

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Algèbres quasi-unitaires.  
**Autor:** Dixmier, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21280>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Algèbres quasi-unitaires

Par J. DIXMIER, Dijon

## Introduction

Rappelons une définition des algèbres unitaires [10]<sup>1</sup>). Soit  $A$  une algèbre associative sur le corps des nombres complexes, munie d'un antiautomorphisme involutif  $x \rightarrow x^*$ , c'est-à-dire d'une application biunivoque de  $A$  sur  $A$  telle que  $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*$ ,  $(xy)^* = y^*x^*$ ,  $x^{**} = x$  (autrement dit,  $A$  est une  $*$ -algèbre). Soit  $\langle x, y \rangle$  un produit scalaire défini sur  $A$ , qui fait de  $A$  un espace préhilbertien (autrement dit, on a  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,  $\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$ ,  $\langle x, x \rangle \geq 0$ , et  $\langle x, x \rangle = 0$  entraîne  $x = 0$ ). On dit que  $A$  est une algèbre unitaire si les axiomes suivants sont vérifiés :

A 1. —  $\langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ .

A 2. —  $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^*z \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ ,  $z \in A$ .

A 3. — Pour tout  $x \in A$ , il existe une constante  $M_x$  telle que  $\langle xy, xy \rangle \leq M_x \langle y, y \rangle$  pour  $y \in A$ .

A 4. — L'ensemble des éléments de la forme  $xy$  ( $x \in A$ ,  $y \in A$ ), c'est-à-dire  $A^2$ , est partout dense dans  $A$ .

Un exemple important d'algèbre unitaire est le suivant. Soient  $G$  un groupe localement compact unimodulaire,  $d\alpha$  l'élément de mesure de Haar invariante à gauche,  $L$  l'ensemble des fonctions continues complexes à support compact sur  $G$ . Pour  $f \in L$ , posons  $f^*(\alpha) = \overline{f(\alpha^{-1})}$ . Muni de l'involution ainsi définie, du produit de composition, et du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int f(\alpha) \overline{g}(\alpha) d\alpha$ ,  $L$  est une algèbre unitaire, comme on le vérifie aisément.

Si  $G$  n'est pas unimodulaire, les axiomes A 1 et A 2 ne sont plus vérifiés. Ceci n'est pas dû à un choix dissymétrique dans les définitions. En effet, soient  $\chi, \chi_1$  des fonctions continues  $> 0$  sur  $G$ , telles que  $\chi(\alpha \beta) =$

<sup>1</sup>) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

$\chi(\alpha)\chi(\beta)$ ,  $\chi_1(\alpha\beta) = \chi_1(\alpha)\chi_1(\beta)$  pour  $\alpha \in G$ ,  $\beta \in G$ ; et essayons de poser, pour  $f \in L$ ,  $g \in L$ :

$$\langle f, g \rangle = \int f(\alpha) \bar{g}(\alpha) \chi(\alpha) d\alpha \quad f^*(\alpha) = \chi_1(\alpha^{-1}) \bar{f}(\alpha^{-1})$$

( $\chi(\alpha) d\alpha$  est la mesure positive relativement invariante la plus générale sur  $G$ ). Le produit dans  $L$  étant toujours défini par la composition des fonctions,  $L$  est encore une  $*$ -algèbre et un espace préhilbertien, et les axiomes A 3 et A 4 sont vérifiés. On a d'autre part facilement ( $\Delta$  désignant le module de  $G$ ):

$$\begin{aligned} \langle g^*, f^* \rangle &= \int \chi_1^2(\alpha) \chi^{-1}(\alpha) \Delta^{-1}(\alpha) f(\alpha) \bar{g}(\alpha) d\alpha \\ \langle f * g, h \rangle &= \int \int f(\beta) g(\beta^{-1}\alpha) \bar{h}(\alpha) \chi(\alpha) d\alpha d\beta \\ \langle g, f^* * h \rangle &= \int \int f(\beta) g(\beta^{-1}\alpha) \bar{h}(\alpha) \chi_1(\beta) \chi(\beta^{-1}\alpha) \Delta^{-1}(\beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

pour  $f \in L$ ,  $g \in L$ ,  $h \in L$ ; de sorte que A 1 et A 2 sont vérifiés si on a :

$$\chi_1^2 \chi^{-1} \Delta^{-1}(\alpha) = \chi(\alpha) \quad \chi(\alpha) = \chi_1(\beta) \chi(\beta^{-1}) \chi(\alpha) \Delta^{-1}(\beta)$$

d'où les conditions :

$$\chi_1^2 = \chi^2 \Delta \quad \chi_1 = \chi \Delta$$

qui ne sont compatibles que pour  $\Delta = 1$ , c'est-à-dire pour  $G$  unimodulaire.

L'étude de cet exemple conduit à généraliser les axiomes A 1 à A 4 et à introduire la notion d'algèbre quasi-unitaire, qui sera définie plus loin.

Les premiers exemples de facteurs donnés par F. J. Murray et J. von Neumann dans [14] relèvent de la théorie des algèbres unitaires, tandis que les exemples ultérieurs de J. von Neumann [15] relèvent de la théorie des algèbres quasi-unitaires, comme on le montrera dans ce mémoire.

Des deux théorèmes essentiels de [10] sur les algèbres unitaires, le premier (le théorème de commutation, qu'on trouve aussi dans [19]) se généralise aux algèbres quasi-unitaires. Par contre, le deuxième (construction de la trace canonique sur les anneaux d'opérateurs associés) ne s'étend pas. On sait en effet que, parmi les facteurs construits par J. von Neumann dans [15], certains sont de type III (les résultats du présent travail fourniront une nouvelle démonstration des théorèmes de [15] à ce sujet, et cette démonstration s'applique dans des cas où celle de [15] n'est plus utilisable). Les algèbres quasi-unitaires généralisent donc essentiellement les algèbres unitaires.

Les résultats de ce travail ont été annoncés partiellement dans [2].

## I. Définitions et propriétés élémentaires

Soit  $A$  une algèbre associative sur le corps complexe, munie d'un produit scalaire  $\langle x, y \rangle$  qui en fait un espace préhilbertien. On suppose donnés :

1. — Un automorphisme  $x \rightarrow x^j$  de  $A$ , c'est-à-dire une application biunivoque de  $A$  sur  $A$  telle que  $(\lambda x + \mu y)^j = \lambda x^j + \mu y^j$ ,  $(xy)^j = x^j y^j$ .

2. — Un antiautomorphisme involutif  $x \rightarrow x^s$  de  $A$ , c'est-à-dire une application biunivoque de  $A$  sur  $A$  telle que  $(\lambda x + \mu y)^s = \bar{\lambda} x^s + \bar{\mu} y^s$ ,  $(xy)^s = y^s x^s$ ,  $x^{ss} = x$ .

*Définition 1.* — On dira que  $A$  est une algèbre quasi-unitaire si les axiomes suivants sont vérifiés :

A 1. —  $\langle x, x^j \rangle \geq 0$  pour  $x \in A$ .

A 2. —  $\langle x, x \rangle = \langle x^s, x^s \rangle$  pour  $x \in A$ .

A 3. —  $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^{sj} z \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ ,  $z \in A$ .

A 4. — Pour tout  $x \in A$ , l'application  $y \rightarrow xy$  est continue.

A 5. — Les éléments  $xy + (xy)^j$ , où  $x \in A$ ,  $y \in A$ , sont partout denses dans  $A$ .

L'axiome A 5 peut être remplacé par beaucoup d'axiomes voisins (peut-être non équivalents) dans presque toutes les démonstrations.

Lorsque  $j$  est l'automorphisme identique, l'axiome A 1 est vérifié de lui-même, de sorte que la définition se réduit à celle des algèbres unitaires.

Les axiomes A 1 et A 2 entraînent aussitôt les égalités  $\langle x, y^j \rangle = \langle x^j, y \rangle$  et  $\langle x, y \rangle = \langle y^s, x^s \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ . Les axiomes A 2 et A 4 entraînent que l'application  $y \rightarrow yx$  est continue. Les axiomes A 2 et A 3 entraînent

$$\langle xy, z \rangle = \langle z^s, y^s x^s \rangle = \langle y^j z^s, x^s \rangle = \langle x, z y^{js} \rangle . \quad (1)$$

ce qui rétablit la symétrie entre la multiplication à gauche et la multiplication à droite. En outre, on a  $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^{sj} z \rangle = \langle x^{sj} y, z \rangle$ , donc  $\langle x, z y^{js} \rangle = \langle x^{sj} y, z y^{js} \rangle$ ; comme  $y^{js}$  est un élément quelconque de  $A$ , et comme les  $z y$  forment un ensemble total en vertu de A 5, on en déduit  $x = x^{sj}$ , d'où :

$$x^{j-1s} = x^{sj} , \quad (2)$$

$$x^{js} = x^{sj-1} . \quad (3)$$

La relation (1) et l'axiome A 3 peuvent donc s'écrire aussi :

$$\langle xy, z \rangle = \langle x, zy^{s^{j-1}} \rangle \quad (4)$$

$$\langle xy, z \rangle = \langle y, x^{j-1} \cdot z \rangle . \quad (5)$$

Soit maintenant  $H$  l'espace hilbertien complété de  $A$ . D'après A2, l'application  $x \rightarrow x^s$  se prolonge d'une manière unique en une application  $a \rightarrow Sa$  de  $H$  sur  $H$  telle que

$$S(\lambda a + \mu b) = \bar{\lambda} Sa + \bar{\mu} Sb \quad S^2 = 1 \quad \langle Sa, Sb \rangle = \langle b, a \rangle .$$

D'après A4, les opérateurs  $y \rightarrow xy$  et  $y \rightarrow yx$  se prolongent en opérateurs bornés  $U_x$ ,  $V_x$  définis sur  $H$ . On a immédiatement

$$\begin{aligned} U_{\lambda x + \mu y} &= \lambda U_x + \mu U_y & U_{xy} &= U_x U_y & U_x^* &= U_{x^{s^j}} \\ V_{\lambda x + \mu y} &= \lambda V_x + \mu V_y & V_{xy} &= V_y V_x & V_x^* &= V_{x^{js}} \\ U_x V_y &= V_y U_x \\ SU_x S &= V_{x^s} & SV_x S &= U_{x^s} \end{aligned}$$

Les applications  $x \rightarrow U_x$ ,  $x \rightarrow V_x$  sont biunivoques. Car si par exemple  $U_x = 0$ , on a  $\langle x, yz \rangle = \langle U_x z^{s^j}, y \rangle = 0$  pour tout  $y \in A$  et tout  $z \in A$ , donc  $x = 0$ .

Les  $U_x$  (respectivement  $V_x$ ) engendrent une \*-algèbre faiblement fermée d'opérateurs  $R^s$  (respectivement  $R^d$ ) ; tout opérateur de  $R^s$  permute à tout opérateur de  $R^d$  ; l'application  $T \rightarrow STS$  applique  $R^s$  sur  $R^d$ . Soit  $\mathcal{N}$  le sous-espace associé au plus grand projecteur de  $R^s$ . Comme tout élément  $U_x y = xy$  est dans  $\mathcal{N}$ , on en déduit  $\mathcal{N} = H$ . Donc  $1 \in R^s$ . De même,  $1 \in R^d$ .

L'opérateur  $x \rightarrow x^j$ , étant hermitien, admet un plus petit prolongement fermé que nous désignerons par  $J$ . L'opérateur  $J$  est hermitien  $\geq 0$ . L'opérateur  $1 + J$ , qui est défini aussi dans l'ensemble de définition  $D_J$  de  $J$ , est hermitien  $\geq 0$  fermé d'inverse borné ; son ensemble des valeurs est partout dense dans  $H$  (d'après A5) donc égal à  $H$ . Donc  $1 + J$  est auto-adjoint et par suite  $J$  est auto-adjoint. On a vu que  $x^{j-1} = SJSx$  pour  $x \in A$  ; donc l'application  $x \rightarrow x^{j-1}$  de  $A$  sur  $A$  admet un plus petit prolongement fermé, qui est évidemment l'inverse de  $J$ . Donc  $J$  est inversible, et on a

$$J^{-1} = SJS \quad J = SJ^{-1}S . \quad (6)$$

En particulier,  $S(D_J) = D_{J^{-1}}$ . Enfin, le même raisonnement que plus haut, montre que le plus petit prolongement fermé de la restriction de  $J$  à  $A^2$  (c'est-à-dire à l'ensemble des  $xy$ ,  $x \in A$ ,  $y \in A$ ) est auto-adjoint, donc est encore  $J$ .

## II. Le théorème de commutation

*Définition 2. — Un élément  $a \in H$  sera dit borné à gauche (respectivement à droite) s'il existe un opérateur continu  $U_a$  (respectivement  $V_a$ ) de  $H$  tel que  $U_a x = V_x a$  (respectivement  $V_a x = U_x a$ ) pour  $x \in A$ .*

Les éléments de  $A$  sont évidemment bornés à gauche et à droite, et les notations  $U_a$ ,  $V_a$  sont cohérentes avec les notations  $U_x$ ,  $V_x$  antérieures quand  $a \in A$ .

