

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1952)

Artikel: Une propriété des espaces osculateurs des courbes normales.
Autor: Sydler, J.-P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21263>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 10.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Une propriété des espaces osculateurs des courbes normales

De J.-P. SYDLER, Zurich

A M. P. Scherrer, bibliothécaire en chef de l'E. P. F.

Une courbe normale de l'espace à n dimensions, à savoir une courbe algébrique d'ordre n n'appartenant pas à un espace de dimension inférieure, est donnée sous forme paramétrique par les équations :

$$y_i(\lambda) = \lambda^i \quad (i = 0, \dots, n) . \quad (1)$$

Pour simplifier les développements ultérieurs, opérons la transformation de coordonnées :

$$y_i = \sum_s \lambda_s^i x_s \quad (i, s = 0, \dots, n) , \quad (2)$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ étant $n + 1$ valeurs différentes quelconques. La coube répond alors aux nouvelles équations :

$$x_i(\lambda) = \frac{\prod_{s \neq i} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{s \neq i} (\lambda_i - \lambda_s)} \quad (i, s = 0, \dots, n) . \quad (3)$$

L'hyperplan osculateur au point de paramètre λ^* de la courbe (1) se trouve facilement. En effet, pour que $\sum a_i y_i = 0$ soit osculateur en λ^* , il doit couper la courbe en n points confondus, c'est-à-dire que, puisque $y_i = \lambda^i$, $\sum a_i \lambda^i$ doit être identique à $(\lambda - \lambda^*)^n$, donc

$$a_i = (-1)^i \binom{n}{i} (\lambda^*)^{n-i} .$$

On trouve dès lors l'hyperplan osculateur $\sum b_i x_i = 0$ au point λ^* de la courbe (3) :

$$\sum_s b_s x_s = \sum_i a_i y_i = \sum_{i,s} a_i \lambda_s^i x_s = \sum_{i,s} (-1)^i \binom{n}{i} (\lambda^*)^{n-i} \lambda_s^i x_s ;$$

$$b_s = \sum_i (-1)^i \binom{n}{i} \lambda_s^i (\lambda^*)^{n-i} \quad b_s = (\lambda^* - \lambda_s)^n .$$

L'équation de l'hyperplan osculateur au point λ de la courbe (3) est donc

$$\sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_j)^n x_j = 0 . \quad (4)$$

Nous dirons, comme il est d'usage, qu'un espace linéaire à k dimensions est osculateur à la courbe s'il la coupe en $k + 1$ points confondus. Il est clair que le E^{n-k} osculateur au point de paramètre λ sera déterminé par $\sum (\lambda - \lambda_j)^n x_j = 0$ et les $k - 1$ premières dérivées par rapport à λ , donc par $\sum (\lambda - \lambda_j)^{n-t} x_j = 0$, $t = 0, \dots, k - 1$.

Les coordonnées pluckériennes tangentielles de ce E^{n-k} sont dès lors :

$$\begin{aligned} p^{i_1, \dots, i_k}(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_{i_1})^n & \dots & (\lambda - \lambda_{i_k})^n \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda - \lambda_{i_1})^{n-k+1} & \dots & (\lambda - \lambda_{i_k})^{n-k+1} \end{vmatrix} = \\ &= [(\lambda - \lambda_{i_1}) \dots (\lambda - \lambda_{i_k})]^{n-k+1} \begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_k} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad (i_1, \dots, i_k = 0, \dots, n) . \end{aligned}$$

Notons simplement que les E^{n-k} osculateurs de la courbe normale sont donc représentés sur la grassmannienne des E^{n-k} dans l'espace à $\binom{n+1}{k} - 1$ dimensions par une courbe d'ordre $k(n - k + 1)$: son ordre est égal à la dimension de la grassmannienne.

