{j_0})] \\ &+ \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(r_{j_0}), a_m(r_{j_0})] + \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_m(r_{j_0}), a_m(p_m)] \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Aus dem Schwarzschen Lemma (Satz 7b, § 5) und aus der Dreiecksungleichung folgt aber:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_l(r_{j_0})] &\leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[p_l, r_{j_0}] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[p_l, p] + \mu_{\mathfrak{R}_1}[p, r_{j_0}] \,, \\ \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_m(r_{j_0}), a_m(p_m)] &\leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[r_{j_0}, p_m] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[r_{j_0}, p] + \mu_{\mathfrak{R}_1}[p, p_m] \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (8) und (9) ergibt sich jetzt:

$$\begin{aligned} \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_m(p_m)] \leq \mu_{\mathfrak{R}_1}[p_l, p] + \mu_{\mathfrak{R}_1}[p_m, p] + 2\mu_{\mathfrak{R}_1}[p, r_{j_0}] \\ + \mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(r_{j_0}), a_m(r_{j_0})] \,. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus (6), (7) und (10) folgt endlich: $\mu_{\mathfrak{R}_2}[a_l(p_l), a_m(p_m)] < \varepsilon$ für alle $l, m > N(\varepsilon)$. q. e. d.

4. Aus (III) und Satz 4, § 7 folgt nun: Die Folge $\{a_l(p)\} = \{A_{n_{k_l}}(p)\}$ konvergiert auf $\mathfrak{R}_1$ stetig gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{R}_2$. Folglich ist der Tatbestand (a) erfüllt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 2. Es sei

1. $\mathfrak{r}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus und $\mathfrak{g}$ ein Gebiet auf $\mathfrak{r}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{g}}$,

2. $\mathfrak{R}$ eine beliebige Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$,

3. $\{A_n(p)\}$ eine Folge von analytischen Abbildungen der Fläche $\mathfrak{r}$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$.

Dann gibt es eine Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$, welche in $\mathfrak{g}$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{R}$.

Beweis. 1. Da $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{G}$ von hyperbolischem Typus sind, so liegt nach Satz 1 genau einer der beiden folgenden Tatbestände vor:

(I) Es gibt eine Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$, welche auf $\mathfrak{r}$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{G}$.

(II) Für jede konvergente Punktfolge $\{p_k\}$ auf $\mathfrak{r}$ und für jede Teilfolge $\{n_k\}$ der Folge $\{n\}$ ist die Punktfolge $\{A_{n_k}(p_k)\}$ in $\mathfrak{G}$ divergent.

Liegt der Tatbestand (I) vor, so haben wir offenbar nichts mehr zu beweisen. Es sei also der Tatbestand (II) erfüllt. Wir wählen drei voneinander verschiedene feste Punkte

$$a, b, c \in \mathfrak{G} \tag{1}$$

und zeigen

(III) Es gibt einen Index n_0 derart, daß für alle $n > n_0$ und alle $p \in \mathfrak{g}$ gilt: $A_n(p) \notin \{a, b, c\}$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei (III) falsch. Dann gibt es offenbar eine Teilfolge $\{n_k\}$ von $\{n\}$ und eine Punktfolge $\{p_k\} \subset \mathfrak{g}$ derart, daß

$$A_{n_k}(p_k) \in \{a, b, c\} \ . \tag{2}$$

Da aber nach Voraussetzung $\overline{\mathfrak{g}}$ kompakt ist, so gibt es eine Teilfolge $\{p_{k_l}\}$ von $\{p_k\} \subset \mathfrak{g}$, welche gegen einen Punkt $p \in \overline{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{r}$ konvergiert. Die zugehörige Punktfolge $\{A_{n_{k_l}}(p_{k_l})\}$ hat dann wegen (1) und (2) mindestens einen Häufungspunkt in $\mathfrak{G}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu (II). q. e. d.

2. $\mathfrak{g}$ ist als Teilgebiet der hyperbolischen Fläche $\mathfrak{r}$ nach Satz 8, § 3 eine Fläche von hyperbolischem Typus. Ebenso ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$ nach Satz 9, § 3 eine Fläche von hyperbolischem Typus. Wegen (III) gilt daher :

(IV) Die Folge $\{A_n(p)\}$, $n > n_0$, ist eine Folge von analytischen Abbildungen der hyperbolischen Fläche $\mathfrak{g}$ in die hyperbolische Fläche $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$.

Wir zeigen ferner :

(V) Konvergiert die Punktfolge $\{p_n\} \subset \mathfrak{g}$ gegen einen Punkt $p \in \mathfrak{g}$, so besitzt die Punktfolge $\{A_n(p_n)\}$, $n > n_0$, mindestens einen Häufungspunkt auf $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$.

In der Tat : Es ist $A_n(p_n) \in \mathfrak{G} \subset \overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$. Da nach Voraussetzung $\overline{\mathfrak{G}}$ kompakt ist, so folgt daraus, daß die Punktfolge $\{A_n(p_n)\}$, $n > n_0$, mindestens einen Häufungspunkt $h \in \overline{\mathfrak{G}}$ besitzt. Wegen (II) und (1) kann aber h mit keinem der drei Punkte a, b, c zusammenfallen. Folglich ist $h \in \mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$. q. e. d.

Aus (IV) und (V) folgt nun nach Satz 1 : Es gibt eine Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$, welche in $\mathfrak{g}$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{g}$ in die Fläche $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R} - \{a, b, c\}$. Damit ist Satz 2 offenbar vollständig bewiesen.

Satz 3. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$. $\{A_n(p)\}$ sei eine Folge von analytischen Abbildungen einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{r}$ von hyperbolischem Typus in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ der Folge $\{A_n(p)\}$, welche auf $\mathfrak{r}$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{R}$.

Beweis. Es gibt eine unendliche Folge $\{\mathfrak{g}_j\}$ von Gebieten $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{r}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{g}}_j$ derart, daß

$$\underset{j}{U}\, \mathfrak{g}_j = \mathfrak{r}\ . \tag{1}$$

Nach Satz 2 gilt dann für jeden festen Index j: Aus jeder Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$ läßt sich eine solche Teilfolge auswählen, welche in $\mathfrak{g}_j$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung von $\mathfrak{g}_j$ in $\mathfrak{R}$. Daraus schließt man in bekannter Weise mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens: Es gibt eine Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ von $\{A_n(p)\}$, welche in jedem Gebiet $\mathfrak{g}_j$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung von $\mathfrak{g}_j$ in $\mathfrak{R}$. Daraus und aus (1) folgt dann: Die Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ konvergiert auf $\mathfrak{r}$ stetig gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{R}$. q. e. d.

Schließlich können wir noch die Voraussetzung fallen lassen, daß $\mathfrak{r}$ von hyperbolischem Typ sei:

Satz 4. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche und $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf $\mathfrak{R}$ mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{\mathfrak{G}}$. $\{A_n(p)\}$ sei eine Folge von analytischen Abbildungen einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{r}$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ von $\{A_n(p)\}$, welche auf $\mathfrak{r}$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{R}$.

Beweis. Es gibt offenbar eine unendliche Folge $\{\mathfrak{r}_j\}$ von hyperbolischen Gebieten $\mathfrak{r}_j \subset \mathfrak{r}$ derart, daß

$$\underset{j}{U}\, \mathfrak{r}_j = \mathfrak{r}\ . \tag{2}$$

Nach Satz 3 gilt dann für jeden festen Index j: Aus jeder Teilfolge der Folge $\{A_n(p)\}$ läßt sich eine solche Teilfolge auswählen, welche auf $\mathfrak{r}_j$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung von $\mathfrak{r}_j$ in $\mathfrak{R}$. Daraus schließt man wieder mit Hilfe des Diagonalverfahrens: Es gibt eine Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ von $\{A_n(p)\}$, welche in jedem Gebiet $\mathfrak{r}_j$ stetig konvergiert gegen eine analytische Abbildung von $\mathfrak{r}_j$ in $\mathfrak{R}$. Hieraus und aus (2) folgt nun: Die Teilfolge $\{A_{n_k}(p)\}$ konvergiert auf $\mathfrak{r}$ stetig gegen eine analytische Abbildung $A(p)$ von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{R}$. q. e. d.

§ 9. Beweis von Satz A

Satz A wird offenbar bewiesen sein, wenn wir die beiden folgenden Sätze beweisen können.

Satz A'. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Dann gilt: Ist die Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ auf einen isolierten Randpunkt $a \in \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ reduzibel, so ist W parabolisch.

Satz A''. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$; die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ sei kompakt. Dann gilt: Ist die Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ parabolisch, so ist sie auf einen isolierten Randpunkt von $\mathfrak{G}$ reduzibel.

Beweis von A'. 1. Weil $a \in \mathfrak{R}$ ein isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$ ist, gibt es eine solche Umgebung $\mathfrak{U}_a \subset \mathfrak{R}$ von a, daß $\mathfrak{U}_a - a \subset \mathfrak{G}$. Ferner gibt es eine analytische Abbildung $p = A(z)$, welche den Einheitskreis $|z| < 1$ topologisch auf eine Umgebung $\mathfrak{V}_a \subset \mathfrak{U}_a$ von a so abbildet, daß $A(0) = a$ ist[43]). Weil die Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ auf den isolierten Randpunkt a reduzibel ist, so enthält W einen solchen Weg $p(t)$, daß $p(t) \in \mathfrak{V}_a - a$ für $0 \leq t \leq 1$. Der Weg $z(t) = A^{-1}(p(t))$ ist dann offenbar ein geschlossener Weg in der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ und es gilt:

(I) $A(z)$ ist eine analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$, welche den geschlossenen Weg $z(t)$ in $\mathfrak{k}$ auf den Weg $p(t) \in W$ abbildet.

2. Die Halbebene $\mathfrak{L}$ wird offenbar vermöge der Projektion $z = \pi_1(\zeta) = e^{i\zeta}$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \pi_1)$ von $\mathfrak{k}$. Die Fundamentalgruppe Γ_{π_1} ist die von der Decktransformation $S_0(\zeta) = \zeta + 2\pi$ erzeugte zyklische Gruppe. Ist nun

$$S \in \Phi_{\pi_1}[z(t)] \ , \tag{1}$$

so ist daher $S(\zeta) = \zeta + 2\pi\, n$, ($n$ ganz), und folglich

$$M[S] = 0 \ . \tag{2}$$

3. Da das Gebiet $\mathfrak{G}$ von hyperbolischem Typus ist, wird die Halbebene $\mathfrak{L}$ vermöge einer geeigneten Projektion $p = \pi_2(\zeta)$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \pi_2)$ von $\mathfrak{G}$. Die analytische Abbildung $A(z)$ von $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{G}$ induziert nun eine analytische Abbildung $a(\zeta)$ von $\mathfrak{L}$ in sich. Sei $\alpha \in \mathfrak{H}_A$ der zugehörige Homomorphismus von Γ_{π_1} in Γ_{π_2}. Dann folgt aus (I) und (1) nach Satz 6, § 3:

$$a(S(\zeta)) = T(a(\zeta)) \ , \tag{3}$$

$$T = \alpha(S) \in \Phi_{\pi_2}[p(t)] = \Phi_{\pi_2}(W) \ . \tag{4}$$

[43]) Dies folgt sofort aus der Existenz ortsuniformisierender Parameter zum Punkte $a \in \mathfrak{R}$.

Wir zeigen nun:

$$M[T] = 0 \ . \tag{5}$$

In der Tat: Aus (3) folgern wir mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas (Satz 6b, § 5):

$$\begin{aligned} M[T] &= \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, T(\zeta)] \leq \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu\big[a(\zeta), T\big(a(\zeta)\big)\big] \\ &= \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu\big[a(\zeta), a\big(S(\zeta)\big)\big] \leq \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, S(\zeta)] = M[S] \ . \end{aligned}$$

Daraus und aus (2) folgt aber (5). q. e. d.

Da nach Voraussetzung W nicht die Nullklasse von $\mathfrak{G}$ ist, so folgt jetzt aus (4) und (5), daß W eine parabolische Wegklasse ist. q. e. d.

Beweis von A''. Da $\mathfrak{G}$ von hyperbolischem Typus ist, wird die Halbebene $\mathfrak{L}$ vermöge einer geeigneten Projektion $p = \Pi(\zeta)$ zur universellen Überlagerungsfläche $(\mathfrak{L}, \Pi)$ von $\mathfrak{G}$. Weil die Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ parabolisch ist, kann die Projektion Π noch so gewählt werden, daß ein Element $S \in \Phi_\Pi(W)$ die Gestalt $S(\zeta) = \zeta \pm 2\pi$ erhält [44]). Dann folgt leicht:

(I) $A(z) = \Pi(-i \log z)$ ist eine (eindeutige!) analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0 < |z| < 1$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$.

Der für $0 < \varrho < 1$ definierte Weg

$$p_\varrho(t) = A(\varrho\, e^{\pm 2\pi i t}) \ , \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{1}$$

ist dann ein geschlossener Weg in $\mathfrak{G}$ und es ist offenbar

$$p_\varrho(t) \in \Phi_\Pi^{-1}[S] = W \ . \tag{2}$$

2. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{G}$ hyperbolisch und $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ kompakt ist, so folgt aus (I) nach Satz 2, § 6: Es gibt einen solchen Punkt $a \in \mathfrak{R}$, daß gilt:

(II) Die Abbildung

$$A^*(z) = A(z) \quad \text{für} \quad 0 < |z| < 1 \ , \qquad A^*(0) = a \tag{3}$$

ist eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $\mathfrak{K}$: $|z| < 1$ in die Fläche $\mathfrak{R}$.

