Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1953)

Artikel: Cohomolodie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane.

Autor: Serre, Jean-Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21895

Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane

Par JEAN-PIERRE SERRE, Paris

Introduction

On sait que les complexes $K(\Pi, q)$ introduits par Eilenberg-MacLane dans [4] jouent un rôle essentiel dans un grand nombre de questions de topologie algébrique. Le présent article est une contribution à leur étude.

En nous appuyant sur un théorème démontré par A. Borel dans sa thèse [2], nous déterminons les algèbres de cohomologie modulo 2 de ces complexes, tout au moins lorsque le groupe Π possède un nombre fini de générateurs. Ceci fait l'objet du § 2. Dans le § 3 nous étudions le comportement asymptotique des séries de Poincaré des algèbres de cohomologie précédentes ; nous en déduisons que, lorsqu'un espace X vérifie des conditions très larges (par exemple, lorsque X est un polyèdre fini, simplement connexe, d'homologie modulo 2 non triviale), il existe une infinité d'entiers i tels que le groupe d'homotopie $\pi_i(X)$ contienne un sous-groupe isomorphe à Z ou à Z_2. Dans le § 4 nous précisons les relations qui lient les complexes $K(\Pi, q)$ et les diverses «opérations cohomologiques»; ceci nous fournit notamment une méthode permettant d'étudier les relations entre i-carrés itérés. Le § 5 contient le calcul des groupes $\pi_{n+3}(S_n)$ et $\pi_{n+4}(S_n)$; ce calcul est effectué en combinant les résultats des §§ 2 et 4 avec ceux d'une Note de H. Cartan et l'auteur ([3], voir aussi [14]). Les §§ 4 et 5 sont indépendants du § 3.

Les principaux résultats de cet article ont été résumés dans une Note aux Comptes Rendus [9].

§ 1. Préliminaires

1. Notations

Si X est un espace topologique et G un groupe abélien, nous notons $H_i(X, G)$ le i-ème groupe d'homologie singulière de X à coefficients dans G ; nous posons $H_*(X, G) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i(X, G)$, le signe $\sum$ représentant une somme directe.

De façon analogue, nous notons $H^i(X, G)$ les groupes de cohomologie de X, et nous posons $H^*(X, G) = \sum_{i=0}^{\infty} H^i(X, G)$.

Les groupes d'homologie et de cohomologie relatifs d'un couple (X, Y) sont notés $H_i(X, Y; G)$ et $H^i(X, Y; G)$.

Nous notons Z le groupe additif des entiers et Z_n le groupe additif des entiers modulo n.

2. Les *i*-carrés de Steenrod

N. E. Steenrod a défini dans [12] (voir aussi [13]) des homomorphismes :

$$Sq^i: \ H^n(X, Y; Z_2) \to H^{n+i}(X, Y; Z_2) \qquad (i \text{ entier } \geqslant 0),$$

où (X, Y) désigne un couple d'espaces topologiques, avec $Y \subset X$. Ces opérations ont les propriétés suivantes[1] :

2.1. $Sq^i \circ f^* = f^* \circ Sq^i$, lorsque f est une application continue d'un couple (X, Y) dans un couple (X', Y').

2.2. $Sq^i \circ \delta = \delta \circ Sq^i$, δ désignant le cobord de la suite exacte de cohomologie.

2.3. $Sq^i(x \cdot y) = \sum_{j+k=i} Sq^j(x) \cdot Sq^k(y)$, $x \cdot y$ désignant le cup-produit.

2.4. $Sq^i(x) = x^2$ si dim. $x = i$, $Sq^i(x) = 0$ si dim. $x < i$.

2.5. $Sq^0(x) = x$.

On sait que toute suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ définit un opérateur cobord δ : $H^n(X, Y; C) \to H^{n+1}(X, Y; A)$. En particulier :

2.6. Sq^1 coïncide avec l'opérateur cobord attaché à la suite exacte

$$0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0 .$$

On a donc une suite exacte :

2.7. $$\ldots \to H^n(X, Y; Z_4) \to H^n(X, Y; Z_2) \xrightarrow{Sq^1} H^{n+1}(X, Y; Z_2) \to H^{n+1}(X, Y; Z_4) \to \ldots$$

3. Les *i*-carrés itérés

On peut composer entre elles les opérations Sq^i. On obtient ainsi les *i-carrés itérés* $Sq^{i_1} \circ Sq^{i_2} \circ \ldots \circ Sq^{i_r}$ qui appliquent $H^n(X, Z_2)$ dans le groupe $H^{n+i_1+\cdots+i_r}(X, Z_2)$. Une telle opération sera notée Sq^I, I désignant la suite d'entiers $\{i_1, \ldots, i_r\}$. Nous supposerons toujours que

[1] Ces propriétés sont démontrées dans [12], à l'exception de 2.3, dont on trouvera la démonstration dans une Note de H. Cartan aux Comptes Rendus **230**, 1950, p. 425.

les entiers $i_1, \ldots, i_r$ sont > 0 (ceci ne restreint pas la généralité, à cause de 2.5).

Les définitions suivantes joueront un rôle essentiel par la suite :

3.1. L'entier $n(I) = i_1 + \cdots + i_r$ est appelé le *degré* de I.

3.2. Une suite I est dite *admissible* si l'on a :

$$i_1 \geqslant 2i_2, i_2 \geqslant 2i_3, \ldots, i_{r-1} \geqslant 2i_r \ .$$

3.3. Si une suite I est admissible, on définit son *excès* $e(I)$ par :

$$\begin{aligned} e(I) &= (i_1 - 2i_2) + (i_2 - 2i_3) + \cdots + (i_{r-1} - 2i_r) + i_r \\ &= i_1 - i_2 - \ldots - i_r = 2i_1 - n(I) \ . \end{aligned}$$

Par définition, $e(I)$ est un entier $\geqslant 0$, et si $e(I) = 0$ la suite I est vide (l'opération Sq^I correspondante est donc l'identité).

4. Les complexes d'Eilenberg-MacLane

Soient q un entier, Π un groupe (abélien si $q \geqslant 2$). Nous dirons qu'un espace X est *un espace* $K(\Pi, q)$ si $\pi_i(X) = 0$ pour $i \neq q$, et si $\pi_q(X) = \Pi$. On sait (cf. [4]) que les groupes d'homologie et de cohomologie de X sont isomorphes à ceux du complexe $K(\Pi, q)$ défini de façon purement algébrique par Eilenberg-MacLane. Nous noterons ces groupes $H_i(\Pi; q, G)$ et $H^i(\Pi; q, G)$, G étant le groupe de coefficients.

Pour tout couple (Π, q) il existe un espace X qui est un espace $K(\Pi, q)$ (cf. J. H. C. Whitehead, Ann. Math. **50**, 1949, p. 261—263). Soit X' le complexe cellulaire obtenu en «réalisant géométriquement» le complexe singulier de X [2]); on sait que $\pi_i(X') = \pi_i(X)$ pour tout $i \geqslant 0$, donc X' est un espace $K(\Pi, q)$. Comme d'autre part on peut subdiviser simplicialement X', on obtient finalement :

4.1. *Pour tout couple* (Π, q) *il existe un espace* $K(\Pi, q)$ *qui est un complexe simplicial.*

(Ici, comme dans toute la suite, nous entendons par *complexe simplicial* un complexe K qui peut avoir une infinité de simplexes et qui est muni de la topologie *faible* : une partie de K est fermée si ses intersections avec les sous-complexes finis de K sont fermées.)

---

[2]) L'espace X' est défini et étudié dans les articles suivants: 1) *J. B. Giever*, On the equivalence of two singular homology theory, Ann. Math. 51, 1950, p. 178—191; 2) *J. H. C. Whitehead*, A certain exact sequence, Ann. Math. 52, 1950, p. 51—110 (voir notamment les nos 19, 20, 21).

5. Propriétés élémentaires des espaces $K(\Pi, q)$

5.1. *Pour tout couple* (Π, q) *il existe un espace fibré contractile dont la base est un espace* $K(\Pi, q)$ *et dont la fibre est un espace* $K(\Pi, q-1)$.

Rappelons ([8], p. 499) que l'on obtient un tel espace fibré en prenant l'espace des chemins d'origine fixée sur un espace $K(\Pi, q)$.
L'énoncé suivant est évident:

5.2. *Si* X *est un espace* $K(\Pi, q)$ *et si* X' *est un espace* $K(\Pi', q)$, *le produit direct* $X \times X'$ *est un espace* $K(\Pi + \Pi', q)$.

Soit maintenant X un espace $K(\Pi, q)$, le groupe Π étant abélien (ce n'est une restriction que si $q = 1$). On a alors $H_q(X, Z) = \Pi$, d'où $H^q(X, \Pi) = \mathrm{Hom}(\Pi, \Pi)$. Le groupe $H^q(X, \Pi)$ contient donc une «classe fondamentale» u qui correspond dans $\mathrm{Hom}(\Pi, \Pi)$ à l'application identique de Π sur Π. Soit alors $f: Y \to X$ une application continue d'un espace Y dans l'espace X; l'élément $f^*(u)$ est un élément bien défini de $H^q(Y, \Pi)$ et il résulte de la théorie classique des obstructions (cf. S. Eilenberg, *Lectures in Topology*, Michigan 1941, p. 57—100) que l'on a :

5.3. *Si* Y *est un complexe simplicial,* $f \to f^*(u)$ *met en correspondance biunivoque les classes d'homotopie des applications de* Y *dans* X *et les éléments de* $H^q(Y, \Pi)$.

(On trouvera dans [5], IV un résultat très proche du précédent.)
Si Y est un espace $K(\Pi', q)$, on a $H^q(Y, \Pi) = \mathrm{Hom}(\Pi', \Pi)$, d'où :

5.4. *Si un complexe simplicial* Y *est un espace* $K(\Pi', q)$, *les classes d'homotopie des applications de* Y *dans un espace* $K(\Pi, q)$ *correspondent biunivoquement aux homomorphismes de* Π' *dans* Π.

6. Fibrations des espaces $K(\Pi, q)$ [3])

Donnons-nous un entier q, et une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to A \to B \to C \to 0 \ .$$

6.1. *Il existe un espace fibré* E, *de fibre* F *et base* X, *où* F *est un espace* $K(A, q)$, E *un espace* $K(B, q)$, X *un espace* $K(C, q)$, *et dont la suite exacte d'homotopie (en dimension* q) *est la suite exacte donnée.*

Soient Y un complexe simplicial qui soit un espace $K(B, q)$, X un espace $K(C, q)$ et $f: Y \to X$ une application continue telle que

$$f_0: \ \pi_q(Y) \to \pi_q(X)$$

soit l'homomorphisme donné de B sur C (cf. 5.4).

[3]) Ces fibrations m'ont été signalées par H. Cartan.

On prend pour espace E l'espace des couples $(y, \alpha(t))$, où $y \in Y$, et où $\alpha(t)$ est un chemin de X tel que $\alpha(0) = f(y)$. L'espace E est rétractile sur Y, c'est donc un espace $K(B, q)$. L'application $(y, \alpha(t)) \to \alpha(1)$ fait de E un espace fibré de base X (c'est une généralisation immédiate de la Proposition 6 de [8], Chapitre IV). La suite exacte d'homotopie montre alors que la fibre F de cette fibration est un espace $K(C, q)$; plus précisément, la suite :

$$\pi_{q+1}(X) \to \pi_q(F) \to \pi_q(E) \to \pi_q(X) \to \pi_{q-1}(F) \ ,$$

est identique à la suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$ donnée.

On montre de façon tout analogue l'existence d'un espace fibré où :

6.2. *L'espace fibré est un espace $K(A, q)$, la fibre est un espace $K(C, q-1)$ et la base est un espace $K(B, q)$.*

De même, il existe un espace fibré où :

6.3. *L'espace fibré est un espace $K(C, q-1)$, la fibre est un espace $K(B, q-1)$ et la base est un espace $K(A, q)$.*

§ 2. Détermination de l'algèbre $H^*(\Pi; q, Z_2)$

7. Un théorème de A. Borel

Soient X un espace et $A = H^*(X, Z_2)$ l'algèbre de cohomologie de X à coefficients dans Z_2. On dit ([2], Définition 6.3) qu'une famille (x_i) $(i = 1, \ldots)$, d'éléments de A est un *système simple de générateurs* de A si :

7.1. Les x_i sont des éléments homogènes de A,

7.2. Les produits $x_{i_1} . x_{i_2} \ldots x_{i_r}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r, r \geqslant 0$ quelconque) forment une base de A, considéré comme espace vectoriel sur Z_2.

Nous pouvons maintenant rappeler le théorème de A. Borel ([2], Proposition 16.1) qui est à la base des résultats de ce paragraphe :

Théorème 1. *Soit E un espace fibré de fibre F et base B connexes par arcs, vérifiant les hypothèses suivantes :*

α) Le terme E_2 de la suite spectrale de cohomologie de E (à coefficients dans Z_2) est $H^*(B, Z_2) \otimes H^*(F, Z_2)$ (c'est le cas, comme on sait, si $\pi_1(B) = 0$ et si les groupes d'homologie de B ou de F sont de type fini).

β) $H^i(E, Z_2) = 0$ pour tout $i > 0$.