**Lemme 1.** — *Si  $a$  est borné à gauche et  $T \in (\mathbf{R}^d)'$ ,  $Ta$  est borné à gauche et  $TU_a = U_{Ta}$ ; les  $U_a$  forment un idéal à gauche  $\mathfrak{m}$  de  $(\mathbf{R}^d)'$ . Si  $a$  est borné à droite et  $T \in (\mathbf{R}^g)'$ ,  $Ta$  est borné à droite, et  $TV_a = V_{Ta}$ ; les  $V_a$  forment un idéal à gauche  $\mathfrak{n}$  de  $(\mathbf{R}^g)'$ .*

Soient  $x \in A$ ,  $y \in A$  et  $a$  borné à gauche. On a :

$$U_a V_x y = U_a (y x) = V_{yx} a = V_x V_y a = V_x U_a y$$

donc  $U_a$  permute aux  $V_x$ ,  $U_a \in (\mathbf{R}^d)'$ . Si  $T \in (\mathbf{R}^d)'$ , on a :

$$TU_a x = TV_x a = V_x Ta ,$$

donc  $Ta$  est borné à gauche et  $U_{Ta} = TU_a$ . Raisonnements analogues pour les  $V_a$ .

**Lemme 2.** — *Soient  $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^*$ ,  $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{n}^*$ . On a :  $(\mathfrak{m}_1)'' = (\mathbf{R}^d)'$ ,  $(\mathfrak{n}_1)'' = (\mathbf{R}^g)'$ .*

D'après le lemme 1,  $(\mathfrak{m}_1)'' \subset (\mathbf{R}^d)'$ ,  $(\mathfrak{n}_1)'' \subset (\mathbf{R}^g)'$ . On va prouver que  $(\mathbf{R}^d)' \subset (\mathfrak{m}_1)''$ . La démonstration de  $(\mathbf{R}^g)' \subset (\mathfrak{n}_1)''$  est analogue. Soient donc  $T \in (\mathbf{R}^d)', T_1 \in (\mathfrak{m}_1)'$ . Il faut prouver que  $TT_1 = T_1 T$ . Or, le lemme 1 entraîne aussitôt que, pour  $x \in A$ ,  $x' \in A$ , on a  $U_{x'}^* T U_x \in \mathfrak{m}_1$ . Donc :  $U_{x'}^* T U_x T_1 = T_1 U_{x'}^* T U_x$ , et il suffit de faire converger faiblement  $U_x$  vers 1, puis  $U_{x'}$  vers 1.

**Lemme 3.** — *Si  $a$  et  $b$  (respectivement  $c$  et  $d$ ) sont bornés à gauche (respectivement à droite), et si  $U_a^* = U_b$  (respectivement  $V_c^* = V_d$ ), on a :  $a \in D_{J-1}$  et  $b = SJ^{-1}a$  (respectivement  $c \in D_J$  et  $d = SJc$ ).*

Soient  $y \in A$ ,  $z \in A$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle a, yz \rangle &= \langle a, V_z y \rangle = \langle V_{z^{js}} a, y \rangle = \langle U_a z^{js}, y \rangle = \langle z^{js}, U_b y \rangle \\ &= \langle z^{js}, V_y b \rangle = \langle V_{S_y^j} S z^j, b \rangle = \langle S(yz)^j, b \rangle = \langle Sb, J(yz) \rangle . \end{aligned}$$

Comme  $J$  est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à  $A^2$ , on en déduit que  $Sb \in D_J$  et que  $JSb = a$ ; donc  $a \in D_{J-1}$  et  $b = SJ^{-1}a$ . De même, on a  $\langle Sd, yz \rangle = \langle c, J(yz) \rangle$ , donc  $c \in D_J$  et  $Jc = Sd$ .

**Lemme 4.** —  $\mathfrak{m}_1$  et  $\mathfrak{n}_1$  commutent.

Soient  $U_a \in \mathfrak{m}_1$ ,  $V_c \in \mathfrak{n}_1$ . On a:  $U_a^* = U_b$ ,  $V_c^* = V_d$ , avec un  $b$  borné à gauche, un  $d$  borné à droite. D'après le lemme 3, il existe une suite  $x_n \in A$  avec :

$$x_n \rightarrow a, \quad J^{-1}x_n \rightarrow J^{-1}a = Sb, \quad \text{donc} \quad SJ^{-1}x_n \rightarrow b.$$

De même, il existe une suite  $y_n \in A$  avec :

$$y_n \rightarrow c, \quad Jy_n \rightarrow Jc = Sd, \quad \text{donc} \quad SJy_n \rightarrow d.$$

Ceci posé, remarquons que, pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle U_a V_c x, y \rangle &= \langle V_c x, U_b y \rangle = \langle U_x c, V_y b \rangle \\ \langle V_c U_a x, y \rangle &= \langle U_a x, V_d y \rangle = \langle V_x a, U_y d \rangle. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \langle U_x y_n, V_y SJ^{-1}x_n \rangle &= \langle x y_n, SJ^{-1}x_n \cdot y \rangle \\ &= \langle x_n x, y \cdot SJy_n \rangle = \langle V_x x_n, U_y SJy_n \rangle \end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ :

$$\langle U_x c, V_y b \rangle = \langle V_x a, U_y d \rangle$$

donc  $\langle U_a V_c x, y \rangle = \langle V_c U_a x, y \rangle$  et finalement  $U_a V_c = V_c U_a$ .

**Théorème 1.** —  $\mathbf{R}^g = (\mathbf{R}^d)'$ ,  $\mathbf{R}^d = (\mathbf{R}^g)'$ .

On a déjà vu que  $\mathbf{R}^g \subset (\mathbf{R}^d)'$ . D'autre part,

$$(\mathbf{R}^d)' = (\mathfrak{m}_1)'' \subset (\mathfrak{n}_1)''' = (\mathbf{R}^g)'' = \mathbf{R}^g$$

donc  $\mathbf{R}^g = (\mathbf{R}^d)'$ , et par suite  $(\mathbf{R}^g)' = \mathbf{R}^d$ .

Par suite,  $\mathbf{R}^g \cap \mathbf{R}^d = \mathbf{R}$  est le centre commun de  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$ , ensemble des opérateurs qui permutent à la fois à  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$ .

**Définition 3.** — Si  $\mathbf{R}$  se réduit aux opérateurs scalaires, c'est-à-dire si  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs,  $A$  sera dite irréductible.

Nous aurons besoin plus tard des lemmes suivants, qui constituent d'ailleurs des compléments naturels aux lemmes 1 et 3.

**Lemme 5.** — Si  $a$  est borné à droite,  $Sa$  est borné à gauche, et réciproquement. On a alors :  $U_{Sa} = SV_a S$ .

En effet, on a, pour  $x \in A$  et  $a \in H$ ,  $U_{Sx}a = SV_x Sa$ . Si  $a$  est borné à droite, on en déduit  $SV_a Sx = V_x Sa$ , donc  $Sa$  est borné à gauche, et  $U_{Sa} = SV_a S$ . Si  $Sa$  est borné à gauche, on en déduit  $U_{Sx}a = S U_{Sa} x$ , ou  $U_y a = S U_{Sa} S y$  pour  $y \in A$ , donc  $a$  est borné à droite et  $V_a = S U_{Sa} S$ .

**Lemme 6.** — Si  $a$  est borné à droite (respectivement à gauche) et si  $a \in D_J$  (respectivement  $a \in D_{J-1}$ ),  $SJa$  (respectivement  $SJ^{-1}a$ ) est borné à droite (respectivement à gauche), et  $V_a^* = V_{SJa}$  (respectivement  $U_a^* = U_{SJ^{-1}a}$ ).

(Ce lemme constitue une réciproque du lemme 3.)

Supposons  $a$  borné à droite et  $a \in D_J$ . On a, pour  $x \in A$ ,  $y \in A$  :

$$\begin{aligned} \langle U_x SJ a, y \rangle &= \langle SJ a, J x^s \cdot y \rangle = \langle y^s \cdot J^{-1} x, Ja \rangle = \langle J y^s \cdot x, a \rangle \\ &= \langle x, U_y a \rangle = \langle x, V_a y \rangle = \langle V_a^* x, y \rangle \end{aligned}$$

donc  $U_x SJ a = V_a^* x$  ; donc  $SJa$  est borné à droite, et  $V_{SJa} = V_a^*$ .

Si  $a$  est borné à gauche, et  $a \in D_{J-1}$ ,  $Sa$  est borné à droite (lemme 5) et  $Sa \in D_J$ . Donc  $SJ(Sa) = J^{-1}a$  est borné à droite, et  $V_{Sa}^* = V_{J^{-1}a}$ . Donc  $SJ^{-1}a$  est borné à gauche, et  $SU_a^* S = S U_{SJ^{-1}a} S$ , donc  $U_a^* = U_{SJ^{-1}a}$ .

Nous désignerons par  $\mathbf{P}^g$  (respectivement  $\mathbf{P}^d$ ) l'ensemble des opérateurs de  $\mathbf{R}^g$  (respectivement  $\mathbf{R}^d$ ) permutable à  $J$ .

**Lemme 7.** — a) Si  $a \in D_{J-1}$  est borné à gauche et si  $T \in \mathbf{P}^g$ ,  $ST^* Sa$  est borné à gauche et  $U_{ST^* Sa} = U_a T$ .

b) Si  $a \in D_J$  est borné à droite et si  $T \in \mathbf{P}^g$ ,  $Ta$  est borné à droite et  $V_{Ta} = V_a ST^* S$ .

**Lemme 8.** — a) Si  $a \in D_{J-1}$  est borné à gauche et si  $T \in \mathbf{P}^d$ ,  $Ta$  est borné à gauche et  $U_{Ta} = U_a ST^* S$ .

b) Si  $a \in D_J$  est borné à droite et si  $T \in \mathbf{P}^d$ ,  $ST^* Sa$  est borné à droite et  $V_{ST^* Sa} = V_a T$ .

Supposons  $a \in D_{J-1}$  borné à gauche et  $T \in \mathbf{P}^g$ . On a  $JSa \in D_{J-1}$  et  $JSa$  est borné à gauche ; donc  $T^* JSa \in D_{J-1}$  et  $T^* JSa$  est borné à gauche ; donc  $SJ^{-1} T^* JSa = ST^* Sa$  appartient à  $D_{J-1}$  et est borné à gauche ; on a en outre :

$$(U_a T)^* = T^* U_a^* = T^* U_{SJ^{-1}a} = U_{T^* JSa} = U_{SJ^{-1} T^* JSa}^* = U_{ST^* Sa}^*$$

donc  $U_a T = U_{ST^* Sa}$ .

Si  $a \in D_J$  est borné à droite et  $T \in \mathbf{P}^g$ ,  $Sa \in D_{J^{-1}}$  est borné à gauche, donc  $U_{Sa} T^* = U_{STa}$ , donc  $S U_{Sa} S T^* S = S U_{STa} S$ , donc enfin  $V_a S T^* S = V_{Ta}$ .

Si  $T \in \mathbf{P}^d$ , on a  $S T^* S \in \mathbf{P}^g$ , de sorte que le lemme 8 résulte du lemme 7.

### III. Décomposition centrale discrète

**Proposition 1.** —  $J$  est permutable aux opérateurs de  $\mathbf{R}$ .

Soient  $C \in \mathbf{R}$ ,  $x \in A$ ,  $y \in A$ . On a :

$$U_{CSJ^{-1}x} = C U_{SJ^{-1}x} = C U_x^* = (C^* U_x)^* = U_{C^* x}^*$$

$$V_{C^* SJy} = C^* V_{SJy} = C^* V_y^* = (C V_y)^* = V_{C y}^*$$

donc (lemme 3)  $J^{-1}CSJ^{-1}x$  et  $J C^* SJy$  existent, et

$$SJ^{-1}CSJ^{-1}x = C^* x, \quad (7)$$

$$SJC^* SJy = C y. \quad (8)$$

Supposons maintenant  $x = SJy$ . On voit que  $SJC^* x$  existe et est égal à  $CSJx$ . Donc  $SJ(SJ^{-1}CSJ^{-1}x)$  existe et est égal à  $CSJx$ . Donc  $SJSJ^{-1}CSJ^{-1}SJy = J^{-2}CJ^2y$  existe et est égal à  $Cy$ . Bref, pour  $y \in A$ ,  $J^2Cy$  existe et est égal à  $CJ^2y$ .

Supposons en outre  $C$  unitaire. Alors

$$\begin{aligned} \|JCy\|^2 &= \langle JCy, JCy \rangle = \langle J^2Cy, Cy \rangle \\ &= \langle CJ^2y, Cy \rangle = \langle J^2y, y \rangle = \|Jy\|^2 \end{aligned}$$

donc  $\|JCy\| = \|Jy\|$  pour  $y \in A$ . Soit maintenant  $a \in D_J$ . Soit  $y_1, y_2, \dots \in A$  une suite telle que  $y_n \rightarrow a$ ,  $Jy_n \rightarrow Ja$ . On a  $Cy_n \rightarrow Ca$ , et  $\|J(Cy_n - Cy_m)\| = \|J(y_n - y_m)\| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $m \rightarrow +\infty$ , donc  $JCy_n$  a une limite forte, de sorte que  $Ca \in D_J$  et que  $JCa$  est la limite de  $JCy_n$ ; donc  $\|JCa\| = \lim \|JCy_n\| = \lim \|Jy_n\| = \|Ja\|$ . Ainsi,  $C(D_J) \subset D_J$ , et un raisonnement identique prouve que  $C^{-1}(D_J) \subset D_J$ ; donc  $C(D_J) = D_J$ , de sorte que les opérateurs  $J$  et  $C^{-1}JC$ , auto-adjoints  $\geq 0$ , ont même ensemble de définition ; et  $\|C^{-1}JCa\| = \|Ja\|$  pour  $a \in D_J$ . On sait que ceci entraîne

$C^{-1}JC = J$ . Comme tout opérateur de  $\mathbf{R}$  est combinaison linéaire d'opérateurs unitaires de  $\mathbf{R}$ , la proposition est démontrée.

**Corollaire.** — *On a  $SCS = C^*$  pour  $C \in \mathbf{R}$ .*

En effet, la formule (7) devient, compte tenu de la proposition 1,  $SCSx = C^*x$  pour  $x \in A$ .