Wir zeigen nun:

---

[44]) Dies folgt sofort aus Satz 1, Satz 4, § 3; Satz 2, § 1 und aus der Tatsache, daß es zu jeder parabolischen Bewegung P eine solche Bewegung G von L gibt, daß $GPG^{-1}(\zeta) = \zeta \pm 2\pi$.

(III) Der Punkt $a \in \mathfrak{R}$ ist isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$.

Beweis. Da die Abbildung A^* offensichtlich nicht konstant ist, so folgt aus (II): Die Bildmenge $A^*(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{R}$ enthält eine volle Umgebung $\mathfrak{B}_a \subset \mathfrak{R}$ von a. Wegen (I) und (3) ist dann

$$\mathfrak{B}_a - a \subset A^*(\mathfrak{K}) - a \subset A^*(\mathfrak{k}) = A(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{G} .$$

Folglich ist entweder a ein isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$ oder $a \in \mathfrak{G}$. Wir zeigen, daß das letztere nicht zutreffen kann. In der Tat: Wäre $a \in \mathfrak{G}$, so wäre nach (I), (II) A^* eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z| < 1$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$ und daher wäre für $0 < \varrho < 1$ der Weg $p_\varrho(t) = A(\varrho\, e^{\pm 2\pi i t}) = A^*(\varrho\, e^{\pm 2\pi i t})$ offenbar nullhomotop in $\mathfrak{G}$. Wegen (2) müßte dann W die Nullklasse von $\mathfrak{G}$ sein, entgegen unserer Voraussetzung! q. e. d.

3. Aus (1), (I), (II), (III) folgt jetzt: Zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}_a \subset \mathfrak{R}$ von a gibt es ein solches ϱ, $(0 < \varrho = \varrho(\mathfrak{U}_a) < 1)$, daß $p_\varrho(t) \in \mathfrak{U}_a - a$ für $0 \leq t \leq 1$. Daraus und aus (2) folgt aber, daß die (von der Nullklasse verschiedene) Wegklasse W von $\mathfrak{G}$ auf den isolierten Randpunkt a von $\mathfrak{G}$ reduzibel ist. Damit ist Satz A″ bewiesen.

§ 10. Beweis von Satz B

Auf Grund von Satz 2a, § 4 überlegt man sich sofort, daß der Satz B bewiesen sein wird, wenn es gelingt, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz B′. Es sei $\mathfrak{G}$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$; die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ sei kompakt und der Rand von $\mathfrak{G}$ normal. $(\mathfrak{L}, \pi_1)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{G}$. Dann gilt:

Ist $\{S_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, eine unendliche Folge von Elementen der Fundamentalgruppe Γ_{π_1} und ist $0 < M[S_n] < m < \infty$ für alle n, so gibt es immer eine unendliche Teilfolge $\{S_{n_k}\}$ von $\{S_n\}$, deren Elemente alle ein und derselben Klasse konjugierter Elemente von Γ_{π_1} angehören.

Beweis. 1. Nach Voraussetzung sind die Decktransformationen S_n hyperbolische Bewegungen von $\mathfrak{L}$. Daher gibt es zu jeder Bewegung S_n eine solche Bewegung U_n von $\mathfrak{L}$, daß die Bewegung

$$V_n = U_n\, S_n\, U_n^{-1} \tag{1}$$

die Gestalt

$$V_n(\zeta) = \lambda_n \cdot \zeta \ , \qquad \lambda_n > 0 \ , \qquad \lambda_n \neq 1 \tag{2}$$

erhält. Aus (1), (2) folgt dann nach Satz 3 und Satz 4c, § 2:

$$|\log \lambda_n| = M[S_n] \ . \tag{3}$$

Daher wird der Parallelstreifen $\mathfrak{P}_n$: $|\mathfrak{J}(z)| < \pi/2M[S_n]$ durch $\zeta = i\, e^{z \log \lambda_n}$ analytisch und topologisch auf die Halbebene $\mathfrak{L}$ abgebildet. Folglich ist

$$A_n(z) = \pi_1(U_n^{-1}(i\, e^{z \log \lambda_n})) \tag{4}$$

eine analytische Abbildung des Parallelstreifens $\mathfrak{P}_n$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$. Weil nach Voraussetzung für alle n $M[S_n] < m < \infty$ ist, so enthalten alle Parallelstreifen $\mathfrak{P}_n$: $|\mathfrak{J}(z)| < \pi/2M[S_n]$ den Parallelstreifen $\mathfrak{P}$: $|\mathfrak{J}(z)| < \pi/2m$. Daher gilt:

(I) $\{A_n(z)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ist eine unendliche Folge von analytischen Abbildungen des Parallelstreifens $\mathfrak{P}$: $|\mathfrak{J}(z)| < \pi/2m$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$.

2. Wir untersuchen nun den Weg $A_n(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$, in $\mathfrak{G}$. Setzen wir

$$\zeta_n(t) = U_n^{-1}(i\, e^{t \log \lambda_n}) \ , \qquad 0 \leq t \leq 1 \ , \tag{5}$$

so ist offenbar $\zeta_n(t)$ ein Weg in der Halbebene $\mathfrak{L}$ und es gilt wegen (4):

$$A_n(t) = \pi_1(\zeta_n(t)) \ . \tag{6}$$

Aus (5) ergibt sich:

$$\zeta_n(0) = U_n^{-1}(i) \ . \tag{7}$$

Aus (5), (2) und (7) folgt: $\zeta_n(1) = U_n^{-1}(\lambda_n i) = U_n^{-1} V_n(i) = U_n^{-1} V_n U_n(U_n^{-1}(i)) = U_n^{-1} V_n U_n(\zeta_n(0))$; daher ist wegen (1) $\zeta_n(1) = S_n(\zeta_n(0))$. Daraus und aus (6) folgt offenbar [45])

$$A_n(0) = A_n(1) \qquad \text{für alle } n \tag{8}$$

und

$$A_n(t) \in \Phi_{\pi_1}^{-1}[S_n] \ , \qquad \text{das heißt} \qquad S_n \in \Phi_{\pi_1}[A_n(t)] \qquad \text{für alle } n. \tag{9}$$

3. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{G}$ hyperbolisch und $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{R}$ kompakt ist, so folgt aus (I) nach Satz 4, § 8: Es gibt eine Teilfolge $\{A_{n_k}(z)\}$ der Folge $\{A_n(z)\}$ derart, daß gilt:

[45]) Vergleiche § 3, Nr. 4.

(II) Die Folge $\{A_{n_k}(z)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, von analytischen Abbildungen des Parallelstreifens $\mathfrak{P}$ in das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{R}$ konvergiert in $\mathfrak{P}$ stetig gegen eine analytische Abbildung $A(z)$ von $\mathfrak{P}$ in die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$.

Wir zeigen nun:

(III) $A(z)$ ist nicht konstant.

Beweis. Wäre nämlich $A(z)$ konstant, das heißt

$$A(z) \equiv a \in \mathfrak{R} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathfrak{P}\,, \tag{10}$$

so wäre nach (II) gewiß $a \in \overline{\mathfrak{G}}$ und es müßte somit einer der drei folgenden Fälle zutreffen:

α) $a \in \mathfrak{G}$,
β) a ist isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$,
γ) a ist nicht-isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$.

Die Behauptung (III) wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß jede der drei Annahmen α), β), γ) zu einem Widerspruch führt.

ad α): Es sei $\mathfrak{V}_a \subset \mathfrak{G}$ eine einfach zusammenhängende Umgebung von $a \in \mathfrak{G}$. Dann folgt aus (II) und (10) nach Satz 2, § 7: Es gibt einen solchen Index k_0, daß $A_{n_k}(t) \in \mathfrak{V}_a \subset \mathfrak{G}$ für $0 \leq t \leq 1$ und alle $k > k_0$. Daraus folgt wegen des einfachen Zusammenhanges von $\mathfrak{V}_a$, daß die geschlossenen Wege $A_{n_k}(t)$ für $k > k_0$ nullhomotop in $\mathfrak{G}$ sind. Daraus und aus (9) folgt, daß S_{n_k} für $k > k_0$ die identische Decktransformation ist. Dies widerspricht aber unserer Voraussetzung. q. e. d.

ad β): Da a isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$ ist, gibt es eine solche einfach zusammenhängende Umgebung $\mathfrak{U}_a \subset \mathfrak{R}$ von a, daß $\mathfrak{U}_a - a \subset \mathfrak{G}$. Dann folgt aus (II) und (10) nach Satz 2, § 7: Es gibt einen solchen Index k_0, daß $A_{n_k}(t) \in \mathfrak{U}_a - a \subset \mathfrak{G}$ für $0 \leq t \leq 1$ und alle $k > k_0$. Wegen des einfachen Zusammenhanges von $\mathfrak{U}_a$ folgt hieraus, daß die geschlossenen Wege $A_{n_k}(t)$ für $k > k_0$ entweder nullhomotop in $\mathfrak{G}$ oder auf den isolierten Randpunkt a von $\mathfrak{G}$ reduzibel sind. Wegen (9) und Satz A′, § 9 ist dann $M[S_{n_k}] = 0$ für alle $k > k_0$. Dies widerspricht aber wieder unserer Voraussetzung. q. e. d.

ad γ): Ist a nicht-isolierter Randpunkt von $\mathfrak{G}$, so ist a nach Voraussetzung normaler Randpunkt. Es gibt daher eine Umgebung $\mathfrak{N}_a \subset \mathfrak{R}$ von a derart, daß alle geschlossenen Wege, welche im Durchschnitt $\mathfrak{N}_a \cap \mathfrak{G}$ liegen, in $\mathfrak{G}$ nullhomotop sind. Aus (II) und (10) folgt nun wieder nach

Satz 2, § 7: Es gibt einen solchen Index k_0, daß $A_{n_k}(t) \in \mathfrak{N}_a \cap \mathfrak{G}$ für $0 \leq t \leq 1$ und alle $k > k_0$. Daher sind die geschlossenen Wege $A_{n_k}(t)$ für $k > k_0$ nullhomotop in $\mathfrak{G}$. Daraus und aus (9) folgt, daß S_{n_k} für $k > k_0$ die identische Decktransformation ist. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung. q. e. d.

4. Aus (II) und (III) folgt jetzt nach Satz 5, § 7: $A(z)$ ist eine analytische Abbildung des Parallelstreifens $\mathfrak{P}$ in das Gebiet $\mathfrak{G}$; es ist also insbesondere $A(t) \in \mathfrak{G}$ für $0 \leq t \leq 1$. Aus (8) und $A(t) = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k}(t)$ folgt noch: $A(0) = A(1)$. Wir haben somit:

(IV) $A(t)$, $(0 \leq t \leq 1)$, ist ein geschlossener Weg in $\mathfrak{G}$.

Aus (II) und (IV) ergibt sich nun: Die Folge $\{A_{n_k}(t)\}$ von geschlossenen Wegen in $\mathfrak{G}$ konvergiert im Intervall $0 \leq t \leq 1$ stetig gegen den geschlossenen Weg $A(t)$ in $\mathfrak{G}$. Daher gibt es nach Satz 3, § 7 einen solchen Index k_0, daß für alle $k > k_0$ die Wege $A_{n_k}(t)$ und $A(t)$ in $\mathfrak{G}$ homotop sind. Folglich ist $\Phi_{\pi_1}[A_{n_k}(t)] = \Phi_{\pi_1}[A(t)]$ für $k > k_0$ und daher wegen (9): $S_{n_k} \in \Phi_{\pi_1}[A(t)]$ für alle $k > k_0$. Damit ist aber unser Satz B′ bewiesen.

§ 11. Beweis von Satz C

Für eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ von endlichem Zusammenhange gilt bekanntlich der folgende Einbettungssatz [46]: Es gibt

1. eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$,
2. ein Gebiet $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}$, welches von höchstens endlich vielen geschlossenen analytischen Jordankurven und höchstens endlich vielen isolierten Punkten berandet wird,
3. eine analytische Abbildung G von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}$, welche $\mathfrak{R}$ topologisch auf $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ abbildet.

Wegen Satz 3, § 4 wird daher unser Satz C bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum ist.

Nach Voraussetzung von Satz C ist $\mathfrak{R}$ eine Fläche von hyperbolischem Typus. Wegen der Invarianz des Typus gegenüber analytischen und topologischen Abbildungen gilt daher:

(I) Das Gebiet $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$ ist von hyperbolischem Typus. Weil die Fläche $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, so gilt offenbar:

---

[46]) [8], pag. 139—141.

(II) Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{G}} \subset \mathfrak{F}$ von $\mathfrak{G}$ ist kompakt. Aus der Tatsache, daß das Gebiet $\mathfrak{G}$ auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ von höchstens endlich vielen geschlossenen analytischen Jordankurven und höchstens endlich vielen isolierten Punkten berandet wird, folgt leicht:

(III) Der Rand von $\mathfrak{G}$ ist normal.

Aus (I), (II) und (III) folgt nun nach Satz B, daß $\mathfrak{G}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum ist. Damit ist Satz C bewiesen.

