

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Une propriété des espaces osculateurs des courbes normales.  
**Autor:** Sydler, J.-P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21263>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Une propriété des espaces osculateurs des courbes normales

De J.-P. SYDLER, Zurich

*A. M. P. Scherrer, bibliothécaire en chef de l'E. P. F.*

Une courbe normale de l'espace à  $n$  dimensions, à savoir une courbe algébrique d'ordre  $n$  n'appartenant pas à un espace de dimension inférieure, est donnée sous forme paramétrique par les équations :

$$y_i(\lambda) = \lambda^i \quad (i = 0, \dots, n) . \quad (1)$$

Pour simplifier les développements ultérieurs, opérons la transformation de coordonnées :

$$y_i = \sum_s \lambda_s^i x_s \quad (i, s = 0, \dots, n) , \quad (2)$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$  étant  $n + 1$  valeurs différentes quelconques. La courbe répond alors aux nouvelles équations :

$$x_i(\lambda) = \frac{\prod_{s \neq i} (\lambda - \lambda_s)}{\prod_{s \neq i} (\lambda_i - \lambda_s)} \quad (i, s = 0, \dots, n) . \quad (3)$$

L'hyperplan osculateur au point de paramètre  $\lambda^*$  de la courbe (1) se trouve facilement. En effet, pour que  $\sum a_i y_i = 0$  soit osculateur en  $\lambda^*$ , il doit couper la courbe en  $n$  points confondus, c'est-à-dire que, puisque  $y_i = \lambda^i$ ,  $\sum a_i \lambda^i$  doit être identique à  $(\lambda - \lambda^*)^n$ , donc

$$a_i = (-1)^i \binom{n}{i} (\lambda^*)^{n-i} .$$

On trouve dès lors l'hyperplan osculateur  $\sum b_i x_i = 0$  au point  $\lambda^*$  de la courbe (3) :

$$\sum_s b_s x_s = \sum_i a_i y_i = \sum_{i,s} a_i \lambda_s^i x_s = \sum_{i,s} (-1)^i \binom{n}{i} (\lambda^*)^{n-i} \lambda_s^i x_s ;$$

$$b_s = \sum_i (-1)^i \binom{n}{i} \lambda_s^i (\lambda^*)^{n-i} \quad b_s = (\lambda^* - \lambda_s)^n .$$

L'équation de l'hyperplan osculateur au point  $\lambda$  de la courbe (3) est donc

$$\sum_{j=0}^n (\lambda - \lambda_j)^n x_j = 0 . \quad (4)$$

Nous dirons, comme il est d'usage, qu'un espace linéaire à  $k$  dimensions est osculateur à la courbe s'il la coupe en  $k + 1$  points confondus. Il est clair que le  $E^{n-k}$  osculateur au point de paramètre  $\lambda$  sera déterminé par  $\Sigma(\lambda - \lambda_j)^n x_j = 0$  et les  $k - 1$  premières dérivées par rapport à  $\lambda$ , donc par  $\Sigma(\lambda - \lambda_j)^{n-t} x_j = 0$ ,  $t = 0, \dots, k - 1$ .

Les coordonnées pluckériennes tangentielles de ce  $E^{n-k}$  sont dès lors :

$$\begin{aligned} p^{i_1, \dots, i_k}(\lambda) &= \begin{vmatrix} (\lambda - \lambda_{i_1})^n & \dots & (\lambda - \lambda_{i_k})^n \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda - \lambda_{i_1})^{n-k+1} & \dots & (\lambda - \lambda_{i_k})^{n-k+1} \end{vmatrix} = \\ &= [(\lambda - \lambda_{i_1}) \dots (\lambda - \lambda_{i_k})]^{n-k+1} \begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_k} \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad (i_1, \dots, i_k = 0, \dots, n) . \end{aligned}$$

Notons simplement que les  $E^{n-k}$  osculateurs de la courbe normale sont donc représentés sur la grassmannienne des  $E^{n-k}$  dans l'espace à  $\binom{n+1}{k} - 1$  dimensions par une courbe d'ordre  $k(n - k + 1)$  : son ordre est égal à la dimension de la grassmannienne.