Soient alors  $H_1, H_2$  deux sous-espaces orthogonaux complémentaires de  $H$  tels que les projecteurs  $E_1$  et  $E_2$  sur  $H_1$  et  $H_2$  appartiennent à  $\mathbf{R}$ . Soit  $A_1 = E_1(A)$ . On va définir sur  $A_1$  une structure d'algèbre quasi-unitaire. Si  $x \in A$ ,  $y \in A$ ,  $x_1 = E_1x$ ,  $y_1 = E_1y$ , on a :

$$E_1(xy) = E_1U_x y = E_1U_x E_1 y = U_{x_1} y_1 ,$$

de sorte que  $E_1(xy)$  ne dépend que de  $x_1$  et  $y_1$ , et définit évidemment un produit associatif sur  $A_1$ . D'autre part,  $Sx_1 = SE_1x = E_1Sx$  d'après le corollaire de la proposition 1, donc  $S$  induit une involution dans  $A_1$ . On a aussi  $x \in D_J$ , donc  $x_1 \in D_J$  et  $Jx_1 = E_1Jx$  d'après la proposition 1 ; donc  $J$  induit dans  $A_1$  un automorphisme. Il est facile de voir que les axiomes des algèbres quasi-unitaires sont vérifiés. Soient  $\mathbf{R}_1^g$  et  $\mathbf{R}_1^d$  les anneaux d'opérateurs correspondants dans  $H_1$ . On définit de même une structure d'algèbre quasi-unitaire sur  $A_2 = E_2(A)$  et des anneaux d'opérateurs  $\mathbf{R}_2^g$  et  $\mathbf{R}_2^d$  dans  $H_2$ . Pour qu'un opérateur continu  $T$  sur  $H$  appartienne à  $\mathbf{R}^d$  (respectivement  $\mathbf{R}^g$ ), il faut et il suffit que  $T$  soit réduit par  $H_1$  et  $H_2$ , et que les parties induites par  $T$  dans  $H_1$  et  $H_2$  appartiennent à  $\mathbf{R}_1^d$  et  $\mathbf{R}_2^d$  (respectivement  $\mathbf{R}_1^g$  et  $\mathbf{R}_2^g$ ).

*Quelques problèmes.* — Soit  $\mathbf{Q}^g$  (respectivement  $\mathbf{Q}^d$ ) l'ensemble des opérateurs de  $\mathbf{R}^g$  (respectivement  $\mathbf{R}^d$ ) permutable aux opérateurs de  $\mathbf{P}^g$  (respectivement  $\mathbf{P}^d$ ). L'application  $A \rightarrow SAS$  transforme  $\mathbf{R}^g$  en  $\mathbf{R}^d$ , donc  $\mathbf{P}^g$  en  $\mathbf{P}^d$  (parce que  $SJS = J^{-1}$ ), donc  $\mathbf{Q}^g$  en  $\mathbf{Q}^d$ .

D'après la proposition 1,  $\mathbf{P}^g$  et  $\mathbf{P}^d$  (et aussi, évidemment,  $\mathbf{Q}^g$  et  $\mathbf{Q}^d$ ) contiennent  $\mathbf{R}$ . Voici quelques hypothèses vraisemblables, évidemment vérifiées pour les algèbres unitaires, dont nous n'avons pu établir la validité en général ; on verra l'importance de l'hypothèse 1 dans la suite.

*Hypothèse 1.* —  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ ,  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ .

*Hypothèse 2.* —  $J$  appartient au sens large<sup>2)</sup> à l'anneau d'opérateurs engendré par  $\mathbf{Q}^g$  et  $\mathbf{Q}^d$ .

<sup>2)</sup> C'est-à-dire  $J \in \mathbf{R}^d$  au sens de [14]. (Rappelons que  $J$  n'est pas supposé borné.)

*Hypothèse 3.* — Il existe dans  $\mathbf{R}^g$  (respectivement  $\mathbf{R}^d$ ) une sous-\*algèbre abélienne maximale  $\mathbf{L}^g$  (respectivement  $\mathbf{L}^d$ ) dont les éléments sont permutables à  $J$ .

*Remarques* — Si l'hypothèse 3 est vérifiée, on a  $\mathbf{L}^g \subset \mathbf{P}^g$ , donc  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{L}^g$ , de sorte que l'hypothèse 1 est vérifiée. L'hypothèse 1 entraîne évidemment que  $\mathbf{Q}^g$  et  $\mathbf{Q}^d$  sont abéliens. Enfin, si les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, soit  $\mathbf{L}^g$  une sous-\*algèbre abélienne maximale de  $\mathbf{R}^g$  contenant  $\mathbf{Q}^g$ ;  $\mathbf{L}^g$  commute avec  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{L}^g$ , et avec  $\mathbf{Q}^d \subset (\mathbf{R}^g)'$ , donc avec  $J$ , de sorte que l'hypothèse 3 est vérifiée.

#### IV. Algèbres quasi-unitaires de dimension finie

Si une algèbre quasi-unitaire  $A$  est de dimension finie, on a  $A = H$ ,  $\mathbf{R}^g$  est l'ensemble des  $U_x$ ,  $\mathbf{R}^d$  est l'ensemble des  $V_x$ . L'algèbre  $A$  possède un élément unité 1, tel que  $U_1 = V_1 = 1$ .

Une forme linéaire  $f$  sur une \*-algèbre  $A$  est dite centrale si  $f(xy) = f(yx)$ , positive si  $f(x^s) = f(x)$  et  $f(x^s x) \geq 0$ , fidèle si  $f(x^s x) = 0$  entraîne  $x = 0$ .

**Proposition 2.** — a) Soient  $A$  une \*-algèbre de dimension finie,  $f$  une forme linéaire centrale positive fidèle sur  $A$ ,  $b$  un élément inversible tel que  $b = b^s$ ; soit  $a = b^2$ . Pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , posons:  $Jx = a^{-1}xa$ ,  $\langle x, y \rangle = f(xay^s a)$ . Alors,  $A$  est une algèbre quasi-unitaire.

b) Soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire de dimension finie. Il existe une forme linéaire centrale positive fidèle  $f$  sur  $A$ , et un élément inversible  $b \in A$ , avec  $b = b^s$ , tels que, posant  $a = b^2$ , on ait:

$$Jx = a^{-1}xa \quad \langle x, y \rangle = f(xay^s a)$$

pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ .

Soient  $A$  une \*-algèbre de dimension finie,  $f$  une forme linéaire centrale positive fidèle sur  $A$ ,  $b$  un élément inversible tel que  $b = b^s$ . Posons  $a = b^2$ ,  $Jx = a^{-1}xa$ ,  $\langle x, y \rangle = f(xay^s a)$ . D'abord,  $\langle x, y \rangle$  est bien une forme sesquilinear sur  $A \times A$ . Puis :

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle &= f(yax^s a) = \overline{f(axay^s)} = \overline{f(xay^s a)} = \overline{\langle x, y \rangle} \\ \langle x, x \rangle &= f(xb^2 x^s b^2) = f((bxb)(bxb)^s) \geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \implies bxb = 0 \implies x = 0 . \end{aligned}$$

Donc  $\langle x, y \rangle$  est bien un produit scalaire sur  $A$ . Puis:

$$\langle Jx, x \rangle = f(xaax^s) = f((xa)(xa)^s) \geq 0 .$$

L'opérateur  $J$  est évidemment un automorphisme de l'algèbre  $A$ . Enfin :

$$\begin{aligned}\langle x^s, x^s \rangle &= f(x^s a x a) = f(x a x^s a) = \langle x, x \rangle \\ \langle x y, z \rangle &= f(x y a z^s a) = f(y a z^s a x) = f(y a z^s (a x a^{-1}) a) \\ &= f(y a (J x^s \cdot z)^s a) = \langle y, J x^s \cdot z \rangle.\end{aligned}$$

La vérification des axiomes A 4 et A 5 est triviale.

Maintenant, soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire de dimension finie. Désignons par  $Tr$  une trace fidèle sur l' $^*$ -algèbre d'opérateurs  $\mathbf{R}^g$ . Pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , posons :  $\varphi(x, y) = Tr(U_x U_y^*)$ . La forme  $\varphi$  est sesquilinearéaire. On a :  $\varphi(y, x) = \overline{Tr(U_y U_x^*)} = \overline{\varphi(x, y)}$ . Donc il existe un opérateur auto-adjoint  $L$  dans  $H = A$  tel que :

$$Tr(U_x U_y^*) = \langle x, Ly \rangle = \langle Lx, y \rangle.$$

On a :  $\langle Lx, x \rangle = Tr(U_x U_x^*) \geq 0$ ; donc  $L = M^2$ , avec un opérateur  $M$  auto-adjoint  $\geq 0$  de  $H$ . De plus,  $\langle Lx, x \rangle = 0$  entraîne  $U_x = 0$  parce que  $Tr$  est fidèle, donc  $x = 0$ . Donc  $L$  et  $M$  sont inversibles. Observons les égalités suivantes, où  $T$  désigne un opérateur quelconque de  $\mathbf{R}^g$  :

$$\begin{aligned}\langle x, LTy \rangle &= Tr(U_x U_{Ty}^*) = Tr(U_x U_y^* T^*) = Tr(T^* U_x U_y^*) \\ &= Tr(U_{T^* x} U_y^*) = \langle T^* x, Ly \rangle = \langle x, TLy \rangle\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\langle x, LSJ^{-1}y \rangle &= Tr(U_x U_{SJ^{-1}y}^*) = Tr(U_x U_y) = Tr(U_y U_x) \\ &= Tr(U_y U_{SJ^{-1}x}^*) = \langle Ly, SJ^{-1}x \rangle = \langle J^{-1}x, SLy \rangle = \langle x, J^{-1}SLy \rangle.\end{aligned}\tag{9}$$

Les égalités (9) donnent  $LSJ^{-1} = J^{-1}SL$ , d'où :

$$J^{-2} = LJSJ^{-1}SLJ^{-1}.\tag{10}$$

Les égalités (8) prouvent que  $LT = TL$ , donc  $L \in \mathbf{R}^d$ ,  $M \in \mathbf{R}^d$ . Posons :  $M' = SMS$ ,  $L' = SLS$ . On a :  $L' \in \mathbf{R}^g$ ,  $M' \in \mathbf{R}^g$ . On peut d'autre part écrire :  $M^{-1} = V_a$ , d'où  $M = V_{a^{-1}}$ ,  $L = V_{a^{-2}}$ .

Observons alors que, pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , on a :

$$U_{Jx}y = Jx \cdot y = J(x \cdot J^{-1}y) = JU_xJ^{-1}y$$

donc  $U_{Jx} = JU_xJ^{-1}$ ; en particulier,  $U_x$  permute à  $J$  si et seulement si  $x = Jx$ .

Puisque  $L'^{-1} \in \mathbf{R}^g$ , on a donc  $JL'^{-1}J^{-1} \in \mathbf{R}^g$ . Dans l'égalité (10), le deuxième membre est alors permutable à  $L$ . Donc  $J$  est permutable à  $L$ .

Donc  $L'^{-1}$  est permutable à  $SJ^{-1}S = J$ . Alors, l'égalité (10) se simplifie et donne

$$J^{-2} = LL'^{-1} . \quad (11)$$

Les opérateurs  $J$ ,  $L$ ,  $L'$  sont auto-adjoints  $\geq 0$  et deux à deux permutables, de sorte que (11) entraîne :

$$J = M^{-1} M' . \quad (12)$$

Puisque  $M^{-\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}^d$ , on peut poser :  $M^{-\frac{1}{2}} = V_b$ . On aura :  $a = b^2$ . L'égalité  $V_b = V_b^*$  prouve que  $b = SJb$ . Enfin, comme  $V_b$  permute à  $J$  d'après ce qui précède, une remarque antérieure prouve que  $Jb = b$ . Alors,  $b = SJb$  entraîne  $b = b^s$ ; et nous avons, pour tout  $x \in A$  :

$$Jx = M^{-1}SMSx = V_a(SV_{a^{-1}}S)x = V_aU_{Sa^{-1}}x = V_aU_{a^{-1}}x = a^{-1}xa .$$

Posons d'autre part, pour  $x \in A$ ,  $f(x) = \text{Tr}(U_x)$ . Evidemment,  $f$  est une forme linéaire centrale sur  $A$ . En outre :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, LL^{-1}y \rangle = \text{Tr}(U_x U_{L^{-1}y}^*) = \text{Tr}(U_x \cdot SJ^{-1}L^{-1}y) \\ &= f(x \cdot SJ^{-1}V_a y) = f(x \cdot SJ^{-1}(ya^2)) = f(xa^2 \cdot Jy^s) \\ &= f(xa^2a^{-1}y^s a) = f(xay^s a) . \end{aligned} \quad (13)$$

En particulier :

$$0 \leq \langle b^{-1}xb^{-1}, b^{-1}xb^{-1} \rangle = f(b^{-1}xb^{-1}b^2b^{-1}x^s b^{-1}b^2) = f(b^{-1}xx^s b) = f(xx^s) ;$$

d'ailleurs

$$\begin{aligned} f(x^s) &= \text{Tr}(U_{x^s}) = \text{Tr}(U_{Jx}^*) \\ &= \overline{\text{Tr}(U_{Jx})} = \overline{\text{Tr}(JU_xJ^{-1})} = \overline{\text{Tr}(M'U_xM'^{-1})} = \overline{\text{Tr}(U_x)} = \overline{f(x)} \end{aligned} \quad (14)$$

de sorte que  $f$  est positive. Enfin,  $f(xx^s) = 0$  entraîne  $b^{-1}xb^{-1} = 0$  donc  $x = 0$ :  $f$  est fidèle. Ceci achève de démontrer la proposition.