§ 12. Vier Lemmata

Lemma I. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus, $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Dann gilt:

a) Ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist jede durch A induzierte analytische Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ und der zu a gehörige Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ ist ein Automorphismus von Γ_π.

b) Es sei A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Ist dann die durch A induzierte Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ und ist überdies $a\,\Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi$, so ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$.

Beweis von a: 1. Weil A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist, so wird die Halbebene $\mathfrak{L}$ offenbar auch vermöge der Projektion $\pi_1(\zeta) = A(\pi(\zeta))$ zur universellen Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Nach Satz 1c, § 3 gibt es daher eine analytische und topologische Abbildung G von $\mathfrak{L}$ auf sich selbst derart, daß $\pi_1(\zeta) = \pi(G^{-1}(\zeta))$, das heißt

$$A(\pi(\zeta)) = \pi(G^{-1}(\zeta)) . \tag{1}$$

Nach Satz 2, § 2 ist aber G und daher auch G^{-1} eine Bewegung von $\mathfrak{L}$. Die Gleichung (1) besagt nun offenbar, daß die Bewegung G^{-1} eine durch A (bezüglich der Projektion π) induzierte Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich ist. Nach Satz 5c, § 3 läßt sich dann jede durch A (bezüglich der Projektion π) induzierte Abbildung a in der Gestalt $a = TG^{-1}$ darstellen, wobei T eine Decktransformation von $(\mathfrak{L}, \pi)$, also ebenfalls eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ ist. Daraus folgt nun:

(I) Jede durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

2. Es sei nun a eine durch A induzierte Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich. Dann gilt:

$$\pi(a(\zeta)) = A(\pi(\zeta)) \ . \qquad (2)$$

Nach Satz 6′, § 3 ist $S_\alpha(a(\zeta)) = a(S(\zeta))$, $S_\alpha = \alpha(S) \in \Gamma_\pi$, $S \in \Gamma_\pi$. Daraus und aus (I) folgt

(II) Es ist $\alpha(S) = aSa^{-1} \in \Gamma_\pi$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

Wir beweisen nun

(III) Zu jedem $T \in \Gamma_\pi$ gibt es genau ein solches $S \in \Gamma_\pi$, daß $aSa^{-1} = T$.

Dazu müssen wir offenbar nur zeigen, daß für jedes $T \in \Gamma_\pi$ die Bewegung $S = a^{-1}Ta$ eine Decktransformation von $(\mathfrak{L}, \pi)$ ist. Nun ist aber $aS = Ta$ und daher $\pi(a(S(\zeta))) = \pi(Ta(\zeta)) = \pi(a(\zeta))$. Daraus folgt nach (2): $A(\pi(S(\zeta))) = A(\pi(\zeta))$. Da aber A ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist, so folgt hieraus: $\pi(S(\zeta)) = \pi(\zeta)$. Also ist in der Tat $S \in \Gamma_\pi$. q. e. d.

Aus (I), (II) und (III) ergibt sich nun die Behauptung a.

Beweis von b: Wir zeigen zuerst:

(I) Zu jedem $p_1 \in \mathfrak{R}$ gibt es ein solches $p_2 \in \mathfrak{R}$, daß $A(p_2) = p_1$. In der Tat: Es gibt ein $\zeta_1 \in \mathfrak{L}$ derart, daß

$$\pi(\zeta_1) = p_1 \ . \qquad (1)$$

Da a nach Voraussetzung eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ ist, gibt es ein solches $\zeta_2 \in \mathfrak{L}$, daß

$$a(\zeta_2) = \zeta_1 \ . \qquad (2)$$

Es sei nun $p_2 = \pi(\zeta_2) \in \mathfrak{R}$. Dann folgt aus (1) und (2):

$$A(p_2) = A(\pi(\zeta_2)) = \pi(a(\zeta_2)) = \pi(\zeta_1) = p_1 \ . \qquad \text{q. e. d.}$$

Nun zeigen wir:

(II) Aus $A(p_1) = A(p_2)$ folgt $p_1 = p_2$.

Beweis. Es gibt zwei Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$ derart, daß

$$p_1 = \pi(\zeta_1) \ , \qquad p_2 = \pi(\zeta_2) \ . \qquad (3)$$

Dann ist $A(p_1) = \pi(a(\zeta_1))$, $A(p_2) = \pi(a(\zeta_2))$. Ist nun $A(p_1) = A(p_2)$, so ist daher $\pi(a(\zeta_1)) = \pi(a(\zeta_2))$. Folglich gibt es ein Element $S \in \Gamma_\pi$ derart, daß

$$a(\zeta_2) = S(a(\zeta_1)) \ . \qquad (4)$$

Da aber nach Voraussetzung $a\,\Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi$ ist, so gibt es ein solches Element $T \in \Gamma_\pi$, daß $Sa = aT$ ist. Daraus und aus (4) folgt dann: $a(\zeta_2) = a(T(\zeta_1))$. Weil aber a eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ ist, so folgt hieraus: $\zeta_2 = T(\zeta_1)$. Daher ist $\pi(\zeta_2) = \pi(\zeta_1)$ und somit wegen (3) $p_1 = p_2$. q. e. d.

Aus (I) und (II) folgt nun, daß die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist. q. e. d.

Lemma II. Es sei Γ eine nichtabelsche eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$ und $H \in \Gamma$ ein festes hyperbolisches oder parabolisches Element. $\mathfrak{a}$ sei die Menge aller Bewegungen a von $\mathfrak{L}$, welche folgende Bedingungen erfüllen: $aHa^{-1} = H$, $a\Gamma a^{-1} \subset \Gamma$. Dann gilt:

a) Für alle $a \in \mathfrak{a}$ ist sogar $a\Gamma a^{-1} = \Gamma$.

b) $\mathfrak{a}$ ist eine zyklische Gruppe von unendlicher Ordnung.

Beweis. 1. Da das feste Element $H \in \Gamma$ nach Voraussetzung hyperbolisch resp. parabolisch ist, so darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, H habe die Gestalt

$$H(\zeta) = \lambda_H \cdot \zeta\ , \qquad \lambda_H > 0\ , \qquad \lambda_H \neq 1\ , \tag{1_h}$$

resp. die Gestalt

$$H(\zeta) = \zeta + \varkappa_H\ , \qquad \varkappa_H \neq 0 \quad \text{reell}^{47)}\ . \tag{1_p}$$

Wir zeigen nun: Im Falle (1_h) gilt

(I_h) Es gibt ein Element $U \in \Gamma$,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \qquad u_i \text{ reell}, \qquad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1\ ,$$

derart, daß $(u_2, u_3) \neq (0, 0)$.

Im Falle (1_p) hingegen gilt:

(I_p) Es gibt ein Element $U \in \Gamma$,

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \qquad u_i \text{ reell}, \qquad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1\ ,$$

derart, daß $(u_3, u_4 - u_1) \neq (0, 0)$.

---

[47]) Hat H nämlich zunächst nicht diese Gestalt, so gibt es doch eine solche Bewegung V von $\mathfrak{L}$, daß $H^* = VHV^{-1}$ die Gestalt (1_h) respektiv (1_p) erhält. Statt der Gruppe Γ und der Menge $\mathfrak{a}$ betrachte man dann die transformierte Gruppe $\Gamma^* = V\Gamma V^{-1}$ und die transformierte Menge $\mathfrak{a}^* = V\mathfrak{a}V^{-1}$.

In der Tat: Andernfalls hätten ja alle Elemente $S \in \Gamma$ im Falle (1_h) die Gestalt $S(\zeta) = \lambda_s \cdot \zeta$ und im Falle (1_p) die Gestalt $S(\zeta) = \zeta + \varkappa_s$. Dann wäre aber Γ offensichtlich eine abelsche Gruppe — entgegen unserer Voraussetzung. q. e. d.

2. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{a}$ die Menge aller Bewegungen a von $\mathfrak{L}$, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$$a\,H\,a^{-1} = H \quad , \tag{2}$$

$$a\,\Gamma\,a^{-1} \subset \Gamma \quad . \tag{3}$$

Aus dieser Definition folgt sofort:

(II) Ist $a \in \mathfrak{a}$, j, k ganz und $j \geq 0$, so ist $a^j H^k \in \mathfrak{a}$.
Aus (1_h) resp. (1_p) und (2) folgt nach Satz 6 resp. 6′, § 2:

(III_h) Jedes Element $a \in \mathfrak{a}$ hat die Gestalt

$$a(\zeta) = \lambda_a \cdot \zeta \;, \qquad \lambda_a > 0 \;.$$

resp. (III_p): Jedes Element $a \in \mathfrak{a}$ hat die Gestalt

$$a(\zeta) = \zeta + \varkappa_a \;, \qquad \varkappa_a \text{ reell.}$$

3. Es sei nun $a \in \mathfrak{a}$ und $Z = [a, H]$ die von a und H erzeugte Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$. Wegen (1_h), (III_h) resp. (1_p), (III_p) gilt dann:

(IV_h) Jedes Element $c \in Z = [a, H]$ hat die Gestalt $c(\zeta) = \lambda_c \cdot \zeta$, $\lambda_c > 0$ resp.

(IV_p) Jedes Element $c \in Z = [a, H]$ hat die Gestalt $c(\zeta) = \zeta + \varkappa_c$, $\varkappa_c$ reell.

Wir beweisen nun:

(V) Die Gruppe Z ist eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Aus (IV_h) resp. (IV_p) folgt leicht: Ist Z nicht eigentlich diskontinuierlich, so gibt es zu jeder ganzen Zahl $n \geq 1$ eine Bewegung c_n derart, daß

$$c_n \in Z \;, \quad c_n(\zeta) = \lambda_{c_n} \cdot \zeta \;, \qquad 0 < |\log \lambda_{c_n}| < 1/n \qquad \text{für} \quad n \geq 1 \tag{4_h}$$

resp.

$$c_n \in Z \;, \quad c_n(\zeta) = \zeta + \varkappa_{c_n} \;, \qquad 0 < |\varkappa_{c_n}| < 1/n \qquad \text{für} \quad n \geq 1. \tag{4_p}$$

Da die Gruppe $Z = [a, H]$ wegen (IV_h) resp. (IV_p) offenbar abelsch ist, gibt es zu jedem $n \geq 1$ zwei ganze Zahlen j_n, k_n derart, daß $c_n = a^{j_n} H^{k_n}$.

Wir setzen jetzt

$$d_n = c_n^{sgn\, jn} = a^{|jn|} \cdot H^{kn \cdot sgn\, jn} \in Z \; . \tag{5}$$

Nach (II) ist dann offenbar

$$d_n \in \mathfrak{a} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 , \tag{6}$$

Aus (4_h) resp. (4_p) und (5) folgt ferner

$$d_n(\zeta) = \lambda_{d_n} \cdot \zeta \quad , \quad 0 < |\log \lambda_{d_n}| = |\log \lambda_{c_n}| < 1/n \qquad \text{für alle } n \geq 1 , \tag{7_h}$$

resp.

$$d_n(\zeta) = \zeta + \varkappa_{d_n} , \quad 0 < |\varkappa_{d_n}| = |\varkappa_{c_n}| < 1/n \qquad \text{für alle } n \geq 1 . \tag{7_p}$$

Wir betrachten jetzt die Folge

$$T_n = d_n \, U \, d_n^{-1} \; , \qquad n \geq 1 \; , \tag{8}$$

wobei $U \in \Gamma$ die in (I_h) resp. (I_p) eingeführte Bewegung bedeutet. Wegen (3) und (6) gilt dann

$$T_n \in \Gamma \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \; . \tag{9}$$

Aus (I_h) resp. (I_p), (7_h) resp. (7_p) und (8) folgt ferner

$$T_n = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \cdot \lambda_{d_n} \\ u_3/\lambda_{d_n} & u_4 \end{pmatrix} , \quad (u_2, u_3) \neq (0, 0) \; , \quad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1 \; , \qquad 0 < |\log \lambda_{d_n}| < 1/n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \tag{10_h}$$

resp.

$$T_n = \begin{pmatrix} u_1 + u_3 \varkappa_{d_n} & u_2 + (u_4 - u_1)\varkappa_{d_n} - u_3 \varkappa_{d_n}^2 \\ u_3 & u_4 - u_3 \varkappa_{d_n} \end{pmatrix} \qquad (u_3, u_4 - u_1) \neq (0, 0) \; , \quad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1 \qquad 0 < |\varkappa_{d_n}| < 1/n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \; . \tag{10_p}$$

Die Aussagen (9) und (10_h) resp. (10_p) widersprechen aber offensichtlich unserer Voraussetzung, daß die Bewegungsgruppe Γ eigentlich diskontinuierlich sei. Folglich muß (V) richtig sein. q. e. d.

4. Aus (IV_h) resp. (IV_p) und (V) folgt nun nach Satz 8 resp. 8′, § 2, daß $Z = [a, H]$ eine zyklische Gruppe ist. Sei c_0 eine Erzeugende von Z. Dann gibt es solche ganze Zahlen j, k, daß

$$a = c_0^j \; , \qquad H = c_0^k \; . \tag{11}$$

Da H nicht die Identität ist, so ist gewiß

$$|k| \geq 1 \ . \tag{12}$$

Aus (11) folgt jetzt: $a^{|k|} = c_0^{j|k|} = c_0^{k\cdot j\cdot \operatorname{sgn} k} = H^{j\cdot \operatorname{sgn} k}$. Folglich ist $a^{|k|} \in \Gamma$ und daher

$$a^{|k|}\Gamma a^{-|k|} = \Gamma \ . \tag{13}$$

Andererseits folgt aus (3) und (12) sofort: $a^{|k|}\,\Gamma a^{-|k|} \subset a\,\Gamma a^{-1}$. Daraus und aus (13) ergibt sich: $\Gamma \subset a\,\Gamma a^{-1}$. Hieraus und aus (3) folgt endlich $a\,\Gamma a^{-1} = \Gamma$. Damit ist die Behauptung a) von Lemma II bewiesen.

