Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Über das Typenproblem Riemann'scher Flächen.

Autor: Pfluger, Albert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21901

Über das Typenproblem Riemann'scher Flächen

Von Albert Pfluger in Zürich

Herr *H. L. Royden* hat kürzlich ein sehr schönes Kriterium für den hyperbolischen Typus einer Riemann'schen Fläche gegeben[1]). Um es anzudeuten, soll die Fläche F polygonal zerlegt und der entstehende Zellenkomplex mit K bezeichnet werden. Dieser bringt allerdings nur den topologischen Charakter der Fläche zum Ausdruck und ist daher für das Typenproblem als solcher nicht brauchbar. Es läßt sich aber die konforme Struktur lokal dadurch berücksichtigen, daß den Kanten σ_κ^1 des Komplexes K gewisse positive Zahlen g_κ als Gewichte zugeordnet werden. Das Royden'sche Kriterium lautet dann: *Gibt es auf K eine 1-Form*

$$X^1 = \Sigma\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^1 \quad mit \quad \sum_1^\infty g_\kappa\, x_\kappa^2 < \infty\,,$$

deren Korand auf einer einzigen 2-Zelle den Wert 1 hat und sonst überall verschwindet, so ist die Fläche vom hyperbolischen Typus.

Im Anschluß an diesen Satz wird im folgenden auch für den parabolischen Typus ein analoges Kriterium gegeben und gleichzeitig die Frage untersucht, wann das Typenproblem mit Hilfe des Komplexes K und der Gewichte g gelöst werden kann, die Kriterien also gleichzeitig notwendig und hinreichend sind.

Die Methode ist von derjenigen Roydens in einigen Punkten verschieden. Sie beruht auf der naheliegenden Idee, den Modul eines beliebigen Ringgebietes möglichst genau nach oben und unten abzuschätzen. Auf Grund einer Zellenzerlegung des Ringgebietes und zulässiger Kantengewichte werden algebraische Analoga zum konformen Modul definiert, nämlich ein algebraischer Modul und Komodul, die dann eine obere und untere Schranke für den Modul des Ringgebietes liefern. Entsprechend wird für einen zur Fläche F gehörigen Komplex K in Verbindung mit zulässigen Gewichten ein Typus und Kotypus definiert[2]), die dann ihrer-

---

[1]) H. L. Royden, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952) p. 40—94, insbes. p. 81—92

[2]) Für den Begriff des Typus eines 2-dim. Komplexes mit den Kantengewichten 1 vgl. auch Ch. Blanc, Comment. Math. Helv. 13 (1940/41), p. 54—67.

seits notwendige bzw. hinreichende Kriterien für den konformen Typus der Fläche ergeben. Es kann also das Typenproblem der Riemann'schen Flächen in einem gewissen Sinne algebraisiert werden.

1. Die offene Riemann'sche Fläche F werde durch eine wachsende Folge kompakter Teilflächen $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n \subset \ldots$ ausgeschöpft. Der Rand Γ_n von F_n soll aus endlich vielen stückweise analytischen Jordankurven bestehen und von F_n lauter nicht-kompakte Flächenstücke abschneiden. M_n bezeichne den Modul des Ringgebietes $(F_n - \bar{F}_0; \Gamma_0, \Gamma_n) = (\Gamma_0, \Gamma_n)$. Er ist eine monoton wachsende Gebietsfunktion und es ist der Grenzwert $\lim M_n = M_\infty$ unabhängig von der gewählten Ausschöpfung endlich oder unendlich. Im Falle $M_\infty < \infty \ (= \infty)$ heißt F vom *hyperbolischen* (*parabolischen*) *Typus* oder man sagt, es sei F *positiv*-(*null*-)*berandet*[3]).

Zur Abschätzung des Moduls M eines beliebigen Ringgebietes (Γ_0, Γ) nehmen wir irgendeine im Ringgebiet inklusive seinem Rand stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion u, die auf Γ verschwindet und auf Γ_0 gleich 1 ist, sowie die in (Γ_0, Γ) harmonische Funktion H mit den gleichen Randwerten wie u. Dann ist

$$M^{-1} = D(H) \leqq D(u)\,, \tag{1, 1}$$

wenn $D(u)$ das Dirichletintegral von u bezeichnet. (1, 1) liefert eine untere Schätzung von M.

Wir betrachten nun im Ringgebiet (Γ_0, Γ) Differentiale ω von erster Ordnung, durch lokale Parameter $z = x + iy$ dargestellt in der Form $p dx + q dy$, ihre konjugierten Differentiale $\omega^* = -q dx + p dy$, die äußern Produkte $\omega_1 \times \omega_2 = (p_1 q_2 - p_2 q_1)\, dx dy$ und äußern Ableitungen $d\omega = (q_x - p_y)\, dx dy$. Es wird $(\omega_1, \omega_2) = \int\limits_{(\Gamma_0, \Gamma)} \omega_1 \times \omega_2^*$ als inneres Produkt von ω_1 und ω_2 und die positive Quadratwurzel aus (ω, ω) als die Norm $\|\omega\|$ von ω definiert.

