

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Das quadratische Reziprozitätsgesetz im Gaußschen Zahlkörper.
Autor: Brandt, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21264>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Das quadratische Reziprozitätsgesetz im Gaußschen Zahlkörper

Von H. BRANDT in Halle

Herrn Professor Jung zum 75. Geburtstag gewidmet

1. In einer in den Leipziger Berichten erscheinenden Note habe ich das quadratische Reziprozitätsgesetz für den rationalen Zahlkörper auf die Gestalt

$$\left(\frac{\delta}{p}\right) = \left(\frac{p}{\delta}\right)$$

gebracht. Hier ist δ eine Primdiskriminante $-4, 8, -8, -3, 5, -7, -11, 13, 17, -19, \dots$, und p bezeichnet eine positive Primzahl oder den Wert -1 . Geht $p \neq -1$ in δ auf, so sollen beide Symbole den Wert 0 haben. Ist das nicht der Fall, so ist die linke Seite $+1$ oder -1 , je nachdem p durch eine Form der Diskriminante δ darstellbar oder nicht darstellbar ist. Die rechte Seite bestimmt den Charakter von p .

2. Das Gesetz besagt in dieser Form: Die durch Formen der Diskriminante δ darstellbaren Primzahlen haben positiven, die nicht darstellbaren negativen Charakter. Dabei werden die negativen Formen von der Betrachtung ausgeschlossen, p kann auch den Wert -1 haben, darf aber nicht die eine in δ aufgehende Primzahl sein.

In dieser Formulierung ist das Gesetz besonders schmiegsam für die Anwendungen, weil alle Sonderbetrachtungen, welche sonst die Ergänzungssätze erfordern, wegfallen.

Wir wollen untersuchen, wie weit eine entsprechende Formulierung sich auch für den Gaußschen Zahlkörper als sinnvoll und nützlich erweist.

3. Der Gaußsche Zahlkörper besteht aus allen komplexen Zahlen $\alpha = a_1 + i a_2$, wo a_1, a_2 die Komponenten von α , rational sind. Die Zahl α wird ganz genannt, wenn a_1, a_2 ganzzahlig sind. Nur mit solchen Zahlen haben wir es hier zu tun. Das Produkt der konjugierten Zahlen α und $\bar{\alpha}$

$$\alpha \bar{\alpha} = (a_1 + i a_2)(a_1 - i a_2) = a_1^2 + a_2^2 = N(\alpha) = N(\bar{\alpha})$$

heißt Norm von α oder $\bar{\alpha}$. α ist ungerade, wenn die Norm ungerade, wenn also von den Komponenten die eine ungerade, die andere gerade ist, α ist halbgerade, wenn a_1, a_2 beide ungerade, die Norm also durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist, α ist gerade, wenn a_1, a_2 beide gerade, die Norm also durch 4 teilbar ist. Durch Multiplikation mit Potenzen von i ergeben sich die assoziierten Zahlen

$$a_1 + i a_2, \quad -a_2 + i a_1, \quad -a_1 - i a_2, \quad a_2 - i a_1.$$

4. Wenn α ungerade, so ist bei 2 assoziierten Zahlen der Realteil ungerade, der Imaginärteil gerade. Von diesen beiden wollen wir noch diejenige Zahl auszeichnen, bei der der Realteil kongruent 1 nach 4 ist. Diese Zahl nennen wir primär und bezeichnen sie durch $:\alpha:$ (lies α primär)¹⁾. Für ein Produkt von 2 ungeraden Zahlen α, β gilt offenbar $:\alpha\beta: = :\alpha: :\beta:$. Die Summe der Komponenten von $:\alpha:$ nennen wir Spanne von α und bezeichnen sie durch s . Die Spanne ist kongruent 1 oder 3 nach 4, je nachdem die Norm kongruent 1 oder 5 nach 8 ist, sie hat für die vier assoziierten Zahlen denselben Wert.

5. Das Quadrat der Zahl $\alpha = a_1 + i a_2$ ist $\alpha^2 = a_1^2 - a_2^2 + 2i a_1 a_2$. Wenn α ungerade, ist das Produkt $a_1 a_2$ gerade, also ist der Imaginärteil einer ungeraden Quadratzahl durch 4 teilbar, so daß $\alpha^2 \equiv \pm 1, (4)$ gilt. Wenn α halbgerade, so ist $\alpha^2 \equiv 2i, (4)$, und wenn α gerade, $\alpha^2 \equiv 0, (4)$. Quadratzahlen sind also immer kongruent $\pm 1, 2i, 0$ nach 4.