5. Aus der eben bewiesenen Behauptung a) folgt sofort, daß die Menge $\mathfrak{a}$ eine Gruppe ist. Wir zeigen nun:

(VI) Die Bewegungsgruppe $\mathfrak{a}$ ist eigentlich diskontinuierlich.

Beweis. Aus (III_h) resp. (III_p) folgt leicht: Ist die Gruppe $\mathfrak{a}$ nicht eigentlich diskontinuierlich, so gibt es zu jeder ganzen Zahl $n \geq 1$ ein Element a_n derart, daß

$$a_n \in \mathfrak{a} \ , \qquad a_n(\zeta) = \lambda_{a_n}\cdot\zeta \ , \qquad 0 < |\log \lambda_{a_n}| < 1/n \tag{14_h}$$

respektive

$$a_n \in \mathfrak{a} \ , \qquad a_n(\zeta) = \zeta + \varkappa_{a_n} \ , \qquad 0 < |\varkappa_{a_n}| < 1/n \ . \tag{14_p}$$

Wir betrachten nun die Folge

$$S_n = a_n\,U\,a_n^{-1} \ , \qquad n \geq 1 \ , \tag{15}$$

wobei U wieder die in (I_h) resp. (I_p) eingeführte Bewegung bedeutet. Aus $a_n \in \mathfrak{a}$, $U \in \Gamma$ folgt dann nach (3):

$$S_n \in \Gamma \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \ . \tag{16}$$

Aus (I_h) resp. (I_p), (14_h) resp. (14_p) und (15) ergibt sich aber:

$$S_n = \begin{pmatrix} u_1 & u_2\cdot\lambda_{a_n} \\ u_3/\lambda_{a_n} & u_4 \end{pmatrix} , \quad (u_2, u_3) \neq (0, 0) \ , \quad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1 \ , \tag{17_h}$$
$$0 < |\log \lambda_{a_n}| < 1/n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \ .$$

respektive

$$S_n = \begin{pmatrix} u_1 + u_3 \varkappa_{a_n} & u_2 + (u_4 - u_1)\varkappa_{a_n} - u_3 \varkappa_{a_n}^2 \\ u_3 & u_4 - u_3\varkappa_{a_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(u_3, u_4 - u_1) \neq (0, 0) \ , \qquad u_1 u_4 - u_2 u_3 = 1 \\ &0 < |\varkappa_{a_n}| < 1/n \quad \text{für alle} \quad n \geq 1 \ . \end{aligned} \tag{17_p}$$

Die Aussagen (16) und (17_h) resp. (17_p) widersprechen aber wieder unserer Voraussetzung, daß die Bewegungsgruppe Γ eigentlich diskontinuierlich sei. Folglich muß (VI) richtig sein. q. e. d.

6. Aus (III_h) resp. (III_p) und (VI) folgt jetzt nach Satz 8 resp. 8′, § 2, daß die Gruppe $\mathfrak{a}$ zyklisch ist. Weil aber offenbar $H \in \mathfrak{a}$ und weil $\lambda_H \neq 1$ resp. $\varkappa_H \neq 0$ ist, so ist die Ordnung der zyklischen Gruppe $\mathfrak{a}$ unendlich. Damit ist Lemma II vollständig bewiesen.

Lemma III. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus; $(\mathfrak{L}, \pi)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Es sei A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich, a eine durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich und $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ der zugehörige Endomorphismus von Γ_π. Dann gilt:

a) Es ist $M[\alpha(S)] \leq M[S]$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

b) Gibt es eine solche Decktransformation $T \in \Gamma_\pi$, daß $M[\alpha(T)] = M[T] > 0$, so ist a eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

c) Ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist $M[\alpha(S)] = M[S]$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

Beweis. 1. Nach Satz 6′, § 3 gilt

$$a(S(\zeta)) = S_\alpha(a(\zeta)) \,, \quad S_\alpha = \alpha(S) \in \Gamma_\pi \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi, \quad \zeta \in \mathfrak{L}. \tag{1}$$

2. *Beweis von a).* Aus dem Schwarzschen Lemma (Satz 6b, § 5) folgt

$$\mu[\zeta, S(\zeta)] \geq \mu[a(\zeta), a(S(\zeta))] \,. \tag{2}$$

Wegen (1) ist aber

$$\mu[a(\zeta), a(S(\zeta))] = \mu[a(\zeta), S_\alpha(a(\zeta))] \,. \tag{3}$$

Ferner gilt offenbar:

$$\mu[a(\zeta), S_\alpha(a(\zeta))] \geq \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, S_\alpha(\zeta)] = M[S_\alpha] = M[\alpha(S)] \,. \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) ergibt sich nun $\mu[\zeta, S(\zeta)] \geq M[\alpha(S)]$ für alle $\zeta \in \mathfrak{L}$. Daraus folgt aber $M[S] = \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, S(\zeta)] \geq M[\alpha(S)]$. q. e. d.

3. *Beweis von b).* Sei für ein gewisses $T \in \Gamma_\pi$

$$M[\alpha(T)] = M[T] > 0 \,. \tag{5}$$

Dann ist T gewiß eine hyperbolische Bewegung von $\mathfrak{L}$. Es sei nun $\zeta_0 \in \mathfrak{L}$ ein Punkt des Orthogonalkreises durch die beiden Fixpunkte von T. Dann gilt nach Satz 4b, § 2:

$$\mu[\zeta_0, T(\zeta_0)] = M[T] \, . \tag{6}$$

Wegen (1) ist

$$\mu\big[a(\zeta_0), a(T(\zeta_0))\big] = \mu\big[a(\zeta_0), T_\alpha(a(\zeta_0))\big] \, , \qquad T_\alpha = \alpha(T) \, . \tag{7}$$

Ferner gilt

$$\mu\big[a(\zeta_0), T_\alpha(a(\zeta_0))\big] \geq \inf_{\zeta \in \mathfrak{L}} \mu[\zeta, T_\alpha(\zeta)] = M[T_\alpha] = M[\alpha(T)] \, . \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich

$$\mu\big[a(\zeta_0), a(T(\zeta_0))\big] \geq M[\alpha(T)] \, . \tag{9}$$

Aus (5), (6) und (9) folgt jetzt

$$\mu\big[a(\zeta_0), a(T(\zeta_0))\big] \geq \mu[\zeta_0, T(\zeta_0)] > 0 \, . \tag{10}$$

Andererseits ist nach dem Schwarzschen Lemma (Satz 6b, § 5)

$$\mu\big[a(\zeta_0), a(T(\zeta_0))\big] \leq \mu[\zeta_0, T(\zeta_0)] \, . \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt nun: $\mu\big[a(\zeta_0), a(T(\zeta_0))\big] = \mu[\zeta_0, T(\zeta_0)] > 0$. Daraus folgt aber nach Satz 6c, § 5 : a ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$. q. e. d.

4. *Beweis von c).* Ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist a nach Lemma Ia eine Bewegung von $\mathfrak{L}$. Dann folgt aber aus (1): $\alpha(S) = aSa^{-1}$ für alle $S \in \Gamma_\pi$. Daraus folgt nach Satz 3, § 2: $M[\alpha(S)] = M[S]$ für alle $S \in \Gamma_\pi$. q. e. d.

Damit ist Lemma III vollständig bewiesen.

Lemma IV. $\mathfrak{R}$ sei eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum; $(\mathfrak{L}, \pi)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Es sei A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich, a eine durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich und $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ der zugehörige Endomorphismus von Γ_π. Dann gilt:

Gibt es ein Element $T \in \Gamma_\pi$ derart, daß $M[\alpha(T)] = M[T] > 0$, so ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$.

Beweis. 1. Sei

$$T \in \Gamma_\pi \,, \qquad M[T]>0 \tag{1}$$

und $M[\alpha(T)] = M[T]$. Dann folgt aus Lemma IIIb:

(I) Die durch A induzierte Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

Nach Satz 6′, § 3 gilt:

$$a(S(\zeta)) = S_\alpha(a(\zeta)) \,, \qquad S_\alpha = \alpha(S) \in \Gamma_\pi \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \,.$$

Hieraus und aus (I) folgt nun

$$\alpha(S) = a\, S\, a^{-1} \in \Gamma_\pi \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \,. \tag{2}$$

Daraus schließt man sofort:

$$a^n\, \Gamma_\pi\, a^{-n} \subset \Gamma_\pi \qquad \text{für alle} \quad n \geq 1 \,. \tag{3}$$

$$a^j\, \Gamma_\pi\, a^{-j} \subset a\, \Gamma_\pi\, a^{-1} \quad \text{für alle} \quad j \geq 1 \,. \tag{4}$$

2. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: *Γ_π sei abelsch.* Da $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung hyperbolisch ist, so ist in diesem Falle Γ_π sogar zyklisch [48]). Sei S_0 eine Erzeugende von Γ_π. Dann gibt es eine ganze Zahl τ derart, daß $T = S_0^\tau$. Hieraus folgt nach Satz 5, § 2: $M[T] = |\tau| \cdot M[S_0]$. Daraus und aus (1) ergibt sich

$$M[S_0]>0 \,. \tag{5}$$

Da S_0 Erzeugende der zyklischen Gruppe Γ_π ist, gibt es wegen (2) eine solche ganze Zahl m, daß

$$a\, S_0\, a^{-1} = S_0^m \,. \tag{6}$$

Nach Satz 3 und Satz 5, § 2 folgt hieraus $M[S_0] = |m| \cdot M[S_0]$. Also ist wegen (5) $|m| = 1$. Daraus und aus (6) folgt aber

$$a\, \Gamma_\pi\, a^{-1} = \Gamma_\pi \,. \tag{7}$$

Aus (I) und (7) schließen wir nun mit Hilfe von Lemma Ib, daß A in der Tat ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist. q. e. d.

2. Fall. *Γ_π sei nicht abelsch.* Wir betrachten die Menge

$$\mathfrak{M} = \{S \mid S \in \Gamma_\pi \,, \quad 0<M[S]<2M[T]\} \,. \tag{8}$$

---

48) Vergleiche § 3, Nr. 6, V.

Wegen (1) und (3) ist

$$a^n\, T\, a^{-n} \in \Gamma_\pi \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\ . \tag{9}$$

Nach Satz 3, § 2 gilt außerdem

$$M\,[a^n T a^{-n}] = M\,[T] > 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\ . \tag{10}$$

Aus (8), (9) und (10) folgt jetzt

$$a^n\, T a^{-n} \in \mathfrak{M} \quad \text{für alle} \quad n \geq 1\ . \tag{11}$$

Da $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist, zerfällt die Menge $\mathfrak{M}$ nach Satz 2a, § 4 nur in endlich viele Klassen konjugierter Elemente von Γ_π. Von den unendlich vielen Elementen (11) müssen daher gewiß mindestens zwei in der gleichen Klasse liegen. Es gibt folglich zwei ganze Zahlen

$$j \geq 1\ , \quad k \geq 1 \tag{12}$$

und ein Element

$$U \in \Gamma_\pi \tag{13}$$

derart, daß

$$a^{j+k}\, T a^{-(j+k)} = U^{-1}\, a^k\, T a^{-k}\, U\ . \tag{14}$$

Wir setzen nun

$$H = a^k\, T a^{-k}\ . \tag{15}$$

Wegen (9), (10) und (12) gilt dann:

(II) H ist ein hyperbolisches Element von Γ_π.
Wir setzen ferner

$$d = U\, a^j\ . \tag{16}$$

Wegen (I) und (13) gilt dann

(III) d ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.
Aus (14), (15) und (16) ergibt sich

$$dH\, d^{-1} = H\ . \tag{17}$$

Aus (16) folgt wegen (3) und (12): $d\Gamma_\pi d^{-1} = U\, a^j\, \Gamma_\pi a^{-j}\, U^{-1} \subset U\, \Gamma_\pi U^{-1}$, also wegen (13)

$$d\Gamma_\pi\, d^{-1} \subset \Gamma_\pi\ . \tag{18}$$

Da die eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ_π nach Voraussetzung nicht abelsch ist, so folgt jetzt aus (II), (III), (17) und (18) nach Lemma II: $d\Gamma_\pi d^{-1} = \Gamma_\pi$. Daher ist wegen (16) $U a^j\, \Gamma_\pi a^{-j}\, U^{-1}$

$= \Gamma_\pi$, das heißt $a^j \Gamma_\pi a^{-j} = U^{-1} \Gamma_\pi U$, also wegen (13): $a^j \Gamma_\pi a^{-j} = \Gamma_\pi$. Hieraus und aus (4) und (12) ergibt sich $\Gamma_\pi \subset a\, \Gamma_\pi a^{-1}$. Daraus und aus (3) schließen wir endlich

$$a\, \Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi \ . \tag{19}$$

Aus (I) und (19) folgt nun nach Lemma Ib, daß A in der Tat ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist. Damit ist Lemma IV vollständig bewiesen.