Wir setzen voraus, daß die ω in (Γ_0, Γ) inklusive Rand bis auf isolierte Punkte stetig und stückweise stetig differenzierbar sind. Die äußern Ableitungen $d\omega$ sollen überall in (Γ_0, Γ), wo sie definiert sind, verschwinden und $\int\limits_{\Gamma_0} \omega = \pm 1$ sein. Insbesondere ist $\varphi = M \cdot dH^*$ ein solches Differential. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$M = \|\varphi\|^2 \leqq \|\omega\|^2\,. \tag{1, $\bar{1}$}$$

[3]) R. Nevanlinna, Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A I Nr. 1 (1941).

Denn die Gleichung $M = ||\varphi||^2$ folgt unmittelbar aus (1,1) und wegen der Green'schen Formel ist $(\varphi, \omega - \varphi) = M(dH, \omega^* - \varphi^*) = M \cdot \int\limits_{\Gamma_0 + \overline{\Gamma}} H(\omega - \varphi) = 0$ und daher $||\omega||^2 = ||\varphi||^2 + ||\omega - \varphi||^2$. $(1, \overline{1})$ liefert eine obere Schätzung des Moduls.

2. Wir wollen nun ein algebraisches Analogon zum Typus einer Riemann'schen Fläche definieren. Es sei K ein zweidimensionaler orientierbarer und unendlicher Zellenkomplex; seine Ecken (0-Zellen) σ^0 bilden eine unendliche Menge, ebenso die Kanten (1-Zellen) σ^1, welche beliebig, aber fest orientiert sein sollen, und die Flächen (2-Zellen) σ^2, die kohärent orientiert seien. Wir betrachten unendliche Linearformen $X^p = \Sigma\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^p$ in den Unbestimmten σ_κ^p mit reellen Koeffizienten, die wir auch als p-dim. Ketten auffassen. Für zwei p-Formen $X^p = \Sigma\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^p$ und $Y^p = \Sigma\, y_\kappa\, \sigma_\kappa^p$ setzen wir $X^p(Y^p) = \sum\limits_1^\infty x_\kappa\, y_\kappa$ immer dann, wenn die Reihe endlich ist oder absolut konvergiert. Dadurch wird X^p zu einer p-Funktion der p-Ketten Y^p.

Rand und Korand einer Form X^p sollen wie üblich definiert sein. Der Rand ∂X^p ist eine $(p-1)$-Form mit $\partial X^p(\sigma^{p-1}) = X^p(\delta\sigma^{p-1})$ $p = 2, 1$; der Korand δX^p ist eine $(p+1)$-Form mit $\delta X^p(\sigma^{p+1}) = X^p(\partial\sigma^{p+1})$, $p = 1, 0$.

Für irgend zwei Formen X^p und Y^{p+1} $p = 0, 1$, gilt

$$\partial Y^{p+1}(X^p) = Y^{p+1}(\delta X^p), \qquad \delta X^p(Y^{p+1}) = X^p(\partial Y^{p+1}),$$

sobald X^p oder Y^{p+1} nur aus endlich vielen Gliedern besteht.

Es soll nun jeder Kante σ_κ^1 ein positives Gewicht g_κ zugeschrieben sein. Jeder 1-Form $X^1 = \Sigma\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^1$ sind dadurch zwei andere 1-Formen zugeordnet, nämlich ${}^+X^1 = \Sigma\, g_\kappa\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^1$ und ${}^*X^1 = \Sigma\, g_\kappa^{-1}\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^1$. Wir nennen ${}^*X^1$ die zur Funktion X^1 gehörige Kofunktion; dann ist X^1 die Kofunktion zu ${}^+X^1$. Wir werden also im folgenden eine 1-Form bald als Funktion und bald als Kofunktion auffassen und wollen Funktionen mit X^1 und Kofunktionen mit $\overline{X}^1$ kennzeichnen. Für zwei Funktionen X^1 und Y^1 definieren wir als inneres Produkt den Ausdruck

$$(X^1, Y^1) = X^1({}^*Y^1) = \sum_1^\infty g_\kappa^{-1}\, x_\kappa\, y_\kappa$$

(wenn die Reihe endlich ist oder absolut konvergiert) und entsprechend für zwei Kofunktionen $\overline{X}^1$ und $\overline{Y}^1$ den Ausdruck

$$(\overline{X}^1, \overline{Y}^1) = {}^+X^1(Y^1) = \sum_1^\infty g_\kappa\, x_\kappa\, y_\kappa\,.$$

Die positive Quadratwurzel aus (X^1, X^1) bzw. $(\bar{X}^1, \bar{X}^1)$ ist die Norm $\| X^1 \|$ von X^1 bzw. die Norm $\| \bar{X}^1 \|$ von $\bar{X}^1$. Die Gewichte g_κ spielen die Rolle einer Metrik, die dem Komplex aufgeprägt wurde. Wir sprechen deshalb von dem metrischen Komplex (K, g).