6. Primzahlen entstehen einmal aus der Zerlegung der gewöhnlichen Primzahlen von der Form $4n + 1$, z. B. $29 = (5 + 2i)(5 - 2i)$, $17 = (4 + i)(4 - i)$, ferner sind die reellen Primzahlen von der Form $4n + 3$ auch im Gaußschen Zahlkörper Primzahlen. Endlich entstehen aus der Primzahl 2 die konjugierten und gleichzeitig assoziierten Primzahlen $1 + i$ und $1 - i$. Die ungeraden Primzahlen können wir in der primären Gestalt annehmen, zum Beispiel $:-5 + 2i: = 5 - 2i$, $:4 + i: = 1 - 4i$, $:3: = -3$. Dann ist jede ungerade Zahl bis auf Faktoren $\pm 1, \pm i$, das heißt bis auf Potenzen von i , eindeutig als Produkt primärer Primzahlen darstellbar.

7. Im Gaußschen Zahlkörper betrachten wir ebenso wie im rationalen quadratische Formen $(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \xi^2 + \beta \xi \eta + \gamma \eta^2$. Die Diskriminante $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ ist modulo 4 kongruent β^2 , also kongruent $\pm 1, 2i, 0$. Multipliziert man mit i , so geht die Diskriminante Δ in $-\Delta$ über. Dar-

¹⁾ Gauß gibt zwei Definitionen für primäre Zahlen, von denen wir hier die erste bevorzugen. Siehe Fußnote 2.

aus sieht man, daß die Formen mit den Diskriminanten Δ und $-\Delta$ als gleichwertig zu betrachten sind im Gegensatz zum rationalen Zahlkörper, wo Formen mit positiven und negativen Diskriminanten so vollständig verschiedene Eigenschaften haben. Man wird diese Formen überhaupt nicht voneinander trennen und am besten nur von Formen mit den Diskriminanten $\pm\Delta$ sprechen.

8. Von Wichtigkeit ist die Frage, welche Formen Stammformen sein können. Wenn eine Form φ durch eine lineare Transformation in eine andere ψ übergeht, so sagen wir: ψ ist unter φ enthalten. Stammformen sind dann solche primitiven Formen, welche nicht unter einer anderen Form mit absolut genommen kleinerer Diskriminante enthalten sind.

Man findet leicht, daß die Diskriminante einer Stammform keinen ungeraden Primfaktor im Quadrat enthalten kann. Nur die Primzahl $1+i$ kann in einer höheren, nämlich in der 2., 4. oder 5. Potenz in der Diskriminante aufgehen.

9. Wenn β ungerade, ist $\Delta \equiv \pm 1$, (4), wenn β halbgerade, ist $\Delta \equiv 2i$, (4), also durch $(1+i)^2$ teilbar. Wenn β gerade, ist Δ durch 4 oder $(1+i)^4$ teilbar. Da man α ungerade annehmen darf, kann β durch $\beta + 2\alpha\kappa$ ersetzt werden, darf also sogar durch 4 teilbar angenommen werden. Ist dann γ halbgerade, so ist Δ durch $(1+i)^5$ teilbar. Eine höhere Potenz ist aber bei Stammformen nicht möglich, denn dann müßte γ gerade sein und die Form (α, β, γ) wäre unter $\left(\alpha, \frac{\beta}{1+i}, \frac{\gamma}{2i}\right)$ enthalten.

10. Eine nähere Diskussion zeigt, daß es 8 Typen von Stammformen gibt. Wir bezeichnen durch $\Delta_0 \equiv \pm 1$, (4) und $\Delta'_0 \equiv \pm 1 + 2i$, (4) irgendwelche ungerade quadratfreie Zahlen. Dann bestehen für die Diskriminanten der Stammformen, d. h. die Stammdiskriminanten, folgende Möglichkeiten: 1) $\Delta = \Delta_0$, 2) $\Delta = 2i\Delta'_0$, 3) $\Delta = 4i\Delta_0$, 4) $\Delta = 4i\Delta'_0$, 5) $\Delta = 4(1+i)\Delta_0$, 6) $\Delta = 4(1+i)\Delta'_0$, 7) $\Delta = 4(1-i)\Delta_0$, 8) $\Delta = 4(1-i)\Delta'_0$.

Ist $\beta = (1+i)\beta_0$ und β_0 ungerade, so folgt $\frac{\Delta}{2i} = \beta_0^2 + 2i\alpha\gamma \equiv \pm 1 + 2i$, (4), wenn $\alpha\gamma$ ungerade oder halbgerade; $\frac{\Delta}{2i} \equiv \pm 1$, (4) ist also nur möglich, wenn, bei ungeradem α , γ gerade ist, so daß (α, β, γ) unter $\left(\alpha, \frac{\beta}{1+i}, \frac{\gamma}{2i}\right)$ enthalten ist, woraus sich der zweite Typus ergibt. Ähnlich schließt man in den anderen Fällen.