Considérons enfin les traces  $E^s$  des  $E^{n-k}$  osculateurs dans l'espace à  $k + s$  dimensions déterminé par les points de paramètres  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k+s}$ , à savoir  $x_{k+s+1} = \dots = x_n = 0$ . Il est clair que les coordonnées pluckériennes tangentielles de ces  $E^s$  seront :

$$\begin{aligned} p^{i_1 \dots i_k}(\lambda) &= [(\lambda - \lambda_{i_1}) \dots (\lambda - \lambda_{i_k})]^{n-k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_{i_1} & \dots & \lambda_{i_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & \lambda_{i_k}^{k-1} \end{vmatrix} \\ &\quad (i_1, \dots, i_k = 0, \dots, k + s) . \end{aligned}$$

On pourra donc les représenter univoquement par les points  $P(\lambda)$  d'une courbe de l'espace à  $\binom{k+s+1}{k} - 1$  dimensions.

Nous prétendons que les points  $P(\lambda_0), \dots, P(\lambda_{k+s})$  sont dépendants, c'est-à-dire situés dans un  $E^{k+s-1}$ . Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver que les déterminants formés par  $k + s + 1$  quelconques des composantes de ces  $k + s + 1$  points sont nuls

$$|p^{i_1 \dots i_k}(\lambda_v)| = 0 \quad (i_1, \dots, i_k, v = 0, \dots, k + s) .$$

Considérons en particulier les déterminants formés par les composantes  $0, 1, \dots, k-2, t$  ( $t = k-1, \dots, k+s$ ) et  $k-1$  composantes quelconques  $i_1, \dots, i_k$ .

Comme  $p^{0, \dots, k-2, t}(\lambda_v) = 0$ , si  $v = 0, \dots, k-2$ , le déterminant considéré est égal au produit de deux sous-déterminants, dont l'un est :

$$|p^{0, \dots, k-2, t}(\lambda_v)| = 0 \quad (t, v = k-1, \dots, k+s) .$$

Si l'on simplifie chaque ligne de ce déterminant par

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{k-2} & \lambda_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_0^{k-1} & \dots & \lambda_{k-2}^{k-1} & \lambda_t^{k-1} \end{vmatrix}$$

et chaque colonne par  $[(\lambda_v - \lambda_0) \dots (\lambda_v - \lambda_{k-2})]^{n-k+1}$ , il se réduit à

$$|(\lambda_u - \lambda_v)^{n-k+1}| \quad (u, v = k-1, \dots, k+s) .$$

Or ce déterminant est symétrique gauche si  $n - k + 1$  est impair, il est de rang impair si  $s$  est impair ; il est donc nul si  $s$  est impair et si  $(n - k)$  est pair. Dans ce cas, tous les déterminants considérés sont nuls.

Rappelons une définition bien connue :  $(t+1) E^s$  de  $E^n$  sont *associés* si tout  $E^{n-s-1}$  qui en coupe  $t$  quelconques coupe encore le  $(t+1)^{\text{ième}}$ . Nous pouvons dès lors énoncer le *théorème* suivant :

Considérons  $k+s+1$   $E^{n-k}$  osculateurs en  $k+s+1$  points  $P_0, \dots, P_{k+s}$  d'une courbe normale de  $E^n$ . Les traces  $E^s$  de ces  $E^{n-k}$  dans le  $E^{k+s}$  déterminé par les points  $P$  forment un groupe de  $(k+s+1) E^s$  associés dans le  $E^{k+s}$  si  $(n-k)$  est pair et si  $s$  est impair.

Afin de généraliser une fois encore ce résultat, considérons les traces de ces  $E^s$  dans l'intersection des hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{t-1}$ . Les  $E^{n-k}$  osculateurs en  $P_0, \dots, P_{t-1}$  étant contenus dans un de ces hyperplans, leur trace sera un  $E^{s-t+1}$  ; les traces des  $E^{n-k}$  osculateurs en  $P_t, \dots, P_{k+s}$  seront des  $E^{s-t}$ . Dans le  $E^{k+s-t}$  d'intersection considéré, on a donc  $t E^{s-t+1}$  et  $k+s-t+1 E^{s-t}$ . Tout  $E^{k-1}$  qui coupe  $k+s$  quelconques de ces espaces coupe aussi le dernier. Or il coupe automatiquement les  $t E^{s-t+1}$  ; donc, s'il coupe  $k+s-t E^{s-t}$ , il coupe le dernier ; ces  $k+s-t+1 E^{s-t}$  sont associés dans le  $E^{k+s-t}$ . Nous arrivons ainsi au théorème général :

**Proposition 1.** *Considérons  $k + s + 1$   $E^{n-k}$  osculateurs aux points  $P_0, \dots, P_{k+s}$  d'une courbe normale de  $E^n$ . Soit  $E$  l'espace à  $k + s - t$  dimensions, intersection de l'espace  $(P_0, \dots, P_{k+s})$  et des hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{t-1}$ . Cet espace  $E$  coupe les  $E^{n-k}$  osculateurs en  $P_t, \dots, P_{k+s}$  suivant  $k + s - t + 1$   $E^{s-t}$  qui sont associés si  $n - k$  est pair,  $s$  impair,  $t = 0, \dots, s$ .*

Enonçons encore la propriété duale obtenue en coupant la configuration réciproque par l'espace  $(P_t, \dots, P_{k+s})$ .