Definition 1. *Der metrische Komplex (K, g) ist vom hyperbolischen Typus, wenn auf K eine Funktion mit endlicher Norm existiert, deren Rand auf einer Ecke den Wert* 1 *hat und auf allen andern Ecken verschwindet. Im andern Falle ist (K, g) vom parabolischen Typus.*

Definition $\bar{1}$. *Der metrische Komplex (K, g) ist vom hyperbolischen Kotypus, wenn auf K eine Kofunktion mit endlicher Norm existiert, deren Korand auf einer Fläche den Wert* 1 *und auf allen andern Flächen den Wert* 0 *hat. Im andern Falle ist (K, g) vom parabolischen Kotypus.*

Bemerkung: Es lassen sich sehr leicht endliche Ketten A^1 angeben, deren Rand (Korand) in einer beliebigen Ecke (Fläche) den Wert 1, in einer beliebigen andern Ecke (Fläche) den Wert -1 hat und sonst überall verschwindet. Deshalb ist die Existenz einer Funktion (Kofunktion) von der beschriebenen Art nicht von der Wahl der Ecke (Fläche), worin der Rand (Korand) den Wert 1 hat, abhängig. Ebenso braucht man von der Funktion (Kofunktion) neben der Endlichkeit der Norm lediglich vorauszusetzen, daß ihr Rand (Korand) auf einer endlichen Menge von Ecken (Flächen) einen von 0 verschiedenen Wert hat und sonst überall verschwindet.

3. Der konforme Modul eines Ringgebietes besitzt algebraische Analoga, mit denen sich Typus und Kotypus eines metrischen Komplexes vollständig charakterisieren lassen. Es sei k ein endlicher Teilkomplex von K, d. h. eine endliche Menge von Flächen samt ihren Kanten und Ecken. Die innern Ecken von k sind jene σ^0, die nur mit Flächen auf k inzidieren. Die Randecken und Randkanten von k (kurz die Randelemente von k) sind jene σ^0 und σ^1 auf k, die auch an Flächen außerhalb k grenzen. Es sollen nun die beiden endlichen Teilkomplexe k_0 und k so beschaffen sein, daß alle Ecken von k_0 innere Ecken von k sind (wofür $k_0 \ll k$ geschrieben wird), und daß der Komplex der Flächen (und deren Kanten und Ecken), die nicht zu k (bzw. k_0) gehören, keine endliche Komponente besitzt. k_0^ν bezeichnet die Kette $\Sigma\, \sigma_\kappa^\nu$ mit $\sigma_\kappa^\nu \in k_0$.

Die Flächen, die zu k aber nicht zu k_0 gehören, erzeugen einen endlichen Teilkomplex, dessen Randelemente in zwei Klassen geteilt sind, nämlich die Randelemente von k_0 — „innere“ Randelemente genannt — und jene von k — die „äußern“ Randelemente. Wir nennen diesen Teilkomplex mit der angegebenen Klassifizierung seiner Randelemente in „innere“ und „äußere“ einen Ring und bezeichnen ihn mit (k_0, k). Diesem Ring auf (K, g) ordnen wir zwei Zahlen zu, einen Modul und einen Komodul.

(3.1) Es sei (X^1) die Klasse der Funktionen auf K mit $\partial X^1(k_0^0) = 1$ und $\partial X^1 = 0$ auf den innern Ecken von (k_0, k). Wir nennen die Größe

$$\mu = \underset{(X^1)}{\mathrm{Min}} \| X^1 \|^2 \tag{3.1}$$

den *Modul* des Ringes (k_0, k).