11. Weitere Stammformen ergeben sich nämlich, wenn β gerade und Δ genau durch 4 teilbar ist, so daß $\frac{\Delta}{4}$ ungerade.

Weil man α ungerade annehmen darf und β durch $\beta + 2\alpha\kappa$ ersetzen, also beliebig modulo 2 ändern kann, so darf man $\frac{\beta}{2} = \beta_0$ ungerade annehmen. Hätte dann

$$\beta_0^2 - \alpha\gamma$$

einen ungeraden Realteil, so müßte $\alpha\gamma$ und damit γ gerade sein, die Form (α, β, γ) wäre unter $(\alpha, \frac{\beta}{1+i}, \frac{\gamma}{2i})$ enthalten. Somit wird

$$\frac{\Delta}{4} \equiv i, (2), \text{ entsprechend den Typen 3 und 4,}$$

und es liegen dann auch tatsächlich Stammformen vor, weil weder $\frac{\Delta}{2i}$ noch $\frac{\Delta}{4}$ Diskriminanten sein können (vgl. 3). Ist aber Δ durch $(1+i)^5$ teilbar, so sieht man leicht, daß sich für die ungerade Zahl $\frac{\Delta}{(1+i)^5}$ keinerlei Einschränkungen ergeben, woraus die 4 letzten Typen entstehen.

12. Fragt man nun nach den Primbestandteilen der Stammdiskriminanten, das heißt nach den Primdiskriminanten, so ergibt sich ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Formen im rationalen Zahlkörper. Dort ist jede Stammdiskriminante eindeutig in Primdiskriminanten zerlegbar. Zu jeder ungeraden Primzahl p gibt es eine Primdiskriminante, nämlich die Zahl $:p:$ (gelesen p primär oder p normiert), zu der Primzahl 2 gibt es aber 3 Primdiskriminanten, $-4, 8, -8$.

13. Da die ungeraden Diskriminanten $\equiv \pm 1, (4)$ sind, kann eine ungerade Primzahl, bei der der Imaginärteil durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist, niemals Diskriminante sein. Somit ergeben sich zunächst die ungeraden Primdiskriminanten $p_1 + 4ip_2$, wobei $p_1 \equiv \pm 1, (4)$ und p_2 auch Null sein kann, ferner hat man die geraden Primdiskriminanten $4i, 4(1+i), 4(1-i)$, welche durch die Formen $(1, 0, -i), (1, 0, -(1+i)), (1, 0, -(1-i))$ vertreten werden.

14. Diese eigentlichen Primdiskriminanten reichen aber nicht aus für die Zerlegung der Stammdiskriminanten. Eine Stammdiskriminante kann durchaus einen Primteiler $\pi_0 \equiv \pm 1 + 2i, (4)$ haben. Irgend 2 solche Primzahlen geben ein Produkt $\equiv \pm 1, (4)$, und es ist leicht, Formen anzugeben, welche dies Produkt als Diskriminante haben. Ebenso kann man Formen mit den Diskriminanten $2i\pi_0, 4i\pi_0, 4(1+i)\pi_0, 4(1-i)\pi_0$ angeben.

15. Um diesen Tatsachen Rechnung zu tragen, führen wir einen symbolischen Faktor ω ein und bilden damit die uneigentlichen Primdiskriminanten $\pi_0\omega$, $2i\omega$, $4i\omega$, $4(1+i)\omega$, $4(1-i)\omega$, wobei π_0 eine beliebige Primzahl $\equiv \pm 1 + 2i$, (4) bedeutet. Diese uneigentlichen Primdiskriminanten können dann für sich allein nicht auftreten, wohl aber paarweise, jedoch mit der Einschränkung, daß höchstens eine der beiden gerade sein darf. Bei der Multiplikation der Primdiskriminanten löschen sich die symbolischen Faktoren ω , so daß man mit ihnen gemäß der Gleichung $\omega^2 = 1$ rechnen kann. Indessen sind sie nicht entbehrlich, ohne den Faktor ω würde man die 3 eigentlichen Primdiskriminanten $4i$, $4(1+i)$, $4(1-i)$ nicht von denselben uneigentlichen unterscheiden können. Auch wäre eine uneigentliche Primdiskriminante $2i$ unbrauchbar, weil $2i$ ein Quadrat ist.