**Proposition 2.** *Soient  $k + s + 1$   $E^{k-1}$  osculateurs aux points  $P_0, \dots, P_{k+s}$  d'une courbe normale de  $E^n$ . Soit  $E$  l'espace à  $n - k - s + t - 1$  dimensions déterminé par les points  $P_0, \dots, P_{t-1}$  et par l'intersection des hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{k+s}$ . Si l'on projette les  $E^{k-1}$  osculateurs en  $P_t, \dots, P_{k+s}$  à partir de  $E$  sur l'espace  $E^{k+s-t}$  déterminé par les points  $P_t, \dots, P_{k+s}$ , on obtient  $k + s - t + 1$   $E^{k-1}$  associés dans cet espace si  $n - k$  est pair,  $s$  impair,  $t = 0, \dots, s$ .*

Pour faire ressortir la généralité de ces propositions, considérons quelques cas particuliers.

a) Proposition 1,  $t = 0$ ,  $k = 1$ ,  $n$  impair. On a la propriété bien connue :

Les  $E^{n-1}$  osculateurs en  $s + 2$  points d'une courbe normale de  $E^n$  coupent le  $E^{s+1}$  des points de contact suivant  $s + 2$   $E^s$  concourants si  $s$  est impair.

b)  $k = n - 2p$ ;  $s = 2p - 1$ ;  $t = 0$ .

$n$   $E^{2p}$  osculateurs d'une courbe normale de  $E^n$  coupe le  $E^{n-1}$  des points de contact suivant  $n$   $E^{2p-1}$  associés.

c)  $t = s$ ;  $k = n - 2p$ .

Considérons  $n - 2p + s + 1$   $E^{2p}$  osculateurs en  $P_0, \dots, P_{n+s-2p}$ . Soit  $E = E^{n-2p}$  l'intersection de l'espace  $(P_0, \dots, P_{n+s-2p})$  avec les hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{s-1}$ . L'espace  $E$  coupe les  $E^{2p}$  osculateurs en  $P_s, \dots, P_{n+s-2p}$  selon  $n - 2p + 1$  points qui sont dans un  $E^{n-2p-1}$  si  $s$  est impair.

d)  $t = 0$ ,  $s = 1$ ,  $k = n - 2p$ .

$n - 2p + 2$   $E^{2p}$  osculateurs coupent le  $E^{n-2p+1}$  déterminé par leurs points de contact suivant  $n - 2p + 2$  droites associées dans cet espace.

Cette propriété était le but primitif de cet article et avait été pressentie par M. A. Longhi.

e) Proposition 2,  $s = 1$ ,  $t = 0$ ,  $k = n - 2p - 2$ .

Soient  $n - 2p$   $E^{n-2p-3}$  osculateurs en  $P_0, \dots, P_{n-2p-1}$ . Soit  $E$  l'espace à  $2p$  dimensions, intersection des hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{n-2p-1}$ . Les projections des  $E^{n-2p-3}$  osculateurs en  $P_0, \dots, P_{n-2p-1}$  à partir de  $E$  sur le  $E^{n-2p-1}$  déterminé par les points  $P$  sont  $n - 2p$   $E^{n-2p-3}$  associés.

f)  $t = 0$ ,  $k = 2$ .

Si l'on projette  $s + 3$  tangentes sur le  $E^{s+2}$  des points de contact à partir de l'intersection des hyperplans osculateurs en ces points, on obtient  $s + 3$  droites associées si  $n$  est pair et si  $s$  est impair.

g)  $t = 0$ ,  $k = 2$ ,  $s = 1$ .