γ) $H^*(F, Z_2)$ possède un système simple de générateurs (x_i) qui sont transgressifs.

Alors, si les y_i sont des éléments homogènes de $H^*(B, Z_2)$ qui correspondent aux x_i par transgression, $H^*(B, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant les y_i pour générateurs.

(En d'autres termes, les y_i engendrent $H^*(B, Z_2)$ et ne vérifient aucune relation non triviale.)

Nous utiliserons ce théorème principalement dans le cas particulier où $H^*(F, Z_2)$ est elle-même une algèbre de polynômes ayant pour générateurs des éléments transgressifs z_i, de degrés n_i. Il est immédiat que $H^*(F, Z_2)$ admet alors pour système simple de générateurs les puissances (2^r)-èmes des z_i $(i = 1, \ldots, ; \ r = 0, 1, \ldots)$. Si a et r sont deux entiers, désignons par $L(a, r)$ la suite $\{2^{r-1} a, \ldots, 2a, a\}$; d'après 2.4 on a $z_i^{(2^r)} = Sq^{L(n_i, r)}(z_i)$, les notations étant celles du n° 3. Soient alors $t_i \in H^{n_i+1}(B, Z_2)$ des éléments qui correspondent par transgression aux z_i ; puisque les Sq^i commutent à la transgression ([8], p. 457), les éléments $z_i^{(2^r)}$ sont transgressifs et leurs images par transgression sont les $Sq^{L(n_i, r)}(t_i)$. Appliquant le Théorème 1, on obtient donc :

7.3. *Sous les hypothèses précédentes, $H^*(B, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les $Sq^{L(n_i, r)}(t_i)$ $(i = 1, \ldots ; \ r = 0, 1, \ldots)$.*

8. Détermination de l'algèbre $H^*(Z_2 ; q, Z_2)$

On a $H^i(Z_2 ; q, Z_2) = 0$ pour $0 < i < q$, et $H^q(Z_2 ; q, Z_2) = Z_2$. Nous désignerons par u_q l'unique générateur de ce dernier groupe.

Théorème 2. *L'algèbre $H^*(Z_2 ; q, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments $Sq^I(u_q)$, où I parcourt l'ensemble des suites admissibles d'excès $< q$ (au sens du n° 3).*

On sait que l'espace projectif réel à une infinité de dimensions est un espace $K(Z_2, 1)$; $H^*(Z_2 ; 1, Z_2)$ est donc l'algèbre de polynômes ayant u_1 pour unique générateur ; comme d'autre part $e(I) < 1$ entraîne que I soit vide, le théorème est vérifié pour $q = 1$.

Supposons-le vérifié pour $q - 1$ et démontrons-le pour q. Considérons la fibration 5.1. Par hypothèse, $H^*(Z_2 ; q - 1, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments $z_J = Sq^J(u_{q-1})$, où J parcourt l'ensemble des suites admissibles d'excès $e(J) < q - 1$. Nous noterons s_J le degré de l'élément z_J ; on a $s_J = q - 1 + n(J)$. Il est clair que u_{q-1} est transgressif et que son image par la transgression τ

est u_q. D'après [8], loc. cit., z_J est donc aussi transgressif et $\tau(z_J) = Sq^J(u_q)$. Il s'ensuit que l'on peut appliquer 7.3 à la fibration 5.1, ce qui montre que $H^*(Z_2; q, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments $Sq^{L(s_J, r)} \circ Sq^J(u_q)$, où r parcourt l'ensemble des entiers $\geqslant 0$, et J l'ensemble des suites admissibles d'excès $<q-1$. La démonstration du Théorème 2 sera donc achevée si nous prouvons le Lemme suivant :

Lemme 1. *Si à tout entier $r \geqslant 0$, et à toute suite admissible $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ d'excès $<q-1$, on fait correspondre la suite :*

$$I = \{2^{r-1} \cdot s_J, \ldots, 2s_J, s_J, j_1, \ldots, j_k\} \ , \quad \text{où} \quad s_J = q - 1 + n(J) \ ,$$

on obtient toutes les suites admissibles d'excès $<q$ une fois et une seule.

Notons d'abord que $s_J - 2j_1 = n(J) - 2j_1 + q - 1 = q - 1 - e(J) > 0$, donc I est une suite *admissible*. Si $r = 0$, on a $I = J$, d'où $e(I) = e(J) < q-1$; si $r > 0$, on a $e(I) = e(J) + s_J - 2j_1 = q - 1$. Ainsi, en prenant $r = 0$ on trouve toutes les suites admissibles d'excès $e(I) < q-1$, et en prenant $r > 0$ on trouve des suites admissibles d'excès $q-1$.

Inversement, si l'on se donne une suite admissible $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ d'excès $q-1$, r et J sont déterminés sans ambiguïté :

$$\begin{cases} r \text{ est le plus grand entier tel que } i_1 = 2i_2, \ldots, i_{r-1} = 2i_r \ , \\ J = \{i_{r+1}, \ldots, i_p\} \ . \end{cases}$$

La suite associée au couple (r, J) est bien I car l'on a :

$$q - 1 = e(I) = i_r - 2i_{r+1} + e(J) = i_r - 2i_{r+1} + 2i_{r+1} - n(J) \ ,$$

d'où $i_r = n(J) + q - 1 = s_J$, et $i_{r-1} = 2s_J, \ldots, i_1 = 2^{r-1} \cdot s_J$.

Le Lemme 1 est donc démontré.

9. Exemples

$H^*(Z_2; 1, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes engendrée par u_1.

$H^*(Z_2; 2, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes engendrée par :

$u_2, Sq^1u_2, Sq^2Sq^1u_2, \ldots, Sq^{2^k}Sq^{2^{k-1}} \ldots Sq^2Sq^1u_2, \ldots$.

$H^*(Z_2; 3, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes engendrée par :

$u_3, Sq^2u_3, Sq^4Sq^2u_3, \ldots, Sq^{2^r}Sq^{2^{r-1}} \ldots Sq^2u_3, \ldots$

$Sq^1u_3, Sq^3Sq^1u_3, Sq^6Sq^3Sq^1u_3, \ldots, Sq^{3 \cdot 2^r}Sq^{3 \cdot 2^{r-1}} \ldots Sq^3Sq^1u_3, \ldots$

......

$Sq^{2^{k-1}} \ldots Sq^2Sq^1u_3, \ldots, Sq^{(2^k+1)2^r} \ldots Sq^{2^k+1}Sq^{2^{k-1}} \ldots Sq^2Sq^1u_3, \ldots$

....

10. Détermination de l'algèbre $H^*(Z\,;q,Z_2)$

Le cercle S_1 est un espace $K(Z,1)$; ceci détermine $H^*(Z\,;1,Z_2)$. Nous pouvons donc nous borner au cas où $q \geqslant 2$. Nous désignerons encore par u_q l'unique générateur de $H^q(Z\,;q,Z_2)$.

Théorème 3. *Si $q \geqslant 2$, l'algèbre $H^*(Z\,;q,Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments $Sq^I(u_q)$ où I parcourt l'ensemble des suites admissibles $\{i_1,\ldots,i_r\}$, d'excès $<q$, et telles que $i_r>1$.*

On sait que l'espace projectif complexe à une infinité de dimensions est un espace $K(Z,2)$; $H^*(Z\,;2,Z_2)$ est donc l'algèbre de polynômes ayant u_2 pour unique générateur ; comme d'autre part $e(I)<2$ et $i_r>1$ entraînent que I soit vide, le théorème est vérifié pour $q=2$.

A partir de là on raisonne par récurrence sur q, exactement comme dans la démonstration du Théorème 2. Il faut simplement observer que, si $q \geqslant 3$, les suites I dont le dernier terme est >1 correspondent, par la correspondance du Lemme 1, aux couples (r,J) où le dernier terme de J est >1.

Corollaire. *Si $q \geqslant 2$, l'algèbre $H^*(Z\,;q,Z_2)$ est isomorphe au quotient de l'algèbre $H^*(Z_2\,;q,Z_2)$ par l'idéal engendré par les $Sq^I(u_q)$ où I est admissible, d'excès $<q$, et de dernier élément égal à* 1.

De façon plus précise, l'homomorphisme canonique $Z \to Z_2$ définit (grâce à 5.4) un homomorphisme de $H^*(Z_2\,;q,Z_2)$ dans $H^*(Z\,;q,Z_2)$, et les théorèmes 2 et 3 montrent que cet homomorphisme applique la première algèbre sur la seconde, le noyau étant l'idéal défini dans l'énoncé du corollaire.

11. Détermination de l'algèbre $H^*(Z_m\,;q,Z_2)$ lorsque $m=2^h$, $h \geqslant 2$

L'algèbre $H^*(Z_m\,;1,Z_2)$ n'est pas autre chose que l'algèbre de cohomologie modulo 2 du groupe Z_m, au sens de Hopf. Sa structure est bien connue (on peut la déterminer soit algébriquement, soit en utilisant les espaces lenticulaires) :

C'est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure de générateur u_1 et d'une algèbre de polynômes de générateur un élément v_2 de degré 2. L'élément v_2 peut être défini ainsi :

Soit δ_h l'opérateur cobord attaché à la suite exacte de coefficients $0 \to Z_2 \to Z_{2^{h+1}} \to Z_{2^h} \to 0$. Soit u_1' le générateur canonique de $H^1(Z_m\,;1,Z_m)$; on a alors $v_2 = \delta_h(u_1')$.

Si h était égal à 1, on aurait $\delta_h = Sq^1$, d'après 2.6; mais comme nous avons supposé $h \geqslant 2$, δ_h diffère de Sq^1 (on a d'ailleurs $Sq^1(u_1) = u_1^2 = 0$), Nous écrirons : $v_2 = Sq_h^1(u_1)$, lorsque cette écriture ne pourra pas prêter à confusion.

Le raisonnement de [8], p. 457, montrant que les Sq^i commutent à la transgression, se laisse adapter sans difficulté à l'opération δ_h, et montre ainsi que v_2 est un élément transgressif de $H^2(Z_m\,; 1, Z_2)$ dans la fibration qui a $K(Z_m, 1)$ pour fibre et $K(Z_m, 2)$ pour base. Comme $H^*(Z_m\,; 1, Z_2)$ a pour système simple de générateurs le système :

$$u_1, v_2 = Sq_h^1(u_1), Sq^2Sq_h^1(u_1), \ldots, Sq^{2^k}\ldots Sq^2Sq_h^1(u_1)\ ,\ldots\ ,$$

le théorème 1 montre que $H^*(Z_m\,; 2, Z_2)$ est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments :

$$u_2, Sq_h^1(u_2), \ldots, Sq^{2^k}\ldots Sq^2Sq_h^1(u_2), \ldots\ .$$

Ceci nous conduit à la notation suivante : si $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ est une suite admissible, on définit $Sq_h^I(u_q)$ comme étant égal à $Sq^I(u_q)$ si $i_r > 1$, et à $Sq^{i_1}\ldots Sq^{i_{r-1}}\,Sq_h^1(u_q)$ si $i_r = 1$ ($Sq_h^1(u_q)$ a le même sens que plus haut, autrement dit $Sq_h^1(u_q) = \delta_h(u_q')$, u_q' désignant le générateur canonique de $H^q(Z_m\,; q, Z_m)$).

La détermination de $H^*(Z_m\,; q, Z_2)$ se poursuit alors par récurrence sur q, exactement comme celle de $H^*(Z_2\,; q, Z_2)$, à cela près que les Sq_h^I remplacent les Sq^I. On obtient finalement :

Théorème 4. *Si $q \geqslant 2$, l'algèbre $H^*(Z_m\,; q, Z_2)$, où $m = 2^h$ avec $h \geqslant 2$, est l'algèbre de polynômes ayant pour générateurs les éléments $Sq_h^I(u_q)$ où I parcourt l'ensemble des suites admissibles d'excès $<q$.*

Comme les Sq_h^I correspondent biunivoquement aux Sq^I, on a :

Corollaire. *$H^*(Z_m\,; q, Z_2)$ et $H^*(Z_2\,; q, Z_2)$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels sur le corps Z_2.*

Le résultat précédent est valable même si $q = 1$.

12. Détermination de l'algèbre $H^*(\Pi; q, Z_2)$ lorsque Π est un groupe abélien de type fini

Le résultat suivant peut être considéré comme classique :

Théorème 5. *Soient Π et Π' deux groupes abéliens, Π étant de type fini, et soit k un corps commutatif. L'algèbre $H^*(\Pi + \Pi'\,; q, k)$ est isomorphe au produit tensoriel sur k des algèbres $H^*(\Pi\,; q, k)$ et $H^*(\Pi'\,; q, k)$.*

Rappelons la démonstration : Soient X un espace $K(\Pi, q)$ et X' un espace $K(\Pi', q)$. L'espace $X \times X'$ est un espace $K(\Pi + \Pi', q)$, comme nous l'avons déjà signalé (5.2). Puisque Π est de type fini, les groupes d'homologie de X sont de type fini en toute dimension d'après [8], p. 500 (voir aussi [11], Chapitre II, Proposition 8). Appliquant alors un cas particulier de la formule de Künneth[4]), on a :

$$H^*(X \times X', k) = H^*(X, k) \otimes H^*(X', k) ,$$

ce qui démontre le Théorème 5.