16. Die Stammdiskriminanten sind dann eindeutig in lauter verschiedene eigentliche und uneigentliche Primdiskriminanten zerlegbar. Die 8 Typen (aus Nr. 10) unterscheiden sich folgendermaßen: Bei dem 1., 3., 5., 7. Typus treten keine geraden uneigentlichen Primdiskriminanten auf, dagegen sind ungerade uneigentliche Primdiskriminanten möglich, aber nur in gerader Anzahl. Bei dem 2., 4., 6., 8. Typus tritt jeweils eine gerade uneigentliche Primdiskriminante auf, nämlich $2i\omega$, $4i\omega$, $4(1+i)\omega$, $4(1-i)\omega$. Außerdem kommen unter allen Umständen uneigentliche ungerade Primdiskriminanten vor, aber immer in ungerader Anzahl.

17. Für die nähere Untersuchung der quadratischen Formen wird das quadratische Reziprozitätsgesetz benötigt. Es wurde zuerst von Gauß²⁾ in der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste nebst den Ergänzungssätzen mitgeteilt. Bewiesen wurden die Gesetze von Dirichlet³⁾. Die Sätze von Gauß und Dirichlet reichen aber noch nicht aus für die Bestimmung der Charaktere der binären quadratischen Formen, die vollständig von *H. I. St. Smith*⁴⁾ gegeben wurde.

18. Wir bringen zunächst eine neue Formulierung der Gauß-Dirichletschen Gesetze, bei der alle besonderen Voraussetzungen fortfallen und

²⁾ *C. F. Gauß*, *Theoria residuorum biquadraticorum*, *Commentatio secunda*, *Werke II* (1876), S. 93—148 = *Untersuchungen über höhere Arithmetik*, deutsch herausgegeben von Maser (1889), S. 534—586.

³⁾ *M. G. Lejeune-Dirichlet*, *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, *J. Math.* 24 (1842) 291—371 = *Werke I*, 533—618.

⁴⁾ *Henry I. St. Smith*, *On complex binary quadratic forms*, *Proc. Roy. Soc.* 13 (1864) 278—298 = *Collected Papers I*, 418—442.

das Hauptgesetz die Ergänzungssätze mit aufnimmt. Es sei π eine ungerade Primzahl. Dann ist i quadratischer Rest oder Nichtrest von π , je nachdem die Norm kongruent 1 oder 5 nach 8 ist. Wir wollen nun durch $\left[\frac{:\pi:}{i} \right]$ je nach diesen beiden Fällen den Wert $+1$ oder -1 bezeichnen, das heißt je nachdem der Imaginärteil von $:\pi:$ durch 4 oder nur durch 2 teilbar oder die Spanne von π (vgl. 4) kongruent 1 oder 3 nach 4 ist. Dann hat man

$$\left[\frac{:\pi:}{i} \right] = \left(\frac{-1}{s} \right) = (-1)^{\frac{s-1}{2}}$$

und es gilt

$$\left[\frac{i}{\pi} \right] = \left[\frac{:\pi:}{i} \right].$$

19. Die Ergänzungssätze, die sich auf $1+i$ und $1-i$ beziehen, können ähnlich formuliert werden. Es sei

$$\left[\frac{:\pi:}{1+i} \right] = \left(\frac{2}{s} \right) = (-1)^{\frac{s^2-1}{8}},$$

das heißt $+1$, wenn $s \equiv \pm 1, (8)$ und -1 , wenn $s \equiv \pm 3, (8)$. Dann ist

$$\left[\frac{1+i}{\pi} \right] = \left[\frac{:\pi:}{1+i} \right].$$

Ferner sei

$$\left[\frac{:\pi:}{1-i} \right] = \left(\frac{-2}{s} \right) = \left(\frac{-1}{s} \right) \left(\frac{2}{s} \right),$$

das heißt $+1$, wenn $s \equiv 1, 3, (8)$ und -1 , wenn $s \equiv 5, 7, (8)$. Dann gilt

$$\left[\frac{1-i}{\pi} \right] = \left[\frac{:\pi:}{1-i} \right].$$

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei noch bemerkt, daß die hier und vorhin auftretenden Symbole

$$\left(\frac{-1}{s} \right) \text{ und } \left(\frac{-2}{s} \right)$$

bei negativem s keine Legendreschen Restsymbole sind.

20. Weiter seien π_1, π_2 ungerade Primzahlen, dann gilt nach Gauß und Dirichlet

$$\left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right] = \left[\frac{\pi_2}{\pi_1} \right],$$

wenn beide Primzahlen gerade Imaginärteile haben. In diesem Fall ist $:\pi_2: = \pm \pi_2$, so daß man auch schreiben darf

$$\left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right] = \left[\frac{:\pi_2:}{\pi_1} \right].$$

Hat aber π_1 geraden, π_2 ungeraden Imaginärteil, so hat $i\pi_2$ geraden Imaginärteil, und es gilt

$$\left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right] = \left[\frac{\pi_1}{i\pi_2} \right] = \left[\frac{i\pi_2}{\pi_1} \right] = \left[\frac{:\pi_2:}{\pi_1} \right],$$

weil $:\pi_2: = \pm i\pi_2$, so daß sich wieder dieselbe Formel ergibt.