§ 13. Beweis von Satz I

1. Da die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung nicht abelsch ist, so ist $\mathfrak{R}$ eine Fläche von hyperbolischem Typus [49]). Sei $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Dann gilt:

(I) Γ_π ist eine nichtabelsche eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$.

Wir wählen nun ein festes Element

$$H \in \Phi_\pi(W) \ . \tag{1}$$

Da nach Voraussetzung W nicht die Nullklasse von $\mathfrak{R}$ ist, gilt:

(II) $H \in \Gamma_\pi$ ist ein hyperbolisches oder parabolisches Element.

Nun sei $\mathfrak{a}$ die Menge aller Bewegungen a von $\mathfrak{L}$, welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

$$a\, H\, a^{-1} = H \quad , \tag{2}$$

$$a\, \Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi \ . \tag{3}$$

Dann folgt aus (I) und (II) nach Lemma II, § 12:

(III) $\mathfrak{a}$ ist eine zyklische Gruppe von unendlicher Ordnung.

2. Es sei jetzt $a \in \mathfrak{a}$. Überlagern die Punkte $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathfrak{L}$ beide denselben Punkt $p \in \mathfrak{R}$, so gibt es ein $S \in \Gamma_\pi$ derart, daß $\zeta_2 = S(\zeta_1)$. Wegen (3) gibt es nun ein solches $T \in \Gamma_\pi$, daß $aS = Ta$. Dann ist aber $\pi(a(\zeta_2)) = \pi(a(S(\zeta_1))) = \pi(Ta(\zeta_1)) = \pi(a(\zeta_1))$, das heißt $\pi(a(\zeta))$ hat für alle $\zeta \in \mathfrak{L}$ mit dem gleichen Spurpunkt $p = \pi(\zeta)$ den gleichen Wert. Daher gilt:

(IV) Ist $a \in \mathfrak{a}$, so ist

$$a^*(p) = \pi(a(\zeta)) \ , \qquad \zeta \in \mathfrak{L} \ , \qquad \pi(\zeta) = p \in \mathfrak{R}$$

---

[49]) Vergleiche § 3, Nr. 6, IV.

eine eindeutige analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Wir zeigen nun:

(V) Ist $a \in \mathfrak{a}$, so ist $a^* \in \mathfrak{W}$.

Beweis. Aus der Definition (IV) von a^* folgt, daß a als eine durch a^* induzierte Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich aufgefaßt werden kann. Sei nun $\alpha \in \mathfrak{E}_{a^*}$ der dann zu a gehörige Endomorphismus von Γ_π. Nach Satz 6′ a, § 3 gilt: $\alpha(S) = a\,S\,a^{-1}$ für alle $S \in \Gamma_\pi$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $\alpha(H) = H$. Daraus und aus (1) folgt aber nach Satz 6′ d, § 3, daß die Abbildung a^* von $\mathfrak{R}$ in sich die Wegklasse W festläßt. Da die durch a^* induzierte Abbildung a eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ ist, so ist wegen (3) und Lemma I b a^* außerdem ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$. Folglich ist in der Tat $a^* \in \mathfrak{W}$. q. e. d.

Nun zeigen wir:

(VI) Zu jedem Automorphismus $B \in \mathfrak{W}$ gibt es eine Bewegung $a \in \mathfrak{a}$ derart, daß $a^* = B$.

Beweis. Es sei $B \in \mathfrak{W}$, b eine durch B induzierte Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich und $\beta \in \mathfrak{E}_B$ der zu b gehörige Endomorphismus von Γ_π. Nach Lemma I a ist b eine Bewegung von $\mathfrak{L}$. Daher folgt aus Satz 6′ a, § 3:

$$\beta(S) = b\,S\,b^{-1} \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \; . \tag{4}$$

Nach Lemma I a ist ferner $\beta \in \mathfrak{E}_B$ ein Automorphismus von Γ_π; folglich ist wegen (4)

$$b\,\Gamma_\pi\,b^{-1} = \Gamma_\pi \; . \tag{5}$$

Da $B \in \mathfrak{W}$ die Wegklasse W festläßt, so folgt aus (1) nach Satz 6′ d, § 3: $\beta(H) \in \Phi_\pi(W)$. Daher gibt es wegen (1) ein

$$T \in \Gamma_\pi \tag{6}$$

derart, daß $\beta(H) = T^{-1}HT$, also wegen (4)

$$b\,H\,b^{-1} = T^{-1}HT \; . \tag{7}$$

Dann ist offenbar

$$a = Tb \tag{8}$$

eine Bewegung von $\mathfrak{L}$ und es folgt aus (7) und (8):

$$a\,H\,a^{-1} = H \; . \tag{9}$$

Aus (5) und (8) folgt ferner $a\,\Gamma_\pi a^{-1} = Tb\,\Gamma_\pi b^{-1}T^{-1} = T\,\Gamma_\pi T^{-1}$, also wegen (6):

$$a\,\Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi \ . \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt jetzt

$$a \in \mathfrak{a} \ . \tag{11}$$

Ist $\zeta \in \mathfrak{L}$, $p = \pi(\zeta)$, so ist daher nach (8) und (IV):

$$a^*(p) = \pi\bigl(a(\zeta)\bigr) = \pi\bigl(Tb(\zeta)\bigr) \ ,$$

also wegen (6): $a^*(p) = \pi\bigl(b(\zeta)\bigr)$. Da aber b durch B induziert wird, so ist $\pi\bigl(b(\zeta)\bigr) = B\bigl(\pi(\zeta)\bigr) = B(p)$. Folglich ist

$$a^*(p) = B(p) \ . \tag{12}$$

Die Aussagen (11) und (12) bestätigen nun die Behauptung (VI). Wir zeigen noch

(VII) Ist $a_1 \in \mathfrak{a}$, $a_2 \in \mathfrak{a}$, so ist $(a_1 a_2)^* = a_1^* a_2^*$.

Beweis. Es ist $a_1 a_2 \in \mathfrak{a}$. Ist nun $\zeta \in \mathfrak{L}$, $p = \pi(\zeta)$, so folgt nach (IV): $(a_1 a_2)^*(p) = \pi\bigl(a_1 a_2(\zeta)\bigr) = \pi\bigl(a_1(a_2(\zeta))\bigr) = a_1^*\bigl(\pi(a_2(\zeta))\bigr) = a_1^*\bigl(a_2^*(\pi(\zeta))\bigr) = a_1^* a_2^*(p)$. q. e. d.

Aus (V), (VI) und (VII) folgt jetzt:

(VIII) Die durch (IV) definierte Zuordnung

$$a \to a^* \in \mathfrak{W} \ , \qquad a \in \mathfrak{a}$$

ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{a}$ *auf* $\mathfrak{W}$.

3. Es sei nun $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$ der Kern dieses Homomorphismus. Wir zeigen, daß

$$H \in \mathfrak{k} \ . \tag{13}$$

In der Tat: Offenbar ist $H \in \mathfrak{a}$. Weil aber H eine Decktransformation von $(\mathfrak{L}, \pi)$ ist, so folgt nach (IV), daß H^* die identische Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf sich ist. Daher ist $H \in \mathfrak{k}$. q. e. d.

Weil nun nach (III) $\mathfrak{a}$ eine zyklische Gruppe unendlicher Ordnung ist und weil die Untergruppe $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{a}$ wegen (II) und (13) nicht aus der Identität allein besteht, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{a}/\mathfrak{k}$ eine zyklische Gruppe von endlicher Ordnung. Aus (VIII) folgt aber nach einem bekannten Homomorphiesatze, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{a}/\mathfrak{k}$ isomorph ist zur Gruppe $\mathfrak{W}$. Daher ist auch $\mathfrak{W}$ eine zyklische Gruppe von endlicher Ordnung. Damit ist Satz I bewiesen.

§ 14. Beweis von Satz II

Da die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ nichtabelsch ist, so ist $\mathfrak{R}$ von hyperbolischem Typus[50]). Sei $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Dann gilt:

(I) Γ_π ist eine nichtabelsche eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe von $\mathfrak{L}$.

Es sei

$$H \in \Phi_\pi[p(t)] \ . \tag{1}$$

Dann ist nach Voraussetzung:

$$M[H] > 0 \ . \tag{2}$$

Sei nun a eine durch A induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich und $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ der zu a gehörige Endomorphismus von Γ_π. Da nach Voraussetzung $A(p(t)) \sim p(t)$ ist, so folgt aus (1) nach Satz 6′ d, § 3: $\alpha(H) \in \Phi_\pi[p(t)]$. Wegen (1) gibt es daher ein solches

$$T \in \Gamma_\pi \ , \tag{3}$$

daß

$$\alpha(H) = T^{-1} H T \ . \tag{4}$$

Hieraus folgt nach Satz 3, § 2: $M[\alpha(H)] = M[H]$. Daraus und aus (2) folgt aber nach Lemma IIIb:

(II) Die durch A induzierte Abbildung a ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

Daher folgt jetzt aus Satz 6′ a, § 3:

$$\alpha(S) = a\, S\, a^{-1} \in \Gamma_\pi \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \ . \tag{5}$$

Es ist also insbesondere

$$a\, \Gamma_\pi\, a^{-1} \subset \Gamma_\pi \tag{6}$$

und wegen (4) ist

$$a\, H\, a^{-1} = T^{-1} H T \ . \tag{7}$$

Setzen wir nun

$$d = T a \ , \tag{8}$$

so folgt aus (3) und (II):

(III) d ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

Aus (7) und (8) folgt:

$$d H d^{-1} = H \ . \tag{9}$$

---

[50]) Vergleiche § 3, Nr. 6, IV.

Aus (6) und (8) ergibt sich $d\Gamma_\pi d^{-1} = Ta\Gamma_\pi a^{-1}T^{-1} \subset T\Gamma_\pi T^{-1}$, also wegen (3):

$$d\Gamma_\pi d^{-1} \subset \Gamma_\pi \; . \tag{10}$$

Aus (I), (III), (2), (9) und (10) folgt jetzt nach Lemma IIa $d\Gamma_\pi d^{-1} = \Gamma_\pi$. Wegen (8) ist daher $Ta\Gamma_\pi a^{-1}T^{-1} = \Gamma_\pi$, das heißt $a\Gamma_\pi a^{-1} = T^{-1}\Gamma_\pi T$, also wegen (3)

$$a\,\Gamma_\pi a^{-1} = \Gamma_\pi \; . \tag{11}$$

Aus (II) und (11) folgt jetzt nach Lemma Ib, daß A in der Tat ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist. Weil aber die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ nichtabelsch ist und weil der Automorphismus A die durch $p(t)$ repräsentierte (von der Nullklasse verschiedene) Wegklasse festläßt, so ist der Automorphismus A nach Satz I sogar periodisch. Damit ist Satz II bewiesen.

§ 15. Beweis von Satz III

1. Wir zeigen zunächst

(I) Der Weg $p(t)$ ist nicht parabolisch.

Wir erbringen den Beweis indirekt, indem wir die Annahme, $p(t)$ sei ein parabolischer Weg, ad absurdum führen. Sei $(\mathfrak{L}, \pi_1)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Ist nun $p(t)$ ein parabolischer Weg, so kann offenbar die Projektion π_1 so gewählt werden, daß ein Element

$$P \in \Phi_{\pi_1}[p(t)] \tag{1}$$

die Gestalt

$$P(\zeta) = \zeta \pm 2\pi \tag{2}$$

erhält [51]). Nach Voraussetzung ist $A(p(t)) \sim p^{-1}(t)$. Daraus und aus (1) folgert man leicht [52]): Es gibt eine solche durch A induzierte analytische Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich, daß für den zu a gehörigen Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ gilt: $\alpha(P) = P^{-1}$. Daraus und aus Satz 6′ a, § 3 folgt: $a(P(\zeta)) = P^{-1}(a(\zeta))$, also wegen (2):

$$a(\zeta + 2\pi) = a(\zeta) - 2\pi \; . \tag{3}$$

Aus (3) schließt man nun sofort

---

[51]) Dies folgt sofort aus Satz 1, Satz 4, § 3; Satz 2, § 1 und aus der Tatsache, daß es zu jeder parabolischen Bewegung S eine solche Bewegung G von L gibt, daß die Bewegung $P = GSG^{-1}$ die Gestalt $P(\zeta) = \zeta \pm 2\pi$ erhält.

[52]) Vergleiche dazu § 3, Nr. 4, V und Satz 5, Satz 6′, § 3.

(a) $\varphi(z) = e^{i\alpha(-i\log z)}$ ist eine (eindeutige!) analytische Abbildung der punktierten Kreisscheibe $\mathfrak{k}$: $0<|z|<1$ in sich. Aus (3) und (a) folgt ferner

(b) Der Weg $z(t) = \varphi(\frac{1}{2}e^{2\pi i t})$, $0 \leq t \leq 1$, ist ein geschlossener Weg in $\mathfrak{k}$: $0<|z|<1$ mit der Umlaufszahl -1 um den Punkt $z = 0$.

Andererseits folgert man aus (a) mit Hilfe des klassischen Satzes von Casorati-Weierstraß:

(c) Es gibt eine solche komplexe Zahl z_0, daß die Abbildung

$$\varphi^*(z) = \varphi(z) \quad \text{für} \quad 0<|z|<1 \ , \qquad \varphi^*(0) = z_0$$

eine analytische Abbildung der vollen Kreisscheibe $|z|<1$ in sich ist.