**Corollaire 1.** — Soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire de dimension finie. Il existe des opérateurs auto-adjoints positifs inversibles  $M$  et  $M'$  possédant les propriétés suivantes :

$$M \in \mathbf{R}^d, \quad M' \in \mathbf{R}^g, \quad M' = SMS, \quad J = M^{-1}M' .$$

On a plus précisément :  $M \in \mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $M' \in \mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ .

En effet, reprenons les notations de la démonstration précédente. Comme  $M' \in \mathbf{R}^g$ , un opérateur de  $\mathbf{R}^d$  permute à  $J$ , c'est-à-dire appar-

tient à  $\mathbf{P}^d$ , si et seulement si il permute à  $M$ ; en particulier  $M \in \mathbf{P}^d$ ; il en résulte que  $Q^d \subset \mathbf{P}^d$ , et que  $M \in Q^d$ . De même,  $M' \in Q^g \subset \mathbf{P}^g$ . On voit donc que les hypothèses 1, 2, 3 du § III sont vérifiées.

**Corollaire 2.** — Soit  $A$  une  $*$ -algèbre d'opérateurs contenant 1 dans un espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de dimension finie. Soit  $Tr$  une trace fidèle sur  $A$ , et  $a$  un opérateur de  $A$  auto-adjoint positif inversible. Pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , posons:  $\langle x, y \rangle = Tr(xay^*a)$ , et  $Jx = a^{-1}xa$ . On obtient ainsi l'algèbre quasi-unitaire de dimension finie la plus générale. En prenant pour  $A$  l' $*$ -algèbre de tous les opérateurs de  $\mathcal{H}$ , on obtient l'algèbre quasi-unitaire irréductible de dimension finie la plus générale.

Une algèbre construite comme l'indique le corollaire est quasi-unitaire d'après le  $a$  de la proposition 2; de plus, si  $A$  est l' $*$ -algèbre de tous les opérateurs de  $\mathcal{H}$ , son centre se réduit aux scalaires, donc  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs, de sorte que  $A$  est irréductible.

Réiproquement, soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire de dimension finie. Il existe (proposition 2) une forme linéaire centrale positive fidèle  $f$  sur  $A$ , et un élément inversible  $b \in A$ , avec  $b = b^*$ , tels que, posant  $a = b^2$ , on ait  $Jx = a^{-1}xa$ ,  $\langle x, y \rangle = f(xay^*a)$ . Pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , posons:  $\langle\langle x, y \rangle\rangle = f(xy^*)$ . Il est immédiat qu'on obtient ainsi un produit scalaire sur  $A$ , qui devient un espace hilbertien  $\mathcal{H}$  de dimension finie. Pour  $x \in A$ , définissons un opérateur linéaire  $U'_x$  dans  $\mathcal{H}$  par  $U'_x y = xy$ . On a aussitôt:  $U'_{\lambda x + \mu y} = \lambda U'_x + \mu U'_y$ ,  $U'_{xy} = U'_x U'_y$ ; d'autre part:

$$\langle\langle U'_{xs} y, z \rangle\rangle = f(x^s y z^s) = f(y z^s x^s) = f(y(xz)^s) = \langle\langle y, U'_x z \rangle\rangle$$

donc  $U'^*_x = U'_{x^s}$ . L'application  $x \rightarrow U'_x$  est donc un isomorphisme de l' $*$ -algèbre  $A$  sur l' $*$ -algèbre  $A'$  des opérateurs  $U'_x$  dans l'espace hilbertien  $\mathcal{H}$ . On a:  $U'_a = U'_{b^2} = U'_b U'^*_b$ , et  $U'_{a^{-1}} = U'^{-1}_a$ , donc  $U'_a$  est un opérateur auto-adjoint positif inversible. D'autre part,  $U'_{Jx} = U'_{a^{-1}xa} = U'^{-1}_a U'_x U'_a$ . Par  $Tr(U'_x) = f(x)$ , on définit évidemment une trace fidèle sur  $A'$ , et  $\langle x, y \rangle = f(xay^*a) = Tr(U'_x U'_a U'^*_y U'_a)$ . Si enfin  $A$  est irréductible,  $A'$  est un facteur, donc il existe un  $*$ -isomorphisme de  $A'$  sur l' $*$ -algèbre de tous les opérateurs d'un espace hilbertien de dimension finie convenable. Ceci achève la démonstration.

## V. Nature de $\mathbf{R}^g$ et $\mathbf{R}^d$

**Théorème 2.** — Supposons qu'il existe des opérateurs auto-adjoints  $\geq 0$  inversibles,  $M$ ,  $M'$ , appartenant au sens large à  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^g$  respectivement,

avec  $M' = SMS$ , tels que  $J$  soit le plus petit prolongement fermé de  $M' M^{-1}$ .

- a)  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^g$  sont sans composantes purement infinies <sup>3)</sup>.
- b) Soit  $\mathfrak{m}$  l'ensemble des opérateurs de la forme  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*$ , avec  $a_i, b_i$ , bornés à gauche et dans  $D_M$ . Alors,  $\mathfrak{m}$  est un idéal bilatère de  $\mathbf{R}^g$  qui engendre  $\mathbf{R}^g$ , et la formule  $\varphi(\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*) = \sum_{i=1}^n \langle Ma_i, Mb_i \rangle$  définit sur  $\mathfrak{m}$  une trace normale fidèle.
- c) Les opérateurs  $M$  et  $M'$  appartiennent au sens large à  $\mathbf{Q}^d$  et  $\mathbf{Q}^g$  respectivement. On a  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ .

La partie a) du théorème est une conséquence de la partie b) ([5], proposition 9). Démontrons donc la partie b). On désignera par  $M = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ ,  $M' = \int_0^{+\infty} \lambda dE'_\lambda$  les décompositions spectrales de  $M$  et  $M'$ .

Soit  $A_1$  l'ensemble des éléments de  $D_M$  bornés à gauche. Si  $a \in A_1$  et  $T \in \mathbf{R}^g$ , on a  $Ta \in A_1$ ; en effet  $Ta \in D_M$  parce que  $T$  permute à  $M$ , et  $Ta$  est borné à gauche (lemme 1). Ceci posé, les formules  $T(\sum U_{a_i} U_{b_i}^*) = \sum U_{Ta_i} U_{b_i}^*$ ,  $(\sum U_{a_i} U_{b_i}^*)T = \sum U_{a_i} U_{T^*b_i}^*$  prouvent que  $\mathfrak{m}$  est un idéal bilatère de  $\mathbf{R}^g$ .

Montrons que  $A_1$  est partout dense dans  $H$ . Puisque  $M$  permute à  $M'$ , il permute à  $J$ , donc les  $E_\lambda$  sont permutables à  $J$ . Donc, si  $x \in A$ ,  $E_\lambda x$  est borné à gauche d'après le lemme 8; et, bien entendu,  $E_\lambda x \in D_M$ , de sorte que  $E_\lambda x \in A_1$ . Or, les  $E_\lambda x$ , pour  $x \in A$  et  $\lambda \geq 0$ , sont évidemment partout denses dans  $H$ .

Nous pouvons alors montrer que  $\mathfrak{m}$  engendre  $\mathbf{R}^g$ , c'est-à-dire que  $\overline{\mathfrak{m}} = \mathbf{R}^g$  avec les notations de [5]. Car soit  $u$  un élément de  $H$  tel que  $Uu = 0$  pour tout  $U \in \mathfrak{m}$ , et prouvons que  $u = 0$ . On a, pour tout  $x \in A$  et tout  $a \in A_1$ :

$$\begin{aligned} |\langle u, V_x a \rangle|^2 &= |\langle u, U_a x \rangle|^2 = |\langle U_a^* u, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|U_a^* u\|^2 \\ &= \|x\|^2 \langle U_a U_a^* u, u \rangle = 0 \end{aligned}$$

donc  $\langle u, V_x a \rangle = 0$ . Comme 1 est fortement adhérent à l'ensemble des  $V_x$ , on en déduit  $\langle u, a \rangle = 0$  pour  $a \in A_1$ , donc  $u = 0$ .

Pour poursuivre la démonstration, nous avons besoin des lemmes suivants:

**Lemme 9.** — Si  $a_i, b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des éléments de  $A_1$  tels que  $\sum_{i=1}^n U_{a_i}^* U_{b_i} \geq 0$ , on a  $\sum_{i=1}^n \langle Mb_i, Ma_i \rangle \geq 0$ .

<sup>3)</sup> C'est-à-dire  $H^{pi} = 0$  au sens de [4]. De même, si  $H^{pi} \neq 0$ , nous dirons que  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  possèdent des composantes purement infinies.

En effet, on a, pour tout  $x \in A$ ,

$$0 \leq \langle \sum_{i=1}^n U_{a_i}^* U_{b_i} x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle U_{b_i} x, U_{a_i} x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle V_x b_i, V_x a_i \rangle .$$

On en déduit  $\sum_{i=1}^n \langle Vb_i, Va_i \rangle \geq 0$  pour tout  $V \in \mathbf{R}^d$ . Enfin,  $\sum_{i=1}^n \langle Mb_i, Ma_i \rangle$  est limite de quantités de la forme  $\sum_{i=1}^n \langle Vb_i, Va_i \rangle$ , d'où le lemme.

**Lemme 10.** — Si  $a \in D_M \cap D_{J-1}$ , on a  $SJ^{-1}a \in D_M$  et  $MSJ^{-1}a = Sma$ .

En effet, soit  $a' = J^{-1}a$ . On a :  $a' \in D_J$  et  $Ja' \in D_M$ , donc  $a' \in D_{M'}$ , et  $M'a' = MJa'$ , c'est-à-dire  $SMSJ^{-1}a = Ma$ .

**Lemme 11.** — Si  $a_i, b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des éléments de  $A_1$  tels que  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^* \geq 0$ , on a  $\sum_{i=1}^n \langle Ma_i, Mb_i \rangle \geq 0$ .

En effet, supposons d'abord  $a_i, b_i \in A_1 \cap D_{J-1}$ . On a  $SJ^{-1}a_i \in D_M$ ,  $SJ^{-1}b_i \in D_M$  d'après le lemme 10, et  $SJ^{-1}a_i, SJ^{-1}b_i$  sont bornés à gauche d'après le lemme 6, avec  $U_{SJ^{-1}a_i}^* = U_{a_i}$ ,  $U_{SJ^{-1}b_i}^* = U_{b_i}$ . Donc  $SJ^{-1}a_i \in A_1$ ,  $SJ^{-1}b_i \in A_1$ , et  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^* = \sum_{i=1}^n U_{SJ^{-1}a_i}^* U_{SJ^{-1}b_i}$ . Alors, les lemmes 9 et 10 prouvent que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle Ma_i, Mb_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle Smb_i, Sma_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle MSJ^{-1}b_i, MSJ^{-1}a_i \rangle \geq 0 . \end{aligned}$$

Arrivons maintenant au cas général. Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  une suite de nombres  $> 0$  tendant vers 0, et posons *dans tout ce paragraphe* :  $E'_n = 1 - E'_{\lambda_n}$ . Les projecteurs  $E'_n$  sont dans  $\mathbf{R}^g$  et tendent fortement vers 1 ; et  $E'_n(H) \subset D_{M'-1}$ . Si  $a \in A_1$ , on a :  $E'_n a \in A_1 \cap D_{J-1}$ . En effet, nous savons déjà que  $E'_n a \in A_1$  ; et  $ME'_n a = E'_n Ma \in D_{M'-1}$ , donc  $E'_n a \in D_{J-1}$ . D'autre part, on a :  $\sum_{i=1}^n U_{E'_n a_i} U_{E'_n b_i}^* = E'_n (\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*) E'_n \geq 0$ , donc, d'après la première partie de la démonstration

$$\sum_{i=1}^n \langle E'_n Ma_i, E'_n Mb_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle ME'_n a_i, ME'_n b_i \rangle \geq 0 .$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2. Soient  $a_i \in A_1$ ,  $b_i \in A_1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tels que  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^* = 0$ . Le lemme 11 entraîne que  $\sum_{i=1}^n \langle Ma_i, Mb_i \rangle = 0$ . Donc, en posant  $\varphi(\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*) = \sum_{i=1}^n \langle Ma_i, Mb_i \rangle$  pour  $a_i \in A_1$ ,  $b_i \in A_1$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on définit univoquement sur  $\mathbf{m}$  une forme linéaire. Et le lemme 11 exprime que cette forme est positive. Si  $T \in \mathbf{R}^g$ , on a :

$$\begin{aligned}\varphi(T(\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*)) &= \varphi(\sum_{i=1}^n U_{Ta_i} U_{b_i}^*) = \sum_{i=1}^n \langle M T a_i, M b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle T M a_i, M b_i \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^*) T) &= \varphi(\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{T^* b_i}^*) = \sum_{i=1}^n \langle M a_i, M T^* b_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle M a_i, T^* M b_i \rangle\end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\varphi$  est centrale, donc est une trace.