Es habe jetzt π_1 ungeraden Imaginärteil, dann ist wie eben bewiesen

$$\left[\frac{i\pi_1}{\pi_2} \right] = \left[\frac{:\pi_2:}{i\pi_1} \right].$$

Hier ist die linke Seite $\left[\frac{i}{\pi_2} \right] \left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right]$, die rechte $\left[\frac{:\pi_2:}{i} \right] \left[\frac{:\pi_2:}{\pi_1} \right]$. Da nun in diesen Produkten die ersten Faktoren gleich sind auf Grund des ersten Ergänzungssatzes (Nr. 18), so sind auch die zweiten Faktoren gleich.

Das bedeutet aber: In der Formel

$$\left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right] = \left[\frac{:\pi_2:}{\pi_1} \right]$$

ist das ganze quadratische Reziprozitätsgesetz unter Einschluß der Ergänzungssätze enthalten, π_1, π_2 sind beliebige ungerade Primzahlen und π_1 kann auch die Werte $i, 1+i, 1-i$ annehmen.

21. Ist $\mu_1 = \Pi\pi_1$ eine beliebige und $\mu_2 = \Pi\pi_2$ eine ungerade Zahl und setzt man

$$\left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] = \prod_{\pi_1} \prod_{\pi_2} \left[\frac{\pi_1}{\pi_2} \right], \quad \left[\frac{:\mu_2:}{\mu_1} \right] = \prod_{\pi_1} \prod_{\pi_2} \left[\frac{:\pi_2:}{\pi_1} \right],$$

so ergibt sich das verallgemeinerte Gesetz

$$\left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \right] = \left[\frac{:\mu_2:}{\mu_1} \right].$$

So elegant auch das Reziprozitätsgesetz in der neuen Formulierung wirkt, so ist doch für die Anwendung auf die binären quadratischen Formen eine andere Formulierung noch besser geeignet. Außerdem ent-

hüllt sie erst den tieferen Sinn der Festsetzungen, die zu der ersten Formulierung geführt haben.

22. Ist δ eine ungerade eigentliche Primdiskriminante, so ist $\delta \equiv \pm 1$, (4), also $:\delta: = \pm \delta$. Man kann daher δ an Stelle von π_2 und auch an Stelle von $:\pi_2:$ setzen. Schreibt man noch π statt π_1 und vertauscht beide Seiten, so ergibt sich

$$\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\delta} \right].$$

Dabei geht π nicht in δ auf und kann auch die Werte i , $1 + i$, $1 - i$ annehmen. Die linke Seite ist positiv oder negativ, je nachdem π durch eine Form der Diskriminante δ darstellbar oder nicht darstellbar ist, während die rechte Seite den Charakter bestimmt. Das besagt: Die durch die Formen mit der Diskriminante δ darstellbaren Primzahlen π haben positiven, die nicht darstellbaren negativen Charakter.

Wir werden zeigen, daß diese zweite Reziprozitätsformel bei geeigneten Festsetzungen ebenfalls allgemein richtig ist, während allerdings die hier gegebene Deutung nur bei eigentlichen Primdiskriminanten möglich ist.

Dafür bieten aber die allgemeinen Deutungen am Schluß (Nr. 29, 30) einen gewissen Ersatz.

23. Zunächst ist es notwendig, die supplementären Charaktere näher zu betrachten. Die ungeraden Zahlen μ geben modulo $(1+i)^5$, wenn man von dem Vorzeichen absieht, 8 Restklassen. Das Quadrat jeder Restklasse gibt die Einsklasse, die anderen sieben Restklassen enthalten somit quadratische Nichtreste nach $(1+i)^5$. Ähnlich ist es bei dem Modul $(1+i)^4$ oder dem Modul 4. Nur eine Restklasse enthält quadratische Reste, die drei andern Restklassen dagegen enthalten quadratische Nichtreste. Nur der Modul $(1+i)^2 = 2i$ oder der Modul 2 bringt noch eine Gleichverteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, er liefert in der einen Restklasse quadratische Reste und in der andern quadratische Nichtreste. Deshalb ist unter den Potenzen von $1+i$ nur das Quadrat $2i$ oder der Modul 2 geeignet, einen Charakter $\chi_0(\mu)$ zu bestimmen, und zwar ist dies Symbol $+1$, wenn $\mu \equiv 1$, (2), und -1 , wenn $\mu \equiv i$, (2).