Die Aussagen (b) und (c) stehen nun aber offensichtlich zueinander im Widerspruch. Folglich kann der Weg $p(t)$ nicht parabolisch sein. q. e. d.

2. Da der Weg $p(t)$ nach Voraussetzung nicht nullhomotop auf $\mathfrak{R}$ ist, so folgt aus (I), daß $p(t)$ ein hyperbolischer Weg ist. Dann kann man aber die Projektion π_1 so wählen, daß ein Element

$$H \in \Phi_{\pi_1}[p(t)] \tag{4}$$

die Gestalt

$$H(\zeta) = \lambda \cdot \zeta \ , \qquad \lambda > 0 \ , \qquad \lambda \neq 1 \tag{5}$$

erhält. Offenbar ist

$$M[H] > 0 \ . \tag{6}$$

Nach Voraussetzung ist $A(p(t)) \sim p^{-1}(t)$. Daraus und aus (4) schließt man wieder leicht: Es gibt eine solche durch A induzierte analytische Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich, daß für den zu a gehörigen Endomorphismus $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ gilt:

$$\alpha(H) = H^{-1} \ . \tag{7}$$

Daraus folgt nach Satz 5, § 2: $M[\alpha(H)] = M[H^{-1}] = M[H]$, also wegen (6): $M[\alpha(H)] = M[H] > 0$. Daraus folgt aber nach Lemma IIIb

(II) Die durch A induzierte Abbildung a von $\mathfrak{L}$ in sich ist eine Bewegung von $\mathfrak{L}$.

Daraus und aus Satz 6′ a, § 3, folgt nun:

$$\alpha(S) = a\,S\,a^{-1} \in \Gamma_{\pi_1} \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_{\pi_1} \ . \tag{8}$$

Es ist also insbesondere

$$a\,\Gamma_{\pi_1}\,a^{-1} \subset \Gamma_{\pi_1} \tag{9}$$

und daher

$$a^2\, \Gamma_{\pi_1}\, a^{-2} \subset a\, \Gamma_{\pi_1}\, a^{-1} \ . \tag{10}$$

Aus (7) und (8) ergibt sich ferner: $a\, H\, a^{-1} = H^{-1}$. Daraus und aus (5) folgt aber nach Satz 7, § 2:

$$a(\zeta) = -\frac{c}{\zeta}\,, \qquad c > 0 \ . \tag{11}$$

Daher ist $a^2(\zeta) \equiv \zeta$ und folglich $a^2\, \Gamma_{\pi_1}\, a^{-2} = \Gamma_{\pi_1}$. Hieraus und aus (10) folgt aber: $\Gamma_{\pi_1} \subset a\, \Gamma_{\pi_1}\, a^{-1}$. Daraus und aus (9) ergibt sich:

$$a\, \Gamma_{\pi_1}\, a^{-1} = \Gamma_{\pi_1} \ . \tag{12}$$

Aus (II) und (12) folgt nun nach Lemma Ib:

(III) A ist ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$.

Da nach (11) $a^2(\zeta) = \zeta$ ist und weil a eine durch A induzierte Abbildung ist, so gilt für alle $\zeta \in \mathfrak{L}$: $\pi_1(\zeta) = \pi_1(a^2(\zeta)) = \pi_1(a(a(\zeta))) = A(\pi_1(a(\zeta))) = A(A(\pi_1(\zeta))) = A^2(\pi_1(\zeta))$. Daraus folgt aber:

(IV) A besitzt die Periode 2.

Wir zeigen noch:

(V) Der Punkt $p_0 = \pi_1(i\sqrt{c}) \in \mathfrak{R}$ ist Fixpunkt von A.

In der Tat: Aus (11) folgt $a(i\sqrt{c}) = i\sqrt{c}$. Daher ist $A(p_0) = A(\pi_1(i\sqrt{c})) = \pi_1(a(i\sqrt{c})) = \pi_1(i\sqrt{c}) = p_0$. q. e. d.

Aus (III), (IV) und (V) ergibt sich nun aber unser Satz III.

§ 16. Beweis von Satz IV

1. Sei $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Die eigentlich diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ_π enthält keine elliptischen Bewegungen und ist nach Voraussetzung nichtabelsch. Daher gibt es nach Satz 9, § 2 mindestens ein Element $V \in \Gamma_\pi$ derart, daß $M[V] > 0$. Nun betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{B} = \{S \mid S \in \Gamma_\pi,\, 0 < M[S] < 2M[V]\} \ . \tag{1}$$

Dann ist offenbar

$$V \in \mathfrak{B} \ . \tag{2}$$

Weil $\mathfrak{R}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist, so zerfällt $\mathfrak{B}$ nach Satz 2a, § 4 in höchstens endlich viele Klassen konjugierter Elemente. Da $\mathfrak{B}$ wegen (2) gewiß nicht leer ist, so ist die Anzahl n dieser Klassen

≥ 1. Wir denken uns nun diese $n \geq 1$ Klassen in einer beliebigen (aber festen) Reihenfolge numeriert: $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \overset{n}{\underset{i=1}{U}} \mathfrak{K}_i \;, \quad n \geq 1 \;, \quad \mathfrak{K}_i \frown \mathfrak{K}_k = 0 \quad \text{für} \quad i \neq k \;. \tag{3}$$

Zu jedem $S \in \mathfrak{B}$ gibt es nun einen eindeutig bestimmten Index $j = j[S]$, $1 \leq j[S] \leq n$, derart, daß

$$S \in \mathfrak{K}_{j[S]} \;. \tag{4}$$

2. Es sei $\mathfrak{M}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis n. Wir wollen nun jedem analytischen Automorphismus $A \in \mathfrak{A}$ eine Abbildung σ_A von $\mathfrak{M}_n$ in sich zuordnen: Sei $i \in \mathfrak{M}_n$, $S_i \in \mathfrak{K}_i$, $A \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathfrak{E}_A$. Nach Lemma IIIc ist $M[\alpha(S_i)] = M[S_i]$. Folglich ist $\alpha(S_i) \in \mathfrak{B}$ und daher $j[\alpha(S_i)] \in \mathfrak{M}_n$. Offenbar ist $j[\alpha(S_i)]$ unabhängig von der speziellen Wahl des Repräsentanten $S_i \in \mathfrak{K}_i$ und unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\alpha \in \mathfrak{E}_A$. Jetzt definieren wir:

$$\sigma_A(i) = j[\alpha(S_i)] \;, \quad i \in \mathfrak{M}_n \;, \quad S_i \in \mathfrak{K}_i \;, \quad \alpha \in \mathfrak{E}_A \;. \tag{5}$$

Damit haben wir nun in der Tat jedem $A \in \mathfrak{A}$ in eindeutiger Weise eine Abbildung σ_A von $\mathfrak{M}_n$ in sich zugeordnet. Aus (4) und (5) folgt noch

$$\sigma_A(j[S]) = j[\alpha(S)] \quad \text{für alle} \quad S \in \mathfrak{B} \;, \quad \alpha \in \mathfrak{E}_A \;. \tag{6}$$

Wir zeigen jetzt:

(I) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so ist σ_A eine Permutation von $\mathfrak{M}_n$.

Beweis. Wir müssen offenbar nur noch zeigen, daß aus $\sigma_A(i) = \sigma_A(k)$ stets $i = k$ folgt. Sei also $i, k \in \mathfrak{M}_n$, $S_i \in \mathfrak{K}_i$, $S_k \in \mathfrak{K}_k$ und $\sigma_A(i) = \sigma_A(k)$. Dann ist nach (5) $j[\alpha(S_i)] = j[\alpha(S_k)]$; das heißt die Elemente $\alpha(S_i)$ und $\alpha(S_k)$ sind konjugiert. Es gibt also ein $T \in \Gamma_\pi$ derart, daß

$$\alpha(S_i) = T^{-1}\alpha(S_k)T \;. \tag{7}$$

Da aber A ein Automorphismus der Fläche $\mathfrak{R}$ ist, so ist $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ nach Lemma Ia ein Automorphismus von Γ_π. Es gibt daher ein solches $S \in \Gamma_\pi$, daß $\alpha(S) = T$ ist. Dann ist wegen (7):

$$\alpha(S_i) = [\alpha(S)]^{-1} \cdot \alpha(S_k) \cdot \alpha(S) = \alpha(S^{-1}S_kS) \;. \tag{8}$$

Weil aber α ein Automorphismus von Γ_π ist, so folgt aus (8): $S_i = S^{-1}S_kS$; daher ist in der Tat $i = k$. q. e. d.

Nun zeigen wir:

(II) Es ist $\sigma_{AB} = \sigma_A \cdot \sigma_B$ für alle $A, B \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Sei $i \in \mathfrak{M}_n$, $S_i \in \mathfrak{K}_i$, $\alpha \in \mathfrak{E}_A$, $\beta \in \mathfrak{E}_B$. Dann ist nach (5) $\sigma_B(i) = j[\beta(S_i)]$. Daraus und aus (6) folgt:

$$\sigma_A(\sigma_B(i)) = \sigma_A(j[\beta(S_i)]) = j[\alpha(\beta(S_i))] = j[\alpha\beta(S_i)] \; . \tag{9}$$

Andererseits ist nach Satz 7, § 3 $\alpha\beta \in \mathfrak{E}_{AB}$; daher ist nach (5): $\sigma_{AB}(i) = j[\alpha\beta(S_i)]$. Daraus und aus (9) folgt aber Behauptung (II). Aus (I) und (II) ergibt sich jetzt:

(III) Die durch (5) definierte Zuordnung

$$A \to \sigma_A \;, \quad A \in \mathfrak{A}$$

ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ *auf* eine Untergruppe $\mathfrak{S}$ der symmetrischen Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ von $\mathfrak{M}_n$.

3. Wir betrachten jetzt die Menge

$$\mathfrak{A}^* = \{A \mid A \in \mathfrak{A}, \sigma_A(1) = 1\} \; . \tag{10}$$

Wegen (III) ist $\mathfrak{A}^*$ offenbar eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$. Wir zeigen:

(IV) Jeder Automorphismus $A \in \mathfrak{A}^*$ läßt die von der Nullklasse verschiedene Wegklasse $\Phi_\pi^{-1}(\mathfrak{K}_1)$ fest.

Beweis. Daß die Wegklasse $\Phi_\pi^{-1}(\mathfrak{K}_1)$ nicht die Nullklasse von $\mathfrak{R}$ ist, folgt sofort aus (1) und (3). — Es sei nun $p(t)$ ein Repräsentant der Wegklasse $\Phi_\pi^{-1}(\mathfrak{K}_1)$. Es sei ferner $\alpha \in \mathfrak{E}_A$ und $S_1 \in \mathfrak{K}_1 = \Phi_\pi[p(t)]$. Dann ist nach Satz 6′ d, § 3:

$$\alpha(S_1) \in \Phi_\pi[A(p(t))] \; . \tag{11}$$

Da nach Voraussetzung $\sigma_A(1) = 1$ ist, so ist nach (5) $j[\alpha(S_1)] = 1$, das heißt $\alpha(S_1) \in \mathfrak{K}_1$. Daraus und aus (11) folgt aber $\Phi_\pi[A(p(t))] = \mathfrak{K}_1$, das heißt $A(p(t)) \in \Phi_\pi^{-1}(\mathfrak{K}_1)$. A läßt also in der Tat die Wegklasse $\Phi_\pi^{-1}(\mathfrak{K}_1)$ fest. q. e. d.

Weil die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{R}$ nach Voraussetzung nichtabelsch ist, so folgt jetzt aus (IV) und Satz I:

(V) $\mathfrak{A}^*$ ist eine Gruppe von endlicher Ordnung.

4. Es sei nun $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{A}$ der Kern des Homomorphismus (III). Aus der Definition (10) von $\mathfrak{A}^*$ folgt sofort: $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{A}^*$. Hieraus und aus (V) schließen wir:

(VI) $\mathfrak{k}$ ist eine Gruppe von endlicher Ordnung.

Aus (III) folgt nach einem bekannten Homomorphiesatze, daß die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{k}$ isomorph ist zur Gruppe $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_n$. $\mathfrak{S}$ ist aber gewiß eine Gruppe von endlicher Ordnung. Daher ist auch die Ordnung der Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{k}$ endlich. Es gilt also:

(VII) $\mathfrak{k}$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathfrak{A}$.

Aus (VI) und (VII) folgt nun sofort: $\mathfrak{A}$ ist eine Gruppe von endlicher Ordnung. Damit ist unser Satz IV bewiesen.