$(3.\bar{1})$ Es sei $(\bar{X}^1)$ die Klasse der Kofunktionen auf K mit $\delta \bar{X}^1(k_0^2) = 1$ und $\delta \bar{X}^1 = 0$ auf den Flächen von (k_0, k). Die Größe

$$\bar{\mu} = \underset{(\bar{X}^1)}{\mathrm{Min}} \| \bar{X}^1 \|^2 \tag{3.$\bar{1}$}$$

nennen wir den *Komodul* des Ringes (k_0, k). Die Extremalen dieser Variationsprobleme werden mit h^1 bzw. $\bar{h}^1$ bezeichnet und können folgendermaßen charakterisiert werden:

(3.2) Die 0-Form h^0 nehme in den σ^0 auf k_0 einen konstanten Wert m an, verschwinde außerhalb k und in seinen Randecken und genüge in den innern σ^0 von (k_0, k) der Bedingung $\partial^+\delta h^0 = 0$[4]. Die Konstante m sei ferner so gewählt, daß $\partial^+\delta h^0(k_0^0) = 1$ wird[5]. Dann ist $^+\delta h^0 = h^1$ die Extremale des ersten Variationsproblems und somit

$$\| h^1 \|^2 = \mu = m\,. \tag{3.2}$$

Beweis: Es ist $h^1 \epsilon (X^1)$ und $(X^1 - h^1, h^1) = {}^*h^1(X^1 - h^1) =$
$$\delta h^0(X^1 - h^1) = h^0(\partial X^1 - \partial h^1) = m\,[\partial X^1(k_0^0) - \partial h^1(k_0^0)] = 0\,,$$
also $\| X^1 \|^2 = \| h^1 \|^2 + \| X^1 - h^1 \|^2$ und somit $\| h^1 \|^2 = \mu$. Aus $\| h^1 \|^2 = h^1({}^*h^1) = \partial h^1(h^0)$ folgt schließlich $m = \mu$.

$(3.\bar{2})$ Die 2-Form h^2 nehme auf den σ^2 in k_0 einen konstanten Wert $\bar{m}$ an, verschwinde auf den Flächen außerhalb k und erfülle auf den σ^2 in (k_0, k) die Bedingung $\delta\, {}^*\partial h^2 = 0$. Die Konstante $\bar{m}$ sei noch so gewählt, daß $\delta\, {}^*\partial h^2(k_0^2) = 1$ ist. Dann ist $\bar{h}_1 = {}^*\partial h^2$ die Extremale des zweiten Variationsproblems und somit

$$\| \bar{h}^1 \|^2 = \bar{\mu} = \bar{m}\,. \tag{3.$\bar{2}$}$$

Der Beweis geht analog wie oben.

---

[4]) Für die Lösbarkeit dieses Randwertproblems vgl. B. Eckmann, Comment. Math. Helv. 17 (1944/45), p. 240—255.

[5]) Dies ist immer möglich, da $\| {}^+\delta h^0 \|^2 = m \cdot \partial^+\delta h^0(k_0^0)$ für $m \neq 0$ nicht verschwindet.

(3.3) Wir setzen $H^0 = h^0/\mu$ und $H^1 = {}^+\delta\, H^0$. H^0 nimmt in den σ^0 auf k_0 den Wert 1 an und verschwindet außerhalb k und in seinen Randecken.

Es ist
$$\| H^1 \|^2 = \mu^{-1}\,.$$

(3.$\overline{3}$) Analoges gilt für $H^2 = h^2/\overline{\mu}$.

(3.4) Ist der Ring (k_0', k') im Ring (k_0, k) enthalten, d. h. liegen die Flächen von k_0 in k_0' und die Flächen von k' in k, so ist $\mu' \leqq \mu$ und $\overline{\mu}' \leqq \overline{\mu}$. Beweis mit Hilfe der Minimaleigenschaft.

Es sei nun $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von K durch endliche Teilkomplexe von der Art, wie sie zu Beginn von Nr. 3 beschrieben wurden, mit $k_0 \ll k_1 \ll \ldots \ll k_n \ll \ldots$. μ_n bzw. $\overline{\mu}_n$ seien die Moduln bzw. die Komoduln der Ringe (k_0, k_n), $n = 1, 2, \ldots$. Wegen (3.4) ist unabhängig von der gewählten Ausschöpfung $\lim \mu_n < \infty$ oder $= \infty$ bzw. $\lim \overline{\mu}_n < \infty$ oder $= \infty$ und es gilt

Satz 1: *Der metrische Komplex* (K, g) *ist dann und nur dann vom hyperbolischen Typus (Kotypus), wenn* $\lim \mu_n < \infty (\lim \overline{\mu}_n < \infty)$ *ist.*

Beweis: 1. Es sei K vom hyperbolischen Typus, es existiere also eine Funktion X^1 mit $\| X^1 \| < \infty$, $\partial X^1(\sigma_1^0) = 1$ und
$$\partial X^1(\sigma_\kappa^0) = 0, \kappa = 2, 3, \ldots\,.$$
Wir wählen σ_1^0 in k_0. Dann ist wegen (3.1) $\mu_n \leqq \| X^1 \|^2$, also
$$\lim \mu_n < \infty\,.$$