24. Das Restesystem modulo $(1+i)^5$ enthält aber 7 Untergruppen der Ordnung 4. Durch den Charakter $\chi_0 = 1$ ist nur eine davon festgelegt. In Analogie zu den rationalen Zahlen wird man aber Restsymbole mit den Zählern i , $1+i$, $1-i = -i(1+i)$ zur Charakterisierung

benutzen. So werden für eine ungerade Primzahl π drei weitere Charaktere durch die Symbole

$$\chi_i = \left[\frac{i}{\pi} \right], \quad \chi_{1+i} = \left[\frac{1+i}{\pi} \right], \quad \chi_{1-i} = \left[\frac{1-i}{\pi} \right],$$

die wir auf beliebige ungerade Nenner μ übertragen, und damit drei weitere Untergruppen der Ordnung 4 festgelegt. Die Produkte $\chi_0 \chi_i = \chi_i^0$, $\chi_0 \chi_{1+i} = \chi_{1+i}^0$, $\chi_0 \chi_{1-i} = \chi_{1-i}^0$ sind dann die 3 übrigen möglichen Charaktere, welche gleichzeitig die noch fehlenden 3 Untergruppen bestimmen⁵⁾.

Hierbei ist es mißlich, daß der Charakter χ_0 in anderer Weise festgelegt ist als die Charaktere χ_i , χ_{1+i} , χ_{1-i} . Während nun im Rationalen der Restcharakter p nach 4 durch $\left(\frac{-1}{p} \right)$ bezeichnet werden kann, gibt es tatsächlich keine Zahl ω , so daß $\chi_0(\mu) = \left[\frac{\omega}{\mu} \right]$ für alle ungeraden μ gilt. Wir erfinden deshalb ein Symbol ω , welches dieser Gleichung genügt, es ist dasselbe, welches wir schon zur Kennzeichnung der uneigentlichen Primdiskriminanten verwandt haben. Die 7 supplementären Charaktere für eine ungerade Primzahl π können dann übereinstimmend durch $\left[\frac{\nu}{\pi} \right]$ bezeichnet werden, wenn der Zähler die Werte ω , i , $1+i$ und ihre Produkte bezeichnet.

25. Diese 7 supplementären Charaktere entsprechen genau den 7 geraden eigentlichen und uneigentlichen Primdiskriminanten $4i$, $4(1+i)$, $4(1-i)$, $2i\omega$, $4i\omega$, $4(1+i)\omega$, $4(1-i)\omega$. Diese unterscheiden sich überhaupt nur durch einen quadratischen Faktor $2i$ oder 4 von den die Charaktere bestimmenden Zählern ν in dem Restsymbol $\left[\frac{\nu}{\pi} \right]$.

Damit nun das Gesetz $\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\delta} \right]$ allgemein gilt, sind folgende Festsetzungen über das Rechnen mit dem Symbol ω erforderlich: Tritt das Symbol ω im Zähler auf, während der Nenner eine ungerade Primzahl π ist, so ist es unter allen Umständen zu berücksichtigen, man kann es von den übrigen Zahlfaktoren abtrennen und hat dann mit $\left[\frac{\omega}{\pi} \right] = \chi_0(\pi)$ zu rechnen.

In allen andern Fällen, einerlei ob ω im Zähler oder Nenner steht, ist es nur zu berücksichtigen, wenn der Faktor von ω Quadrat oder Dis-

⁵⁾ Zum Vergleich seien die Bezeichnungen von H. I. St. Smith angegeben: $\chi_0 = \gamma$, $\chi_i = \alpha$, $\chi_{1+i} = \beta$, die übrigen Charaktere werden dann durch die aus α , β , γ gebildeten Produkte bezeichnet.

kriminante ist, im übrigen aber als bedeutungslos zu behandeln. Steht ω im Nenner und tritt der erste Fall ein, so ist

$$\left[\frac{\pi}{\omega} \right] = \left[\frac{\omega}{\pi} \right]$$

zu setzen.

26. Nach diesen Regeln findet man für $\delta = \pi_0 \omega$, wo π_0 eine ungerade Primzahl bezeichnet, deren Imaginärteil durch 2, aber nicht durch 4 teilbar ist, wenn $\left[\frac{\omega}{\pi} \right] = 1$

$$\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\omega}{\pi} \right] \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right],$$

weil π, π_0 beide gerade Imaginärteile haben. Ist aber $\left[\frac{\omega}{\pi} \right] = -1$, so hat $i\pi$ geraden Imaginärteil und es wird

$$\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\omega}{\pi} \right] \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right] = - \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right] = - \left[\frac{\pi_0}{i\pi} \right] = - \left[\frac{i\pi}{\pi_0} \right] = - \left[\frac{i}{\pi_0} \right] \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right] = \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right].$$

In beiden Fällen ist also $\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right]$,

was man nach der ω -Rechnungsregel mit $\left[\frac{\pi}{\delta} \right]$ identifizieren kann. Ist $\pi = i$, so liefert die Regel $\left[\frac{\delta}{i} \right] = \left[\frac{i}{\delta} \right] = -1$. Ähnlich zeigt man, daß $\left[\frac{\delta}{1+i} \right] = \left[\frac{1+i}{\delta} \right]$.