Considérons enfin les traces E^s des E^{n-k} osculateurs dans l'espace à $k + s$ dimensions déterminé par les points de paramètres $\lambda_0, \dots, \lambda_{k+s}$, à savoir $x_{k+s+1} = \dots = x_n = 0$. Il est clair que les coordonnées pluckériennes tangentielles de ces E^s seront :

$$\begin{aligned} p^{i_1 \dots i_k}(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_{i_1}) \dots (\lambda - \lambda_{i_k})]^{n-k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{k-1} \end{vmatrix} \\ &\quad (i_1, \dots, i_k = 0, \dots, k + s) . \end{aligned}$$

On pourra donc les représenter univoquement par les points $P(\lambda)$ d'une courbe de l'espace à $\binom{k+s+1}{k} - 1$ dimensions.

Nous prétendons que les points $P(\lambda_0), \dots, P(\lambda_{k+s})$ sont dépendants, c'est-à-dire situés dans un E^{k+s-1} . Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver que les déterminants formés par $k + s + 1$ quelconques des composantes de ces $k + s + 1$ points sont nuls

$$| p^{i_1 \dots i_k}(\lambda_v) | = 0 \quad (i_1, \dots, i_k, v = 0, \dots, k + s) .$$

Considérons en particulier les déterminants formés par les composantes $0, 1, \dots, k-2, t$ ($t = k-1, \dots, k+s$) et $k-1$ composantes quelconques i_1, \dots, i_k .

Comme $p^{0, \dots, k-2, t}(\lambda_v) = 0$, si $v = 0, \dots, k-2$, le déterminant considéré est égal au produit de deux sous-déterminants, dont l'un est :

$$|p^{0, \dots, k-2, t}(\lambda_v)| = 0 \quad (t, v = k-1, \dots, k+s) .$$

Si l'on simplifie chaque ligne de ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{k-2} & \lambda_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{k-1} & \dots & \lambda_{k-2}^{k-1} & \lambda_t^{k-1} \end{vmatrix}$$

et chaque colonne par $[(\lambda_v - \lambda_0) \dots (\lambda_v - \lambda_{k-2})]^{n-k+1}$, il se réduit à

$$|(\lambda_u - \lambda_v)^{n-k+1}| \quad (u, v = k-1, \dots, k+s) .$$

Or ce déterminant est symétrique gauche si $n - k + 1$ est impair, il est de rang impair si s est impair ; il est donc nul si s est impair et si $(n - k)$ est pair. Dans ce cas, tous les déterminants considérés sont nuls.

Rappelons une définition bien connue : $(t+1)$ E^s de E^n sont *associés* si tout E^{n-s-1} qui en coupe t quelconques coupe encore le $(t+1)^{\text{ième}}$. Nous pouvons dès lors énoncer le *théorème* suivant :

Considérons $k+s+1$ E^{n-k} osculateurs en $k+s+1$ points P_0, \dots, P_{k+s} d'une courbe normale de E^n . Les traces E^s de ces E^{n-k} dans le E^{k+s} déterminé par les points P forment un groupe de $(k+s+1)$ E^s associés dans le E^{k+s} si $(n-k)$ est pair et si s est impair.

Afin de généraliser une fois encore ce résultat, considérons les traces de ces E^s dans l'intersection des hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{t-1} . Les E^{n-k} osculateurs en P_0, \dots, P_{t-1} étant contenus dans un de ces hyperplans, leur trace sera un E^{s-t+1} ; les traces des E^{n-k} osculateurs en P_t, \dots, P_{k+s} seront des E^{s-t} . Dans le E^{k+s-t} d'intersection considéré, on a donc t E^{s-t+1} et $k+s-t+1$ E^{s-t} . Tout E^{k-1} qui coupe $k+s$ quelconques de ces espaces coupe aussi le dernier. Or il coupe automatiquement les t E^{s-t+1} ; donc, s'il coupe $k+s-t$ E^{s-t} , il coupe le dernier ; ces $k+s-t+1$ E^{s-t} sont associés dans le E^{k+s-t} . Nous arrivons ainsi au *théorème général* :

Proposition 1. *Considérons $k + s + 1$ E^{n-k} osculateurs aux points P_0, \dots, P_{k+s} d'une courbe normale de E^n . Soit E l'espace à $k + s - t$ dimensions, intersection de l'espace (P_0, \dots, P_{k+s}) et des hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{t-1} . Cet espace E coupe les E^{n-k} osculateurs en P_t, \dots, P_{k+s} suivant $k + s - t + 1$ E^{s-t} qui sont associés si $n - k$ est pair, s impair, $t = 0, \dots, s$.*

Enonçons encore la propriété duale obtenue en coupant la configuration réciproque par l'espace (P_t, \dots, P_{k+s}) .