Comme tout groupe abélien de type fini est somme directe de groupes isomorphes à Z et de groupes cycliques d'ordre une puissance d'un nombre premier, le Théorème 5 ramène le calcul de $H^*(\Pi\,; q, Z_2)$ aux trois cas particuliers : $\Pi = Z$, $\Pi = Z_{2^h}$, $\Pi = Z_{p^h}$ avec p premier $\neq 2$. Les deux premiers cas ont été traités dans les n^{os} précédents et l'on sait par ailleurs (cf. [8] et [11], loc. cit.) que $H^n(Z_m\,; q, Z_2) = 0$ pour $n > 0$, si m est un entier impair ; le troisième cas conduit donc à une algèbre de cohomologie triviale, et la détermination de $H^*(\Pi\,; q, Z_2)$ est ainsi achevée, pour tout groupe Π de type fini.

13. Relations entre les diverses algèbres $H^*(\Pi\,; q, Z_2)$

Dans ce qui précède nous avons traité indépendamment les cas $\Pi = Z$, $\Pi = Z_2$, $\Pi = Z_{2^h}$. Il y a cependant des relations entre ces trois cas, qui proviennent des fibrations du n^o 6. Nous allons en donner un exemple :

Posons $m = 2^h$, avec $h \geqslant 1$. Considérons la suite exacte

$$0 \to Z \to Z \to Z_m \to 0 ,$$

où le premier homomorphisme est la multiplication par m. En appliquant 6.3 on en déduit l'existence d'une fibration où l'espace fibré est un espace $K(Z_m, q-1)$, où la fibre est un espace $K(Z, q-1)$ et la base un espace $K(Z, q)$. Soit u_{q-1} l'unique générateur du groupe $H^{q-1}(Z\,; q, Z_2)$; l'image de u_{q-1} par la transgression τ est nulle, car sinon $H^{q-1}(Z_m\,; q-1, Z_2)$ serait nul, ce qui n'est pas ; puisque les Sq^I commutent à la transgression, on a $\tau(Sq^I u_{q-1}) = 0$ pour toute suite I, et comme $H^*(Z\,; q-1, Z_2)$ est engendré par les $Sq^I u_{q-1}$, il s'ensuit que toutes les différentielles d_r $(r \geqslant 2)$ de la suite spectrale de cohomologie modulo 2 de la fibration précédente sont identiquement nulles. Le terme E_∞ de cette suite spectrale est donc isomorphe au terme E_2, ce qui donne :

[4]) Ce cas particulier est démontré dans [8], p. 473.

13.1. *L'algèbre graduée associée à* $H^*(Z_m; q-1, Z_2)$, *convenablement filtrée, est isomorphe à* $H^*(Z; q, Z_2) \otimes H^*(Z; q-1, Z_2)$.

En particulier :

13.2. $H^*(Z_m; q-1, Z_2)$ *et* $H^*(Z; q, Z_2) \otimes H^*(Z; q-1, Z_2)$ *sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels sur le corps* Z_2.

On notera que 13.2 fournit une nouvelle démonstration du Corollaire au Théorème 4. D'un autre côté, il serait facile de tirer 13.2 des Théorèmes 2, 3, 4.

14. Les groupes stables; cas de la cohomologie

Π et G étant deux groupes abéliens, nous poserons[5]) :

14.1. $A_n(\Pi, G) = H_{n+q}(\Pi; q, G)$, avec $q > n$.

On sait (cf. [5] ainsi que [8], p. 500) que ces groupes ne dépendent pas de la valeur de q choisie, mais seulement de Π, G et n. Ce sont les «groupes stables».

Le raisonnement du Théorème 5 montre immédiatement que l'on a la formule suivante (voir aussi [5]) :

14.2. $A_n(\Pi + \Pi', G) = A_n(\Pi, G) + A_n(\Pi', G)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On définit de façon analogue les groupes $A^n(\Pi, G) = H^{n+q}(\Pi; q, G)$, avec $q > n$. Les Théorèmes 2, 3, 4 permettent de déterminer ces groupes lorsque $G = Z_2$, et lorsque $\Pi = Z$, Z_2, ou Z_m avec $m = 2^h$:

Théorème 6. *L'espace vectoriel* $A^n(Z_2, Z_2)$ (*resp.* $A^n(Z_m, Z_2)$, *avec* $m = 2^h$) *admet pour base l'ensemble des éléments* $Sq^I(u)$ (*resp.* $Sq^I_h(u)$), *où* I *parcourt l'ensemble des suites admissibles de degré* n.

(Nous avons noté u l'unique générateur de $A^0(Z_m, Z_2)$).

Par exemple, $A^{10}(Z_2, Z_2)$ admet pour base les six éléments :

$$Sq^{10}u,\ Sq^9Sq^1u,\ Sq^8Sq^2u,\ Sq^7Sq^3u,\ Sq^7Sq^2Sq^1u,\ Sq^6Sq^3Sq^1u\ .$$

Théorème 7. *L'espace vectoriel* $A^n(Z, Z_2)$ *admet pour base l'ensemble des éléments* $Sq^I u$, *où* I *parcourt l'ensemble des suites admissibles dont le dernier terme est* > 1 *et dont le degré est* n.

Par exemple, $A^{10}(Z, Z_2)$ admet pour base les trois éléments : $Sq^{10}u$, Sq^8Sq^2u, Sq^7Sq^3u.

---

[5]) La notation adoptée ici diffère d'une unité de celle de [5].

15. Les groupes stables; cas de l'homologie

Pour passer des groupes de cohomologie modulo 2 aux groupes d'homologie nous aurons besoin du Lemme suivant :

Lemme 2. *Soient* X *un espace,* n *un entier* > 0. *Supposons que* $H_n(X, Z)$ *ait un nombre fini de générateurs, et que la suite :*

$$H^{n-1}(X, Z_2) \xrightarrow{Sq^1} H^n(X, Z_2) \xrightarrow{Sq^1} H^{n+1}(X, Z_2)$$

soit exacte. Posons $N = \dim. [H^n(X, Z_2)/Sq^1(H^{n-1}(X, Z_2))]$.

Le groupe $H_n(X, Z)$ *est alors somme directe d'un groupe fini d'ordre impair et de* N *groupes isomorphes à* Z_2.

Pour simplifier les notations, nous poserons $L_i = H_i(X, Z)$. D'après la formule des coefficients universels[6]), on a, pour tout groupe abélien G, une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, G) \to H^n(X, G) \to \mathrm{Hom}\,(L_n, G) \to 0 \ .$$

En appliquant ceci à $G = Z_4$ et à $G = Z_2$, on obtient le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, Z_4) & \to & H^n(X, Z_4) & \to & \mathrm{Hom}\,(L_n, Z_4) & \to & 0 \\ \downarrow & & \varphi\downarrow & & \psi\downarrow & & \chi\downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, Z_2) & \to & H^n(X, Z_2) & \to & \mathrm{Hom}\,(L_n, Z_2) & \to & 0 \ . \end{array}$$

D'après la suite exacte 2.7, le noyau Q^n de

$$Sq^1 : H^n(X, Z_2) \to H^{n+1}(X, Z_2)$$

est égal à l'image de ψ. Comme l'application φ est sur (d'après une propriété générale du foncteur Ext), il s'ensuit que Q^n contient $\mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, Z_2)$.

Soit d'autre part R^n l'image de $Sq^1 : \ H^{n-1}(X, Z_2) \to H^n(X, Z_2)$. On voit facilement (par calcul direct, par exemple) que toute classe de cohomologie $f \in R^n$ donne 0 dans $\mathrm{Hom}(L_n, Z_2)$. Donc R^n est contenu dans $\mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, Z_2)$.

Vu l'hypothèse faite dans le Lemme, on a donc :

$$Q^n = R^n = \mathrm{Ext}\,(L_{n-1}, Z_2) \ .$$

Ainsi l'image de ψ est égale à $\mathrm{Ext}(L_{n-1}, Z_2)$. Il s'ensuit que l'homomorphisme χ est nul ; compte tenu de la structure des groupes abéliens à un nombre fini de générateurs, ceci montre que L_n est somme directe d'un groupe fini d'ordre impair et d'un certain nombre de groupes Z_2.

---

[6]) Voir par exemple *S. Eilenberg and N. E. Steenrod*, Foundations of Algebraic Topology, I., Princeton 1952, p. 161.

Il est clair que le nombre de ces derniers est égal à la dimension de Hom (L_n, Z_2) c'est-à-dire à N.

Théorème 8. *Le groupe $A_n(Z_2, Z)$ est somme directe de groupes Z_2 en nombre égal au nombre des suites admissibles $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, où i_1 est pair et où $n(I) = i_1 + \cdots + i_k$ est égal à n.*

Nous allons déterminer l'opération Sq^1 dans $A^*(Z_2, Z_2)$, de façon à pouvoir appliquer le Lemme 2.

Rappelons que l'on a $Sq^1 Sq^n = Sq^{n+1}$ si n est pair, et $Sq^1 Sq^n = 0$ si n est impair. On tire de là :

$$Sq^1(Sq^{i_1} \ldots Sq^{i_k} u) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_1 \text{ est impair} \\ Sq^{i_1+1} \ldots Sq^{i_k} u & \text{si } i_1 \text{ est pair} . \end{cases}$$

Soit alors B^n (resp. C^n) le sous-espace vectoriel de $A^n(Z_2, Z_2)$ engendré par les $Sq^I(u)$ où i_1 est pair (resp. impair). $A^n(Z_2, Z_2)$ est somme directe de B^n et de C^n ; d'après la formule écrite plus haut, Sq^1 est nul sur C^n et applique isomorphiquement B^n sur C^{n+1}. La suite :

$$A^{n-1}(Z_2, Z_2) \xrightarrow{Sq^1} A^n(Z_2, Z_2) \xrightarrow{Sq^1} A^{n+1}(Z_2, Z_2)$$

est donc exacte, et B^n est isomorphe à $A^n(Z_2, Z_2)/Sq^1 A^{n-1}(Z_2, Z_2)$.

Le théorème résulte alors du Lemme 2, et du fait (démontré dans [8], p. 500), que $A_n(Z_2, Z)$ est un groupe fini d'ordre une puissance de 2.

On démontre de même ;

Théorème 9. *Le groupe $A_n(Z_m, Z)$, $n > 0$, est isomorphe à $A_n(Z_2, Z)$ lorsque m est une puissance de 2.*

Théorème 10. *Le groupe $A_n(Z, Z)$, $n > 0$, est un groupe fini dont le 2-composant est somme directe de groupes Z_2 en nombre égal au nombre des suites admissibles $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, où i_1 est pair, $i_k > 1$, et où $n(I) = i_1 + \cdots + i_k$ est égal à n.*

Remarque. En comparant les Théorèmes 7 et 8, on peut montrer que $A_n(Z_2, Z)$ est isomorphe à $A_n(Z, Z_2)$. De façon générale, on conjecture que $A_n(\Pi, G)$ est isomorphe à $A_n(G, \Pi)$ quels que soient les groupes abéliens G et Π ; il suffirait d'ailleurs de démontrer le cas particulier $\Pi = Z$ pour avoir le cas général (compte tenu des résultats annoncés par Eilenberg-MacLane dans [5], II, ceci vérifie la conjecture en question pour $n = 0, 1, 2, 3$).

Théorème 11. *Pour tout groupe abélien Π, le groupe $A_n(\Pi, Z)$, $n > 0$, est un groupe de torsion dont le 2-composant est somme directe de groupes isomorphes à Z_2.*

Soient Π_α les sous-groupes de type fini de Π ; puisque Π est limite inductive des Π_α, le complexe $K(\Pi, q)$ est limite inductive des complexes $K(\Pi_\alpha, q)$, et on en conclut que $A_n(\Pi, Z)$ est limite inductive des $A_n(\Pi_\alpha, Z)$ ce qui réduit la question au cas où Π est de type fini.

En utilisant la formule 14.2, on est alors ramené au cas des groupes cycliques, qui est traité dans les Théorèmes 8, 9, 10.

Remarque. Le fait que $A_n(\Pi, Z)$ soit un groupe de torsion résulte aussi de [8], p. 500—501.

§ 3. Séries de Poincaré des algèbres $H^*(\Pi ; q, Z_2)$

16. Définition des séries de Poincaré

Soit L un espace vectoriel, somme directe de sous-espaces L_n de dimension finie ; la *série de Poincaré* de L est :

$$L(t) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \dim (L_n) \cdot t^n \quad . \tag{16.1}$$

Lorsque L est de dimension finie, la série formelle précédente se réduit à un polynôme, le *polynôme de Poincaré* de L.