**Lemme 12.** — *Tout opérateur de  $\mathfrak{m}^+$  est de la forme  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{a_i}^*$ , avec  $a_i \in A_1$  pour  $1 \leq i \leq n$ .*

En effet, soit  $U = \sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{b_i}^* \in \mathfrak{m}^+$ , où  $a_i \in A_1$ ,  $b_i \in A_1$ . Posons :  $c_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ ,  $d_i = \frac{1}{2}(a_i - b_i)$ . On a :  $c_i \in A_1$ ,  $d_i \in A_1$ , et :

$$\begin{aligned}U &= \sum_{i=1}^n (U_{c_i} + U_{d_i})(U_{c_i} - U_{d_i})^* = \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{c_i}^* - \sum_{i=1}^n U_{d_i} U_{d_i}^* \\ &\quad + \sum_{i=1}^n U_{d_i} U_{c_i}^* - \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{d_i}^*\end{aligned}$$

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{c_i}^* - \sum_{i=1}^n U_{d_i} U_{d_i}^* + \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{d_i}^* - \sum_{i=1}^n U_{d_i} U_{c_i}^*$$

donc  $U = \frac{1}{2}(U + U^*) = \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{c_i}^* - \sum_{i=1}^n U_{d_i} U_{d_i}^*$ . Soit  $U' = \sum_{i=1}^n U_{c_i} U_{c_i}^*$ . On a  $0 \leq U \leq U'$ , donc  $\|U^{\frac{1}{2}}a\| \leq \|U'^{\frac{1}{2}}a\|$  pour tout  $a \in H$ , donc  $U^{\frac{1}{2}} = TU'^{\frac{1}{2}}$  avec un  $T \in \mathbf{R}^g$ . Par suite :

$$U = U^{\frac{1}{2}} U^{\frac{1}{2}*} = TU'T^* = \sum_{i=1}^n T U_{c_i} U_{c_i}^* T^* = \sum_{i=1}^n U_{Tc_i} U_{Tc_i}^*$$

ce qui démontre le lemme.

Grâce au lemme 12, on voit aussitôt que  $\varphi$  est fidèle. Car, si

$$\varphi(\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{a_i}^*) = \sum_{i=1}^n \langle M a_i, M a_i \rangle = 0 ,$$

on a  $M a_i = 0$  donc  $a_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$ , donc  $\sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{a_i}^* = 0$ .

**Lemme 13.** — *Si  $a_i \in A_1 (1 \leq i \leq n)$ , il existe un  $a \in A_1$  tel que  $U_a \geq 0$ , et  $\sum_{i=1}^n U_{a_i}^* U_{a_i} = U_a^2$ .*

En effet, soit  $U = \sum_{i=1}^n U_{a_i}^* U_{a_i}$ . On a, pour tout  $t \in H$  :

$$\|U_{a_i} t\|^2 = \langle U_{a_i}^* U_{a_i} t, t \rangle \leq \langle U t, t \rangle = \|U^{\frac{1}{2}} t\|^2$$

donc  $U_{a_i} = T_i U^{\frac{1}{2}}$  avec  $T_i \in \mathbf{R}^g$ ,  $T_i$  s'annulant sur  $H \ominus \overline{U(H)}$ . On en déduit

$$\begin{aligned}\langle \sum_{i=1}^n T_i^* T_i U^{\frac{1}{2}} t, U^{\frac{1}{2}} t \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle U^{\frac{1}{2}} T_i^* T_i U^{\frac{1}{2}} t, t \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle U_{a_i}^* U_{a_i} t, t \rangle = \langle U^{\frac{1}{2}} t, U^{\frac{1}{2}} t \rangle ,\end{aligned}$$

donc  $\langle \sum_{i=1}^n T_i^* T_i u, u \rangle = \langle u, u \rangle$  pour  $u \in \overline{U(H)}$  ; donc  $\sum_{i=1}^n T_i^* T_i$  est le projecteur sur  $\overline{U(H)}$  ; par suite :

$$U^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^n T_i^* T_i)^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n T_i^* U_{a_i} = U_{\sum_{i=1}^n T_i^* a_i}$$

ce qui prouve le lemme.

Nous pouvons maintenant prouver que  $\varphi$  est normale. Soit  $(U_\iota)_{\iota \in I}$  une famille filtrante croissante d'opérateurs de  $\mathfrak{m}^+$  de borne supérieure  $U \in \mathfrak{m}^+$ . Il s'agit de prouver que  $\varphi(U)$  est la borne supérieure des  $\varphi(U_\iota)$ . On a :  $\varphi(U) \geq \varphi(U_\iota)$ . Soit donc  $\varepsilon > 0$ , et prouvons qu'il existe un  $\iota \in I$  tel que  $\varphi(U_\iota) \geq \varphi(U) - \varepsilon$ . Soit  $U = \sum_{i=1}^n U_{a_i} U_{a_i}^*$  (lemme 12). On a :  $E'_n U E'_n = \sum_{i=1}^n U_{E'_n a_i} U_{E'_n a_i}^*$ , donc

$$\varphi(U) = \sum_{i=1}^n \|M a_i\|^2$$

$$\varphi(E'_n U E'_n) = \sum_{i=1}^n \|M E'_n a_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|E'_n M a_i\|^2.$$

Par suite, pour  $n$  bien choisi,  $\varphi(U) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi(E'_n U E'_n) \leq \varphi(U)$ . On va voir qu'on peut trouver un  $\iota \in I$  tel que  $\varphi(E'_n U_\iota E'_n) \geq \varphi(E'_n U E'_n) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Il en résultera :

$$\varphi(U_\iota) \geq \varphi(E'_n U_\iota E'_n) \geq \varphi(U) - \varepsilon$$

et notre assertion sera établie. Nous sommes ainsi ramenés à prouver que  $\varphi(E'_n U E'_n)$  est la borne supérieure des  $\varphi(E'_n U_\iota E'_n)$ ,  $n$  fixé, sachant que  $(E'_n U_\iota E'_n)_{\iota \in I}$  est un ensemble filtrant croissant de borne supérieure  $E'_n U E'_n$ . Mais de plus, d'après les lemmes 12, 13 et un raisonnement fait dans la démonstration du lemme 11, on a cette fois :

$$E'_n U E'_n = U_a^2 \quad E'_n U_\iota E'_n = U_{a_\iota}^2$$

avec  $a_\iota \in A_1$ ,  $a \in A_1$ ,  $U_{a_\iota} \geq 0$ ,  $U_a \geq 0$ ; d'ailleurs,  $\varphi(U_{a_\iota}^2) = \|M a_\iota\|^2$ ,  $\varphi(U_a^2) = \|M a\|^2$ .

Comme  $U_{a_\iota}^2$  converge fortement [3] vers  $U_a^2$  en restant borné,  $U_{a_\iota}$  converge fortement vers  $U_a$  ([11], lemme 5). Soient  $x \in A$ ,  $y \in A$ . Observons que  $a \in D_{J-1}$  et  $U_a = U_{S_{J-1} a}$  d'après le lemme 3. Pour tout  $\lambda > 0$ , posons  $M_\lambda = M E_\lambda$ , qui est borné. On a :

$$\begin{aligned} \langle M_\lambda a, xy \rangle &= \langle M_\lambda J^{-1} a, Jx \cdot Jy \rangle = \langle U_{Sx} M_\lambda J^{-1} a, Jy \rangle \\ &= \langle M_\lambda U_{Sx} J^{-1} a, Jy \rangle = \langle M_\lambda V_{J^{-1} a} Sx, Jy \rangle = \langle M_\lambda S U_{S_{J-1} a} x, Jy \rangle \\ &= \langle S M_\lambda J y, U_a x \rangle \end{aligned}$$

et de même  $\langle M_\lambda a_\iota, xy \rangle = \langle S M_\lambda J y, U_{a_\iota} x \rangle$ . Donc  $\langle M_\lambda a_\iota, xy \rangle$

$\rightarrow \langle M_\lambda a, xy \rangle$ . Comme  $\|M_\lambda a_t\| \leq \|Ma_t\| \leq \|Ma\|$ , on voit que  $M_\lambda a_t$  tend faiblement vers  $Ma$ . Par suite,  $\liminf \|Ma_t\| \geq \liminf \|M_\lambda a_t\| \geq \|M_\lambda a\|$ , quel que soit  $\lambda > 0$ , donc  $\liminf \|Ma_t\| \geq \|Ma\|$ , ce qui achève la démonstration de la partie *b* du théorème. Quant à la partie *c*, elle se démontre comme le corollaire 1 de la proposition 2.

On observera que, pour  $J = 1$  (cas des algèbres unitaires), la démonstration se simplifie considérablement.

Nous n'avons pu décider si la trace  $\varphi$  est maximale (ce qui est vrai dans le cas des algèbres unitaires : cf. théorème 2 de [10]) ; il faudrait, pour résoudre ce problème, arriver à caractériser plus simplement les opérateurs de  $\mathfrak{m}^+$ .

**Proposition 3.** — a) Soient  $M, M_1$  (respectivement  $M', M'_1$ ) des opérateurs auto-adjoints  $\geq 0$  inversibles appartenant au sens large à  $\mathbf{R}^d$  (respectivement  $\mathbf{R}^g$ ), avec  $M' = SMS$ ,  $M'_1 = SM_1S$  ; supposons que  $J$  soit le plus petit prolongement fermé de  $M'M^{-1}$  et de  $M'_1M_1^{-1}$ . Il existe alors un opérateur auto-adjoint  $\geq 0$  inversible  $C$  appartenant au sens large à  $\mathbf{R}$ , tel que  $M_1$  (respectivement  $M'_1$ ) soit le plus petit prolongement fermé de  $CM$  (respectivement  $CM'$ ).

b) Réciproquement, soit  $C$  un opérateur auto-adjoint  $\geq 0$  inversible appartenant au sens large à  $\mathbf{R}$  ; soit  $M_1$  (respectivement  $M'_1$ ) le plus petit prolongement fermé de  $CM$  (respectivement  $CM'$ ) ;  $M_1$  et  $M'_1$  sont auto-adjoints  $\geq 0$  inversibles, appartiennent au sens large à  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^g$  respectivement ; on a  $M'_1 = SM_1S$ , et  $J$  est le plus petit prolongement fermé de  $M'_1M_1^{-1}$ .

Soient  $M, M_1, M', M'_1$  des opérateurs ayant les propriétés de *a*. L'opérateur  $M'_1$  permute à  $M_1$ , donc à  $J$ , et à  $M$ , donc à  $M'$ . De même,  $M_1$  permute à  $J, M, M'$ . Bref  $J, M, M', M_1, M'_1$  sont deux à deux permutables. Puisque  $M'_1M_1^{-1}$  et  $M'M^{-1}$  ont même prolongement fermé minimum,  $M'_1M'^{-1}$  et  $M_1M^{-1}$  ont même prolongement fermé minimum  $C$ . L'opérateur  $C$  est auto-adjoint positif inversible, et appartient au sens large à  $\mathbf{R}$  ; et  $M_1$  (respectivement  $M'_1$ ) est le plus petit prolongement fermé de  $CM$  (respectivement  $CM'$ ).

Réciproquement, soit  $C$  un opérateur ayant les propriétés de *b*, et soit  $M_1$  (respectivement  $M'_1$ ) le plus petit prolongement fermé de  $CM$  (respectivement  $CM'$ ). Il est évident que  $M_1, M'_1$  sont auto-adjoints  $\geq 0$  inversibles, et appartiennent au sens large à  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^g$  respectivement. En outre,  $M'_1M_1^{-1}$  et  $M'CC^{-1}M^{-1}$  ont même prolongement

fermé minimum ; ce prolongement est donc  $J$  ; et  $SM_1S$  est égal au prolongement fermé minimum de  $(SCS)(SMS)$ , donc (cor. de la proposition 1) de  $CM'$  ; ce prolongement est donc  $M'_1$ .

*Remarque.* — Si  $A$  est irréductible, on voit que  $M$  et  $M'$  sont bien déterminés par  $J$  à la multiplication près par un scalaire  $>0$ .

## VI. Nature de $\mathbf{R}^g$ et de $\mathbf{R}^d$ (suite)

**Théorème 3.** — *Si  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont sans composantes purement infinies et si  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ ,  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ , il existe des opérateurs auto-adjoints  $\geq 0$  inversibles  $M$ ,  $M'$ , appartenant au sens large à  $\mathbf{Q}^d$  et  $\mathbf{Q}^g$  respectivement, avec  $M' = SMS$ , tels que  $J$  soit le plus petit prolongement fermé de  $M' M^{-1}$ .*

Comme  $\mathbf{R}^g$  est sans composante purement infinie, il existe ([5], proposition 9) une pseudo-trace normale fidèle et essentielle  $Tr$  sur  $(\mathbf{R}^g)^+$ . Soit  $(a_\iota)_{\iota \in I}$  une famille d'éléments de  $H$  telle que  $Tr(T) = \sum_{\iota \in I} \langle Ta_\iota, a_\iota \rangle$  pour  $T \in (\mathbf{R}^g)^+$  (cf. [17]). Comme  $Tr$  est fidèle, on voit aussitôt que les  $Ua_\iota$ ,  $U \in \mathbf{R}^d$ ,  $\iota \in I$ , engendrent  $H$ . Nous désignerons encore par  $Tr$  la trace normale fidèle essentielle maximale associée à la pseudo-trace  $Tr$ . Si  $T$  appartient à l'idéal de définition de cette trace, on a encore :  $Tr(T) = \sum_{\iota \in I} \langle Ta_\iota, a_\iota \rangle$ , la famille  $\langle Ta_\iota, a_\iota \rangle$  étant sommable.

