

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Vergleich und Kombination zweier Methoden von Veblen und Finsler zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen.  
**Autor:** Bachmann, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21265>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Vergleich und Kombination zweier Methoden von *Veblen* und *Finsler* zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen

Von H. BACHMANN, Zürich

## 1. Einleitung

Das beim Versuch der effektiven Wohlordnung überabzählbarer Teilmengen des Kontinuums auftretende „*Problem der ausgezeichneten Folgen*“ von Ordnungszahlen, das darin besteht, jeder Limeszahl der zweiten Zahlklasse eine aufsteigende Folge vom Typ  $\omega$  von Ordnungszahlen eindeutig zuzuordnen, deren Limes die gegebene Limeszahl ist, ist sehr schwierig und bisher ungelöst. Man beschränkt sich deshalb vorläufig darauf, das Problem der ausgezeichneten Folgen, die *Finsler* [1] übrigens „*Hauptfolgen*“ nennt, für einen möglichst großen Abschnitt der zweiten Zahlklasse zu lösen.

Dies wird u. a. von *Veblen* mit Hilfe einer transfiniten Folge von *Normalfunktionen* [2] ausgeführt; eine Verallgemeinerung und Weiterführung dieser Methode stammt vom Verfasser, der eine Folge  $\mathfrak{F}_1$  vom Typ  $F_{\omega_2+1}(1) + 1$  von Normalfunktionen  $\varphi_\eta(x)$  erster Klasse aufstellt ( $0 \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1)$ ), wobei die  $F_\xi(\xi)$  Normalfunktionen zweiter Klasse sind [3]. Die von *Veblen* aufgestellten Normalfunktionen bilden einen Abschnitt  $\mathfrak{F}_0$  vom Typ  $\Omega^2 + 2$  von  $\mathfrak{F}_1$ .

*Veblen* löst nun das Problem der ausgezeichneten Folgen für alle Limeszahlen  $< E(1) = \varphi_{\Omega\Omega+1}(1)$ . Durch die Verallgemeinerung des Verfassers [3] gelingt die Lösung für alle Limeszahlen  $< H(1) = \varphi_{F_\Omega(1)+1}(1)$ .

*Finsler* dagegen löst das Problem der ausgezeichneten Folgen für einen Abschnitt der zweiten Zahlklasse durch Aufstellung einer Folge vom Typ  $\Omega$  von *arithmetischen Operationen*, die durch Funktionen  $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$  von zwei Variablen  $\xi, \eta$  gegeben sind, wobei  $\alpha, \xi$  und  $\eta$  alle Ordnungszahlen  $< \Omega$  durchlaufen [1]. Dabei bilden die Zahlen  $\varrho_1 = \varphi_1(0, \omega) = \omega$ ,  $\varrho_x = \varphi_x(\omega, \omega)$  für  $2 \leq x < \Omega$  (also  $\varrho_2 = \omega^2$ ,  $\varrho_3 = \omega^\omega$ ,  $\varrho_4 = \omega^{\omega^\omega}$ ,  $\varrho_5 = \varepsilon$ ) eine Normalfunktion, die wir mit

$$\psi_0(x) = \varrho_x$$

bezeichnen wollen; ihre Ableitung  $\psi_0'(x)$  werde mit  $\psi_1(x)$  bezeichnet [2].

Das Problem der ausgezeichneten Folgen wird nun durch die Methode von *Finsler* allein für alle Limeszahlen gelöst, die kleiner sind als die erste kritische Zahl [2] von  $\psi_0(x)$ , das heißt die Zahl  $\psi_1(1)$ .

Diese beiden Methoden von *Veblen* und *Finsler* sollen jetzt miteinander verglichen werden, wobei sich zeigen wird, daß schon das unverallgemeinerte Verfahren von *Veblen* die Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen viel weiter führt als die Methode von *Finsler* allein (die zwar den Vorteil größerer Einfachheit hat). Ferner soll gezeigt werden, daß man die beiden Methoden kombinieren kann. Endlich werden wir sehen, daß die Kombination der beiden Methoden das Problem der ausgezeichneten Folgen für denselben Abschnitt der zweiten Zahlklasse löst, wie das Verfahren von *Veblen* allein, auch wenn man nur einen (nicht zu kleinen) Abschnitt des unverallgemeinerten Verfahrens von *Veblen* nimmt, so daß man also durch die Kombination letzten Endes doch nicht weiterkommt.

Bezüglich der Ordnungszahlen, der Operationen mit Ordnungszahlen und der Normalfunktionen wollen wir wieder die Bezeichnungsweise von § 1 in der Arbeit des Verfassers [3] wählen. Die hier betrachteten Normalfunktionen erster Klasse sind stets solche, deren Argumentmenge aus allen Ordnungszahlen  $x$  mit  $1 \leq x < \Omega$  besteht, und deren Wertmengen aus lauter Limeszahlen bestehen.