2. Es sei nun umgekehrt $\lim \mu_n = \mu < \infty$. h_n^1 sei die Extremale für den Ring (k_0, k_n) (vgl. 3.2)). Dann gilt $\| h_n^1 \|^2 \uparrow \mu$ und $(h_m^1 - h_n^1, h_n^1) = 0$ für $m > n$, da h_m^1 Konkurrenzfunktion zu h_n^1 ist. Daraus folgt $\| h_m^1 - h_n^1 \|^2 = \| h_m^1 \|^2 - \| h_n^1 \|^2$ und somit $\lim\limits_{m,n\to\infty} \| h_m^1 - h_n^1 \| = 0$. Es existiert also, wie leicht gezeigt werden kann, eine Funktion h^1 von endlicher Norm, wogegen die h_n^1 auf jeder Kante konvergieren; also ist $\partial h^1(k_0^0) = 1$ und $\partial h^1 = 0$ in jeder Ecke außerhalb k_0. Gemäß der Bemerkung am Schluß von Nr. 2 ist also (K, g) vom hyperbolischen Typus. Für den Kotypus geht der Beweis analog.

Bemerkung: Bezeichnen wir den Modul von $(k_{\nu-1}, k_\nu)$ mit λ_ν, so gilt die Ungleichung
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \leqq \mu_n\,, \tag{3.5}$$
deren funktionentheoretisches Analogon unter dem Namen Superadditi-

vität des Moduls bekannt ist. Gemäß (3.1) ist nämlich die Extremale h_n^1 für (k_0, k_n) Konkurrenzfunktion für die zu $(k_{\nu-1}, k_\nu)$ gehörigen Extremalen, $\nu = 1, 2, \ldots n$. Ist l_ν die Anzahl der Kanten eines 1-Kozyklus im Ring $(k_{\nu-1}, k_\nu)$, der die innern Randelemente von den äußern trennt, und nehmen wir an, daß die Gewichte im metrischen Komplex (K, g) alle gleich 1 sind, so findet man leicht die Ungleichung $l_\nu^{-1} \leqq \lambda_\nu$. In diesem Falle ist also (K, g) sicher vom parabolischen Typus, wenn $\sum\limits_1^\infty l_\nu^{-1}$ divergiert. Dies ist das algebraische Analogon zum Kriterium von Wittich-Nevanlinna[6]) für den parabolischen Typus einer Riemann'schen Fläche. Analoges gilt für den Komodul und den Kotypus.

4. Zwischen den algebraischen Moduln eines Ringes auf (K, g) und dem konformen Modul des entsprechenden Ringgebietes (Nr. 1) soll nun die Verbindung hergestellt werden. Wir nennen die Kreisscheibe $|z| \leqq 1$ mit endlich vielen Randpunkten $e^{i\varphi_\kappa}, \kappa = 1, 2, \ldots n$ ein Normalpolygon P. Die $e^{i\varphi_\kappa}$ sind seine Ecken, die Kreisbogen $S_\kappa = \{e^{i\varphi}, \varphi_\kappa \leqq \varphi \leqq \varphi_{\kappa+1}\}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1$ seine Seiten. Wir geben uns auf den S_κ ein reelles Differential

$$\beta_\kappa = b_\kappa(\varphi)\, d\varphi, \quad \text{wo} \quad b_\kappa(\varphi) \quad \text{in} \quad \varphi_\kappa \leqq \varphi \leqq \varphi_{\kappa+1}$$

stetig ist und die Normierungsbedingung $\int\limits_{S_\kappa} \beta_\kappa = 1$ erfüllt. Durch n beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und die Festsetzung $\xi = x_\kappa \beta_\kappa$ auf S_κ, $\kappa = 1, 2, \ldots n$ wird auf der ganzen Peripherie $|z| = 1$ mit Ausnahme der Eckpunkte ein stetiges Differential ξ definiert. Es ist

$$\int\limits_{S_\kappa} \xi = x_\kappa \quad \text{und} \quad \int\limits_{|z|=1} \xi = 0\,,$$

sobald die Summe der $x_1, \ldots, x_n$ verschwindet. Daher existiert in P eine harmonische Funktion u mit $du = \xi$ in den innern Punkten der Seiten und endlichem Dirichlet-Integral $D(u)$. Es gibt ferner eine nur vom Normalpolygon P und den Differentialen β_κ abhängige Zahl $G(P, \beta)$, so daß

$$D(u) \leqq G \sum_1^n x_\kappa^2 \tag{4.1}$$

ist für jede Wahl der reellen Zahlen $x_1 \ldots x_n$, deren Summe verschwindet[7]).

Unter Polygon π auf der Riemann'schen Fläche F wollen wir das topo-

[6]) H. Wittich, Math. Z. 45 (1939). R. Nevanlinna, Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A I Nr. 54 (1940).