§ 17. Beweis von Satz V

Auf Grund von Satz 6′ d und Satz 7, § 3 überlegt man sich leicht, daß Satz V bewiesen sein wird, wenn wir den folgenden Satz beweisen können:

Satz V′. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum; $(\mathfrak{L}, \pi)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Γ_π enthalte keine parabolischen Decktransformationen. Dann gibt es auf Γ_π eine ganzzahlige Klassenfunktion $n(S)$, $(1 \leq n(S) < \infty$ für alle $S \in \Gamma_\pi)$, derart, daß gilt: Ist die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ und ist $\alpha \in \mathfrak{E}_A$, so ist $\alpha^{n(S)}(S) = I$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

Beweis. Γ_π bestehe nicht aus der Identität I allein. (Sonst wäre offenbar nichts zu beweisen!) Weil $\mathfrak{R}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist und weil Γ_π keine parabolischen Decktransformationen enthält, so folgt aus Satz 2a, § 4 leicht: Die (abzählbar vielen) Klassen $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente von Γ_π können so numeriert werden, daß gilt:

$$\Gamma_\pi = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathfrak{K}_j \,, \qquad \mathfrak{K}_0 = \{I\} \,, \qquad \mathfrak{K}_i \cap \mathfrak{K}_j = 0 \qquad \text{für } i \neq j \,, \tag{1}$$

$$0 = M[\mathfrak{K}_0] < M[\mathfrak{K}_1] \,, \qquad M[\mathfrak{K}_j] \leq M[\mathfrak{K}_{j+1}] \qquad \text{für } j \geq 1 \,.$$

Dann gibt es zu jedem Element $S \in \Gamma_\pi$ einen eindeutig bestimmten Index $j = j(S) \geq 0$ derart, daß $S \in \mathfrak{K}_{j(S)}$; es ist insbesondere

$$j(S) = 0 \quad \text{dann und nur dann, wenn } S = I \,. \tag{2}$$

Jetzt definieren wir

$$n(S) = \mathrm{Max}\,[1, j(S)] \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \,. \tag{3}$$

$n(S)$ ist offensichtlich eine Klassenfunktion auf Γ_π und es ist $1 \leq n(S) < \infty$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

Es sei nun A eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich, aber kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$. Dann folgt aus Lemma IIIa und Lemma IV:

$$M[\alpha(S)] < M[S] \quad \text{für} \quad S \in \Gamma_\pi, \quad M[S] > 0 \;, \quad \alpha \in \mathfrak{E}_A . \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt jetzt:

$$\text{Ist} \quad j(S) > 0, \quad \text{so ist} \quad j(\alpha(S)) \leq j(S) - 1 . \tag{5}$$

Aus (2), (3) und (5) schließen wir nun: $j(\alpha^{n(S)}(S)) = 0$, also wegen (2): $\alpha^{n(S)}(S) = I$. Damit ist Satz V′ bewiesen.

§ 18. Beweis von Satz VI

I. Für den Beweis von Satz VI benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen. Wir beweisen zunächst

Satz 1. Es sei $\mathfrak{F}_g$ eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte $g \geq 2$. Dann gilt: Jede nichtkonstante analytische Abbildung von $\mathfrak{F}_g$ in sich ist ein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g$ [53]).

Beweis. 1. $\mathfrak{F}_g$, $(g \geq 2)$, ist eine Fläche von hyperbolischem Typus. Sei $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{F}_g$ und Γ_π Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. $\mathfrak{F}_g$ ist eine Fläche mit diskretem Modulspektrum und Γ_π enthält keine parabolischen Elemente [54]). Daher gibt es nach Satz V′, § 17 auf Γ_π eine Klassenfunktion $n(S)$ derart, daß gilt:

(a) Ist die analytische Abbildung A von $\mathfrak{F}_g$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g$ und ist $\alpha \in \mathfrak{E}_A$, so ist $\alpha^{n(S)}(S) = I$ für alle $S \in \Gamma_\pi$.

Γ_π besitzt als Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche ein endliches Erzeugendensystem $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$. Wir setzen nun

$$N = \operatorname{Max}[n(S_1), n(S_2), \ldots, n(S_r)] \; . \tag{1}$$

2. Es sei nun die analytische Abbildung A von $\mathfrak{F}_g$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g$. Wir haben zu zeigen, daß A konstant ist.

Sei $\alpha \in \mathfrak{E}_A$. Dann folgt aus (a) und (1):

$$\alpha^N(S_i) = I \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r \; . \tag{2}$$

---

[53]) Dieser Satz darf als bekannt gelten; er läßt sich nämlich unschwer aus der Hurwitzschen Theorie der Überlagerungsflächen einer geschlossenen Fläche folgern (vergleiche [6], speziell Formel (2), pag. 376). Wir möchten aber zeigen, daß sich dieser in den folgenden Untersuchungen benötigte Hilfssatz auch sehr leicht aus unseren bisherigen Resultaten ergibt.

[54]) Siehe Satz A_1' und Satz B_1'.

Da aber $\{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ ein Erzeugendensystem von Γ_π ist, so folgt aus (2) sogar

$$\alpha^N(S) = I \qquad \text{für alle} \qquad S \in \Gamma_\pi \ . \tag{3}$$

Es sei jetzt a eine durch A^N induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich; dann gilt

$$\pi(a(\zeta)) = A^N\,(\pi(\zeta)) \ . \tag{4}$$

Weil nach Satz 7, § 3 $\alpha^N \in \mathfrak{E}_{AN}$, so folgt aus (3) nach Satz 6′ a, § 3: $a(S(\zeta)) = a(\zeta)$ für alle $S \in \Gamma_\pi$. Daher ist

$$f(p) = a(\zeta) \ , \qquad p = \pi(\zeta) \in \mathfrak{F}_g \tag{5}$$

eine auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}_g$ überall eindeutige und reguläre analytische Funktion. $f(p)$ muß somit konstant sein. Wegen (4) und (5) muß daher auch die Abbildung A konstant sein. q. e. d.

II.

Definition 1. Eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ heiße „punktierte geschlossene Fläche vom Geschlechte g“, wenn es eine solche geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte g und einen solchen Punkt $p_0 \in \mathfrak{F}_g$ gibt, daß $\mathfrak{R}$ analytisch und topologisch auf $\mathfrak{F}_g - p_0$ abbildbar ist.

Satz 2. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche von hyperbolischem Typus und es gebe auf $\mathfrak{R}$ einen parabolischen Kommutatorweg $p(t)$. Dann ist $\mathfrak{R}$ eine punktierte geschlossene Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$.

Beweis. Aus der Existenz eines parabolischen Weges $p(t)$ auf der hyperbolischen Fläche $\mathfrak{R}$ folgt bekanntlich [55]:

(a) Es gibt eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$, einen Punkt $p_0 \in \mathfrak{F}$ und eine analytische Abbildung ψ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}$, welche $\mathfrak{R}$ topologisch auf $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} - p_0$ abbildet.

(b) Der Weg $p^*(t) = \psi(p(t))$ auf der Fläche $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} - p_0$ ist auf den isolierten Randpunkt $p_0 \in \mathfrak{F}$ von $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} - p_0$ reduzibel.

Weil nach Voraussetzung $p(t)$ ein Kommutatorweg auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ist und weil ψ eine topologische Abbildung von $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{F}^*$ ist, so gilt offenbar [56]:

(c) Der Weg $p^*(t) = \psi(p(t))$ ist ein Kommutatorweg auf der Fläche $\mathfrak{F}^*$.

---

[55]) Siehe zum Beispiel [10], pag. 418—420 und [8] pag. 139—140.

[56]) Vergleiche hierzu § 3, Nr. 4, VII und Satz 6, § 3.

Aus (b) und (c) folgert man aber leicht mit Hilfe von elementaren Tatsachen der Topologie:

(d) $\mathfrak{F}$ ist eine geschlossene Fläche.

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{R}$ eine Fläche von hyperbolischem Typus. Wegen (a) ist daher auch $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} - p_0$ eine Fläche von hyperbolischem Typus. Daraus und aus (d) folgt aber:

(*e*) Das Geschlecht von $\mathfrak{F}$ ist ≥ 1.

Aus (a), (d) und (e) folgt nun, daß $\mathfrak{R}$ in der Tat eine punktierte geschlossene Fläche vom Geschlechte $g \geq 1$ im Sinne der Definition 1 ist. q. e. d.

Satz 3. Es sei $\mathfrak{R}$ eine punktierte geschlossene Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und A eine nichtkonstante analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich. Dann ist A sogar ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$.

Beweis. 1. Nach Voraussetzung gibt es eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_g$ vom Geschlechte $g \geq 1$, einen Punkt $p_0 \in \mathfrak{F}_g$ und eine analytische Abbildung ψ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{F}_g$, welche $\mathfrak{R}$ topologisch auf $\mathfrak{F}_g - p_0$ abbildet. Dann gilt:

(a) $A_1 = \psi A \psi^{-1}$ ist eine analytische Abbildung von $\mathfrak{F}_g - p_0$ in sich.

Da $\mathfrak{F}_g$ eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $g \geq 1$ ist, so ist $\mathfrak{F}_g - p_0$ ein Gebiet von hyperbolischem Typus auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}_g$. Daher folgt aus (a) nach Satz 2, § 6 sofort: Es gibt einen Punkt $p_0^* \in \mathfrak{F}_g$ derart, daß gilt:

(b) Die Abbildung:

$$A^*(p) = A_1(p) \quad \text{für} \quad p \in \mathfrak{F}_g - p_0\,, \qquad A^*(p_0) = p_0^* \in \mathfrak{F}_g$$

ist eine analytische Abbildung von $\mathfrak{F}_g$ in sich.

Da nach Voraussetzung die Abbildung A nicht konstant ist, so ist offenbar A^* eine nichtkonstante analytische Abbildung von $\mathfrak{F}_g$ in sich. Daher ist $A^*(\mathfrak{F}_g)$ eine (nicht leere) offene Punktmenge auf $\mathfrak{F}_g$. Weil aber $\mathfrak{F}_g$ eine geschlossene Fläche ist, so ist die Punktmenge $A^*(\mathfrak{F}_g) \subset \mathfrak{F}_g$ zugleich abgeschlossen. Da aber $\mathfrak{F}_g$ zusammenhängend ist, so muß daher

$$A^*(\mathfrak{F}_g) = \mathfrak{F}_g \tag{1}$$

sein. Aus (a), (b) und (1) folgt jetzt:

(c) Es ist $A^*(p) = p_0 = p_0^*$ dann und nur dann, wenn $p = p_0$.

2. Wir zeigen jetzt:

(d) A^* ist ein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g$.

Beweis für $g \geq 2$. A^* ist eine nichtkonstante analytische Abbildung der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}_g$, $(g \geq 2)$, in sich. Also ist A^* nach Satz 1 in der Tat ein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g$. q. e. d.

Beweis für $g = 1$. Die komplexe Ebene $E: \ |\zeta| < \infty$ kann vermöge einer geeigneten Projektion $p = \pi(\zeta)$ zur universellen Überlagerungsfläche (E, π) von $\mathfrak{F}_1$ gemacht werden. Sei Γ_π die Fundamentalgruppe von (E, π). Dann hat bekanntlich jede Decktransformation $S \in \Gamma_\pi$ die Gestalt

$$S(\zeta) = \zeta + \omega_S \tag{2}$$

und $\Omega = \{\omega_S \mid S \in \Gamma_\pi\}$ ist ein zweigliedriger Modul mit einer Basis (ω_1, ω_2), deren Elemente linear unabhängig sind über dem Körper der reellen Zahlen. Es sei nun a^* eine durch A^* induzierte analytische Abbildung der Ebene $E: \ |\zeta| < \infty$ in sich und $\alpha^* \in \mathfrak{E}_{A^*}$ der zu a^* gehörige Endomorphismus von Γ_π. Dann gilt nach Satz 6′ a, § 3: $a^*(S(\zeta)) = T(a^*(\zeta))$, $T = \alpha^*(S)$, also wegen (2):

$$a^*(\zeta + \omega_S) = a^*(\zeta) + \omega_{\alpha^*(S)} \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_\pi \ .$$

Dieser Funktionalgleichung entnehmen wir sofort, daß die Ableitung $\frac{d}{d\zeta} a^*(\zeta)$ eine in der Ebene $|\zeta| < \infty$ regulär-analytische doppeltperiodische Funktion ist und daher konstant sein muß. Folglich ist

$$a^*(\zeta) = c\,\zeta + d \ . \tag{3}$$

Es sei nun $\zeta_0 \in E$, $\pi(\zeta_0) = p_0$. Dann folgt aus (c) sofort: Es ist $a^*(\zeta) \equiv a^*(\zeta_0) \bmod. \Omega$ dann und nur dann, wenn $\zeta \equiv \zeta_0 \bmod. \Omega$. Daraus und aus (3) ergibt sich: Es ist $c\,x \equiv 0 \bmod. \Omega$ dann und nur dann, wenn $x \equiv 0 \bmod. \Omega$. Hieraus und aus (3) folgt nun für beliebige $\zeta_1, \zeta_2 \in E$: Es ist $a^*(\zeta_1) \equiv a^*(\zeta_2) \bmod. \Omega$ dann und nur dann, wenn $\zeta_1 \equiv \zeta_2 \bmod. \Omega$. Dies bedeutet aber: Es ist $A^*(p_1) = A^*(p_2)$ dann und nur dann, wenn $p_1 = p_2$. Daraus und aus (1) folgt nun, daß A^* in der Tat ein Automorphismus von $\mathfrak{F}_1$ ist. q. e. d.

3. Aus (b), (c) und (d) schließen wir jetzt, daß A_1 ein Automorphismus von $\mathfrak{F}_g - p_0$ ist. Daher ist $A = \psi^{-1} A_1 \psi$ ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

III. Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen wenden wir uns nun zum Beweise von Satz VI. Es ist klar, daß ein Automorphismus einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ jeden nicht nullhomotopen geschlossenen Weg von $\mathfrak{R}$ auf einen ebensolchen Weg abbildet. Satz VI wird daher bewiesen sein, wenn wir den folgenden Satz beweisen können:

Satz VI'. Es sei $\mathfrak{R}$ eine Riemannsche Fläche mit diskretem Modulspektrum. $(\mathfrak{L}, \pi)$ sei universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$ und Γ_π die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$. Γ_π sei nichtabelsch. Dann gilt: Besteht die Endomorphismenklasse $\mathfrak{E}_A$ einer analytischen Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich aus Isomorphismen von Γ_π in sich, so ist A ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$.