Daneben verwenden wir einen allgemeineren Funktionsbegriff: Wir betrachten *nicht-abnehmende Funktionen*  $f(x)$ , deren Argumentmenge auch wieder aus allen Ordnungszahlen  $x$  mit  $1 \leq x < \Omega$  besteht, und deren Wertmengen Teilmengen der Argumentmenge sind, mit der Eigenschaft

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{für} \quad 1 \leq x_1 < x_2 < \Omega .$$

Allgemein sei die *transfinite Iteration*  $f^\nu(x)$  einer solchen Funktion so definiert:

$$f^0(x) = x ;$$

$$f^{\nu+1}(x) = f(f^\nu(x)) \quad \text{für} \quad 0 \leq \nu < \Omega ;$$

$$f^\lambda(x) = \lim_{\nu < \lambda} f^\nu(x), \quad \text{wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}$$

Damit ist  $f^\nu(x)$  für alle  $\nu$  mit  $0 \leq \nu < \Omega$  definiert.

## 2. Einige Eigenschaften der Normalfunktionen

Vorerst müssen wir einige Eigenschaften der Normalfunktionen  $\varphi_\eta(x)$  von  $\mathfrak{F}_1$  betrachten und einige weitere Sätze über Normalfunktionen beweisen, mit deren Hilfe wir dann unsere oben aufgestellten Behauptungen beweisen können. Für die Normalfunktionen  $\varphi_\eta(x)$  von  $\mathfrak{F}_1$  gilt folgendes [3]:

Jeder Limeszahl  $\eta \leq F_{\omega_2+1}(1)$  ist eine Folge  $\{\eta_x\}$  von einem gewissen Typ  $\tau_\eta$ , der eine Limeszahl  $\leq \Omega$  ist, zugeordnet, in Zeichen

$$\eta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \eta_x ,$$

so daß

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \omega^x ; \\ \varphi_{\eta+1}(x) &= \varphi'_\eta(x) ; \\ V \varphi_\eta &= D V \varphi_{\eta_x} , \text{ wenn } \eta \text{ zweiter Art und } \eta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \eta_x ; \\ \varphi_\eta(x) &= \varphi_{\eta_x}(1) , \text{ wenn } \eta \text{ dritter Art und } \eta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{x < \Omega} \eta_x . \end{aligned}$$

Wie aus den Ausführungen von [3], § 2, hervorgeht, gelten für alle  $x$  der Argumentmenge die drei folgenden Beziehungen:

Wenn  $\eta$  erster Art und  $\eta = \eta' + 1$ , so ist

$$\varphi_\eta(x+1) = \varphi_{\eta'}^\omega(\varphi_\eta(x) + \beta) \quad \text{für } 1 \leq \beta \leq \varphi_\eta(x+1) ; \quad (1)$$

wenn  $\eta$  zweiter Art und  $\eta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \eta_y$ , so ist

$$\varphi_\eta(x+1) = \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\eta_y}(\varphi_\eta(x) + \beta) \quad \text{für } 1 \leq \beta \leq \varphi_\eta(x+1) \quad (2)$$

und

$$\text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\eta_y}(x) \leq \varphi_\eta(x) . \quad (3)$$

Die erste und zweite Beziehung gilt auch für  $x = 0$ , wenn für den undefinierten Ausdruck  $\varphi_\eta(0)$  die Zahl 0 eingesetzt wird.

Einige weitere Eigenschaften der Normalfunktionen  $\varphi_\eta(x)$  können wir leicht beweisen: Es ist

$$\varphi_0(x) \leq \varphi_\eta(x) \quad (4)$$

für alle  $x$  der Argumentmenge und für  $0 \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1)$ . Denn diese Behauptung gilt für  $\eta = 0$ ; und für  $\eta > 0$  ist wegen  $\varphi_\eta(x) \geq x$

$$\varphi_\eta(x) = \varphi_0(\varphi_\eta(x)) \geq \varphi_0(x) .$$

Ferner gilt für jede Normalfunktion  $\varphi_\eta$  aus  $\mathfrak{F}_1$  mit  $0 \leq \eta < F_{\omega_2+1}(1)$

$$\varphi_\eta(x) \leq \varphi_{\eta+x}(1) \quad \text{für } 1 \leq x < \Omega ; \quad (5)$$

denn setzt man  $\eta = \Omega \cdot \alpha + \beta$ , wobei  $\alpha \geq 0$ ,  $0 \leq \beta < \Omega$ , so ist

$$\varphi_{\eta+x}(1) = \varphi_{\Omega \cdot \alpha + \beta + x}(1) \geq \beta + x \geq x,$$

also

$$\varphi_{\eta+x}(1) = \varphi_{\eta}(\varphi_{\eta+x}(1)) \geq \varphi_{\eta}(x).$$

Nun beweisen wir drei weitere Sätze über Normalfunktionen:

**Satz 1.** *Ist  $f(x)$  eine nicht-abnehmende Funktion und  $\varphi(x)$  eine Normalfunktion mit der Eigenschaft*

$$f(x) \leq \varphi(x+1) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega,$$

wobei  $\mu$  eine bestimmte Ordnungszahl mit  $1 \leq \mu < \Omega$  ist, so gilt

$$f^{\nu}(x) \leq \varphi^{\nu}(x+\nu) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad 0 \leq \nu < \Omega.$$

*Beweis* mit transfiniter Induktion nach  $\nu$ : Für  $\nu = 0$  und  $\nu = 1$  ist die Behauptung erfüllt.