Soit  $\mathbf{R}_0^g$  l'ensemble des  $T \in \mathbf{R}^g$  tels que  $Tr(TT^*) < +\infty$ . Il est immédiat que  $\mathbf{R}_0^g$  est un idéal bilatère de  $\mathbf{R}^g$ . D'autre part, muni du produit scalaire  $\langle T, T' \rangle = Tr(TT'^*)$ ,  $\mathbf{R}_0^g$  est un espace préhilbertien dont nous désignerons le complété abstrait par  $\mathcal{H}$ . L'application  $T \rightarrow T^*$  de  $\mathbf{R}_0^g$  sur  $\mathbf{R}_0^g$  est isométrique<sup>4)</sup>. On a donc  $\langle T'^*, T^* \rangle = \langle T, T' \rangle$ , c'est-à-dire  $Tr(TT'^*) = Tr(T'^*T)$  pour  $T \in \mathbf{R}_0^g$ ,  $T' \in \mathbf{R}_0^g$ . Ainsi,  $\langle T, T' \rangle = \sum_{\iota \in I} \langle T'^*Ta_\iota, a_\iota \rangle = \sum_{\iota \in I} \langle Ta_\iota, T'a_\iota \rangle$ . Donc l'application  $T \rightarrow (Ta_\iota)_{\iota \in I}$  est une application isométrique de  $\mathbf{R}_0^g$  dans  $\bigoplus_{\iota \in I} H_\iota$ ,  $H_\iota$  étant, pour tout  $\iota \in I$ , identique à  $H$  ; cette application se prolonge donc en une application isométrique  $\psi$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\bigoplus_{\iota \in I} H_\iota$ .

Soit  $A'$  l'ensemble des  $a \in H$  bornés à gauche et tels que  $U_a \in \mathbf{R}_0^g$ . Si  $a \in H$  est borné à gauche et si  $T \in \mathbf{R}_0^g$ ,  $Ta$  est borné à gauche, et  $U_{Ta} =$

<sup>4)</sup> En effet, si  $T = KW$  est la décomposition canonique de  $T \in \mathbf{R}_0^g$  en un opérateur  $K$  auto-adjoint  $\geq 0$  et un opérateur  $W$  partiellement isométrique, on a  $T^*T = W^*(TT^*)W$ , et  $TT^* = (WW^*)(TT^*)$ , donc

$$\langle T^*, T^* \rangle = Tr(T^*T) = Tr(WW^*TT^*) = Tr(TT^*) = \langle T, T \rangle .$$

(On notera que l'égalité  $Tr(TT^*) = Tr(T^*T)$  n'est pas absolument évidente puisque  $T$  et  $T^*$  ne sont pas nécessairement de trace finie. Cf. cependant [7].)

$TU_a \in \mathbf{R}_0^g$ , donc  $Ta \in A'$ ; or 1 est fortement adhérent à  $\mathbf{R}_0^g$  (parce que  $Tr$  est essentielle), donc l'adhérence de  $A'$  contient tous les éléments bornés à gauche, de sorte que  $\overline{A'} = H$ .

L'application  $a \rightarrow U_a$  est une application linéaire biunivoque de  $A'$  dans  $\mathcal{H}$ .

**Lemme 14.** — *L'application  $a \rightarrow U_a$  de  $A'$  dans  $\mathcal{H}$  admet un plus petit prolongement linéaire fermé défini dans un ensemble partout dense de  $H$ , et ce prolongement est inversible.*

Pour prouver l'existence d'un prolongement fermé (donc d'un plus petit prolongement fermé, qui sera défini sur un ensemble partout dense puisque  $\overline{A'} = H$ ), il faut prouver ceci : soit  $b_1, b_2, \dots$  une suite d'éléments de  $A'$ , telle que  $b_n \rightarrow 0$ , et telle que  $U_{b_n}$  ait une limite  $u \in \mathcal{H}$  au sens de la structure hilbertienne de  $\mathcal{H}$ ; alors  $u = 0$ .

Or,  $U_{b_n}^*$  a une limite  $v \in \mathcal{H}$  au sens de la structure hilbertienne de  $\mathcal{H}$ , et  $\|v\| = \|u\|$ . Soit  $(c_\iota)_{\iota \in I}$  l'image de  $v$  par l'application  $\psi$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\bigoplus_{\iota \in I} H_\iota$ . On a  $U_{b_n}^* a_\iota \rightarrow c_\iota$  dans  $H_\iota$ , pour tout  $\iota \in I$ . Or, si  $x \in A$ , on a :

$$\langle U_{b_n}^* a_\iota, x \rangle = \langle a_\iota, U_{b_n} x \rangle = \langle a_\iota, V_x b_n \rangle \rightarrow 0$$

donc  $\langle c_\iota, x \rangle = 0$ , de sorte que  $c_\iota = 0$  pour tout  $\iota \in I$ . Ainsi,  $v = 0$  et par suite  $u = 0$ .

Pour prouver que le plus petit prolongement fermé de l'application  $a \rightarrow U_a$  est inversible, on raisonne de façon analogue ; il faut prouver ceci : soit  $b_1, b_2, \dots$  une suite d'éléments de  $A'$  tels que  $b_n \rightarrow b \in H$  et telle que  $U_{b_n} \rightarrow 0$  au sens de  $\mathcal{H}$ ; alors  $b = 0$ . Or, on a  $U_{b_n}^* a_\iota \rightarrow 0$ , donc  $U_{b_n}^* V_x a_\iota = V_x U_{b_n}^* a_\iota \rightarrow 0$  pour  $x \in A$ . Comme plus haut, on en déduit que  $\langle V_x a_\iota, V_y b_n \rangle \rightarrow 0$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ , donc  $\langle V_x a_\iota, V_y b \rangle = 0$ . Comme les  $V_x a_\iota$  sous-tendent  $H$ , on en déduit  $V_y b = 0$ , et, comme 1 est fortement adhérent à l'ensemble des  $V_y$ , on en déduit  $b = 0$ .

Le lemme 14 entraîne l'existence d'un opérateur auto-adjoint inversible, soit  $M$ , dans  $H$ , tel que : 1.  $A' \subset D_M$ ; 2.  $M$  est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à  $A'$ ; 3. pour  $a \in A'$ ,  $b \in A'$ , on a :

$$\langle Ma, Mb \rangle = \langle U_a, U_b \rangle = Tr(U_a U_b^*) . \quad (15)$$

Posons  $M' = SMS$ ,  $L = M^2$ ,  $L' = M'^2$ . Les opérateurs  $M$ ,  $M'$ ,  $L$ ,  $L'$  sont auto-adjoints  $\geq 0$ , et  $L' = SLS$ . Les propriétés annoncées de  $M$  et  $M'$  vont découler des lemmes suivants :

**Lemme 15.** — Si  $a \in A'$  et  $T \in \mathbf{R}^g$ , on a  $Ta \in A'$ .

En effet, on sait que  $Ta$  est borné à gauche ; et on a :  $U_{Ta} = TU_a \in \mathbf{R}_0^g$ , puisque  $U_a \in \mathbf{R}_0^g$ .

**Lemme 16.** — Soient  $a \in D_M$ , et  $T \in \mathbf{R}^g$ .

- a) On a :  $Ta \in D_M$ .
- b) Il existe une suite  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A'$ , avec  $a_n \rightarrow a$ ,  $Ma_n \rightarrow Ma$ , et  $MTa_n \rightarrow MTa$ .

Puisque  $M$  est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à  $A'$ , il existe une suite  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A'$  telle que  $a_n \rightarrow a$ ,  $Ma_n \rightarrow Ma$ . On a  $Ta_n \in A'$  d'après le lemme 15, et  $Ta_n \rightarrow Ta$ . Montrons que  $MTa_n$  a une limite ; cette limite sera  $MTa$  puisque  $M$  est fermé. Pour cela, observons que, si  $T'$  et  $T''$  sont deux opérateurs bornés quelconques dans  $H$ , et  $x$  un vecteur quelconque de  $H$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle T' * T'' * T'' T' x, x \rangle &= \| T'' T' x \|^2 \leq \| T'' \|^2 \| T' x \|^2 \\ &= \| T'' \|^2 \langle T' * T' x, x \rangle \end{aligned}$$

donc  $0 \leq T' * T'' * T'' T' \leq \| T'' \|^2 T' * T'$ . Ceci entraîne en particulier :

$$\begin{aligned} Tr(U_{T(a_n-a_m)} U_{T(a_n-a_m)}^*) &= Tr(T U_{a_n-a_m} U_{a_n-a_m}^* T^*) \\ &= Tr(U_{a_n-a_m}^* T^* T U_{a_n-a_m} \leq \| T \|^2 Tr(U_{a_n-a_m}^* U_{a_n-a_m}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après la formule (15) :

$$\| MT(a_n - a_m) \| \leq \| T \| \| M(a_n - a_m) \| .$$

Comme  $\| M(a_n - a_m) \| \rightarrow 0$ , on en déduit que  $\| MTa_n - MTa_m \| \rightarrow 0$ , ce qui établit notre assertion.

**Lemme 17.** —  $M$  (respectivement  $M'$ ) appartient au sens large à  $\mathbf{R}^d$  (respectivement  $\mathbf{R}^g$ ).

Soient  $a \in A'$ ,  $b \in A'$ ,  $T \in \mathbf{R}^g$  ; d'après le lemme 15,  $T^*a \in A'$  et  $Tb \in A'$ . On a :  $Tr(U_{T^*a} U_b^*) = Tr(T^* U_a U_b^*) = Tr(U_a U_b^* T^*) = Tr(U_a U_{Tb}^*)$ , donc  $\langle MT^*a, Mb \rangle = \langle Ma, MTb \rangle$ . Supposons maintenant  $a \in D_M$ ,  $b \in D_M$ ,  $T \in \mathbf{R}^g$ . D'après le lemme 16, on a  $T^*a \in D_M$ ,  $Tb \in D_M$ , et il existe deux suites  $(a_1, a_2, \dots)$ ,  $(b_1, b_2, \dots)$  dans  $A'$  telles que

$$\begin{aligned} a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b, \quad Ma_n \rightarrow Ma, \quad Mb_n \rightarrow Mb, \quad MT^*a_n \rightarrow MT^*a, \\ MTb_n \rightarrow MTb . \end{aligned}$$

L'égalité  $\langle MT^*a_n, Mb_n \rangle = \langle Ma_n, MTb_n \rangle$  donne à la limite :  $\langle MT^*a, Mb \rangle = \langle Ma, MTb \rangle$ .

Supposons enfin  $a \in D_L, b \in D_L$ . A fortiori,  $a \in D_M, b \in D_M$ , donc  $\langle MT^*a, Mb \rangle = \langle Ma, MTb \rangle$ . Comme en outre  $Mb \in D_M$  et  $Ma \in D_M$ , on en déduit  $\langle T^*a, Lb \rangle = \langle La, Tb \rangle$ , c'est-à-dire :  $\langle La, Tb \rangle = \langle a, TLb \rangle$ . Laissant  $b$  fixe, et faisant varier  $a$  dans  $D_L$ , cette égalité prouve que  $Tb \in D_{L^*} = D_L$ , et que  $LTb = TLb$ . Donc  $T$  est permutable à  $L$ . Donc  $L$ , et par suite  $M$ , appartiennent au sens large à  $\mathbf{R}^d$ . Donc  $M' = SMS$  appartient au sens large à  $\mathbf{R}^d$ .

**Lemme 18.** — Soit  $A'' = A' \cap D_{J^{-1}}$ . Si  $a \in A''$ , on a  $SJ^{-1}a \in A''$ .

En effet,  $SJ^{-1}a$  est borné à gauche, et  $U_{SJ^{-1}a} = U_a^*$  (d'après le lemme 6), donc  $U_{SJ^{-1}a} \in \mathbf{R}_0^d$  puisque  $U_a \in \mathbf{R}_0^d$ . Par suite,  $SJ^{-1}a \in A'$ . En outre,  $SJ^{-1}a \in D_{J^{-1}}$ , puisque  $SJ^{-1} = JS$ .

**Lemme 19.** — Si  $a \in A''$ , et  $T \in \mathbf{P}^g$  ou  $T \in \mathbf{P}^d$ , on a  $Ta \in A''$ .

Si  $a \in A''$  et  $T \in \mathbf{P}^g$ , on a  $Ta \in A'$  d'après le lemme 15 ; comme  $a \in D_{J^{-1}}$  et que  $T$  permute à  $J^{-1}$ , on a aussi  $Ta \in D_{J^{-1}}$ .

Si  $a \in A''$  et  $T \in \mathbf{P}^d$ , on a  $SJ^{-1}a \in A''$  d'après le lemme 18, donc  $STS(SJ^{-1}a) \in A''$  d'après ce qui précède (parce que  $STS \in \mathbf{P}^g$ ) ; à nouveau d'après le lemme 18, le vecteur

$$(JS)(STS)(SJ^{-1}a) = JTJ^{-1}a = Ta$$

est dans  $A''$ .

**Lemme 20.** — La restriction de  $M$  à  $A''$  admet  $M$  pour plus petit prolongement fermé (ce qui entraîne en particulier que  $\overline{A''} = H$ ).

Comme la restriction de  $M$  à  $A'$  admet  $M$  pour plus petit prolongement fermé, il suffit de prouver que le plus petit prolongement fermé de la restriction de  $M$  à  $A''$  est défini au moins dans  $A'$ . Il suffit donc de prouver ceci : soit  $a \in A'$  ; il existe dans  $A''$  une suite  $a_1, a_2, \dots$  telle que  $a_n \rightarrow a$ , avec  $\|Ma_n\|$  borné supérieurement.

Soit  $x_1, x_2, \dots$  une suite d'éléments de  $A$ , pour le moment quelconque. Posons :  $a_n = U_{x_n}a$ . On sait que  $a_n \in A'$  (lemme 15). En outre,  $U_{a_n}^* = (U_{x_n}U_a)^* = U_a^*U_{SJ^{-1}x_n} = U_{U_a^*SJ^{-1}x_n}$ . Donc (lemme 3)  $a_n \in D_{J^{-1}}$ , de sorte que  $a_n \in A''$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \|Ma_n\|^2 &= Tr(U_{a_n}U_{a_n}^*) = Tr(U_{x_n}U_aU_a^*U_{x_n}^*) \\ &= Tr(U_a^*U_{x_n}^*U_{x_n}U_a) \leq \|U_{x_n}\|^2 Tr(U_a^*U_a) \end{aligned}$$

d'après ce qu'on a vu dans la démonstration du lemme 16, c'est-à-dire  $\| Ma_n \| \leq \| U_{x_n} \| \| Ma \|$ . D'après le théorème 1 de [12], il existe une suite  $x_n \in A$  telle que  $\| U_{x_n} \| \leq 1$  et  $U_{x_n} a \rightarrow a$ . Ceci achève de prouver le lemme.