[7]) Für diesen und den nächsten Abschnitt vgl. auch H. L. Royden loc. citat.

logische Bild eines Normalpolygons P verstehen, das vermittels einer Abbildung erhalten wird, die auf P mit eventueller Ausnahme der Ecken konform ist. Die Bilder der Seiten und Ecken von P heißen entsprechend Seiten und Ecken von π. Durch solche Polygone soll nun die Fläche F polygonal zerlegt sein und der entstehende Zellenkomplex mit K bezeichnet werden. Auf jeder Kante σ_κ^1 wählen wir ein reelles Differential β_κ, das bei der Verpflanzung auf die Normalpolygone, die den beiden angrenzenden σ^2 entsprechen, von der oben beschriebenen Art sein soll. Dann gibt es zu jedem σ_j^2 ein positives Gewicht $G_j(\beta)$ von der folgenden Art: Ist $X^1 = \Sigma\, x_\kappa\, \sigma_\kappa^1$ irgendeine 1-Form auf K und ist $\delta X^1(\sigma_j^2) = 0$, so existiert auf σ_j^2 eine harmonische Funktion u_j mit $\omega_j = du_j = x_{\kappa_j}\, \beta_{\kappa_j}$ auf den Seiten $\sigma_{\kappa_j}^1$ von σ_j^2 und es ist gemäß (4.1)

$$\| \omega_j \|^2 = D(u_j) \leqq G_j(\beta) \sum_{(\kappa_j)} x_{\kappa_j}^2 \, . \tag{4.2}$$

Sind σ_i^2 und σ_j^2 die der Seite σ_κ^1 angrenzenden Flächen, so nennen wir

$$g_\kappa = G_i + G_j \tag{4.3}$$

ein zulässiges Gewicht für die Seite σ_κ^1 und die entsprechende Metrik (g) eine zulässige Metrik in bezug auf die Riemann'sche Fläche.

Einem Ring (k_0, k) auf K entspricht auf der Riemann'schen Fläche F ein Ringgebiet (Γ_0, Γ), dessen innere Kontur Γ_0 von den inneren Randelementen des Ringes (k_0, k) gebildet wird und entsprechend die äußere Kontur Γ durch die äußeren Randelemente von (k_0, k). Es gilt

Satz 2. *Zwischen dem Modul μ und dem Komodul $\overline{\mu}$ eines Ringes (k_0, k) auf dem metrischen Komplex (K, g) und dem Modul M des entsprechenden Ringgebietes (Γ_0, Γ) besteht die Ungleichung*

$$\mu \leqq M < \overline{\mu} \, . \tag{4.4}$$

Beweis: 1. Es sei $\overline{h}^1$ die dem Ring (k_0, k) entsprechende extremale Kofunktion im Variationsproblem $(3.\overline{1})$. $\delta \overline{h}^1$ verschwindet auf jedem σ_j^2 in (k_0, k) und daher existiert auf diesen σ_j^2 je ein harmonisches Differential $\omega_j = du_j$. Wegen der Randbedingungen ist $\omega_i = \omega_j = x_\kappa \beta_\kappa$ längs der Kante σ_κ^1, wenn ω_i und ω_j zu den mit σ_κ^1 inzidenten Flächen gehören. Die ω_j schließen sich also zu einem einzigen Differential ω zusammen, das überall im Ringgebiet (Γ_0, Γ) mit eventueller Ausnahme der Ecken stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Wegen $\int_{\sigma_\kappa^1} \omega = x_\kappa$ ist $\int_{\Gamma_0} \omega = 1$ und abgesehen von den Ecken und Kanten ist überall im Ringgebiet $d\omega = 0$. Gemäß $(1.\overline{1})$ ist daher $M \leqq \| \omega \|^2$. Berücksichtigen wir nun für jedes σ_j^2 in (k_0, k) die Ungleichung (4.2), so folgt wegen (4.3)

$$\| \omega \|^2 \leqq \sum_{(j)} G_j \left(\sum_{(\kappa_j)} x_{\kappa_j}^2\right) < \sum_{(\kappa)} g_\kappa x_\kappa^2 = \| \bar{h}^1 \|^2 = \bar{\mu} ,$$

wo j und κ die Indices der Flächen und Kanten auf (k_0, k) durchlaufen, κ_j dagegen die Indices der Kanten auf σ_j^2. Daraus ergibt sich $M \leqq \bar{\mu}$.