Ferner folgt aus der Behauptung  $f^{\nu}(x) \leq \varphi^{\nu}(x+\nu)$  dieselbe Behauptung für  $\nu+1$ , denn es wird für  $\mu \leq x < \Omega$

$$\begin{aligned} f^{\nu+1}(x) &= f(f^{\nu}(x)) \leq f(\varphi^{\nu}(x+\nu)) \leq \varphi(\varphi^{\nu}(x+\nu)+1) \leq \varphi(\varphi^{\nu}(x+\nu+1)) \\ &= \varphi^{\nu+1}(x+\nu+1). \end{aligned}$$

Ist  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  und gilt die Behauptung für alle  $\nu < \lambda$ , so gilt sie auch für  $\nu = \lambda$ ; denn für  $\mu \leq x < \Omega$  ist

$$f^{\lambda}(x) = \lim_{\nu < \lambda} f^{\nu}(x) \leq \lim_{\nu < \lambda} \varphi^{\nu}(x+\nu) \leq \lim_{\nu < \lambda} \varphi^{\nu}(x+\lambda) = \varphi^{\lambda}(x+\lambda).$$

**Satz 2.** *Ist  $f(x)$  eine nicht-abnehmende Funktion und  $\varphi_{\eta}(x)$  eine Normalfunktion aus  $\mathfrak{F}_1$  mit  $0 \leq \eta < F_{\omega_2+1}(1)$ , mit der Eigenschaft*

$$f(x) \leq \varphi_{\eta}(x+1) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega,$$

wobei  $\mu$  eine bestimmte Ordnungszahl mit  $1 \leq \mu < \Omega$  ist, so gilt

$$f^{1+\nu}(x) \leq \varphi_{\eta+\nu}(x+1) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad 0 \leq \nu < \Omega.$$

*Beweis* mit transfiniter Induktion nach  $\nu$ : Für  $\nu = 0$  ist die Behauptung erfüllt, denn nach Voraussetzung ist

$$f^1(x) = f(x) \leq \varphi_{\eta}(x+1) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega.$$

Ferner folgt aus

$$f^{1+\nu}(x) \leq \varphi_{\eta+\nu}(x+1) \quad \text{für} \quad \mu \leq x < \Omega$$

die Beziehung

$$f^{1+\nu+1}(x) = f(f^{1+\nu}(x)) \leq f(\varphi_{\eta+\nu}(x+1)) \leq \varphi_{\eta}(\varphi_{\eta+\nu}(x+1)+1) \\ \text{für } \mu \leq x < \Omega .$$

Nun ist

$$\varphi_{\eta+\nu}(x+1) \leq \varphi_{\eta+\nu}(\varphi_{\eta+\nu+1}(x)+1) < \varphi_{\eta+\nu}^{\omega}(\varphi_{\eta+\nu+1}(x)+1) \\ = \varphi_{\eta+\nu+1}(x+1) ,$$

also

$$\varphi_{\eta+\nu}(x+1)+1 \leq \varphi_{\eta+\nu+1}(x+1) ;$$

also folgt

$$f^{1+\nu+1}(x) \leq \varphi_{\eta}(\varphi_{\eta+\nu+1}(x+1)) = \varphi_{\eta+\nu+1}(x+1) \quad \text{für } \mu \leq x < \Omega ,$$

das heißt die Behauptung für  $\nu+1$ .

Ist  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  und gilt die Behauptung für alle  $\nu < \lambda$ , so gilt sie auch für  $\nu = \lambda$ ; denn für  $\mu \leq x < \Omega$  ist nach (3)

$$f^{1+\lambda}(x) = \lim_{\nu < \lambda} f^{1+\nu}(x) \leq \lim_{\nu < \lambda} \varphi_{\eta+\nu}(x+1) \leq \varphi_{\eta+\lambda}(x+1) .$$

**Satz 3.** Sind  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  zwei Normalfunktionen mit der Eigenschaft

$$\varphi(x) \leq \psi(x+1) \quad \text{für } \mu \leq x < \Omega ,$$

wobei  $\mu$  eine bestimmte Zahl mit  $1 \leq \mu \leq \omega$  ist, so ist

$$\varphi'(x) \leq \psi'(x) \quad \text{für } 1 \leq x < \Omega .$$

*Beweis* mit transfiniten Induktion nach  $x$ : Nach Satz 1 ist

$$\varphi^{\omega}(x) \leq \psi^{\omega}(x+\omega) \quad \text{für } \mu \leq x < \Omega .$$

Für  $x = 1$  ist nach (1)

$$\varphi'(1) = \varphi^{\omega}(1) \leq \varphi^{\omega}(\mu) \leq \psi^{\omega}(\mu+\omega) \leq \psi^{\omega}(\omega \cdot 2) = \psi'(1) ,$$

denn die erste kritische Zahl von  $\psi$  ist größer als  $\omega \cdot 2$ , weil die Wertmenge von  $\psi$  aus lauter Limeszahlen besteht.