**Lemme 21.** — Soient  $a \in D_M$ , et  $T \in \mathbf{P}^d$ .

- a) On a :  $Ta \in D_M$ .
- b) Il existe une suite  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A''$ , avec  $a_n \rightarrow a$ ,  $Ma_n \rightarrow Ma$  et  $MTa_n \rightarrow MTa$ .

D'après le lemme 20, il existe une suite  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A''$  telle que  $a_n \rightarrow a$ ,  $Ma_n \rightarrow Ma$ . On a :  $Ta_n \in A''$  d'après le lemme 19, et  $Ta_n \rightarrow Ta$ . En outre,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(U_{T(a_n-a_m)} U_{T(a_n-a_m)}^*) &= \text{Tr}(U_{a_n-a_m} (ST^*S)(STS) U_{a_n-a_m}^*) \\ &\leq \| T \|^2 \text{Tr}(U_{a_n-a_m} U_{a_n-a_m}^*) \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 7c. Autrement dit  $\| MTa_n - MTa_m \| \leq \| T \| \| a_n - a_m \|$ . Ainsi,  $MTa_n$  a une limite, de sorte que  $Ta \in D_M$ .

**Lemme 22.** —  $M$  (respectivement  $M'$ ) appartient au sens large à  $\mathbf{Q}^d$  (respectivement  $\mathbf{Q}^g$ ).

Soit  $T \in \mathbf{P}^d$ , et montrons que  $M$  permute à  $T$ . Si  $a \in A''$ ,  $b \in A''$ , on a  $T^*a \in A''$  et  $Tb \in A''$  d'après le lemme 19. En outre, en vertu du lemme 7, on a :  $\text{Tr}(U_{T^*a} U_b^*) = \text{Tr}(U_a STS U_b^*) = \text{Tr}(U_a U_{Tb}^*)$ , c'est-à-dire  $\langle MT^*a, Mb \rangle = \langle Ma, MTb \rangle$ . Grâce au lemme 21, on étend cette égalité au cas où  $a \in D_M$ ,  $b \in D_M$ , comme dans la démonstration du lemme 17. Si enfin  $a \in D_L$ ,  $b \in D_L$ , cette égalité donne  $\langle T^*a, Lb \rangle = \langle La, Tb \rangle$ . Comme dans la démonstration du lemme 17, on en déduit que  $L$ , donc  $M$ , permute à  $T$ . Donc  $M$  appartient au sens large à  $\mathbf{Q}^d$  et par suite  $M'$  appartient au sens large à  $\mathbf{Q}^g$ .

**Lemme 23.** —  $M$ ,  $M'$ ,  $J$  sont deux à deux permutable, et  $J$  est le plus petit prolongement fermé de  $M' M^{-1}$ .

$M$ ,  $M'$ ,  $J$  sont deux à deux permutable, à cause de l'hypothèse  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ , qui interviendra ici seulement. L'opérateur  $M' J^{-1}$  admet donc un plus petit prolongement fermé  $M^1$  qui est auto-adjoint  $\geq 0$ . D'après le lemme 18, on a  $SJ^{-1}(A'') \subset D_M$ , donc  $A'' \subset D_{MSJ^{-1}} = D_{SMSJ^{-1}} = D_{M' J^{-1}} \subset D_{M^1}$ . Pour  $a \in A''$ ,  $b \in A''$  on a :

$$\begin{aligned}\langle Ma, Mb \rangle &= Tr(U_a U_b^*) = Tr(U_b^* U_a) = Tr(U_{SJ^{-1}b} U_{SJ^{-1}a}^*) = \\ \langle MSJ^{-1}b, MSJ^{-1}a \rangle &= \langle SMSJ^{-1}a, SMSJ^{-1}b \rangle = \langle M^1a, M^1b \rangle .\end{aligned}\quad (16)$$

Nous allons en déduire que  $M = M^1$ , ce qui achèvera la démonstration. Soient  $M = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ ,  $M^1 = \int_0^{+\infty} \lambda dE_\lambda^1$  les décompositions spectrales de  $M$  et  $M^1$ . Supposons  $M \neq M^1$ . Alors,  $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0}^1$  pour une certaine valeur  $\lambda_0$  de  $\lambda$ . On a donc, compte tenu du fait que les  $E_\lambda$  et les  $E_\mu^1$  sont deux à deux permutables, ou bien  $E_{\lambda_0}(1 - E_{\lambda_0}^1) \neq 0$ , ou bien  $E_{\lambda_0}^1(1 - E_{\lambda_0}) \neq 0$ . Dans les deux cas, on en déduit l'existence d'un  $a \in D_M \cap D_{M^1}$  tel que  $\|Ma\| \neq \|M^1a\|$ . Comme  $M$  est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à  $A''$ , il existe une suite  $a_1, a_2, \dots$  dans  $A''$  telle que  $a_n \rightarrow a$ ,  $Ma_n \rightarrow Ma$ . On a :  $\|M^1(a_n - a_m)\| = \|M(a_n - a_m)\|$  d'après les égalités (16), donc  $M^1a_n$  a une limite, qui est nécessairement  $M^1a$ . L'égalité  $\|Ma_n\| = \|M^1a_n\|$  entraîne  $\|Ma\| = \|M^1a\|$ , d'où contradiction.

## VII. Éléments quasi-centraux

**Proposition 4.** — *Pour un élément  $a \in H$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $\langle a, x^j y \rangle = \langle a, y x \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$ .
- b)  $U_{x^j} a = V_x a$  pour  $x \in A$ .
- c)  $Ta = ST^*Sa$  pour  $T \in \mathbf{R}^d$  (donc pour  $T \in \mathbf{R}^g$ )

En effet, on a, pour  $x \in A$  et  $y \in A$  :

$$\langle a, x^j y \rangle = \langle U_{x^j} a, y \rangle \quad \langle a, y x \rangle = \langle V_{x^{j-1}} a, y \rangle$$

donc la condition  $\langle a, x^j y \rangle = \langle a, y x \rangle$  pour  $x \in A$ ,  $y \in A$  équivaut à  $U_{x^j} a = V_{x^{j-1}} a$  pour  $x \in A$ , c'est-à-dire à  $U_{x^j} a = V_x a$  pour  $x \in A$ . D'autre part,  $U_{x^j} = U_{x^g}^* = (SV_x S)^* = SV_x^* S$ , de sorte que la condition c entraîne la condition b. Enfin, la condition b entraîne la condition c puisque tout  $T \in \mathbf{R}^d$  est limite faible d'opérateurs  $V_x$ .

**Définition 4.** — *Si  $a \in H$  vérifie les conditions de la proposition 4, nous dirons que  $a$  est quasi-central.*

Soit  $H^c$  l'ensemble des éléments quasi-centraux. Il est évident que  $H^c$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ .

**Proposition 5.** — *Si  $a \in H^c$ , on a  $Sa \in H^c$ , et  $Ja = a$ . En outre,  $Ca \in H^c$  pour tout  $C \in \mathbf{R}$ .*

Si  $a \in H^c$ , on a  $T(Sa) = S(STSa) = S(T^*a) = (ST^*S)(Sa)$  pour  $T \in \mathbf{R}^d$ , donc  $Sa \in H^c$ . D'autre part,  $T(Ca) = C(Ta) = C(ST^*Sa) = (ST^*S)(Ca)$ , donc  $Ca \in H^c$ . Enfin, pour  $x \in A$  et  $y \in A$ , on a :

$$\langle a, xy \rangle = \langle a, Jy \cdot x \rangle = \langle a, Jx \cdot Jy \rangle = \langle a, J(xy) \rangle$$

donc  $a \in D_J$  et  $Ja = a$ .

Pour démontrer le théorème 4 ci-dessous, nous sommes obligés d'introduire l'axiome suivant :

**A' 5.** — *Il existe un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $A$  tel que  $U_x$  et  $V_x$  convergent faiblement vers 1 suivant  $\mathcal{F}$  en restant de normes bornées.*

*Remarques.* — 1. L'axiome A5 est une conséquence de A'5 et de l'axiome suivant :

**A"5.** — *Les éléments  $x + x^i$ , où  $x \in A$ , sont partout denses dans  $A$ .*

En effet, quand  $x$  converge suivant  $\mathcal{F}$ ,  $SV_x^*S = U_{x^i}$  converge faiblement vers 1, donc  $xy + (xy)^i = U_x y + U_{x^i} y^i$  converge faiblement vers  $y + y^i$ .

2. Il existe toujours (d'après le théorème 1 de [12]) un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $A$  tel que  $U_x$  converge faiblement vers 1 suivant  $\mathcal{F}$  en restant de norme bornée. Si  $A$  est une algèbre unitaire,  $V_x = SU_x^*S$  converge aussi faiblement vers 1 suivant  $\mathcal{F}$  en restant de norme bornée, de sorte que A'5 (et, naturellement, A"5) sont vérifiés.

Soit  $F$  le sous-espace fermé de  $H$  engendré par les  $Ta$ , où  $T \in \mathbf{R}^d$  et  $a \in H^c$ . Le sous-espace  $F$  est stable par  $\mathbf{R}^d$ , et aussi par  $\mathbf{R}^g$ , car  $U_x Ta = TU_x a = TV_{J^{-1}x} a \in F$  pour  $a \in H^c$ ,  $T \in \mathbf{R}^d$  et  $x \in A$ . Donc  $F$  est aussi le sous-espace fermé de  $H$  engendré par les  $Ta$ ,  $T \in \mathbf{R}^g$ ,  $a \in H^c$ . Le projecteur sur  $F$  est un opérateur de  $\mathbf{R}$ .

**Théorème 4.** — *Supposons  $Q^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $Q^g \subset \mathbf{P}^g$ . La condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  soient de classe finie est que  $F = H$ .*

Observons d'abord que, si  $a \in H^c$ , l'application  $T \mapsto \langle Ta, a \rangle$  est une trace sur  $\mathbf{R}^d$  (et sur  $\mathbf{R}^g$ ). Car c'est une forme linéaire positive, et

$$\begin{aligned} \langle TT'a, a \rangle &= \langle T(ST'^*S)a, a \rangle = \langle (ST'^*S)Ta, a \rangle \\ &= \langle Ta, ST'Sa \rangle = \langle Ta, T'^*a \rangle = \langle T'Ta, a \rangle. \end{aligned}$$

Ceci posé, si  $\langle T^*Ta, a \rangle = 0$  pour un  $T \in \mathbf{R}^d$  quel que soit  $a \in H^c$ , on a  $T(H^c) = 0$ , donc  $T(F) = 0$ . Si  $F = H$  on voit donc que  $\mathbf{R}^d$

possède un système complet de traces, de sorte que ([8], lemme 12),  $\mathbf{R}^d$  est de classe finie (donc aussi  $\mathbf{R}^g$ ). Cette partie du raisonnement ne suppose pas que  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ .

Supposons maintenant  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ , et  $\mathbf{R}^d$ ,  $\mathbf{R}^g$  de classe finie<sup>5)</sup>. Raisonnant par l'absurde, supposons  $F \neq H$ . Utilisant une décomposition centrale discrète, nous sommes ramenés à la situation suivante :  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ ,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ ,  $\mathbf{R}^d$  et  $\mathbf{R}^g$  sont de classe finie,  $H \neq 0$  et  $H^c = 0$ , et il existe une trace normale fidèle partout définie  $Tr$  sur  $\mathbf{R}^g$ .

On peut alors raisonner comme dans le paragraphe VI, et construire des opérateurs  $M$ ,  $M'$  ayant les propriétés du théorème 3. Mais de plus (adoptant les notations antérieures),  $A'$  est alors l'ensemble des éléments bornés à gauche, et on a, pour  $y \in A'$  :

$$\|My\|^2 = Tr(U_y U_y^*) \leq k^2 \|U_y\|^2.$$

Faisons converger  $y$  suivant  $\mathcal{F}$ . L'inégalité  $\|My\| \leq k \|U_y\|$  pour  $y \in A$  entraîne qu'il existe un filtre  $\mathcal{F}'$  plus fin que  $\mathcal{F}$  tel que  $My$  converge faiblement suivant  $\mathcal{F}'$  vers un élément  $a \in H$ . Et l'égalité  $MV_x x = MU_x y = U_x My$  (où  $x \in A$ ,  $y \in A$ ) entraîne, en faisant converger  $y$  suivant  $\mathcal{F}'$ ,  $Mx = U_x a$  (tenant compte du fait que  $M$  est fermé). Ceci posé, on a, pour tout  $x \in A$  et tout  $y \in A$  :

$$\begin{aligned} \langle a, Jx \cdot y \rangle &= \langle U_{x^s} a, y \rangle = \langle Mx^s, y \rangle = \langle x^s, My \rangle = \langle SMSy^s, x \rangle \\ &= \langle MJy^s, x \rangle = \langle U_{Jy^s} a, x \rangle = \langle a, yx \rangle \end{aligned}$$

donc  $a \in H^c$ , et par suite  $a = 0$ . Alors  $Mx = U_x a = 0$  pour tout  $x \in A$ , contrairement au fait que  $M$  est inversible.