Soit Π un groupe abélien de type fini, et prenons pour L l'algèbre $H^*(\Pi; q, Z_2) = \Sigma H^n(\Pi ; q, Z_2)$. La série de Poincaré correspondante sera notée $\vartheta(\Pi ; q, t)$. On a donc par définition :

$$\vartheta(\Pi ; q, t) = \Sigma_{n=0}^{\infty} \dim \big(H^n(\Pi ; q, Z_2)\big) \cdot t^n \quad . \tag{16.2}$$

De même, nous noterons $\vartheta(\Pi, t)$ la série de Poincaré de $A^*(\Pi, Z_2)$. D'après le Théorème 5 du § 2, on a :

$$\vartheta(\Pi + \Pi' ; q, t) = \vartheta(\Pi ; q, t) \cdot \vartheta(\Pi' ; q, t) \quad . \tag{16.3}$$

D'après la formule 14.2, on a :

$$\vartheta(\Pi + \Pi', t) = \vartheta(\Pi, t) + \vartheta(\Pi', t) \quad . \tag{16.4}$$

On pourrait d'ailleurs déduire 16.4 de 16.3 au moyen de la formule suivante (qui ne fait qu'exprimer la définition des groupes stables) :

$$\vartheta(\Pi , t) = \lim_{q \to \infty} . \frac{\vartheta(\Pi; q, t) - 1}{t^q} \tag{16.5}$$

17. La série $\vartheta(Z_2 ; q, t)$

Soit d'abord L une algèbre de polynômes dont les générateurs ont pour degrés les entiers $m_1, \ldots, m_i, \ldots$. La série de Poincaré de L est évidemment :

$$L(t) = \prod_i \frac{1}{1 - t^{m_i}} \,. \tag{17.1}$$

Compte tenu du Théorème 2 du § 2, ceci donne :

$$\vartheta(Z_2; q, t) = \prod_{e(I) < q} \frac{1}{1 - t^{q+n(I)}} \,. \tag{17.2}$$

Pour transformer cette expression, il nous faut calculer le nombre de suites admissibles I, d'excès $<q$, telles que $q + n(I) = n$, où n est un entier donné. Or, soit $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ une telle suite, et posons : $\alpha_1 = i_1 - 2i_2, \ldots, \alpha_{r-1} = i_{r-1} - 2i_r, \alpha_r = i_r$. Par hypothèse les α_i sont $\geqslant 0$, l'on a $\sum_{i=1}^r \alpha_i \leqslant q - 1$, et il est clair que les α_i déterminent sans ambiguïté la suite I. La condition $q + n(I) = n$ équivaut à

$$\textstyle\sum_{i=0}^r \alpha_i (2^i - 1) = n - q \,.$$

Posons $\alpha_0 = q - 1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i$. On a alors $\sum_{i=0}^r \alpha_i = q - 1$, et :

$$n = 1 + \textstyle\sum_{i=0}^r \alpha_i \cdot 2^i \,. \tag{17.3}$$

On voit ainsi que les suites I vérifiant les conditions écrites plus haut correspondent biunivoquement aux suites d'entiers $\geqslant 0$: $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_r\}$, de somme $q - 1$, qui vérifient 17.3.

Nous pouvons écrire 17.3 sous la forme suivante :

$$n = 1 + 2^0 + \cdots + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^1 + \cdots + 2^r + \cdots + 2^r \,, \tag{17.4}$$

où 2^i figure α_i fois. Comme $\sum_{i=0}^r \alpha_i = q - 1$, il y aura en tout $q - 1$ puissances de 2. Ceci montre que le nombre de suites I vérifiant les conditions écrites plus haut est égal au nombre de décompositions de n de la forme :

$$n = 1 + 2^{h_1} + 2^{h_2} + \cdots + 2^{h_{q-1}} \text{ avec } h_1 \geqslant h_2 \geqslant \cdots \geqslant h_{q-1} \geqslant 0 \,. \tag{17.5}$$

D'où :

Théorème 1. $\vartheta(Z_2; q, t) = \displaystyle\prod_{h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots \geqslant h_{q-1} \geqslant 0} \frac{1}{1 - t^{2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}} + 1}}$

Pour $q = 1$, la famille des h_i est vide, et le Théorème redonne la série de Poincaré de $H^*(Z_2; 1, Z_2)$:

17.6. $\vartheta(Z_2; 1, t) = 1/(1 - t)$.

Le Théorème 1 donne également la valeur de $\vartheta(Z_m; q, t)$ lorsque m est une puissance de 2. En effet, d'après le Corollaire au Théorème 4 du § 2, on a :

$$\vartheta(Z_m; q, t) = \vartheta(Z_2; q, t) \quad \text{si} \quad m = 2^h \,. \tag{17.7}$$

18. La série $\vartheta(Z\,;q,t)$

Si $q=1$, on a évidemment $\vartheta(Z\,;q,t)=1+t$. Nous pouvons donc supposer $q\geqslant 2$.

On raisonne alors comme au numéro précédent. La condition $i_r>1$ du Théorème 3 du § 2 équivaut à $\alpha_r>1$, ou encore à $h_1=h_2$. La condition 17.5 doit donc être remplacée par la suivante :

$$n=1+2^{h_1}+2^{h_1}+2^{h_3}+\cdots+2^{h_{q-1}}\ , \tag{18.1}$$

ou encore :

$$n=1+2^{h_1+1}+2^{h_3}+\cdots+2^{h_{q-1}}\ , \tag{18.2}$$

d'où, en renumérotant les h_i, le résultat suivant (valable si $q\geqslant 2$, rappelons-le) :

Théorème 2. $\vartheta(Z\,;q,t)=\prod_{h_1>h_2\geqslant\ldots h_{q-2}\geqslant 0}\dfrac{1}{1-t^{2^{h_1}+2^{h_2}+\ldots+2^{h_{q-2}}+1}}$.

En comparant les Théorèmes 1 et 2 on voit que $\vartheta(Z;q,t)$ ne diffère de $\vartheta(Z_2;q-1,t)$ que par l'omission des termes correspondants à $h_1=h_2$. Or ces derniers définissent justement $\vartheta(Z;q-1,t)$, comme on l'a vu plus haut. On a donc:

Corollaire 1. $\vartheta(Z\,;q,t)=\vartheta(Z_2\,;q-1,t)/\vartheta(Z\,;q-1,t)$.

En itérant, on obtient :

Corollaire 2. $\vartheta(Z\,;q,t)=\dfrac{\vartheta(Z_2\,;q-1,t)\cdot\vartheta(Z_2\,;q-3,t)\ldots}{\vartheta(Z_2\,;q-2,t)\cdot\vartheta(Z_2\,;q-4,t)\ldots}$.

Remarque. On peut retrouver les résultats précédents d'une autre façon : en utilisant 13.2, on démontre d'abord le Corollaire 1, puis on en tire par récurrence sur q le Théorème 2.

19. Les séries $\vartheta(Z_2,t)$ **et** $\vartheta(Z,t)$

D'après le n° 17, la dimension de $A^n(Z_2,Z_2)$ est égale au nombre des suites d'entiers $\geqslant 0$: $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$, telles que :

$$n=\textstyle\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\cdot(2^i-1)\ . \tag{19.1}$$

En comparant avec 17.1, on obtient :

Théorème 3. $\vartheta(Z_2,t)=\prod_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-t^{2^i-1}}$.

D'après 17.7, on a :

$$\vartheta(Z_m,t)=\vartheta(Z_2,t)\quad\text{si}\quad m=2^h\ . \tag{19.2}$$

Le Corollaire 1 du Théorème 2, joint à la formule 16.5, donne l'identité suivante :

$$\vartheta(Z,t)=\vartheta(Z_2,t)/(1+t)\ . \tag{19.3}$$

D'où :

Théorème 4. $\vartheta(Z, t) = \dfrac{1}{1-t^2} \prod_{i=2}^{\infty} \dfrac{1}{1-t^{2^i-1}}$.

20. Exemples

$\vartheta(Z_2; 2, t) = 1/(1-t^2)(1-t^3)(1-t^5)(1-t^9)(1-t^{17})\ldots$
$= 1 + t^2 + t^3 + t^4 + 2t^5 + 2t^6 + 2t^7 + 3t^8 + 4t^9 + 4t^{10} + 5t^{11} + 6t^{12}$
$+ 6t^{13} + 8t^{14} + 8t^{15} + \ldots$

$\vartheta(Z; 3, t) = 1/(1-t^3)(1-t^5)(1-t^9)(1-t^{17})\ldots$
$= 1 + t^3 + t^5 + t^6 + t^8 + 2t^9 + t^{10} + t^{11} + 2t^{12} + t^{13}$
$+ 2t^{14} + 3t^{15} + \ldots$

$\vartheta(Z_2, t) = 1/(1-t)(1-t^3)(1-t^7)(1-t^{15})\ldots$
$= 1 + t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + 2t^5 + 3t^6 + 4t^7 + 4t^8 + 5t^9 + 6t^{10}$
$+ 6t^{11} + 7t^{12} + 8t^{13} + 9t^{14} + 11t^{15} + \ldots$

$\vartheta(Z, t) = 1/(1-t^2)(1-t^3)(1-t^7)(1-t^{15})\ldots$
$= 1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + 2t^6 + 2t^7 + 2t^8 + 3t^9 + 3t^{10} + 3t^{11}$
$+ 4t^{12} + 4t^{13} + 5t^{14} + 6t^{15} + \cdots$

21. Convergence des séries $\vartheta(\Pi; q, t)$

Théorème 5. *Lorsque Π est un groupe abélien de type fini, la série entière $\vartheta(\Pi; q, t)$ converge dans le disque $|t| < 1$.*

D'après les formules des numéros précédents, il suffit d'établir ce résultat pour $\Pi = Z_2$. Dans ce cas, il nous faut voir que la série :

$$\sum_{h_1 \geqslant h_2 \geqslant \ldots h_{q-1} \geqslant 0} t^{2^{h_1} + \ldots + 2^{h_{q-1}} + 1},$$

converge dans le disque $|t| < 1$, ce qui résulte immédiatement du fait qu'elle est majorée par la série $t \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} t^n)^{q-1}$.

La singularité «dominante» de $\vartheta(\Pi; q, t)$ sur le cercle $|t| = 1$ est $t = 1$; nous allons étudier le comportement de $\vartheta(\Pi; q, t)$ au voisinage de cette singularité. Il est commode pour cela de prendre comme nouvelle variable $x = -\log_2(1-t)$, et comme nouvelle fonction $\log_2 \vartheta$, $\log_2$ désignant comme d'ordinaire le logarithme à base 2. En d'autres termes, nous posons :

$$\varphi(\Pi; q, x) = \log_2 \vartheta(\Pi; q, 1 - 2^{-x}), \quad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{21.1}$$

et nous sommes ramenés à étudier la croissance de $\varphi(\Pi; q, x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous envisagerons d'abord le cas $\Pi = Z_2$.

22. Croissance de la fonction $\varphi(Z_2\,;q\,,x)$

Théorème 6. *Lorsque x tend vers $+\infty$, on a* $\varphi(Z_2\,;q\,,x) \sim x^q/q\,!$
(Rappelons que $f(x) \sim g(x)$ signifie que $\lim. f(x)/g(x) = 1$.)
Nous démontrerons ce théorème par récurrence sur q. Lorsque $q=1$, on a $\vartheta(Z_2\,;q\,,t) = 1/(1-t)$, d'où $\varphi(Z_2\,;q\,,x) = x$.

Supposons le théorème démontré pour $q-1$ et démontrons-le pour q. Pour simplifier les notations, nous écrirons $\vartheta_q(t)$ au lieu de $\vartheta(Z_2\,;\,q\,,t)$ et $\varphi_q(x)$ au lieu de $\varphi(Z_2\,;q\,,x)$.

Nous introduirons les fonctions auxiliaires suivantes :

$$\vartheta^0_q(t) = \prod_{h_1\geqslant h_2\geqslant\ldots h_{q-1}\geqslant 0} \frac{1}{1-t^{2^{h_1}+2^{h_2}+\ldots+2^{h_{q-1}}}}\,,$$

$$\varphi^0_q(x) = \log_2 \vartheta^0_q(1-2^{-x})\,,$$

$$\vartheta'_q(t) = \prod_{h_1\geqslant h_2\geqslant\ldots h_{q-1}\geqslant 0} \frac{1}{1-t^{2^{h_1+1}+\ldots+2^{h_{q-1}+1}}}\,.$$

Les inégalités évidentes :

$$2^{h_1+1}+\cdots+2^{h_{q-1}+1} \geqslant 2^{h_1}+\cdots+2^{h_{q-1}}+1 \geqslant 2^{h_1}+\cdots+2^{h_{q-1}}\,,$$

entraînent les inégalités :

$$\vartheta'_q(t) \leqslant \vartheta_q(t) \leqslant \vartheta^0_q(t) \qquad \textit{pour} \qquad 0\leqslant t<1\,. \tag{22.1}$$

Mais par ailleurs $\vartheta'_q(t)$ ne diffère de $\vartheta^0_q(t)$ que par les facteurs correspondants à $h_{q-1}=0$, c'est-à-dire par $\vartheta_{q-1}(t)$. On a donc :

$$\vartheta'_q(t) = \vartheta^0_q(t)/\vartheta_{q-1}(t)\,. \tag{22.2}$$

En comparant 22.1 et 22.2, on obtient :

$$\vartheta^0_q(t)/\vartheta_{q-1}(t) \leqslant \vartheta_q(t) \leqslant \vartheta^0_q(t) \qquad \textit{pour} \qquad 0\leqslant t<1\,, \tag{22.3}$$

d'où, en prenant les logarithmes :

$$\varphi^0_q(x) - \varphi_{q-1}(x) \leqslant \varphi_q(x) \leqslant \varphi^0_q(x) \qquad \textit{pour} \qquad 0\leqslant x<+\infty. \tag{22.4}$$