Gilt die Behauptung für  $x$ , so gilt sie auch für  $x+1$ : Nach (1) ist

$$\varphi'(x+1) = \varphi^{\omega}(\varphi'(x)+1) \leq \psi^{\omega}(\varphi'(x)+\omega) \leq \psi^{\omega}(\psi'(x)+\omega) \\ = \psi'(x+1) ,$$

denn  $\varphi'(x) \geq \mu$ .

Ist  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$ , und gilt die Behauptung für alle  $x < \lambda$ , so ist

$$\varphi'(\lambda) = \lim_{x < \lambda} \varphi'(1+x) \leq \lim_{x < \lambda} \psi'(1+x) = \psi'(\lambda) .$$

### 3. Wie weit führt das Verfahren von *Finsler*, verglichen mit dem Verfahren von *Veblen*?

Wir betrachten nun die Funktionen  $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$ , die *Finsler* [1] definiert. Jede solche Funktion ist für  $\xi \geq 1$  und  $\eta \geq 1$  in beiden Variablen eine nicht-abnehmende Funktion. Die Iteration wird dabei nur in der zweiten Variablen ausgeführt, so daß

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^0(\xi, \eta) &= \eta ; \\ \varphi_\alpha^{\nu+1}(\xi, \eta) &= \varphi_\alpha(\xi, \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)) ; \\ \varphi_\alpha^\lambda(\xi, \eta) &= \lim_{\nu < \lambda} \varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}\end{aligned}$$

Die Funktionen  $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$  sind so definiert :

$$\begin{aligned}\varphi_0(\xi, \eta) &= \eta + 1 ; \\ \varphi_1(\xi, \eta) &= \eta + \xi ; \\ \varphi_2(\xi, \eta) &= \eta \cdot \xi ; \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= \eta^\xi ; \\ \varphi_{\alpha+1}(\xi, \eta) &= \varphi_\alpha^\xi(\eta, \eta) \quad \text{für } \alpha \geq 3 ; \\ \varphi_\lambda(\xi, \eta) &= \lim_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha(\xi, \eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}\end{aligned}$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$f_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x, x) \quad \text{für } 0 \leq \alpha < \Omega \quad \text{und} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f_0(x) &= x + 1 ; \\ f_1(x) &= x \cdot 2 ; \\ f_2(x) &= x^2 ; \\ f_3(x) &= x^x ; \\ f_{\alpha+1}(x) &= \varphi_\alpha^x(x, x) \quad \text{für } \alpha \geq 3 ; \\ f_\lambda(x) &= \lim_{\alpha < \lambda} f_\alpha(x), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}\end{aligned}$$

Aus den Monotoniesätzen von *Finsler* [1] geht hervor, daß die Funktionen  $f_\alpha(x)$  nicht-abnehmend sind, und daß  $f_\alpha(x) \geq x$  für  $1 \leq x < \Omega$ .

Ist  $\nu$  eine bestimmte Ordnungszahl  $< \Omega$ , so wird in  $\varphi_\alpha^\nu(\xi, \eta)$  die Iteration nur in der zweiten Variablen ausgeführt; führt man diese in beiden Variablen aus, so gelangt man offenbar zu höheren Zahlen, das heißt, es ist

$$\varphi_\alpha^\nu(x, x) \leq f_\alpha^\nu(x) \quad \text{für } 1 \leq x < \Omega , \quad (6)$$

wie man mit transfiniten Induktion nach  $\nu$  leicht beweisen kann: Für  $\nu = 1$  ist die Behauptung erfüllt. Gilt sie für  $\nu$ , so ist nach den Monotoniesätzen von *Finsler*

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha}^{\nu+1}(x, x) &= \varphi_{\alpha}(x, \varphi_{\alpha}^{\nu}(x, x)) \leq \varphi_{\alpha}(\varphi_{\alpha}^{\nu}(x, x), \varphi_{\alpha}^{\nu}(x, x)) = f_{\alpha}(\varphi_{\alpha}^{\nu}(x, x)) \\ &\leq f_{\alpha}(f_{\alpha}^{\nu}(x)) = f_{\alpha}^{\nu+1}(x) .\end{aligned}$$

Gilt die Behauptung für alle  $\nu < \lambda$ , wobei  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  ist, so ist

$$\varphi_{\alpha}^{\lambda}(x, x) = \text{Lim}_{\nu < \lambda} \varphi_{\alpha}^{\nu}(x, x) \leq \text{Lim}_{\nu < \lambda} f_{\alpha}^{\nu}(x) = f_{\alpha}^{\lambda}(x) .$$

Eine weitere Eigenschaft der Funktionen  $f_{\alpha}(x)$  ist, daß

$$f_{\alpha+1}(x) \leq \varphi_{\alpha}^x(x, x) ; \quad (7)$$

denn es ist

$$\begin{aligned}\varphi_0^x(x, x) &= x \cdot 2 = f_1(x) ; \\ \varphi_1^x(x, x) &= x \cdot (1 + x) \geq f_2(x) ; \\ \varphi_2^x(x, x) &= x^{1+x} \geq f_3(x) ; \\ \varphi_{\alpha}^x(x, x) &= f_{\alpha+1}(x) \quad \text{für} \quad \alpha \geq 3 .\end{aligned}$$