2. Es sei jetzt H^0 die in (3.3) definierte 0-Form in bezug auf den Ring (k_0, k) und $H^1 = {}^+\delta H^0$. Wegen $\delta\, {}^*H^1 = 0$ auf allen σ^2 des Ringes gehört zu dieser Funktion ${}^*H^1 = \Sigma\, y_\kappa\, \sigma_\kappa^1$ in jedem solchen σ_j^2 eine harmonische Funktion u_j, die am Rande noch stetig ist. Längs der Kante σ_κ^1, an welche die Fläche σ_i^2 und σ_j^2 angrenzen, ist $du_i = du_j = y_\kappa \beta_\kappa$. Die u_j sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wegen $\int_{\sigma_\kappa^1} du_j = x_\kappa$ längs jeder Randkante von σ_j^2 können diese additiven Konstanten so bestimmt werden, daß u_j in den Ecken auf σ_j^2 mit H^0 übereinstimmt. Daher schließen sich die u_j zu einer einzigen in (Γ_0, Γ) inklusive Rand stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktion u zusammen, die auf Γ_0 den Wert 1 annimmt und auf Γ verschwindet. Es ist also wegen (1.1) $D(u) \geqq M^{-1}$. Analog wie oben zeigt man, daß $D(u)$ $\leqq \sum_{(\kappa)} g_\kappa y_\kappa^2 = \| H^1 \|^2 = \dfrac{1}{\mu}$ und daher $\mu \leqq M$ ist.

5. Nachdem nun die Hauptungleichung (4.4) bewiesen ist, schöpfen wir den metrischen Komplex (K, g) wie in Nr. 3 durch eine wachsende Folge von Teilkomplexen k_n aus und in Verbindung mit Nr. 1 und Satz 1 folgt aus (4.4)

Satz 3 (*Hauptsatz*)*: Es sei die Riemann'sche Fläche F durch Polygone π polygonal zerlegt und der entstehende Zellenkomplex mit K bezeichnet. Auf den Kanten von K sei gemäß Nr. 4 ein Differential β und eine zulässige Metrik (g) gewählt. Ist dann der metrische Komplex (K, g) vom parabolischen Typus, so ist auch die Riemann'sche Fläche F vom parabolischen Typus. Ist dagegen (K, g) vom hyperbolischen Kotypus, so ist F vom hyperbolischen Typus*[8]).

Es lassen sich leicht metrische Komplexe angeben, wo $\lim \mu_n < \infty$, aber $\lim \bar{\mu}_n = \infty$ ist. In einem solchen Fall kann das Typenproblem für

[8]) Dieses Kriterium für den hyperbolischen Fall ist identisch mit dem in der Einleitung erwähnten Resultat von Royden, wenngleich zu sagen ist, daß er sein Kriterium auch für Zerlegungen in gewisse nichtkompakte Poygone bewiesen hat. Es ist leicht die vorliegende Methode auch auf diesen Fall auszudehnen, wenn es sich um den hyperbolischen Typus handelt, dagegen besteht im Falle des parabolischen Typus eine grundsätzliche Schwierigkeit, da von einer „uneigentlichen" Ecke, die einem logarithmischen Windungspunkt entspricht, unendlich viele Kanten ausgehen und so der Rand von X^1 dort nicht definiert wäre.

die Fläche F mit Hilfe von (K, g) nicht gelöst werden und wir bezeichnen die vorgenommene Polyederzerlegung von F und Wahl des Differentials β als „ungeeignet". Dagegen nennen wir eine Polyederzerlegung und eine Wahl von β *„geeignet"*, wenn Typus und Kotypus eines zugehörigen metrischen Komplexes übereinstimmen.

Die Frage, wann Typus und Kotypus eines metrischen Komplexes übereinstimmen, soll hier nicht direkt untersucht werden, sondern eine mehr funktionentheoretische Bedingung hiefür gegeben werden. Wir betrachten zum gegebenen Zellenkomplex K einen dualen Komplex $\bar{K}$, bezeichnen die betreffenden Flächen, Kanten und Ecken mit $\bar{\sigma}^2_\varrho$, $\bar{\sigma}^1_\kappa$ und $\bar{\sigma}^0_j$, die den $\sigma^0_\varrho, \sigma^1_\kappa$ und σ^2_j aus K eindeutig entsprechen. Die zulässigen Gewichte in $\bar{K}$ in bezug auf die Riemann'sche Fläche F bezeichnen wir mit $\bar{g}_\kappa$. Sind X^1 und $\bar{X}^1$ entsprechende 1-Linearformen in K und $\bar{K}$, d. h. ist $X^1(\sigma^1_\kappa) = \bar{X}^1(\bar{\sigma}^1_\kappa)$ für alle κ, so ist

$$\delta X^1(\sigma^2_j) = \partial \bar{X}^1(\bar{\sigma}^0_j) \quad \text{und} \quad \partial X^1(\sigma^0_\varrho) = \delta \bar{X}^1(\bar{\sigma}^2_\varrho) .$$