Si l'on savait que $\varphi^0_q(x) \sim x^q/q\,!$, on aurait $\varphi^0_q(x) - \varphi_{q-1}(x) \sim x^q/q\,!$ (car, d'après l'hypothèse de récurrence, $\varphi_{q-1}(x) \sim x^{q-1}/(q-1)\,!$), d'où $\varphi_q(x) \sim \varphi^0_q(x) \sim x^q/q\,!$

Nous sommes donc ramenés à prouver que $\varphi^0_q(x) \sim x^q/q\,!$ Pour cela, substituons t^2 à t dans $\vartheta^0_q(t)$. On obtient visiblement $\vartheta^0_q(t^2) = \vartheta'_q(t) = \vartheta^0_q(t)/\vartheta_{q-1}(t)$, d'où, en prenant les logarithmes :

$$\varphi^0_q(x) = \varphi_{q-1}(x) + \varphi^0_q(x-1-\log_2(1-2^{-x-1}))\,. \tag{22.5}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\log_2(1-2^{-x-1})$ tend vers 0 par valeurs inférieures. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc, pour x assez grand :

$$\varphi_q^0(x-1) + \varphi_{q-1}(x) \leqslant \varphi_q^0(x) \leqslant \varphi_q^0(x-1+\varepsilon) + \varphi_{q-1}(x) \ . \tag{22.6}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\varphi_{q-1}(x) \sim x^{q-1}/(q-1)\,!$; donc, pour tout $\varepsilon' > 0$, on a, pour x assez grand :

$$(1-\varepsilon')\cdot x^{q-1}/(q-1)\,! \leqslant \varphi_{q-1}(x) \leqslant (1+\varepsilon')\cdot x^{q-1}/(q-1)\,! \ . \tag{22.7}$$

En combinant 22.6 et 22.7 on obtient :

$$\varphi_q^0(x-1) + (1-\varepsilon')\cdot x^{q-1}/(q-1)\,! \leqslant \varphi_q^0(x) \leqslant \varphi_q^0(x-1+\varepsilon) + (1+\varepsilon')\cdot x^{q-1}/(q-1)\,!$$

Or, il est bien connu que l'équation aux différences finies :

$$f(x) = f(x-1) + A\cdot x^{q-1}/(q-1)\,!$$

admet une solution de la forme $F(x) = A\cdot x^q/q\,! + R(x)$, où $R(x)$ est un polynôme de degré $< q$. En outre, si une fonction continue g vérifie

$$g(x) \leqslant g(x-1) + A\cdot x^{q-1}/(q-1)\,! \ ,$$

il est clair qu'il existe une constante K telle que $g(x) \leqslant F(x) + K$. On a un résultat analogue en remplaçant $\leqslant$ par $\geqslant$.

Appliquant ceci à la fonction $\varphi_q^0(x)$, on conclut à l'existence de deux polynômes R' et R'', de degrés $< q$, tels que l'on ait, pour x assez grand :

$$(1-\varepsilon')\cdot x^q/q\,! + R'(x) \leqslant \varphi_q^0(x) \leqslant \frac{1+\varepsilon'}{1-\varepsilon}\cdot x^q/q\,! + R''(x) \, .$$

Comme ε et ε' sont arbitraires, les inégalités précédentes entraînent que $\lim.\ \varphi_q^0(x)/(x^q/q\,!) = 1$, ce qui achève la démonstration, d'après ce qui a été dit plus haut.

23. Croissance de la fonction $\varphi(\Pi\,; q, x)$ lorsque Π est de type fini

Théorème 7. $\varphi(Z_m\,; q, x) \sim x^q/q\,!$ *si m est une puissance de* 2.
En effet $\varphi(Z_m\,; q, x) = \varphi(Z_2\,; q, x)$ d'après 17.7.

Théorème 8. $\varphi(Z\,; q, x) \sim x^{q-1}/(q-1)\,!$

Pour $q = 1$ on vérifie directement que $\varphi(Z\,; q, x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour $q \geqslant 2$, on a

$$\vartheta(Z\,; q, t) = \vartheta(Z_2\,; q-1, t)/\vartheta(Z\,; q-1, t) \ ,$$

d'où $\varphi(Z; q, x) = \varphi(Z_2; q-1, x) - \varphi(Z; q-1, x)$ et le Théorème 8 résulte de là, par récurrence sur q.

En combinant les Théorèmes 6, 7, 8 on obtient :

Théorème 9. *Soit Π un groupe abélien de type fini, somme directe d'un groupe fini d'ordre impair, de r groupes cycliques d'ordre une puissance de 2, et de s groupes cycliques infinis.*

a) *Si* $r \geqslant 1$, *on a* $\varphi(\Pi; q, x) \sim r \cdot x^q/q!$,
b) *Si* $r = 0$ *et* $s \geqslant 1$, *on a* $\varphi(\Pi; q, x) \sim s \cdot x^{q-1}/(q-1)!$,
c) *Si* $r = 0$ *et* $s = 0$, *on a* $\varphi(\Pi; q, x) = 0$.

Remarque. A côté des $\varphi(\Pi; q, x)$ on peut définir

$$\varphi(\Pi, x) = \log_2 \vartheta(\Pi, 1 - 2^{-x}) .$$

On montre facilement que $\varphi(Z_2, x) \sim \varphi(Z_2; 2, x) \sim x^2/2$, d'où également $\varphi(Z, x) \sim x^2/2$. Mais j'ignore si ces résultats ont une application topologique analogue au Théorème 10.

24. Application topologique

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 10. *Soit X un espace topologique connexe par arcs, simplement connexe, et vérifiant les conditions suivantes :*

1) $H_i(X, Z)$ *est un groupe abélien de type fini pour tout* $i > 0$,
2) $H_i(X, Z_2) = 0$ *pour i assez grand,*
3) $H_i(X, Z_2) \neq 0$ *pour au moins un* $i \neq 0$.

Il existe alors une infinité d'entiers i tels que le groupe d'homotopie $\pi_i(X)$ contienne un sous-groupe isomorphe à Z ou à Z_2.

(On notera que les conditions 1 et 2 sont vérifiées d'elles-mêmes si X est un polyèdre fini.)

Remarquons tout d'abord que d'après [8], p. 491 (voir aussi [11], Chapitre III, Théorème 1) la condition 1 entraîne que $\pi_i(X)$ soit un groupe de type fini pour tout i. La propriété «$\pi_i(X)$ contient un sous-groupe isomorphe à Z ou à Z_2» équivaut donc à la suivante «$\pi_i(X) \otimes Z_2 \neq 0$». Soit j le plus petit entier > 0 tel que $H_j(X, Z_2) \neq 0$. D'après [8], [11], loc. cit., $\pi_j(X) \otimes Z_2 = H_j(X, Z_2) \neq 0$. En outre, on a $j \geqslant 2$ puisque $\pi_1(X) = 0$.

Raisonnons alors par l'absurde, et supposons qu'il existe un plus grand entier q tel que $\pi_q(X) \otimes Z_2 \neq 0$. On a évidemment $q \geqslant j \geqslant 2$. Nous poserons $\Pi = \pi_q(X)$.

Nous allons obtenir une contradiction en étudiant les propriétés des espaces (X, i) obtenus en tuant les $i - 1$ premiers groupes d'homotopie de X (au sens de [3], I, voir aussi [11] et [14]). Rappelons que par définition on a $\pi_r(X, i) = 0$ pour $r < i$, $\pi_r(X, i) = \pi_r(X)$ pour $r \geqslant i$.

Considérons d'abord l'espace $T = (X, q + 1)$. D'après les hypothèses faites, on a $\pi_r(T) \otimes Z_2 = 0$ pour tout r, d'où $H_r(T, Z_2) = 0$ pour tout $r > 0$ d'après [8], [11], loc. cit.

Venons-en à l'espace $X_q = (X, q)$. D'après [3], I, X_q a même type d'homotopie qu'un espace fibré X'_q de fibre T et de base un espace $K(\pi_q(X), q) = K(\Pi, q)$. En appliquant alors un résultat connu ([8], p. 470), on obtient :

$$H^i(X_q, Z_2) = H^i(X'_q, Z_2) = H^i(\Pi; q, Z_2) \text{ pour tout } i \geqslant 0. \tag{24.1}$$

Si l'on désigne par $X_q(t)$ la série de Poincaré de $H^*(X_q, Z_2)$, on a donc :

$$X_q(t) = \vartheta(\Pi; q, t) . \tag{24.2}$$

De façon analogue, soit $X_i(t)$ la série de Poincaré de $H^*(X_i, Z_2)$[7]), avec $X_i = (X, i)$. On sait (cf. [3]) que X_q est un espace fibré de base X_{q-1} et de fibre un espace $K(\pi_{q-1}(X), q - 2)$. Les séries de Poincaré des algèbres de cohomologie modulo 2 de ces trois espaces vérifient donc la relation :

$$X_q(t) \prec X_{q-1}(t) \cdot \vartheta(\pi_{q-1}(X); q - 2, t) , \tag{24.3}$$

où le signe $\prec$ signifie que tous les coefficients de la série formelle écrite à gauche sont inférieurs aux coefficients correspondants de la série formelle écrite à droite. De même :

$$\begin{aligned} X_{q-1}(t) &\prec X_{q-2}(t) \cdot \vartheta(\pi_{q-2}(X); q - 3, t) \\ \dots\dots & \\ X_3(t) &\prec X_2(t) \cdot \vartheta(\pi_2(X); 1, t) . \end{aligned} \tag{24.4}$$

On a évidemment $X_2(t) = X(t)$, série de Poincaré de $H^*(X, Z_2)$, qui se réduit d'ailleurs à un polynôme, vu les hypothèses 1 et 2. Multipliant les inégalités précédentes, on obtient :

$$\vartheta(\Pi; q, t) = X_q(t) \prec X(t) \cdot \prod_{1<i<q} \vartheta(\pi_i(X); i - 1, t) .$$

A fortiori, la même inégalité vaut pour les *fonctions* définies par les

---

[7]) On a le droit de parler de ces séries de Poincaré parce que les groupes d'homologie des X_i sont de type fini (puisqu'il en est ainsi des groupes d'homotopie, d'après l'hypothèse 1).

séries précédentes dans l'intervalle $[0, 1]$. Comme $X(t)$ est un polynôme, $X(t)$ est borné sur $[0, 1]$ par une constante h, et l'on a :

$$\vartheta(\Pi\,;q,t) \leqslant h\cdot \prod_{1<i<q} \vartheta(\pi_i(X)\,;i-1,t)\ ,\qquad 0\leqslant t<1\ .$$

En passant aux fonctions $\varphi(\Pi\,;q,x)$, l'inégalité précédente devient :

$$\varphi(\Pi\,;q,x) \leqslant \log_2 h + \textstyle\sum_{i=2}^{q-1} \varphi(\pi_i(X)\,;i-1,x)\ ,\ 0\leqslant x< +\infty\,. \quad (24.5)$$

Par ailleurs, d'après le Théorème 9, $\varphi(\Pi\,;q,x)$ équivaut, soit à $r\cdot x^q/q\,!$ avec $r\geqslant 1$, soit à $s\cdot x^{q-1}/(q-1)\,!$ avec $s\geqslant 1$ (le cas c) du Théorème 9 étant écarté par l'hypothèse $\Pi\otimes Z_2\neq 0$), alors que les $\varphi(\pi_i(X)\,;i-1,x)$ sont majorés par $A\cdot x^{i-1}/(i-1)\,!$, où A est une constante. Comme $i<q$, il s'ensuit que le second membre de 24.5 est majoré par $B\cdot x^{q-2}$, où B est une constante, et est donc un infiniment grand strictement inférieur au premier membre. Cette contradiction achève notre démonstration.

Explicitons un cas particulier du Théorème 10 :

Corollaire. *Pour tout entier $n\geqslant 2$ il existe une infinité d'entiers i tels que $\pi_i(S_n)$ contienne un sous-groupe isomorphe à Z_2.*

En effet, on sait que $\pi_i(S_n)$ ne contient de sous-groupe isomorphe à Z que pour un nombre fini de valeurs de i, à savoir $i=n$ si n est impair, $i=n$ et $i=2n-1$ si n est pair.

25. Remarques

1) Soit X un espace vérifiant les hypothèses du Théorème 10. Il y a trois possibilités :

α) $\pi_i(X)$ contient Z_2 pour une infinité de valeurs de i, et Z pour une infinité de valeurs de i,

β) $\pi_i(X)$ contient Z_2 pour une infinité de valeurs de i, et Z pour un nombre fini de valeurs de i,

γ) $\pi_i(X)$ contient Z pour une infinité de valeurs de i, et Z_2 pour un nombre fini de valeurs de i.

Une sphère, un groupe de Lie, donnent des exemples de β). On peut montrer qu'un «joint» de sphères $X=S_n^1\vee\ldots\vee S_n^k$, $n\geqslant 2$, $k\geqslant 2$, vérifie α). Par contre, je ne connais aucun exemple du cas γ), et je conjecture qu'il n'en existe pas, tout au moins parmi les polyèdres finis.