Aus (6) und (7) ergibt sich (für  $\nu = x$ )

$$f_{\alpha+1}(x) \leq f_{\alpha}^x(x) . \quad (8)$$

**Hilfssatz 1.** *Es ist*

$$f_{\alpha}(x) < \varphi_{\Omega \cdot \alpha + 1}(x + 1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad 1 \leq \alpha < \Omega .$$

*Beweis* mit transfiniten Induktion nach  $\alpha$ :

a) Für  $\alpha = 1$  ist die Behauptung erfüllt, denn

$$f_1(x) = x \cdot 2 \leq \omega^x \cdot 2 < \omega^x \cdot \omega = \omega^{x+1} = \varphi_0(x + 1) ,$$

also nach (4)

$$f_1(x) < \varphi_{\Omega+1}(x + 1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

b) Gilt die Behauptung für  $\alpha$ , so gilt sie auch für  $\alpha + 1$ : Nach (8) ist

$$f_{\alpha+1}(x) \leq f_{\alpha}^x(x) ,$$

ferner nach der Induktionsvoraussetzung und nach Satz 2

$$f_{\alpha}^x(x) \leq \varphi_{\Omega \cdot \alpha + 1 + x}(x + 1) ,$$

ferner nach (5)

$$\varphi_{\Omega \cdot \alpha + 1 + x}(x + 1) \leq \varphi_{\Omega \cdot \alpha + 1 + x + x + 1}(1) = \varphi_{\Omega \cdot (\alpha + 1)}(x \cdot 2 + 1) ,$$

ferner nach (4)

$$x \cdot 2 + 1 \leq \omega^x \cdot 2 + 1 < \omega^x \cdot \omega = \varphi_0(x + 1) \leq \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)+1}(x + 1) ,$$

somit

$$\varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)}(x \cdot 2 + 1) < \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)}(\varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)+1}(x + 1)) = \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)+1}(x + 1) ,$$

also

$$f_{\alpha+1}(x) < \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)+1}(x + 1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

c) Ist  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$ , und gilt die Behauptung für alle  $\alpha < \lambda$ , so gilt sie auch für  $\alpha = \lambda$ : Es ist

$$f_\lambda(x) = \text{Lim}_{\alpha < \lambda} f_\alpha(x) \leq \text{Lim}_{\alpha < \lambda} \varphi_{\Omega \cdot \alpha+1}(x + 1) .$$

Nach (5) ist

$$\varphi_{\Omega \cdot \alpha+1}(x + 1) \leq \varphi_{\Omega \cdot \alpha+1+x+1}(1) = \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)}(x + 1) ,$$

somit nach (3)

$$f_\lambda(x) \leq \text{Lim}_{\alpha < \lambda} \varphi_{\Omega \cdot (\alpha+1)}(x + 1) \leq \text{Lim}_{\beta < \lambda} \varphi_{\Omega \cdot \beta}(x + 1) \leq \varphi_{\Omega \cdot \lambda}(x + 1) < \varphi_{\Omega \cdot \lambda+1}(x + 1) .$$

**Satz 4.** *Es ist*

$$\psi_1(x) \leq \varphi_{\Omega^2+1}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega ,$$

also speziell

$$\psi_1(1) \leq \varphi_{\Omega^2+1}(1) .$$

*Beweis.* Es ist

$$\varrho_x \leq f_x(\omega) ,$$

denn

$$\varrho_1 = \omega < \omega \cdot 2 = f_1(\omega) ,$$

$$\varrho_x = f_x(\omega) \quad \text{für} \quad x \geq 2 .$$

Nach Hilfssatz 1 wird somit

$$\begin{aligned} \varrho_x = \psi_0(x) &< \varphi_{\Omega \cdot x+1}(\omega + 1) < \varphi_{\Omega \cdot x+2}(1) = \varphi_{\Omega \cdot (x+1)}(1) \leq \varphi_{\Omega \cdot (1+x+1)}(1) \\ &= \varphi_{\Omega^2}(x + 1) , \end{aligned}$$

also nach Satz 3

$$\psi_1(x) \leq \varphi_{\Omega^2+1}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

*Das Ergebnis ist also, daß die Zahl  $\psi_1(1)$  beim Verfahren von Veblen schon sehr bald überschritten wird, so daß also das unverallgemeinerte Verfahren von Veblen viel weiter führt als das Verfahren von Finsler allein.*

#### 4. Kombination der beiden Methoden

Es ist aber möglich, die beiden Methoden zu kombinieren. Da *Finsler* mit Hilfe arithmetischer Operationen das Problem der ausgezeichneten Folgen für eine beliebige Limeszahl  $\lambda$  der zweiten Zahlklasse löst, unter der Voraussetzung, daß dieses Problem für alle Limeszahlen  $< \lambda$  gelöst ist und daß  $\lambda$  kein Wert der Normalfunktion  $\psi_0(x)$  ist, liegt es auf der Hand, zuerst die Methode von *Finsler* anzuwenden, und dann auf die dadurch erhaltene Normalfunktion  $\psi_0(x)$  die Methode von *Veblen* oder das vom Verfasser verallgemeinerte Verfahren anzuwenden. Dabei nimmt man diese Normalfunktion  $\psi_0(x)$  an Stelle von  $\varphi_0(x)$  als Ausgangsfunktion und bildet die zu  $\mathfrak{F}_1$  genau analoge Folge  $\mathfrak{F}'_1$  von Normalfunktionen  $\psi_\eta(x)$ , die genau gleich definiert sind wie die  $\varphi_\eta(x)$ , wobei nur  $\varphi$  durch  $\psi$  ersetzt ist (für  $\eta > 0$ ).