Besteht nun zwischen den zulässigen Gewichten in K und $\bar{K}$ die Beziehung $g_\kappa^{-1} = \bar{g}_\kappa$, so ist der Typus (Kotypus) von (K, g) gleich dem Kotypus (Typus) von $(\bar{K}, \bar{g})$. Satz 3 kann aber auf beide Zerlegungen K und $\bar{K}$ angewendet werden und daher gilt

Satz 4: *Ist K eine polygonale Zerlegung von F mit den zulässigen Gewichten g_κ und existiert eine duale Zerlegung $\bar{K}$ mit g_κ^{-1} als zulässigen Gewichten, so stimmen Typus und Kotypus von (K, g) mit dem Typus von F überein. F ist also dann und nur dann vom parabolischen (hyperbolischen) Typus, wenn (K, g) vom parabolischen (hyperbolischen) Typus ist.*

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn alle Gewichte g_κ einander gleich gewählt werden können. Wir sprechen dann von einer *„regulären"* Polyederzerlegung. Es ist offenbar für den Typus und Kotypus von (K, g) gleichgültig, welcher Wert diesem Gewicht gegeben wird. Dieses soll deshalb gleich 1 gewählt und der zugehörige metrische Komplex mit $(K, 1)$ bezeichnet werden.

Denken wir uns z. B. die Riemann'sche Fläche gegeben als Überlagerungsfläche der komplexen Ebene mit lauter algebraischen Windungspunkten, die über endlich vielen Grundpunkten gelegen sind. Wird die Ebene längs einer stückweise analytischen Kurve durch diese Grundpunkte zerschnitten, so entsteht in bekannterweise eine polygonale Zerlegung der Riemann'schen Fläche. Dies ist eine reguläre Zerlegung und es ist Satz 3 mit $(K, 1)$ anwendbar. Sind überdies die Verzweigungsordnungen alle unterhalb einer festen Schranke, so existiert eine duale Zerlegung, die auch regulär ist. Der Typus der Fläche stimmt in diesem Falle mit dem Typus von $(K, 1)$ überein.

6. Geben wir nun in der Ebene ein Ringgebiet, das aus lauter kongruenten Polygonen zusammengesetzt ist. Die Kanten haben alle dasselbe Gewicht g. Der algebraische Modul und Komodul des betreffenden Ringes in bezug auf das Gewicht 1 sei mit μ^1 und $\overline{\mu}^1$ bezeichnet. Dann gilt für den Modul des gegebenen Ringgebietes die Ungleichung

$$\frac{\mu^1}{g} \leqq M < g\,\overline{\mu}^1 . \tag{6.1}$$

Abgesehen von der Größe g können also mit rein algebraischen Methoden für den Modul M obere und untere Schranken gefunden werden.

Mit (6.1) soll nun eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben werden, damit eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge E in der Ebene von logarithmischer Kapazität 0 sei. Zu diesem Zweck wählen wir ein Quadrat Q, in dessen Innerem E enthalten ist und bezeichnen das Äußere von Q mit Q_1. Q wird in 4^n kongruente Quadrate q_n eingeteilt. Diese bilden zusammen mit Q_1 eine Zellenzerlegung der komplexen Ebene. k_0 bezeichnet den von Q_1 erzeugten Teilkomplex, Q_1 und jene q_n, die mit E punktfremd sind, erzeugen den Teilkomplex k_n und μ_n^1 sei der Modul des Ringes (k_0, k_n) in bezug auf das Kantengewicht 1. Dann gilt der Satz: *E ist dann nur dann von logarithmischer Kapazität null, wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^1 = \infty$ ist[9]). Ist nämlich der M_n Modul des zu (k_0, k_n) gehörigen Ringgebietes, so ist wegen (6.1) $\mu_n^1 \leqq g\,M_n$; aus $\mu_n^1 \to \infty$ folgt $M_n \to \infty$ (g ist von der Größe der Quadrate unabhängig) und E ist von der Kapazität 0. Wir betrachten nun die duale Zellenzerlegung zur gegebenen und den Ring, der von den dualen Quadraten gebildet wird, die zu den innern Ecken von (k_0, k_n) gehören. Der zugehörige Komodul ist gleich μ_n^1 und demnach gilt für den Modul M_n' des entsprechenden Ringgebietes $M_n' \leqq g\,\mu_n^1$. Mit M_n' strebt also auch μ_n^1 gegen Unendlich, womit der Satz bewiesen ist.

Eingegangen den 15. Juni 1953

---

[9]) Betr. hinreichende Kriterien für Kapazität 0 (bzw. > 0) vgl. R. Nevanlinna loc. cit. bzw. H. L. Royden loc. cit.