2) Posons $G_i=\pi_{n+i}(S_n)$, $n>i+1$. On sait que les G_i sont des groupes finis (si $i>0$), indépendants de la valeur de n choisie. Il est naturel de conjecturer que G_i contient Z_2 pour une infinité de valeurs de i, mais cela ne semble pas résulter de la méthode suivie plus haut.

§ 4. Opérations cohomologiques

26. Définition des opérations cohomologiques

Soient q et n deux entiers >0, A et B deux groupes abéliens. Une *opération cohomologique*, relative à $\{q, n, A, B\}$, est une application :

$$C : H^q(X, A) \to H^n(X, B) \ ,$$

définie pour tout complexe simplicial X, et vérifiant la condition suivante :

26.1. Pour toute application continue f d'un complexe X dans un complexe Y, on a $C \circ f^* = f^* \circ C$.

Remarque. Nous nous sommes placés dans la catégorie des complexes simpliciaux pour des raisons de commodité. On pourrait aussi bien se placer dans la catégorie de tous les espaces topologiques (la cohomologie étant la cohomologie singulière). Cela ne changerait rien, puisque l'on peut remplacer tout espace topologique par le complexe simplicial «réalisation géométrique» de son complexe singulier, et que cette opération ne modifie pas les groupes de cohomologie.

27. Exemples

27.1. Supposons que $n = q$, et donnons-nous un homomorphisme de A dans B. Cela définit un homomorphisme de $H^q(X, A)$ dans $H^q(X, B)$ qui vérifie 26.1.

27.2. Supposons que $n = q + 1$, et donnons-nous une suite exacte :

$$0 \to B \to L \to A \to 0 \ .$$

Cette suite définit une opération cobord : $H^q(X, A) \to H^{q+1}(X, B)$ qui vérifie 26.1.

27.3. Supposons que $n = 2q$, et donnons-nous une application bilinéaire de A dans B. Au moyen de cette application, on peut définir le cup-carré d'un élément de $H^q(X, A)$, qui est un élément de $H^{2q}(X, B)$, et cette opération vérifie 26.1.

27.4. Les Sq^i, les Sq^I, les puissances réduites de Steenrod (voir [13]), sont des opérations cohomologiques.

28. Caractérisation des opérations cohomologiques

Théorème 1. *Les opérations cohomologiques relatives à* $\{q, n, A, B\}$ *correspondent biunivoquement aux éléments du groupe* $H^n(A\,;\, q, B)$.

Soit T un complexe simplicial qui soit un espace $K(A, q)$. Comme nous l'avons vu au nº 3, $H^q(T, A)$ possède une classe fondamentale u qui correspond dans $\mathrm{Hom}(A, A)$ à l'application identique de A sur A. Si C est une opération cohomologique relative à $\{q, n, A, B\}$, $C(u)$ est un élément bien défini de $H^n(T, B) = H^n(A; q, B)$, élément que nous noterons $\varphi(C)$.

Inversement, soit c un élément de $H^n(T, B)$, et soit $x \in H^q(X, A)$ une classe de cohomologie d'un complexe simplicial arbitraire X. D'après 5.3, il existe une application $g_x : X \to T$ telle que $g_x^*(u) = x$, et cette application g_x est unique, à une homotopie près. L'élément $g_x^*(c) \in H^n(X, B)$ est donc défini sans ambiguïté, et il est immédiat que l'application $x \to g_x^*(c)$ vérifie 26.1. C'est donc une opération cohomologique relative à $\{q, n, A, B\}$, que nous noterons $\psi(c)$.

On a $\varphi \circ \psi = 1$. Soit en effet $c \in H^n(A; q, B)$. Par définition, $\varphi \circ \psi(c)$ est égal à $g_u^*(c)$, où $g_u : T \to T$ est une application telle que $g_u^*(u) = u$. On peut donc prendre pour g_u l'application identique, ce qui donne $\varphi \circ \psi(c) = g_u^*(c) = c$.

Il nous reste à montrer que $\psi \circ \varphi = 1$. Pour cela, soit C une opération cohomologique, et posons $c = \varphi(C) = C(u)$. Pour tout élément $x \in H^q(X, A)$, on a $\psi(c)(x) = g_x^*(c) = g_x^*\big(C(u)\big) = C\big(g_x^*(u)\big) = C(x)$. Ceci signifie bien que $\psi(c) = \psi \circ \varphi(C)$ est identique à C.

Corollaire. *Soient C_1 et C_2 deux opérations cohomologiques relatives au même système $\{q, n, A, B\}$, et soit u la classe fondamentale de $H^q(A; q, A)$. Si $C_1(u) = C_2(u)$, alors $C_1 = C_2$.*

Remarques. 1) On aurait aussi bien pu définir les opérations cohomologiques pour la cohomologie relative (des complexes simpliciaux, ou bien de tous les espaces topologiques, ce qui revient au même). La démonstration précédente reste valable.

2) On pourrait également définir les opérations cohomologiques $C(x_1, \ldots, x_r)$ de plusieurs variables $x_i \in H^{q_i}(X, A_i)$, à valeurs dans $H^n(X, B)$. Ces opérations correspondent biunivoquement aux éléments de $H^n\big(K(A_1, q_1) \times \cdots \times K(A_r, q_r), B\big)$, comme on le voit par le même raisonnement que plus haut. Lorsque les A_i sont de type fini et que B est un corps, il résulte de la formule de Künneth que ces opérations se réduisent à des cup-produits d'opérations cohomologiques à une seule variable.

29. Premières applications

Nous allons appliquer le Théorème 1 à divers cas simples. Nous désignerons par C une opération cohomologique relative à $\{q, n, A, B\}$.

29.1. *Si* $0<n<q$, *C est identiquement nulle.* En effet, $H^n(A; q, B)$ est alors réduit à 0.

29.2. *Si* $n = q$, *C est associé à un homomorphisme de A dans B* (au sens de 27.1). En effet, $H^q(A; q, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$.

29.3. *Si* $q = 1$, $A = Z$, $n>1$, *C est identiquement nulle.* En effet $H^n(Z; 1, B) = 0$ si $n>1$, puisqu'un cercle est un espace $K(Z, 1)$.

29.4. *Si* $q = 2$, $A = Z$, *n impair, C est identiquement nulle. Si n est pair, et si* $B = Z$ *ou* Z_m, *on a* $C(x) = k \cdot x^{n/2}$, $k \in B$. En effet, on peut prendre pour espace $K(Z, 2)$ un espace projectif complexe à une infinité de dimensions.

29.5. *Si q est impair,* $A = Z$, $B = Q$ *(corps des rationnels),* $n>q$, *C est identiquement nulle.* En effet, on a $H^n(Z; q, Q) = 0$ si $n>q$, d'après [8], p. 501.

29.6. *Si q est pair,* $A = Z$, $B = Q$, *et si n n'est pas divisible par q, C est identiquement nulle; si n est divisible par q, on a* $C(x) = k \cdot x^{n/q}$, $k \in Q$. En effet, d'après [8], loc. cit., $H^*(Z; q, Q)$ est l'algèbre de polynômes sur Q qui admet u pour unique générateur.

On peut donner bien d'autres applications du Théorème 1. Par exemple lorsque B est un corps, établir une formule de produit:

$$C(x \cdot y) = \Sigma C_i(x) \cdot C_j(y) \;;$$

lorsque $n<2q$, montrer que C est un homomorphisme. Etc.

30. Caractérisation des i-carrés

Soit i un entier $\geqslant 0$, et supposons donné, pour tout couple (X, Y) de complexes simpliciaux, et tout entier $n \geqslant 0$, des applications

$$A^i : H^q(X, Y; Z_2) \to H^{q+i}(X, Y; Z_2)$$

vérifiant les propriétés 2.1, 2.2 et 2.4, c'est-à-dire telles que $A^i \circ f^* = f^* \circ A^i$, $A^i \circ \delta = \delta \circ A^i$, $A^i(x) = x^2$ si dim. $x = i$, $A^i(x) = 0$ si dim. $x<i$. Nous allons montrer que les A^i coïncide avec les Sq^i [8]).

D'après le Théorème 1 (qui est valable dans le cas de la cohomologie relative, comme nous l'avons remarqué), il suffit de prouver que $A^i(u_q) = Sq^i(u_q)$, u_q désignant le générateur de $H^q(Z_2; q, Z_2)$. Ceci est clair si

---

[8]) R. Thom a obtenu antérieurement une caractérisation analogue.

$q \leqslant i$, à cause de 2.4; pour $q > i$, raisonnons par récurrence sur q. D'après le raisonnement de [8], p. 457 (qui n'utilise que les propriétés 2.1 et 2.2), A^i commute à la transgression τ. On a donc

$$A^i(u_q) = A^i(\tau\, u_{q-1}) = \tau(A^i\, u_{q-1}) = \tau(Sq^i u_{q-1}) = Sq^i u_q \ ,$$

c. q. f. d.

Note. Comme nous l'avons indiqué au n° 26, on peut étendre les A^i à tous les couples (X, Y) d'espaces topologiques, à condition d'utiliser la cohomologie singulière, et les propriétés 2.1, 2.2, 2.4 sont encore vérifiées. C'est ce qui nous a permis d'utiliser les A^i dans la cohomologie de l'espace fibré 5.1, qui relie $K(Z_2, q-1)$ à $K(Z_2, q)$, espace fibré qui n'est pas un complexe simplicial.

On pourrait d'ailleurs remplacer, dans la démonstration précédente, le complexe $K(Z_2, q)$ par le joint de $K(Z_2, q-1)$ avec deux points, et l'on pourrait ainsi demeurer entièrement à l'intérieur de la catégorie des complexes simpliciaux.

31. Opérations cohomologiques en caractéristique 2

Posons $A = B = Z_2$. En combinant le Théorème 1 avec le Théorème 2 du § 2, on obtient :

Théorème 2. *Toute opération cohomologique C: $H^q(X,Z_2) \to H^n(X,Z_2)$ est de la forme :*

$$C(x) = P\big(Sq^{I_1}(x), \ldots, Sq^{I_k}(x)\big) \ ,$$

où P désigne un polynôme (par rapport au cup-produit), et où $Sq^{I_1}, \ldots, Sq^{I_k}$ désignent les i-carrés itérés correspondant aux suites admissibles d'excès $< q$. En outre, deux polynômes distincts P et P' définissent des opérations C et C' distinctes.

Lorsque $A = Z_m$ $(m = 2^h)$, on a un résultat analogue en remplaçant les Sq^I par les Sq^I_h; lorsque $A = Z$, on ne doit considérer que des suites I dont le dernier terme est > 1.

Corollaire. *Si $n \leqslant 2q$, les i-carrés itérés Sq^I, où I parcourt l'ensemble des suites admissibles de degré $n - q$, forment une base de l'espace vectoriel des opérations cohomologiques relatives à $\{q, n, Z_2, Z_2\}$.*

32. Relations entre *i*-carrés itérés

Le Corollaire précédent montre que tout i-carré itéré est combinaison linéaire de Sq^I, où I est admissible. Il est naturel de chercher une méthode permettant d'écrire *explicitement* une telle décomposition. Cette question a été résolue par J. Adem [1], qui a démontré la formule suivante (conjecturée par Wu-Wen-Tsün) :

$$\text{Si } a<2b, \quad Sq^a Sq^b = \sum_{0\leqslant c\leqslant a/2} \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c , \qquad (32.1)$$

où $\binom{k}{j}$ désigne le coefficient binômial $k!/j!(k-j)!$, avec la convention usuelle : $\binom{k}{j} = 0$ si $j>k$.

On voit facilement que cette formule permet de ramener, par des réductions successives, tout i-carré itéré à une somme de Sq^I où I est admissible. Elle répond donc bien à la question posée.

Citons quelques cas particuliers de 32.1 dont nous ferons usage au § 5 :

32.2. $Sq^1 Sq^n = 0$ *si n est impair,* $Sq^1 Sq^n = Sq^{n+1}$ *si n est pair.*

32.3. $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$; $Sq^2 Sq^3 = Sq^5 + Sq^4 Sq^1$.

33. Méthode permettant d'obtenir les relations entre i-carrés itérés

La démonstration donnée par J. Adem de la formule 32.1 est basée sur une étude directe des i-carrés itérés. Nous allons esquisser une méthode plus indirecte, mais qui conduit plus aisément au résultat[9]).

Soit X l'espace projectif réel à une infinité de dimensions, $Y = X^q$ le produit direct de q espaces homéomorphes à X. L'algèbre de cohomologie $H^*(Y, Z_2)$ est donc l'algèbre de polynômes à q générateurs $x_1, \ldots, x_q$, de degrés 1. Nous noterons W_q le produit $x_1 \ldots x_q$ de ces générateurs : on a $W_q \in H^q(Y, Z_2)$.

Lemme 1. *Soit C une somme de i-carrés itérés, tous de degrés $\leqslant q$. Si $C(W_q) = 0$, alors C est identiquement nulle.*

Compte tenu du Corollaire au Théorème 2, il suffit de vérifier que les $Sq^I(W_q)$ sont linéairement indépendants lorsque I parcourt l'ensemble des suites admissibles de degré $\leqslant q$. Or, il est très facile de déterminer explicitement les opérations Sq^i dans $H^*(Y, Z_2)$, en utilisant les propriétés 2.3, 2.4, 2.5 ; le résultat cherché s'ensuit par un calcul que nous ne ferons pas ici (voir un article en préparation de R. Thom).