Wir stellen nun die *Behauptung* auf: *Bei dieser Kombination des Verfahrens von Finsler mit dem unverallgemeinerten Verfahren von Veblen erhält man ausgezeichnete Folgen für alle Limeszahlen  $< E'(1) = \psi_{\Omega_{\Omega+1}}(1)$ , bei der Kombination des Verfahrens von Finsler mit dem vom Verfasser verallgemeinerten Verfahren von Veblen für alle Limeszahlen  $< H'(1) = \psi_{F_{\Omega}(1)+1}(1)$ .*

*Beweis:* Man definiert

$$\omega = \text{Lim}_{n < \omega} (1 + n) .$$

Ist für jede Limeszahl  $y' < y$  eine ausgezeichnete Folge definiert, wobei  $y$  eine Limeszahl  $< E'(1)$  bzw.  $H'(1)$ , so läßt sich auch für  $y$  eine solche definieren:

a) Liegt  $y$  nicht in  $V\psi_0$ , so definiert man mit Hilfe der „Hauptdarstellung“ von *Finsler* die ausgezeichnete Folge für  $y$ . Dies ist immer möglich (siehe Abschnitt 6 der Arbeit von *Finsler* [1]).

b) Liegt  $y$  in  $V\psi_0$ , so definiert man die ausgezeichnete Folge von  $y$  mit Hilfe der Normalfunktionen  $\psi_\eta$ ; dann gibt es nämlich ein  $\eta$  mit  $0 \leq \eta \leq F_{\Omega}(1)$ , so daß

$$y = \psi_\eta(x) > x .$$

Die Definition der ausgezeichneten Folge von  $y$  ist genau entsprechend den §§ 3 und 4 der Arbeit des Verfassers [3], ausgenommen wenn  $\eta = 0$  und zugleich  $x = x' + 1$ , also  $y = \psi_0(x' + 1) = \varrho_{x'+1}$ . Dann ist im Fall  $x' = 0$

$$y = \varrho_1 = \omega ;$$

im Fall  $x' = 1$  setze man

$$y = \varrho_2 = \varphi_2(\omega, \omega) = \omega^2 = \text{Lim}_{n < \omega} \omega \cdot (1 + n) ,$$

im Fall  $x' = 2$

$$y = \varrho_3 = \varphi_3(\omega, \omega) = \omega^\omega = \text{Lim}_{n < \omega} \omega^{1+n} ,$$

im Fall  $x' \geq 3$

$$y = \varrho_{x'+1} = \varphi_{x'}^\omega(\omega, \omega) = \text{Lim}_{n < \omega} \varphi_{x'}^n(\omega, \omega) .$$

### 5. Führt die Kombination der beiden Methoden weiter als das Verfahren von *Veblen* allein ?

Um zu sehen, ob man durch die Kombination der beiden Methoden weiter kommt als durch das Verfahren von *Veblen* allein, müssen wir die Eigenschaften der nach § 4 der Arbeit des Verfassers den Limeszahlen  $\eta$  mit  $\omega \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1)$  zugeordneten Folgen  $\{\eta_x\}$  und Funktionen  $\Phi_\eta(\xi)$  und  $\Psi_\eta(\xi)$  betrachten [3]. Es gilt immer

$$\eta_x = \Psi_\eta(1 + x) \geq \Phi_\eta(1 + x) .$$

Es sei nun

$$\zeta = \Omega^2 + \eta ,$$

und die  $\eta$  und  $\zeta$  zugeordneten Folgen seien

$$\eta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \eta_x$$

und

$$\zeta \stackrel{\rightarrow}{=} \text{Lim}_{x < \tau_\zeta} \zeta_x .$$

Betrachtet man alle Fälle, die für die Funktionen  $\Phi_\eta$  auftreten können, so sieht man folgendes :

1) Ist  $\eta < \Omega^2 \cdot \omega$  (letztere Zahl ist die erste Zahl nach  $\Omega^2$ , die allen ihren Resten gleich ist), so ist  $\tau_\eta = \tau_\zeta$  und

$$\Omega^2 + \eta_x = \zeta_x \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \tau_\eta . \quad (9)$$

2) Ist  $\eta = \Omega^2 \cdot \omega$ , so ist  $\zeta = \eta$ , also  $\zeta_x = \eta_x$ ; ferner  $\tau_\eta = \tau_\zeta = \omega$  und

$$\Omega^2 + \eta_x = \zeta_{x+1} \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \omega . \quad (10)$$