Für $\delta = 2i\omega$ wird $\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{2i\omega}{\pi} \right] = \left[\frac{\omega}{\pi} \right]$, weil $2i$ ein Quadrat. Es ist aber $\left[\frac{\omega}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\omega} \right]$ und dafür kann man nach der Regel

$$\left[\frac{\pi}{2i\omega} \right] = \left[\frac{\pi}{\delta} \right]$$

setzen.

Ist $\pi = i$, so wird $\left[\frac{\delta}{i} \right] = \left[\frac{\omega}{i} \right]$, $\left[\frac{i}{\delta} \right] = \left[\frac{i}{\omega} \right]$, es ist also $\left[\frac{\delta}{i} \right] = \left[\frac{i}{\delta} \right] = -1$.

27. In den Fällen $\delta = 4i, 4(1+i), 4(1-i)$ ist das Reziprozitätsgesetz in der neuen Form gültig, wenn im Sinne der Charakterbestimmung bei den Formen mit diesen Diskriminanten $\left[\frac{\delta}{i} \right] = \left[\frac{i}{\delta} \right] = 1$ gesetzt und $\left[\frac{\pi}{\delta} \right]$ mit dem Symbol

$$\left[\frac{:\pi:}{\delta:4} \right]$$

(vgl. Nr. 18 und 19) identifiziert wird ⁶⁾. Es bleiben noch die uneigentlichen Primdiskriminanten $\delta = 4i\omega$, $4(1+i)\omega$, $4(1-i)\omega$ zu erledigen. Auf Grund der Regel hat man hier

$$\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\delta} \right],$$

und der gemeinsame Wert dieser Symbole ist in den drei Fällen

$$\chi_0 \chi_i = \chi_i^0, \quad \chi_0 \chi_{1+i} = \chi_{1+i}^0, \quad \chi_0 \chi_{1-i} = \chi_{1-i}^0,$$

während wieder $\left[\frac{\delta}{i} \right] = \left[\frac{i}{\delta} \right] = -1$ gilt.

28. Nach diesen Festsetzungen ist das Reziprozitätsgesetz allgemein in der Gestalt

$$\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi}{\delta} \right]$$

gültig. Hier bezeichnet δ eine eigentliche oder uneigentliche Primdiskriminante und π eine Primzahl oder den Wert i . Geht π in δ auf, so sind beide Symbole Null. Ist das nicht der Fall und δ eigentlich, so gilt die in 22 angegebene Deutung. Das Gesetz kann in der üblichen Weise verallgemeinert werden und erhält dann die Gestalt

$$\left[\frac{\Delta}{M} \right] = \left[\frac{M}{\Delta} \right],$$

Jetzt ist $\Delta = \Pi\delta$ eine beliebige Stammdiskriminante und M ist eine beliebige Zahl, die auch mehrfache Primfaktoren enthalten kann. Haben Δ und M (außer i) einen gemeinsamen Primfaktor, so sind beide Symbole 0.

29. In dieser Form ist das Reziprozitätsgesetz besonders schmiegsam für die Anwendungen. Wird zum Beispiel durch eine binäre Stammform (α, β, γ) mit der Diskriminante Δ eine zu Δ prime Zahl M eigentlich dargestellt, so ergibt sich für jede eigentliche oder uneigentliche Primdiskriminante δ aus Δ ein Charakter

$$\chi_\delta = \left[\frac{M}{\delta} \right],$$

und es gilt dann

$$\Pi \chi_\delta = \Pi \left[\frac{M}{\delta} \right] = \left[\frac{M}{\Delta} \right] = \left[\frac{\Delta}{M} \right] = 1,$$

⁶⁾ Daß in den Symbolen $\left[\frac{\pi}{4i} \right]$, $\left[\frac{\pi}{4(1+i)} \right]$, $\left[\frac{\pi}{4(1-i)} \right]$ der Faktor 4 nicht einfach gelöscht werden kann, darf nicht befremden. Die Nenner sind als Diskriminanten Primbestandteile.