Proposition 2. *Soient $k + s + 1$ E^{k-1} osculateurs aux points P_0, \dots, P_{k+s} d'une courbe normale de E^n . Soit E l'espace à $n - k - s + t - 1$ dimensions déterminé par les points P_0, \dots, P_{t-1} et par l'intersection des hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{k+s} . Si l'on projette les E^{k-1} osculateurs en P_t, \dots, P_{k+s} à partir de E sur l'espace E^{k+s-t} déterminé par les points P_t, \dots, P_{k+s} , on obtient $k + s - t + 1$ E^{k-1} associés dans cet espace si $n - k$ est pair, s impair, $t = 0, \dots, s$.*

Pour faire ressortir la généralité de ces propositions, considérons quelques cas particuliers.

a) Proposition 1, $t = 0$, $k = 1$, n impair. On a la propriété bien connue :

Les E^{n-1} osculateurs en $s + 2$ points d'une courbe normale de E^n coupent le E^{s+1} des points de contact suivant $s + 2$ E^s concourants si s est impair.

b) $k = n - 2p$; $s = 2p - 1$; $t = 0$.

n E^{2p} osculateurs d'une courbe normale de E^n coupe le E^{n-1} des points de contact suivant n E^{2p-1} associés.

c) $t = s$; $k = n - 2p$.

Considérons $n - 2p + s + 1$ E^{2p} osculateurs en P_0, \dots, P_{n+s-2p} . Soit $E = E^{n-2p}$ l'intersection de l'espace (P_0, \dots, P_{n+s-2p}) avec les hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{s-1} . L'espace E coupe les E^{2p} osculateurs en P_s, \dots, P_{n+s-2p} selon $n - 2p + 1$ points qui sont dans un E^{n-2p-1} si s est impair.

d) $t = 0$, $s = 1$, $k = n - 2p$.

$n - 2p + 2$ E^{2p} osculateurs coupent le E^{n-2p+1} déterminé par leurs points de contact suivant $n - 2p + 2$ droites associées dans cet espace.

Cette propriété était le but primitif de cet article et avait été pressentie par M. A. Longhi.

e) Proposition 2, $s = 1$, $t = 0$, $k = n - 2p - 2$.

Soient $n - 2p$ E^{n-2p-3} osculateurs en P_0, \dots, P_{n-2p-1} . Soit E l'espace à $2p$ dimensions, intersection des hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{n-2p-1} . Les projections des E^{n-2p-3} osculateurs en P_0, \dots, P_{n-2p-1} à partir de E sur le E^{n-2p-1} déterminé par les points P sont $n - 2p$ E^{n-2p-3} associés.

f) $t = 0$, $k = 2$.

Si l'on projette $s + 3$ tangentes sur le E^{s+2} des points de contact à partir de l'intersection des hyperplans osculateurs en ces points, on obtient $s + 3$ droites associées si n est pair et si s est impair.

g) $t = 0$, $k = 2$, $s = 1$.