3) Ist  $\eta > \Omega^2 \cdot \omega$ , so ist  $\zeta = \eta$ , also  $\zeta_x = \eta_x$  für  $1 \leq x \leq \tau_\eta = \tau_\zeta$ .

a) Ist in diesem Fall  $\tau_\eta > \omega$ , so ist

$$\eta_\omega \geq \Phi_\eta(\omega) \geq \Omega^2 \cdot \omega ,$$

so daß also

$$\Omega^2 + \eta_x = \eta_x = \zeta_x \quad \text{für} \quad \omega \leq x < \tau_\eta . \quad (11)$$

b) Ist  $\tau_\eta = \omega$ , so ist

$$\eta_2 \geq \Phi_\eta(3) \geq \Omega^2 \cdot \omega ,$$

also

$$\Omega^2 + \eta_x = \eta_x = \zeta_x \quad \text{für} \quad 2 \leq x < \omega . \quad (12)$$

**Hilfssatz 2.** *Es ist*

$$\psi_\eta(x) \leq \varphi_\zeta(x+1) \quad \text{für} \quad \omega \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad 1 \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1) ,$$

wobei

$$\zeta = \Omega^2 + \eta .$$

*Beweis* mit transfiniten Induktion nach  $\eta$ :

1) Für  $\eta = 1$  ist nach Satz 4

$$\psi_1(x) \leq \varphi_{\Omega^2+1}(x) < \varphi_{\Omega^2+1}(x+1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

2) Aus  $\psi_\eta(x) \leq \varphi_\zeta(x+1)$  für  $\omega \leq x < \Omega$  folgt nach Satz 3

$$\psi_{\eta+1}(x) \leq \varphi_{\zeta+1}(x) = \varphi_{\Omega^2+\eta+1}(x) < \varphi_{\Omega^2+\eta+1}(x+1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

3) Nun sei  $\psi_{\eta'}(x) \leq \varphi_{\Omega^2+\eta'}(x+1)$  für  $\omega \leq x < \Omega$  für alle  $\eta' < \eta$ , wobei  $\eta$  eine Limeszahl  $\leq F_{\omega_2+1}(1)$  sei. Dann gilt die Behauptung auch für  $\eta' = \eta$ :

a) Ist  $\eta$  dritter Art, also  $\tau_\eta = \Omega$ , so ist wegen (9) und (11) für  $\omega \leq x < \Omega$

$$\Omega^2 + \eta_x = \zeta_x ,$$

also

$$\begin{aligned} \psi_\eta(x) &= \psi_{\eta_x}(1) < \psi_{\eta_x}(\omega) \leq \varphi_{\Omega^2+\eta_x}(\omega+1) < \varphi_{\Omega^2+\eta_x+1}(1) \leq \varphi_{\Omega^2+\eta_{x+1}}(1) \\ &= \varphi_{\zeta_{x+1}}(1) = \varphi_\zeta(x+1) . \end{aligned}$$

b) Ist  $\eta$  zweiter Art, also  $\tau_\eta < \Omega$ , so ist wegen (9) bis (12) allgemein

$$\text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\Omega^2+\eta_y}(x) = \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\zeta_y}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

Also ist nach (2)

$$\begin{aligned} \psi_\eta(1) &= \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \psi_{\eta_y}(\omega) \leq \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\Omega^2+\eta_y}(\omega+1) = \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\zeta_y}(\omega+1) \\ &= \varphi_\zeta(1) < \varphi_\zeta(2) . \end{aligned}$$

Ist  $\psi_\eta(x) \leq \varphi_\zeta(x+1)$ , so folgt nach (2) und der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}\psi_\eta(x+1) &= \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \psi_{\eta y}(\psi_\eta(x) + 1) \leq \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\Omega^2 + \eta y}(\psi_\eta(x) + 2) \\ &= \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\xi y}(\psi_\eta(x) + 2) \leq \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\xi y}(\varphi_\xi(x+1) + 2) = \varphi_\xi(x+2) .\end{aligned}$$

Ist  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  und  $\psi_\eta(x) \leq \varphi_\xi(x+1)$  für  $1 \leq x < \lambda$ , so ist

$$\psi_\eta(\lambda) = \text{Lim}_{x < \lambda} \psi_\eta(1+x) \leq \text{Lim}_{x < \lambda} \varphi_\xi(1+x+1) = \varphi_\xi(\lambda) < \varphi_\xi(\lambda+1) .$$

Im Falle b) ist also auch

$$\psi_\eta(x) \leq \varphi_\xi(x+1) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

**Hilfssatz 3.** *Es ist*

$$\varphi_\eta(x) \leq \psi_\eta(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1) \quad \text{und} \quad 1 \leq x < \Omega .$$

*Beweis* mit transfiniten Induktion nach  $\eta$ :

1) Für  $\eta = 0$  ist  $\varphi_0(x) = \omega^x$ ,  $\psi_0(x) = \varrho_x$ .