Beweis. Es sei Γ^* die Kommutatorgruppe von Γ_π. Da Γ_π nach Voraussetzung nichtabelsch ist, so ist $\Gamma^* - I$ nicht leer. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall. Γ^* enthält parabolische Elemente.

Dann ist $\mathfrak{R}$ nach Satz 2 eine punktierte geschlossene Fläche vom Geschlechte $g \geq 1$. Da $\mathfrak{E}_A$ nach Voraussetzung aus Isomorphismen von Γ_π in sich besteht, so kann die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich gewiß nicht konstant sein. Folglich ist A nach Satz 3 ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$. q. e. d.

2. *Fall.* Γ^* enthält keine parabolischen Elemente.

Die nichtleere Menge $\Gamma^* - I$ enthält dann lauter hyperbolische Elemente. Weil $\mathfrak{R}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist, so gibt es daher nach Satz 2b, § 4 ein Element

$$S_0 \in \Gamma^* - I \tag{1}$$

derart, daß

$$M[S] \geq M[S_0] > 0 \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma^* - I\ . \tag{2}$$

Sei nun $\alpha \in \mathfrak{E}_A$. Da α nach Voraussetzung ein Isomorphismus von Γ_π in sich ist und weil $S_0 \neq I$ ist, so ist auch

$$\alpha(S_0) \neq I\ . \tag{3}$$

Nun ist aber bekanntlich die Kommutatoruntergruppe Γ^* eine vollinvariante Untergruppe von Γ_π. Daher folgt aus (1):

$$\alpha(S_0) \in \Gamma^*\ . \tag{4}$$

Aus (3) und (4) ergibt sich jetzt $\alpha(S_0) \in \Gamma^* - I$. Daher ist nach (2):

$$M[\alpha(S_0)] \geq M[S_0] > 0\ . \tag{5}$$

Andererseits gilt aber nach Lemma IIIa:

$$M[\alpha(S_0)] \leq M[S_0] \ . \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt nun

$$M[\alpha(S_0)] = M[S_0] > 0 \ . \tag{7}$$

Weil $\mathfrak{R}$ eine Fläche mit diskretem Modulspektrum ist, so folgt jetzt aus (7) nach Lemma IV, daß A in der Tat ein analytischer Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist. Damit ist Satz VI′ vollständig bewiesen.

§ 19. Beweis von Satz VII

I. Für den Beweis von Satz VII benötigen wir einige Begriffe und Hilfssätze aus Gruppentheorie und Topologie:

Definition 1. Es sei Γ eine beliebige Gruppe und Γ^* ihre Kommutatoruntergruppe. Dann verstehen wir unter dem Range $Rg(\Gamma)$ den in bekannter Weise definierten Rang der abelschen Faktorgruppe Γ/Γ^*.

Definition 2. Der Rang der Fundamentalgruppe einer Riemannschen Fläche heiße die Bettische Zahl der Fläche.

Satz 1 [57]). Die Fundamentalgruppe einer offenen Riemannschen Fläche ist stets eine freie Gruppe.

Satz 2 [58]). Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist selbst eine freie Gruppe.

Satz 3 [59]). Es seien Γ_1 und Γ_2 freie Gruppen und es sei $Rg(\Gamma_1) < \infty$. Es gebe einen Homomorphismus α von Γ_1 auf Γ_2. Dann gilt:

a) $Rg(\Gamma_2) \leq Rg(\Gamma_1)$.

b) Besteht der Kern von α nicht aus der Identität von Γ_1 allein, so ist sogar $Rg(\Gamma_2) < Rg(\Gamma_1)$.

II. Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum

Beweis von Satz VII. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall. $\mathfrak{R}$ sei eine geschlossene Fläche.

Da nach Voraussetzung der Typus von $\mathfrak{R}$ hyperbolisch ist, so ist $\mathfrak{R}$ in diesem Falle eine geschlossene Fläche vom Geschlechte $g \geq 2$. Ist

---

[57]) Siehe zum Beispiel [9], pag. 354—358.

[58]) [15] pag. 161—183.

[59]) [11] § 5, pag. 276—277.

nun die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$, so ist daher A nach Satz 1, § 18 eine konstante Abbildung. Folglich ist A^b trivialerweise analytisch nullhomotop. q. e. d.

2. Fall. $\mathfrak{R}$ sei eine offene Fläche.

1. Sei $(\mathfrak{L}, \pi)$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{R}$. Wir bezeichnen die Fundamentalgruppe von $(\mathfrak{L}, \pi)$ mit Γ_0. Dann ist nach Voraussetzung $1 \leq b = Rg(\Gamma_0) < \infty$. Weil $\mathfrak{R}$ offen ist, so gilt daher nach Satz 1:

(a) Γ_0 ist eine freie Gruppe vom endlichen Range $b \geq 1$. Da $\mathfrak{R}$ eine hyperbolische Fläche endlichen Zusammenhanges ist, so gilt nach Satz C:

(b) $\mathfrak{R}$ ist eine Fläche mit diskretem Modulspektrum.

2. Es sei jetzt $\alpha \in \mathfrak{E}_A$. Definieren wir

$$\Gamma_i = \alpha^i(\Gamma_0), \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

so gilt:

(c) Die Abbildung α ist ein Homomorphismus der Gruppe

$$\Gamma_i \text{ auf die Gruppe } \Gamma_{i+1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Ferner gilt offenbar:

$$\Gamma_{i+1} \subset \Gamma_i \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Da die Γ_i Untergruppen der freien Gruppe Γ_0 sind, so gilt nach Satz 2:

(d) Die Γ_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, sind freie Gruppen.

Nach Definition (1) ist α^i ein Homomorphismus von Γ_0 auf Γ_i; daher folgt aus (a) und (d) nach Satz 3a:

$$Rg(\Gamma_i) \leq b < \infty \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Hieraus und aus (c), (d) folgt wiederum nach Satz 3a:

$$0 \leq Rg(\Gamma_{i+1}) \leq Rg(\Gamma_i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Wir zeigen nun:

(e) Ist $Rg(\Gamma_i) \geq 1$, so besteht der Kern $K_i \subset \Gamma_i$ des Homomorphismus α von Γ_i auf Γ_{i+1} nicht aus der Identität allein.

Beweis. Wegen $Rg(\Gamma_i) \geq 1$ ist $\Gamma_i - I$ nicht leer. Ferner sind nach Voraussetzung alle Elemente von $\Gamma_i - I$ hyperbolische Decktransformationen. Daraus und aus (b) folgt nach Satz 2b, § 4: Es gibt ein Element

$$S_i \in \Gamma_i - I \tag{5}$$

derart, daß

$$M[S] \geq M[S_i] > 0 \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_i - I\ . \tag{6}$$

Da aber die analytische Abbildung A von $\mathfrak{R}$ in sich kein Automorphismus von $\mathfrak{R}$ ist und weil $M[S_i] > 0$ ist, so folgt aus (b) nach Lemma IIIa und Lemma IV:

$$M[\alpha(S_i)] < M[S_i]\ . \tag{7}$$

Andererseits ist wegen (c) und (5) $\alpha(S_i) \in \Gamma_{i+1}$, also wegen (2):

$$\alpha(S_i) \in \Gamma_i\ . \tag{8}$$

Aus (6), (7) und (8) schließen wir aber:

$$\alpha(S_i) = I\ . \tag{9}$$

Aus (5) und (9) folgt nun unsere Behauptung (e). q. e. d.

Aus (c), (d), (3) und (e) folgt jetzt nach Satz 3b:

(f) Ist $Rg(\Gamma_i) \geq 1$, so ist $Rg(\Gamma_{i+1}) < Rg(\Gamma_i)$.

Aus (a), (4) und (f) schließen wir nun: $Rg(\Gamma_b) = 0$. Daraus und aus (d) folgt aber, daß $\Gamma_b = \{I\}$ sein muß. Wegen (1) gilt daher:

$$\alpha^b(S) = I \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_0\ . \tag{10}$$

3. Es sei jetzt a eine durch A^b induzierte analytische Abbildung von $\mathfrak{L}$ in sich; dann gilt:

$$\pi(a(\zeta)) = A^b(\pi(\zeta))\ . \tag{11}$$

Da nach Satz 7, § 3 $\alpha^b \in \mathfrak{C}_{A^b}$, so folgt jetzt aus (10) nach Satz 6′ a, § 3:

$$a(S(\zeta)) = a(\zeta) \quad \text{für alle} \quad S \in \Gamma_0\ . \tag{12}$$

Es sei nun

$$\zeta_0 \in \mathfrak{L}\ , \qquad \pi(\zeta_0) = p_0 \in \mathfrak{R}\ , \tag{13}$$

Da die Halbebene $\mathfrak{L}$ ein konvexes Gebiet ist, so ist offenbar $(1 - t)\, a(\zeta) + t\, \zeta_0$ eine (stetige) Abbildung von $\mathfrak{L} \times \mathfrak{t}$ in $\mathfrak{L}$ [60]). Daraus und aus (12) folgt:

(g) $A(p, t) = \pi((1 - t)\, a(\zeta) + t\, \zeta_0)\ , \quad \zeta \in \mathfrak{L}\ , \quad p = \pi(\zeta) \in \mathfrak{R}$

ist eine eindeutige und stetige Abbildung von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{t}$ in $\mathfrak{R}$. Ferner gilt offenbar:

(h) Für jedes feste $t \in \mathfrak{t}$ ist $A(p, t)$ eine analytische Abbildung von $\mathfrak{R}$ in sich.

---

[60]) $\mathfrak{t}$ bedeute das Intervall $0 \leq t \leq 1$.

Wir zeigen noch:

(i) Es ist $A(p, 0) = A^b(p)$, $A(p, 1) = p_0$ für alle $p \in \mathfrak{R}$.

In der Tat folgt aus (g) und (11): $A(p, 0) = \pi(a(\zeta)) = A^b(\pi(\zeta)) = A^b(p)$; $A(p, 1) = \pi(\zeta_0)$, also wegen (13): $A(p, 1) = p_0$. q. e. d.

Aus (g), (h) und (i) folgt nun, daß die Abbildung A^b von $\mathfrak{R}$ in sich analytisch nullhomotop ist[61]). Damit ist Satz VII vollständig bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *C. Carathéodory*, Funktionentheorie (Birkhäuser, Basel 1950).

[2] *H. Cartan*, L'itération des transformations intérieures d'un domaine borné, Math. Z., Bd. 35 (1932).

[3] *Maurice H. Heins*, On the iteration of functions which are analytic and single valued in a given multiply-connected region, Amer. J. Math., t. 63 (1941).

[4] *Michel Hervé*, Quelques propriétés des transformations intérieures d'un domaine borné, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. 68 (1951).

[5] *Heinz Huber*, Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete, Compos. Math., vol. 9 (1951).

[6] *A. Hurwitz*, Mathematische Werke. Band I: Funktionentheorie (Birkhäuser, Basel 1932).

[7] *P. Koebe*, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV., Acta Math., Band 41 (1918).

[8] *P. Koebe*, Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Acta Math., Band 50 (1927).

[9] *P. Koebe*, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. Zweite Mitteilung. Sitzungsber. Preuß. Akad. 1928, XXIII.

[10] *P. Koebe*, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen. Vierte Mitteilung. Sitzungsber. Preuß. Akad. 1929, XXIII.

[11] *W. Magnus*, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Ann., Band 111 (1935).

[12] *J. Nielsen*, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Math., Band 50 (1927).

[13] *G. Pick*, Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, Math. Ann., Band 77 (1915).

[14] *H. Poincaré*, Sur un théorème de M. Fuchs, Acta Math., Bd. 7 (1885).

[15] *O. Schreier*, Die Untergruppen der freien Gruppen, Abhandlungen aus dem math. Seminar Hamburg 5.

[16] *H. A. Schwarz*, Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. II (Springer, Berlin 1890).

[17] *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche (Teubner, Leipzig 1913).

(Eingegangen den 22. August 1952.)

[61]) Es ist noch bemerkenswert, daß bei der Deformation (*g*) der Punkt $A(p, t)$ für jedes feste $p \in \mathfrak{R}$ eine analytische Bahnkurve auf $\mathfrak{R}$ beschreibt.

INHALTSVERZEICHNIS

Über die untere Grenze der Ordnung n-stufig nichtkommutativer Gruppen

Von I. Szélpál, Szeged (Ungarn)

In einer Arbeit[1]) hat *L. Rédei* die Stufenzahl n $(\geqq 0)$ der Nichtkommutativität für endliche Gruppen folgendermaßen definiert: Durch die Stufenzahl $n = 0$ sind die kommutativen Gruppen charakterisiert, und für eine beliebige Gruppe G soll n um 1 größer sein als das Maximum der Stufenzahlen der echten Untergruppen von G. Bezüglich dieser Stufenzahl will ich jetzt folgenden Satz beweisen:

[1]) *L. Rédei*, Das „schiefe Produkt" in der Gruppentheorie, Comment. Math. Helv. *20* (1947), 225—264.