Si l'on projette 4 tangentes quelconques d'une courbe normale de E^n sur le E^3 des points de contact, à partir du E^{n-4} d'intersection des hyperplans osculateurs en ces points, on obtient 4 droites associées si n est pair.

h) Dans la proposition 2, supposons $t = 0$ (ce qui n'enlève rien à la généralité de ce qui suit) et, au lieu de projeter sur l'espace P_0, \dots, P_{k+s} comme nous l'avons fait par raison de symétrie, projetons maintenant sur un espace à $k + s$ dimensions quelconque à partir de l'espace à $(n - k - s - 1)$ dimensions E , intersection des hyperplans osculateurs en P_0, \dots, P_{k+s} . La courbe normale est projetée suivant une nouvelle courbe rationnelle Γ , d'ordre n . Cette courbe a aux points Q_i , projections des points P_i , des points d'hyperosculation, c'est-à-dire des points tels que l'hyperplan (dans E^{k+s}) osculateur à la courbe en un de ces points la coupe en n points confondus. La courbe Γ est dans E^{k+s} la courbe rationnelle d'ordre n la plus générale qui ait $k + s + 1$ points d'hyperosculation. Les E^{k-1} osculateurs aux points P_i sont projetés suivant les E^{k-1} osculateurs à Γ en Q_i . Dès lors, si nous posons pour simplifier $k + s = r$, $s = 2p - 1$, nous pouvons exprimer la proposition 2 sous la forme suivante :

Proposition 3. *Soit dans E^r une courbe rationnelle d'ordre n dotée de $r + 1$ points d'hyperosculation Q_i . Si $n - r$ est impair, les E^{r-2p} osculateurs à la courbe aux points Q_i sont associés ($p = 1, \dots, [r/2]$).*

Le cas particulier $p = 1$ a été démontré par L. Berzolari (cf. Rendiconti del Circolo matem. di Palermo 22 (1906), pp. 214—219).

Nous pouvons maintenant passer à la géométrie de la courbe, considérée comme variété algébrique rationnelle à une dimension, indépendamment de l'espace dans lequel elle est immergée.

Les hyperplans de E^r coupent sur Γ une série linéaire g_n^r , d'ordre n et de dimension r . Cette série a $r + 1$ points n -uples aux points Q_i . Les E^{r-1} passant par un E^{2p-1} fixe coupent sur Γ une série linéaire g_n^{r-2p} , contenue dans la g_n^r . Si le E^{2p-1} est incident à un E^{r-2p} osculateur en Q_i , la g_n^{r-2p} a en Q_i un point $(r - 2p + 1)$ -uple. Si le E^{2p-1} est incident à r E^{r-2p} osculateurs en r points Q_i , il est incident au dernier. En combinant ces deux propriétés, nous arrivons à la nouvelle propriété :

Proposition 4. *Soit une variété rationnelle ∞^1 possédant une série linéaire g_n^r dotée de $r + 1$ éléments n -uples Q_0, \dots, Q_r . Si $n - r$ est impair, toute série linéaire g_n^{r-2p} , contenue dans la g_n^r et ayant un élément $(r - 2p + 1)$ -uple en r des éléments Q_i , a également un élément $(r - 2p + 1)$ -uple au $(r + 1)^{\text{ième}}$ élément Q_i ($p = 1, \dots, [r/2]$).*

Exemple : Toutes les coniques déterminent sur une cubique rationnelle plane une série linéaire g_6^5 ayant 6 points sextuples S_1, \dots, S_6 (points d'hyperosculation des coniques). Si donc un faisceau de coniques contient cinq coniques tangentes chacune à la cubique en un des points S_i , il contient une sixième conique tangente à la cubique au sixième point S_i . Et aussi : Si un système linéaire ∞^3 de coniques contient 5 coniques surosculatrice (4 points de contact) à la cubique aux points sextuples S_1, \dots, S_5 , il en contient une sixième surosculatrice à la cubique en S_6 .

Notons enfin un cas particulier : $r = 2p + 1$, n pair.

Soit une variété rationnelle ∞^1 possédant une g_n^{2p+1} dotée de $2p + 2$ éléments n -uples, Q_0, \dots, Q_{2p+1} . Si le groupe jacobien (groupe des éléments doubles) d'une g_n^1 contenue dans la g_n^{2p+1} contient $(2p + 1)$ éléments Q , il contient nécessairement le $(2p + 2)^{\text{ième}}$.

(Reçu le 25 avril 1951.)