Ist  $1 \leq x \leq 5$ , so ist die Behauptung  $\varphi_0(x) \leq \psi_0(x)$  offensichtlich erfüllt. Ferner folgt aus  $\omega^x \leq \varrho_x$  (und  $x \geq 5$ )

$$\begin{aligned}\varrho_{x+1} &= \varphi_x^\omega(\omega, \omega) > \varphi_x^2(\omega, \omega) = \varphi_x(\omega, \varphi_x(\omega, \omega)) = \varphi_x(\omega, \varrho_x) \\ &> \varphi_2(\omega, \varrho_x) = \varrho_x \cdot \omega \geq \omega^{x+1} .\end{aligned}$$

Sodann folgt aus  $\omega^x \leq \varrho_x$  für  $1 \leq x < \lambda$ , wobei  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  ist,

$$\omega^\lambda \leq \varrho_\lambda .$$

2) Gilt die Behauptung von Hilfssatz 3 für  $\eta$ , so gilt sie für  $\eta + 1$  (nach Satz 3).

3) Ist  $\eta$  von zweiter Art,  $\eta \xrightarrow{\rightarrow} \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \eta_x$  und gilt  $\varphi_{\eta'}(x) \leq \psi_{\eta'}(x)$  für  $1 \leq x < \Omega$  für alle  $\eta' < \eta$ , so gilt die Behauptung auch für  $\eta$ :

Es ist

$$\varphi_\eta(1) = \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \varphi_{\eta x}(1) \leq \text{Lim}_{x < \tau_\eta} \psi_{\eta x}(1) = \psi_\eta(1) .$$

Ferner folgt aus  $\varphi_\eta(x) \leq \psi_\eta(x)$

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(x+1) &= \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \varphi_{\eta y}(\varphi_\eta(x) + 1) \leq \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \psi_{\eta y}(\varphi_\eta(x) + 1) \\ &\leq \text{Lim}_{y < \tau_\eta} \psi_{\eta y}(\psi_\eta(x) + 1) = \psi_\eta(x+1) .\end{aligned}$$

Sodann folgt aus  $\varphi_\eta(x) \leq \psi_\eta(x)$  für  $1 \leq x < \lambda$ , wobei  $\lambda$  eine Limeszahl  $< \Omega$  ist,

$$\varphi_\eta(\lambda) \leq \psi_\eta(\lambda) .$$

4) Ist  $\eta$  dritter Art,  $\eta \xrightarrow{\Omega} \text{Lim}_{x < \Omega} \eta_x$  und gilt  $\varphi_{\eta'}(x) \leq \psi_{\eta'}(x)$  für  $1 \leq x < \Omega$  für alle  $\eta' < \eta$ , so gilt die Behauptung auch für  $\eta$ :

$$\varphi_{\eta}(x) = \varphi_{\eta_x}(1) \leq \psi_{\eta_x}(1) = \psi_{\eta}(x) .$$

**Satz 5.** *Es ist  $\varphi_{\eta}(x) = \psi_{\eta}(x)$  für  $1 \leq x < \Omega$ ,  $\eta$  erster Art und  $\Omega^2 \cdot \omega < \eta \leq F_{\omega_2+1}(1)$ .*

*Beweis:* Aus Hilfssatz 2 und Satz 3 folgt

$$\psi_{\eta+1}(x) \leq \varphi_{\xi+1}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad 1 \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1) .$$

Da für  $\eta \geq \Omega^2 \cdot \omega$   $\eta = \zeta$  ist, folgt daraus

$$\psi_{\eta+1}(x) \leq \varphi_{\eta+1}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad \Omega^2 \cdot \omega \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1) .$$

Daraus und aus Hilfssatz 3 folgt

$$\varphi_{\eta+1}(x) = \psi_{\eta+1}(x) \quad \text{für} \quad 1 \leq x < \Omega \quad \text{und} \quad \Omega^2 \cdot \omega \leq \eta \leq F_{\omega_2+1}(1) .$$

Speziell wird

$$E(1) = E'(1) \quad \text{und} \quad H(1) = H'(1) .$$

Das Ergebnis ist also: *Die Kombination der beiden Methoden löst das Problem der ausgezeichneten Folgen für denselben Abschnitt der zweiten Zahlklasse wie das Verfahren von Veblen allein, auch wenn man nur einen (allerdings nicht zu kleinen) Abschnitt des unverallgemeinerten Verfahrens von Veblen nimmt. Und zwar gilt dies schon, wenn man den Abschnitt vom Typ  $\Omega^2 \cdot \omega + 2$  der Folge  $\mathfrak{F}_0$  von Normalfunktionen  $\varphi_{\eta}$  nimmt, mit dessen Hilfe das Problem der ausgezeichneten Folgen für alle Limeszahlen  $< \varphi_{\Omega^2 \cdot \omega+1}(1)$  gelöst wird.*

#### LITERATUR

- [1] *P. Finsler*, Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen, Comment. Math. Helv. 25 (1951), pg. 75.
- [2] *O. Veblen*, Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), pg. 280.
- [3] *H. Bachmann*, Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, Vierteljahrsschr. Naturforsch. Ges. Zürich 95 (1950), pg. 115.

(Eingegangen den 18. Mai 1951.)