Théorème 3. *Soit C une somme de i-carrés itérés. Supposons que, pour tout espace T, la relation $C(y) = 0$, $y \in H^*(T, Z_2)$, entraîne $C(x \cdot y) = 0$ pour tout $x \in H^1(T, Z_2)$. Alors C est identiquement nulle.*

Prenons pour T l'espace Y défini plus haut (q étant égal au degré maximum des i-carrés itérés qui figurent dans C). On a évidemment

---

[9]) Cette méthode est d'ailleurs très proche de celle qui avait amené Wu-Wen-Tsün à conjecturer la formule 32.1.

$C(1) = 0$, d'où $C(x_1 \ldots x_i) = 0$ par récurrence sur i, et en particulier $C(W_q) = 0$, d'où $C = 0$ d'après le Lemme 1.

A titre d'exemple, vérifions l'hypothèse du Théorème 3 pour $C = Sq^2 Sq^2 + Sq^3 Sq^1$. En utilisant 2.3, 2.4, 2.5, on obtient :

$$Sq^2 Sq^2(x \cdot y) = x^4 \cdot Sq^1 y + x^2 \cdot (Sq^2 Sq^1 y + Sq^1 Sq^2 y) + x \cdot Sq^2 Sq^2 y \ ,$$
$$Sq^3 Sq^1(x \cdot y) = x^4 \cdot Sq^1 y + x^2 \cdot (Sq^3 y + Sq^2 Sq^1 y) + x \cdot Sq^3 Sq^1 y \ .$$

Comme $Sq^3 = Sq^1 Sq^2$, on tire de là :

$$C(x \cdot y) = x \cdot C(y) \ ,$$

ce qui montre bien que $C(y) = 0$ entraîne $C(x \cdot y) = 0$. D'après le Théorème 3, on a donc $Sq^2 Sq^2 + Sq^3 Sq^1 = 0$, d'où $Sq^2 Sq^2 = Sq^3 Sq^1$, et nous avons démontré la première des relations 32.3.

On démontrerait de la même façon la formule 32.1 dans le cas général, en raisonnant par récurrence sur $a + b$. Nous laissons le détail du calcul au lecteur.

§ 5. Application aux groupes d'homotopie des sphères

34. Méthode

Nous allons combiner les résultats du § 2 et ceux de la note [3], I pour obtenir un certain nombre de renseignements sur les groupes $\pi_6(S_3)$ et $\pi_7(S_3)$. En confrontant ces renseignements avec les résultats déjà obtenus par ailleurs, nous en déduirons le calcul des groupes $\pi_{n+3}(S_n)$ et $\pi_{n+4}(S_n)$ pour tout n.

Nous supposons connus les faits suivants (démontrés notamment dans [11], Chapitre IV ; voir aussi [7]) :

$\pi_4(S_3) = Z_2$, $\pi_5(S_3) = Z_2$, $\pi_6(S_3)$ a 12 éléments,
$\pi_7(S_3)$ est un 2-groupe.

35. Les espaces (S_3, q)

Conformément aux notations de [3], I, nous notons (S_3, q) la sphère S_3 dont on a tué les $q - 1$ premiers groupes d'homotopie. Par définition, on a donc :

$$\pi_i(S_3, q) = 0 \text{ si } i < q \text{ et } \pi_i(S_3, q) = \pi_i(S_3) \text{ si } i \geqslant q \ . \qquad (35.1)$$

En appliquant le Théorème d'Hurewicz, on en tire :

$$H_q(S_3, q) = \pi_q(S_3) \ . \qquad (35.2)$$

Dans les numéros qui suivent, nous calculerons les premiers groupes de cohomologie des espaces (S_3, q), *à valeurs dans* Z_2. Ces groupes seront notés $H^i(S_3, q)$. Nous utiliserons pour cela les suites spectrales attachées aux fibrations (I) et (II) de [3]. Rappelons que :

35.3. Dans la fibration (I) l'espace fibré est $(S_3, q+1)$, la base est (S_3, q), et la fibre est un espace $K(\pi_q(S_3), q-1)$.

35.4. Dans la fibration (II) l'espace fibré a même type d'homotopie que (S_3, q) (nous l'identifierons à (S_3, q) afin de simplifier les notations), la base est un espace $K(\pi_q(S_3), q)$, et la fibre est $(S_3, q+1)$.

Si x est un d_r-cocycle de E_r (E_r désignant l'une des suites spectrales précédentes), nous noterons encore x l'élément de E_{r+1} qu'il définit.

36. Cohomologie de l'espace $(S_3, 4)$

Lemme 1. *En dimensions* $\leqslant 11$, $H^*(S_3, 4)$ *possède une base* $\{1, a, b, c, d\}$ *où* $\dim. a = 4$, $\dim. b = 5$, $\dim. c = 8$, $\dim. d = 9$, *et où* $b = Sq^1 a$, $c = a^2$, $d = a \cdot b$.

On sait (voir [3], II, Proposition 5, ainsi que [11], Chap. IV, Lemme 3) que les groupes d'homologie à coefficients entiers de $(S_3, 4)$ sont :

$$Z, 0, 0, 0, Z_2, 0, Z_3, 0, Z_4, 0, Z_5, 0, \ldots ,$$

d'où, en utilisant la formule des coefficients universels, l'existence de la base $\{1, a, b, c, d\}$. En outre il résulte de 2.6 que l'on a $Sq^1 a \neq 0$, d'où $Sq^1 a = b$. Il nous reste à déterminer les cup-produits dans $H^*(S_3, 4)$, pour prouver que $a^2 = c$ et que $a \cdot b = d$.

Pour cela, nous utiliserons la fibration (I). D'après 35.3, l'espace fibré est $(S_3, 4)$, la base est S_3 et la fibre est un espace $K(Z, 2)$. Soit u_2 le générateur de $H^2(Z; 2)$, v celui de $H^3(S_3)$. Le terme E_2 de la suite spectrale de cohomologie modulo 2 de cette fibration admet pour base les éléments $(u_2)^n$ et $v \otimes (u_2)^n$, n entier $\geqslant 0$. On a évidemment $d_3(u_2) = v$, d'où $d_3((u_2)^n) = 0$ si n est pair et $d_3((u_2)^n) = v \otimes (u_2)^{n-1}$ si n est impair. Comme les différentielles d_r, $r > 3$, sont identiquement nulles, il s'ensuit que E_∞ admet pour base les éléments $(u_2)^{2n}$ et $v \otimes (u_2)^{2n+1}$. Si l'on pose $a' = (u_2)^2$, $b' = v \otimes u_2$, on voit que E_∞ admet pour base les éléments a'^n et $b' \cdot a'^n$. Les éléments $\{a, b, c, d\}$ de $H^*(S_3, 4)$ correspondent donc dans E_∞ aux éléments $\{a', b', a'^2, a' \cdot b'\}$, et comme E_∞ est *l'algèbre graduée* associé à $H^*(S_3, 4)$, cela donne bien $a^2 = c$, et $a \cdot b = d$.

37. Cohomologie de l'espace $(S_3, 5)$

Lemme 2. *En dimensions* $\leqslant 8$, $H^*(S_3, 5)$ *possède une base* $\{1, e, f, g, h, i\}$ *où* $dim.\, e = 5$, $dim.\, f = dim.\, g = 6$, $dim.\, h = 7$, $dim.\, i = 8$, *et où* $f = Sq^1 e$, $h = Sq^1 g = Sq^2 e$, $i = Sq^2 f$, $Sq^2 g = 0$.

Utilisons la fibration (II). D'après 35.4, l'espace fibré est $(S_3, 4)$, la base est un espace $K(Z_2, 4)$, et la fibre est $(S_3, 5)$.

D'après le Théorème 2 du § 2, $H^*(Z_2 ; 4)$ possède la base suivante (en dimensions $\leqslant 9$) :

$$\{1, u_4, Sq^1 u_4, Sq^2 u_4, Sq^3 u_4, Sq^2 Sq^1 u_4, u_4^2, Sq^3 Sq^1 u_4, \\ Sq^4 Sq^1 u_4, u_4 \cdot Sq^1 u_4\} .$$

L'homomorphisme $H^*(Z_2 ; 4) \rightarrow H^*(S_3, 4)$ applique évidemment u_4 sur a. Il applique donc $Sq^1 u_4$ sur $Sq^1 a = b$, $Sq^2 u_4, Sq^3 u_4$ et $Sq^2 Sq^1 u_4$ sur 0, u_4^2 sur $a^2 = c$, $Sq^3 Sq^1 u_4$ sur $Sq^3 Sq^1 a = Sq^2 Sq^2 a = 0$, $Sq^4 Sq^1 u_4$ sur $Sq^4 Sq^1 a = Sq^2 Sq^3 a + Sq^5 a = 0$, $u_4 \cdot Sq^1 u_4$ sur $a \cdot b = d$. On voit en particulier que cet homomorphisme applique $H^i(Z_2 ; 4)$ *sur* $H^i(S_3, 4)$ pour $i \leqslant 11$ (en fait, cela vaut pour tout i). Nous désignerons le noyau de cet homomorphisme par N^i.

Comme $H^k(S_3, 5) = 0$ si $0 < k < 5$, et $H^k(Z_2 ; 4) = 0$ si $0 < i < 4$, on peut appliquer la suite exacte de [8], p. 469 (en cohomologie). Compte tenu de ce qui précède, cette suite exacte montre que *la transgression* τ *est un isomorphisme de* $H^i(S_3, 5)$ *sur* N^{i+1} *pour* $i \geqslant 7$.

Or N^6 a pour base $Sq^2 u_4$, N^7 a pour base $Sq^3 u_4$ et $Sq^2 Sq^1 u_4$, N^8 a pour base $Sq^3 Sq^1 u_4$. Donc, en dimensions $\leqslant 7$, $H^*(S_3, 5)$ possède une base $\{1, e, f, g, h\}$, caractérisée par :

$$\tau(e) = Sq^2 u_4, \quad \tau(f) = Sq^3 u_4, \quad \tau(g) = Sq^2 Sq^1 u_4, \quad \tau(h) = Sq^3 Sq^1 u_4 .$$

Comme τ commute aux Sq^i, on a :

$$\tau(Sq^1 e) = Sq^1 \tau(e) = Sq^1 Sq^2 u_4 = Sq^3 u_4 = \tau(f) , \qquad \text{d'où } f = Sq^1 e ,$$
$$\tau(Sq^2 e) = Sq^2 Sq^2 u_4 = Sq^3 Sq^1 u_4 = \tau(h) , \qquad \text{d'où } h = Sq^2 e ,$$
$$\tau(Sq^1 g) = Sq^1 Sq^2 Sq^1 u_4 = Sq^3 Sq^1 u_4 = \tau(h) , \qquad \text{d'où } h = Sq^1 g .$$

Montrons maintenant que τ est encore un isomorphisme de $H^8(S_3, 5)$ *sur* N^9. Il faut d'abord vérifier qu'aucun élément non nul de $H^9(Z_2 ; 4)$ n'est un d_r-cobord, avec $r < 9$: cela résulte de la nullité de $E_2^{p,q}$ pour $p + q = 8$, $q > 0$. Il faut ensuite vérifier que tout élément $x \in H^8(S_3, 5)$ est transgressif, autrement dit, que l'on a $d_r(x) = 0$ pour $r < 9$. Or d_r applique $E_r^{0,8}$ dans $E_r^{r,9-r}$; ce dernier groupe est évidemment nul si $r < 9$, sauf pour $r = 4$, où il admet pour base l'élément $u_4 \otimes e$. Nous devons donc montrer qu'on ne peut pas avoir $d_4(x) = u_4 \otimes e$. Or, si cela était, $u_4 \otimes e$ définirait un élément nul dans $E_5, E_6, \ldots$, et en particulier on aurait $d_6(u_4 \otimes e) = 0$; comme $d_6(e) = \tau(e) = Sq^2 u_4$, on a $d_6(u_4 \otimes e) = u_4 \cdot Sq^2 u_4 \in E_6^{10,0}$.

Mais on a $E_6^{10,0} = E_5^{10,0} = \ldots = E_2^{10,0} = H^{10}(Z_2\,; 4)$, et l'on sait (§ 2, Théorème 2) que $u_4 \cdot Sq^2 u_4$ est un élément non nul de $H^{10}(Z_2\,; 4)$. On a donc $d_6(u_4 \otimes e) \neq 0$, et cette contradiction prouve bien que x est transgressif.

Comme N^9 a pour base l'élément $Sq^4 Sq^1 u_4$, $H^8(S_3, 5)$ a pour base un élément i caractérisé par $\tau(i) = Sq^4 Sq^1 u_4$. On a en outre :

$$\tau(Sq^2 g) = Sq^2 Sq^2 Sq^1 u_4 = Sq^3 Sq^1 Sq^1 u_4 = 0, \quad \text{d'où} \quad Sq^2 g = 0\ .$$
$$\tau(Sq^2 f) = Sq^2 Sq^3 u_4 = Sq^5 u_4 + Sq^4 Sq^1 u_4 = \tau(i), \quad \text{d'où} \quad i = Sq^2 f\ .$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 2.