so daß für diese Relation überhaupt keine Fallunterscheidungen und Sonderbetrachtungen erforderlich sind. Weil die zu Δ prime Zahl M dann und nur dann durch eine Form mit der Diskriminante Δ oder $-\Delta$ eigentlich darstellbar ist, wenn für jeden Primfaktor π aus M die Bedingung $\left[\frac{\Delta}{\pi}\right] = 1$ erfüllt ist, so hat man wegen des verallgemeinerten Reziprozitätsgesetzes auch $\left[\frac{\pi}{\Delta}\right] = \prod_{\delta} \left[\frac{\pi}{\delta}\right] = 1$. Es dürfen also in M nur solche Primfaktoren π aufgehen, für welche das Produkt der Charaktere $\left[\frac{\pi}{\delta}\right] = \chi_{\delta}$ über alle Primdiskriminanten δ aus Δ erstreckt, den Wert 1 hat, und umgekehrt ist das auch ausreichend für die Darstellbarkeit.

30. Es macht keine Schwierigkeit, die Verallgemeinerung des Reziprozitätsgesetzes noch einen Schritt weiter zu treiben und auf beliebige Diskriminanten auszudehnen. Jetzt gibt es im allgemeinen neben den Charakteren, welche in die Bedingung für die Existenz der Geschlechter eingehen, noch andere überzählige, welche keiner Nebenbedingung unterworfen sind. Beide sind von H. I. St. Smith zusammengestellt⁴⁾. Die Primdiskriminanten, welche zu den Charakteren der ersten Sorte gehören, sollen wesentliche Primdiskriminanten heißen. Sie geben im Produkt den Modul für die arithmetischen Progressionen, in denen sich die dargestellten Zahlen finden. Das Gesetz besagt dann: Durch die Formen mit den Diskriminanten $\pm\Delta$ sind alle und nur solche zu Δ primen Zahlen M eigentlich darstellbar, welche aus Primfaktoren π zusammengesetzt sind, die für alle wesentlichen Primdiskriminanten δ aus Δ der Bedingung

$$\prod_{\delta} \chi_{\delta}(\pi) = 1$$

genügen.

31. Besonders einfach wird der letzte Satz, wenn die dargestellte Zahl $M = \pi$ selbst Primzahl ist. Dann wird durch die Bedingung $\left[\frac{\Delta}{\pi}\right] = 1$ bereits die Darstellbarkeit durch Formen der Diskriminante Δ garantiert. Das ist klar, wenn π ungerade ist. Für $\pi = 1 + i$ oder $1 - i$ fassen wir die Bedingung im Sinne der Festsetzungen von Nr. 19 auf, woraus sich dann leicht die Darstellbarkeit von $1 + i$ und $1 - i$ ergibt. Der Wert von $\left[\frac{\pi}{\Delta}\right] = \prod_{\delta} \left[\frac{\pi}{\delta}\right]$, das heißt das Produkt der Einzelcharaktere, soll als Gesamtcharakter von π für die Diskriminante Δ

bezeichnet werden. Dann gilt: Die Primzahl π ist durch Formen der Diskriminante Δ darstellbar oder nicht darstellbar, je nachdem π für Δ den Gesamtcharakter $+1$ oder -1 hat.

32. Ist zum Beispiel $\pi_0 \equiv \pm 1 + 2i$, (4) eine Primzahl, so ist $2i\pi_0$ Diskriminante. Es ist dann

$$\left[\frac{2i\pi_0}{\pi} \right] = \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{\pi}{2i\pi_0} \right] = \chi_0(\pi) \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right].$$

Jetzt können die entsprechenden Formen geradezu als Ersatzformen für die uneigentliche Diskriminante $\pi_0\omega$ mit dem Charakter $\chi_0(\pi) \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right]$ angesehen werden. Es ist bemerkenswert, daß auch die rein formale Rechnung mit $\delta = \pi_0\omega$ im wesentlichen dasselbe liefert. Die Darstellbarkeit würde dann durch $\left[\frac{\delta}{\pi} \right] = \chi_0(\pi) \left[\frac{\pi_0}{\pi} \right]$ und der Charakter durch $\left[\frac{\pi}{\delta} \right] = \left[\frac{\pi}{\pi_0} \right]$ bestimmt, das heißt das Symbol $\chi_0(\pi)$ wandert nur auf die andere Seite der Reziprozitätsgleichung. Für die geraden uneigentlichen Primdiskriminanten können indessen solche Ersatzformen nicht gefunden werden, wenn es auch sinnvoll ist, auch hier durch $\left[\frac{\delta}{\pi} \right]$ den zu $\delta = 2i\omega, 4i\omega, 4(1+i)\omega, 4(1-i)\omega$ gehörigen Charakter zu bezeichnen.

(Eingegangen den 10. Mai 1951.)