Si l'on projette 4 tangentes quelconques d'une courbe normale de  $E^n$  sur le  $E^3$  des points de contact, à partir du  $E^{n-4}$  d'intersection des hyperplans osculateurs en ces points, on obtient 4 droites associées si  $n$  est pair.

h) Dans la proposition 2, supposons  $t = 0$  (ce qui n'enlève rien à la généralité de ce qui suit) et, au lieu de projeter sur l'espace  $P_0, \dots, P_{k+s}$  comme nous l'avons fait par raison de symétrie, projetons maintenant sur un espace à  $k + s$  dimensions quelconque à partir de l'espace à  $(n - k - s - 1)$  dimensions  $E$ , intersection des hyperplans osculateurs en  $P_0, \dots, P_{k+s}$ . La courbe normale est projetée suivant une nouvelle courbe rationnelle  $\Gamma$ , d'ordre  $n$ . Cette courbe a aux points  $Q_i$ , projections des points  $P_i$ , des points d'hyperosculation, c'est-à-dire des points tels que l'hyperplan (dans  $E^{k+s}$ ) osculateur à la courbe en un de ces points la coupe en  $n$  points confondus. La courbe  $\Gamma$  est dans  $E^{k+s}$  la courbe rationnelle d'ordre  $n$  la plus générale qui ait  $k + s + 1$  points d'hyperosculation. Les  $E^{k-1}$  osculateurs aux points  $P_i$  sont projetés suivant les  $E^{k-1}$  osculateurs à  $\Gamma$  en  $Q_i$ . Dès lors, si nous posons pour simplifier  $k + s = r$ ,  $s = 2p - 1$ , nous pouvons exprimer la proposition 2 sous la forme suivante :

**Proposition 3.** *Soit dans  $E^r$  une courbe rationnelle d'ordre  $n$  dotée de  $r + 1$  points d'hyperosculation  $Q_i$ . Si  $n - r$  est impair, les  $E^{r-2p}$  osculateurs à la courbe aux points  $Q_i$  sont associés ( $p = 1, \dots, [r/2]$ ).*

Le cas particulier  $p = 1$  a été démontré par L. Berzolari (cf. Rendiconti del Circolo matem. di Palermo 22 (1906), pp. 214—219).

Nous pouvons maintenant passer à la géométrie de la courbe, considérée comme variété algébrique rationnelle à une dimension, indépendamment de l'espace dans lequel elle est immergée.

Les hyperplans de  $E^r$  coupent sur  $\Gamma$  une série linéaire  $g_n^r$ , d'ordre  $n$  et de dimension  $r$ . Cette série a  $r + 1$  points  $n$ -uples aux points  $Q_i$ . Les  $E^{r-1}$  passant par un  $E^{2p-1}$  fixe coupent sur  $\Gamma$  une série linéaire  $g_n^{r-2p}$ , contenue dans la  $g_n^r$ . Si le  $E^{2p-1}$  est incident à un  $E^{r-2p}$  osculateur en  $Q_i$ , la  $g_n^{r-2p}$  a en  $Q_i$  un point  $(r - 2p + 1)$ -uple. Si le  $E^{2p-1}$  est incident à  $r$   $E^{r-2p}$  osculateurs en  $r$  points  $Q_i$ , il est incident au dernier. En combinant ces deux propriétés, nous arrivons à la nouvelle propriété :

**Proposition 4.** *Soit une variété rationnelle  $\infty^1$  possédant une série linéaire  $g_n^r$  dotée de  $r + 1$  éléments  $n$ -uples  $Q_0, \dots, Q_r$ . Si  $n - r$  est impair, toute série linéaire  $g_n^{r-2p}$ , contenue dans la  $g_n^r$  et ayant un élément  $(r - 2p + 1)$ -uple en  $r$  des éléments  $Q_i$ , a également un élément  $(r - 2p + 1)$ -uple au  $(r + 1)^{\text{ième}}$  élément  $Q_i$ . ( $p = 1, \dots, [r/2]$ ).*

Exemple : Toutes les coniques déterminent sur une cubique rationnelle plane une série linéaire  $g_6^5$  ayant 6 points sextuples  $S_1, \dots, S_6$  (points d'hyperosculation des coniques). Si donc un faisceau de coniques contient cinq coniques tangentes chacune à la cubique en un des points  $S_i$ , il contient une sixième conique tangente à la cubique au sixième point  $S_i$ . Et aussi : Si un système linéaire  $\infty^3$  de coniques contient 5 coniques surosculatrice (4 points de contact) à la cubique aux points sextuples  $S_1, \dots, S_5$ , il en contient une sixième surosculatrice à la cubique en  $S_6$ .

Notons enfin un cas particulier :  $r = 2p + 1$ ,  $n$  pair.

Soit une variété rationnelle  $\infty^1$  possédant une  $g_n^{2p+1}$  dotée de  $2p + 2$  éléments  $n$ -uples,  $Q_0, \dots, Q_{2p+1}$ . Si le groupe jacobien (groupe des éléments doubles) d'une  $g_n^1$  contenue dans la  $g_n^{2p+1}$  contient  $(2p + 1)$  éléments  $Q$ , il contient nécessairement le  $(2p + 2)^{\text{ième}}$ .

(Reçu le 25 avril 1951.)