38. Cohomologie de l'espace $(S_3, 6)$

Lemme 3. *En dimensions* $\leqslant 7$, $H^*(S_3, 6)$ *possède une base* $\{1, j, k\}$ *où* $dim.\, j = 6$, $dim.\, k = 7$, *et où* $Sq^1 j = 0$, $Sq^2 j = 0$.

Utilisons la fibration (II). D'après 35.4, l'espace fibré est $(S_3, 5)$, la base est un espace $K(Z_2, 5)$, et la fibre est $(S_3, 6)$.

En dimensions $\leqslant 8$, $H^*(Z_2\,; 5)$ possède la base suivante :

$$\{1, u_5, Sq^1 u_5, Sq^2 u_5, Sq^3 u_5, Sq^2 Sq^1 u_5\}\ .$$

L'homomorphisme $H^*(Z_2\,; 5) \to H^*(S_3, 5)$ applique évidemment u_5 sur e, donc $Sq^1 u_5$ sur $Sq^1 e = f$, $Sq^2 u_5$ sur $Sq^2 e = h$, $Sq^3 u_5$ sur $Sq^3 e = Sq^1 h = Sq^1 Sq^1 g = 0$, $Sq^2 Sq^1 u_5$ sur $Sq^2 Sq^1 e = Sq^2 f = i$.

D'après [8], loc. cit., on a une suite exacte (valable en tout cas pour $i \leqslant 8$) :

$$\cdots \to H^i(Z_2\,; 5) \to H^i(S_3, 5) \to H^i(S_3, 6) \xrightarrow{\tau} H^{i+1}(Z_2\,; 5) \to \cdots\ .$$

En combinant cette suite exacte avec les résultats précédents, on voit que $H^6(S_3, 6)$ possède une base formée d'un élément j, image de l'élément $g \in H^6(S_3, 5)$, et que $H^7(S_3, 6)$ possède une base formée d'un élément k tel que $\tau(k) = Sq^3 u_5 \in H^8(Z_2\,; 5)$. En outre $Sq^1 j$ est image de $Sq^1 g = h$; mais h est image de $Sq^2 u_5$ dans l'homomorphisme $H^7(Z_2\,; 5) \to H^7(S_3, 5)$, donc h donne 0 dans $H^7(S_3, 6)$, et $Sq^1 j = 0$. De même $Sq^2 j$ est image de $Sq^2 g = 0$, donc $Sq^2 j = 0$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. $\pi_6(S_3) = Z_{12}$[10].

Puisque $\pi_6(S_3)$ a 12 éléments, il est isomorphe soit à Z_{12}, soit à $Z_2 + Z_6$. Dans le second cas on aurait $H^6(S_3, 6) = \mathrm{Hom}\,\big(H_6(S_3, 6), Z_2\big) = \mathrm{Hom}\,\big(\pi_6(S_3), Z_2\big) = Z_2 + Z_2$, en contradiction avec le Lemme 3.

39. Cohomologie de l'espace $(S_3, 7)$

Lemme 4. *$H^7(S_3, 7)$ possède une base formée d'un seul élément m, et l'on a $Sq^1 m \neq 0$.*

On utilise comme précédemment la suite exacte :

$$\cdots \rightarrow H^i(Z_{12}\,;6) \rightarrow H^i(S_3, 6) \rightarrow H^i(S_3, 7) \xrightarrow{\tau} H^{i+1}(Z_{12}\,;6) \rightarrow \cdots .$$

D'après le Théorème 5 du § 2, $H^*(Z_{12}\,;6)$ est isomorphe à $H^*(Z_4\,;6)$. En dimensions $\leqslant 8$, $H^*(Z_{12}\,;6)$ possède donc la base suivante :

$$\{1, u_6, Sq_2^1 u_6, Sq^2 u_6\} .$$

L'image de u_6 dans $H^6(S_3, 6)$ est évidemment j; celle de $Sq_2^1 u_6$ est k, car sinon on aurait $H^6(S_3, 7) \neq 0$, ce qui est aburde; celle de $Sq^2 u_6$ est $Sq^2 j = 0$. La suite exacte précédente montre alors que $H^7(S_3, 7)$ possède une base formée d'un seul élément m tel que $\tau(m) = Sq^2 u_6$. On a en outre $Sq^1 m \neq 0$, car $\tau(Sq^1 m) = Sq^1 Sq^2 u_6 = Sq^3 u_6 \neq 0$.

Corollaire. $\pi_7(S_3) = Z_2$.

Le Lemme 4 montre que $\mathrm{Hom}\,\big(\pi_7(S_3), Z_2\big) = Z_2$. Cela signifie que le 2-composant de $\pi_7(S_3)$, donc $\pi_7(S_3)$ lui-même, est isomorphe à Z_m, avec $m = 2^h$, $h \geqslant 1$. Si $h \geqslant 2$, l'homomorphisme de $\pi_7(S_3)$ sur Z_2 pourrait être factorisé en $\pi_7(S_3) \rightarrow Z_4 \rightarrow Z_2$, et l'on aurait $Sq^1 m = 0$ d'après 2.7. Ceci étant exclu d'après le Lemme 4, on a $h = 1$ (on aurait pu également invoquer le Lemme 2 du § 2).

40. Les groupes $\pi_{n+3}(S_n)$

Dans ce numéro et le suivant, nous noterons E la suspension de Freudenthal, ν_i le générateur de $\pi_{i+1}(S_i)$, ν_4' l'élément de $\pi_7(S_4)$ défini par la fibration de Hopf: $S_7 \rightarrow S_4$, ω l'élément de $\pi_6(S_3)$ introduit par Blakers-Massey.

---

[10]) Ce Corollaire résulte aussi du fait (annoncé par Barratt-Paechter, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38, 1952, p. 119—121) que $\pi_6(S_3)$ contient un sous-groupe isomorphe à Z_4. Signalons également que V. A. Rokhlin (Doklady 84, 1952, p. 221—224) a annoncé des résultats équivalents à ceux du n° 40.

Sachant que $\pi_6(S_3) = Z_{12}$, on peut montrer que ω en est un générateur (cf. A. Borel et J.-P. Serre, *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*, Prop. 19.1).

Le groupe $\pi_7(S_4) = \pi_7(S_7) + E\pi_6(S_3)$ est isomorphe à $Z + Z_{12}$, le facteur Z étant engendré par ν'_4, et le facteur Z_{12} par $E\omega$.

On sait que E applique $\pi_7(S_4)$ sur $\pi_8(S_5)$, le noyau étant engendré par $[i_4, i_4]$, où i_n désigne le générateur canonique de $\pi_n(S_n)$ et où le crochet désigne le produit de Whitehead. En outre, on a :

$$[i_4, i_4] = 2\nu'_4 - \varepsilon E\,\omega \ ,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ dépend des conventions d'orientation utilisées (cette formule résulte, par exemple, du Théorème 23.6 du livre de N. E. Steenrod sur les espaces fibrés). Il s'ensuit que dans $\pi_8(S_5)$ on a :

$$E^2\omega = 2\varepsilon E\,\nu'_4 \ ,$$

ce qui montre que $\pi_8(S_5)$ est isomorphe à Z_{24}, et admet $E\,\nu'_4$ pour générateur[11]).

Par suspension, on a $\pi_{n+3}(S_n) = Z_{24}$ si $n \geqslant 5$, et $E^{n-4}\nu'_4$ en est un générateur.

41. Les groupes $\pi_{n+4}(S_n)$.

On a vu que $\pi_7(S_3) = Z_2$. D'après P. Hilton [6] les éléments $\omega \circ \nu_6$ et $\nu_3 \circ \nu'_4$ sont des éléments non nuls de ce groupe. Ils sont donc égaux (ce qui n'était pas évident *a priori*), et en constituent l'unique générateur.

On a $\pi_8(S_4) = \pi_8(S_7) + E\,\pi_7(S_3) = Z_2 + Z_2$, le premier facteur Z_2 étant engendré par $\nu'_4 \circ \nu_7$, le second par $E(\omega \circ \nu_6) = E\,\omega \circ \nu_7$.

D'après un théorème de Freudenthal, E applique $\pi_8(S_4)$ sur $\pi_9(S_5)$. Par ailleurs, comme il n'existe pas d'application d'invariant de Hopf unité de S_{11} sur S_6 (voir [1] pour une démonstration simple), l'élément $[i_5, i_5]$ de $\pi_9(S_5)$ est non nul. Le noyau de E : $\pi_8(S_4) \to \pi_9(S_5)$ a donc au plus 2 éléments (il est d'ailleurs facile de retrouver ce fait directement, cf. [10]). D'autre part, on a :

$$E(E\,\omega \circ \nu_7) = E^2\,\omega \circ \nu_8 = (2\varepsilon E\,\nu'_4) \circ \nu_8 = \varepsilon(E\,\nu'_4) \circ 2\,\nu_8 = 0 \ .$$

Ceci montre que $E\omega \circ \nu_7$ appartient au noyau de E, qui est donc

---

11) Voir également les articles cités plus haut de V. A. Rokhlin et de A. Borel et l'auteur.

exactement Z_2. Il s'ensuit que $\pi_9(S_5) = Z_2$ et que son unique générateur est $[i_5, i_5] = E(\nu'_4 \circ \nu_7) = E\,\nu'_4 \circ \nu_8$[12]).

Comme E applique $\pi_9(S_5)$ *sur* $\pi_{10}(S_6)$ et que $E([i_5, i_5]) = 0$, on a $\pi_{10}(S_6) = 0$, d'où $\pi_{n+4}(S_n) = 0$ pour $n \geqslant 6$.

Récapitulons les résultats obtenus :

Théorème. $\pi_6(S_3) = Z_{12}$, $\pi_7(S_4) = Z + Z_{12}$, $\pi_{n+3}(S_n) = Z_{24}$ *si* $n \geqslant 5$. $\pi_7(S_3) = Z_2$, $\pi_8(S_4) = Z_2 + Z_2$, $\pi_9(S_5) = Z_2$, $\pi_{n+4}(S_n) = 0$ *si* $n \geqslant 6$.

42. Remarques

1) On peut calculer les groupes stables $\pi_{n+3}(S_n)$ et $\pi_{n+4}(S_n)$ sans passer par l'intermédiaire des $\pi_i(S_3)$, par des calculs tout analogues à ceux des numéros 36, 37, 38, 39 (et légèrement plus simples, du fait que la suite spectrale s'y réduit à une suite exacte).

2) On peut pousser les calculs des numéros 36, 37, 38, 39 sensiblement plus loin que nous ne l'avons fait ici, et déterminer les 2-composants des groupes $\pi_8(S_3)$ et $\pi_9(S_3)$. On trouve ainsi $\pi_8(S_3) = Z_2$ et $\pi_9(S_3) = Z_3$. Nous ne donnerons pas ici le détail de ces calculs, parce qu'ils sont trop fastidieux, et parce que l'on peut calculer $\pi_8(S_3)$ et $\pi_9(S_3)$ par la méthode, plus rapide, de la Note [10].

---

[12]) $E\nu'_4 \circ \nu_8 \neq 0$ résulte aussi du Théorème 5.1 de [1], où l'on fait $m = 4$, $n = 2$, $p = 1$. On notera que $E(E\nu'_4 \circ \nu_8) = 0$, ce qui montre l'impossibilité d'étendre le théorème en question au cas $p = n$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *J. Adem,* The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **38**, 1952, p. 720—726.

[2] *A. Borel,* Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. Math. **57**, 1953, p. 115—207.

[3] *H. Cartan et J.-P. Serre,* Espaces fibrés et groupes d'homotopie. I., *C. R. Acad. Sci. Paris* **234**, 1952, p. 288—290; II., ibid., p. 393—395.

[4] *S. Eilenberg and S.MacLane,* Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. **46**, 1945, p. 480—509; II., ibid. **51**, 1950, p. 514—533.

[5] *S. Eilenberg and S. MacLane,* Cohomology theory of abelian groups and homotopy theory. I., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36**, 1950, p. 443—447; II., ibid. p. 657—663; III., ibid. **37**, 1951, p. 307—310; IV., ibid. **38**, 1952, p. 1340—1342.

[6] *P. Hilton,* The Hopf invariant and homotopy groups of spheres, Proc. Cambridge Philos. Soc. **48**, 1952, p. 547—554.

[7] *J. C. Moore,* Some applications of homology theory to homotopy problems, Ann. Math., 1953.

[8] *J.-P. Serre,* Homologie singulière des espaces fibrés. Applications, Ann. Math. **54**, 1951, p. 425—505.

[9] *J.-P. Serre,* Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane, C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1952, p. 1243—1245.

[10] *J.-P. Serre,* Sur la suspension de Freudenthal, C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1952, p. 1340—1342.

[11] *J.-P. Serre,* Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Math. 1953.

[12] *N. E. Steenrod,* Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. Math. **48**, 1947, p. 290—320.

[13] *N. E. Steenrod,* Reduced powers of cohomology classes, Ann. Math. **56**, 1952, p. 47—67.

[14] *G. W. Whitehead,* Fibre spaces and the Eilenberg homology groups, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **38**, 1952, p. 426—430.

(Reçu le 16 janvier 1953.)