### VIII. Algèbres quasi-unitaires achevées

**Lemme 24.** — Si  $a$  est borné à gauche et  $b$  borné à droite, on a  $U_a b = V_b a$ .

Supposons d'abord  $b \in D_J$ . Si  $x \in A$  et  $y \in A$ , on a :

$$\langle U_a x, y \rangle = \langle V_x a, y \rangle = \langle a, y x^s \rangle.$$

<sup>5)</sup> Si  $J = 1$  (cas des algèbres unitaires), la fin de la démonstration peut être considérablement abrégée : les opérateurs  $U_a$ ,  $a$  borné à gauche, forment un idéal bilatère non nul de  $\mathbf{R}^g$ ; et, dans un anneau de classe finie, tout idéal bilatère non nul contient un opérateur central non nul comme on le voit aisément; donc  $H^c \neq 0$ ; à partir de là, on démontre sans peine que  $F = H$ . (Le théorème 4 est connu dans le cas des algèbres unitaires : cf. [8], théorème 5; et [17]).

En considérant une suite  $x_n \in A$  telle que  $x_n \rightarrow b$ ,  $Jx_n \rightarrow Jb$ , l'égalité précédente donne à la limite, compte tenu du lemme 6

$$\langle U_a b, y \rangle = \langle a, U_y SJb \rangle = \langle a, V_{SJb} y \rangle = \langle V_b a, y \rangle$$

donc  $U_a b = V_b a$ . Supposons maintenant  $b$  borné à droite quelconque. Si  $z \in A$ , on a  $V_{V_z b}^* = (V_z V_b)^* = V_b^* V_{z^*} = V_{V_b^* z^*}$ , de sorte que  $V_z b$ , qui est borné à droite, appartient à  $D_J$  (lemme 3). D'après la première partie de la démonstration, on a donc  $U_a V_z b = V_{V_z b} a = V_z V_b a$ ; en faisant converger fortement  $V_z$  vers 1, on a le lemme.

*Définition 5.* — Soient  $A$  et  $A'$  deux algèbres quasi-unitaires. Nous dirons que  $A'$  est un prolongement de  $A$  si : 1)  $A$  est une sous-\*algèbre de  $A'$ ; 2) le produit scalaire et l'automorphisme de  $A$  s'obtiennent en restreignant à  $A$  le produit scalaire et l'automorphisme de  $A'$ ; 3)  $A$  est partout dense dans  $A'$ . Nous dirons que  $A$  est une algèbre quasi-unitaire achevée si  $A$  n'admet aucune extension distincte de  $A$ .

Si  $A'$  est un prolongement de  $A$ , et si  $S^g$ ,  $S^d$  sont les anneaux d'opérateurs définis par  $A'$ , on a  $R^g \subset S^g$ ,  $R^d \subset S^d$  donc  $R^g = S^g$ ,  $R^d = S^d$  en vertu du théorème 1.

*Proposition 6.* — Soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire. Tous les prolongements de  $A$  sont contenus dans l'un d'entre eux qui est une algèbre quasi-unitaire achevée.

Soit toujours  $H$  l'espace hilbertien complété de  $A$ . Soit  $A_1$  l'ensemble des  $a \in H$  tels que tous les  $J^n a$  ( $n$  entier positif ou négatif) existent et soient bornés à gauche. D'après le lemme 6, les  $SJ^n a$  sont bornés à gauche, donc (lemme 5) les  $J^n a$  sont aussi bornés à droite.

Soient  $a \in A_1$ ,  $b \in A_1$ . On a, pour  $x \in A$  :

$$\begin{aligned} \langle U_{J_a} Jb, x \rangle &= \langle Jb, U_{S_a} x \rangle = \langle Jb, V_x Sa \rangle \\ &= \langle V_{SJ_x} Jb, Sa \rangle = \langle U_{Jb} SJx, Sa \rangle = \langle a, SU_{Jb} SJx \rangle \\ &= \langle a, V_{SJb} Jx \rangle = \langle V_b a, Jx \rangle = \langle U_a b, Jx \rangle \end{aligned}$$

donc  $J(U_a b)$  existe et est égal à  $U_{J_a} Jb$ . De même,  $J(U_{J_a} Jb)$  existe et est égal à  $U_{J^2 a} J^2 b$ , et d'autre part à  $J^2 U_a b$ . Par récurrence,  $J^n(U_a b)$  existe et est égal à  $U_{J^n a} J^n b$  pour  $n$  entier  $\geq 0$ . Donc  $J^n(U_{J^{-n} a} J^{-n} b)$  existe et est égal à  $U_a b$  pour  $n$  entier  $\geq 0$ , de sorte que  $J^{-n}(U_a b) = U_{J^{-n} a} J^{-n} b$ . Bref,  $J^n(U_a b)$  existe pour tout entier  $n$ , et est égal à  $U_{J^n a} J^n b$ , et par suite borné à gauche. Donc  $U_a b \in A_1$ .

Posons alors, pour  $a \in A_1$  et  $b \in A_1$ ,  $ab = U_a b$ . Cette multiplication prolonge évidemment celle de  $A$ . Elle est associative, car, si  $a, b, c \in A_1$ , on a :

$$(ab)c = U_{ab}c = U_{U_a b}c = U_a U_b c = U_a(bc) = a(bc) .$$

D'autre part, si  $a \in A_1$ , on a  $Sa \in A_1$ . Car  $SJ^{-n}a = J^n Sa$  existe pour tout entier  $n$  et est borné à droite et à gauche. Et  $S$  définit un anti-automorphisme involutif de  $A_1$ , car, si  $a \in A_1$ ,  $b \in A_1$  on a :

$$S(ab) = SU_a b = V_{Sa} Sb = U_{Sb} Sa = (Sb)(Sa) .$$

L'opérateur  $J$  induit évidemment une application biunivoque de  $A_1$  sur  $A_1$ . Cette application est un automorphisme, car

$$J(ab) = JU_a b = U_{Ja} Jb = (Ja)(Jb) .$$

Les axiomes A1 à A5 se vérifient alors sans aucune difficulté, de sorte que l'algèbre quasi-unitaire  $A_1$  prolonge  $A$ .

Maintenant, soit  $A'$  un prolongement quelconque de  $A$ , que nous pouvons identifier à un sous-espace de  $H$ . On a montrer, ce qui achèvera la démonstration, que  $A_1$  est un prolongement de  $A'$ . Soient  $s'$  et  $j'$  l'anti-automorphisme et l'automorphisme de  $A'$ . Comme  $s'$  est continue et induit  $s$  sur  $A$ , on a nécessairement  $x^{s'} = Sx$  pour  $x \in A'$ . D'autre part,  $j'$  prolonge  $j$ , donc  $j'^* = J$  prolonge  $j'^*$  et a fortiori  $j'$ ; on a donc  $A' \subset D_J$ , et  $j'$  est la restriction de  $J$  à  $A'$ ; en outre, comme  $j'$  est une application biunivoque de  $A'$  sur  $A'$ , on a  $A' \subset D_{J^n}$  pour tout entier  $n$ . Enfin, si  $a \in A'$  et  $x \in A$ , le produit  $ax$  calculé dans  $A'$  dépend continûment de  $a$ , et est égal à  $V_x a$  si  $a \in A$ ; il est donc encore égal à  $V_x a$  pour  $a \in A'$ ; comme d'autre part il dépend continûment de  $x$ , on voit que  $a$  est borné à gauche (donc  $A' \subset A_1$ ) et que  $ax = U_a x$  pour  $x \in A$ ; on a donc encore  $ab = U_a b$  pour  $a \in A'$ ,  $b \in A'$ . Ainsi  $A_1$  est un prolongement de  $A'$ .

*Remarque.* — Si  $A$  vérifie les axiomes A'5 et A"5, il en est évidemment de même de  $A_1$ .

**Proposition 7.** — Soit  $A$  une algèbre quasi-unitaire achevée.

- a) Si  $a \in H$  est tel que  $J^n a$  existe et soit borné à gauche (respectivement à droite) pour tout entier  $n$ , on a  $a \in A$ .
- b) Si  $a \in A$  et  $T \in \mathbf{P}^g$  (respectivement  $T \in \mathbf{P}^d$ ), on a  $Ta \in A$ .

La première partie de la proposition résulte aussitôt de la démonstration précédente. La deuxième partie résulte de la première partie et du lemme 7.

## IX. Décomposition centrale continue

**Lemme 25.** — Soient  $A$  une algèbre quasi-unitaire,  $B$  une partie de  $A$ . Supposons que, pour tout  $x \in A$ , il existe une suite  $x_n \in B$  telle que  $x_n \rightarrow x$  et  $x_n^i \rightarrow x^i$ . Alors, si un élément  $a \in H$  est tel que  $\|V_y a\| \leq M \|y\|$  pour  $y \in B$ ,  $a$  est borné à gauche.

En effet, soit  $x \in A$ , et soit  $x_n \in B$  une suite ayant les propriétés du lemme. Pour tout  $z \in A$ , on a :

$$|\langle U_z^* a, SJx_n \rangle| = |\langle a, z \cdot SJx_n \rangle| = |\langle V_{x_n} a, z \rangle| \leq M \|x_n\| \|z\|.$$

Donc :

$$|\langle V_x a, z \rangle| = |\langle U_z^* a, SJx \rangle| = |\lim \langle U_z^* a, SJx_n \rangle| \leq M \|x\| \|z\|.$$

Par suite,  $\|V_x a\| \leq M \|x\|$ , ce qui prouve le lemme.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons vérifiés les axiomes suivants, plus forts respectivement que A'5 et A"5.

B'5. — Il existe un filtre  $\mathcal{F}$  sur  $A$  tel que  $U_x$  et  $V_x$  convergent fortement vers 1 suivant  $\mathcal{F}$  en restant de normes bornées<sup>6)</sup>.

B"5. — Pour tout entier  $n$ , les éléments  $x + x^{j^n}$ ,  $x \in A$ , sont partout denses dans  $A$ .

D'après un raisonnement fait au § 1, B"5 signifie que  $J^n$  est le plus petit prolongement fermé de sa restriction à  $A$ .

En outre, nous supposerons  $H$  séparable. Alors, dans l'espace des opérateurs continus sur  $H$ , toute boule fermée, munie de la topologie forte, est métrisable et séparable ; l'axiome B'5 entraîne donc qu'il existe dans  $A$  une suite, que nous désignerons par  $t_1, t_2, \dots$  dans tout ce paragraphe, telle que  $U_{t_n}$  et  $V_{t_n}$  convergent fortement vers 1 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Proposition 8.** — Supposons  $A$  achevée. Soit  $Z$  le spectre, hyperstonien (cf. [6]), de  $R$ . On peut définir :

1. — une mesure positive normale  $\mu$  de support  $Z$
2. — pour tout  $\zeta \in Z$ , un espace hilbertien  $H(\zeta)$  séparable
3. — pour presque tout  $\zeta \in Z$ , une algèbre quasi-unitaire achevée irréductible  $A(\zeta)$  dans  $H(\zeta)$ , vérifiant B'5 et B"5, pour laquelle nous emploierons les notations  $s(\zeta), S(\zeta), j(\zeta) \dots$  dans un sens évident

---

<sup>6)</sup> Cet axiome est toujours vérifié pour une algèbre unitaire. Ceci résulte, comme pour A'5, du théorème 1 de [12], ou plutôt d'un léger renforcement de ce théorème que donne aussitôt la démonstration de [12].

4. — une famille fondamentale  $A$  de champs de vecteurs continus  $x(\zeta) \in H(\zeta)$  vérifiant l'axiome A4 de [9].

5. — un isomorphisme de  $H$  sur  $L_A^2(\mu)$  par lequel nous identifions désormais ces deux espaces,

avec les propriétés suivantes :

(a) Les opérateurs de  $\mathbf{R}$  sont les opérateurs continus à composantes scalaires ; si  $T \sim T(\zeta)$  est un élément de  $\mathbf{R}$ ,  $T(\zeta)$  est, pour presque tout  $\zeta$ , la valeur en  $T$  du caractère  $\zeta \in Z$ .

(b) Soit  $a \sim a(\zeta)$  un élément de  $H$  ; pour que  $a$  soit borné à gauche (respectivement à droite), il faut et il suffit que presque tous les  $a(\zeta)$  soient bornés à gauche (respectivement à droite) et que  $\text{ess. sup.} \|U_{a(\zeta)}\| < +\infty$  (respectivement  $\text{ess. sup.} \|V_{a(\zeta)}\| < +\infty$ ) ; lorsqu'il en est ainsi, on a :  $U_a \sim U_{a(\zeta)}$  (respectivement  $V_a \sim V_{a(\zeta)}$ ).

(c) Si  $a \sim a(\zeta)$  est un élément de  $H$ , on a  $Sa \sim S(\zeta)a(\zeta)$ .

(d) Soit  $a \sim a(\zeta)$  un élément de  $H$  ; pour que  $a \in D_{J^n}$ , il faut et il suffit que  $a(\zeta) \in D_{J(\zeta)^n}$  pour presque tout  $\zeta$ , et que  $J(\zeta)^n a(\zeta) \in L_A^2(\mu)$  ; lorsqu'il en est ainsi, on a :  $J^n a \sim J(\zeta)^n a(\zeta)$ .

(e) Soit  $a \sim a(\zeta)$  un élément de  $H$  ; pour que  $a \in A$ , il faut et il suffit que  $a(\zeta) \in A(\zeta)$  pour presque tout  $\zeta$ , que  $a(\zeta)^{j(\zeta)n} \in L_A^2(\mu)$  pour tout entier  $n$ , et que  $\text{ess. sup.} \|U_{a(\zeta)}\| < +\infty$ .

(f) Si  $x \sim x(\zeta)$  et  $y \sim y(\zeta)$  sont des éléments de  $A$ , on a  $xy \sim x(\zeta)y(\zeta)$ ,  $x^s \sim x(\zeta)^{s(\zeta)}$ ,  $x^j \sim x(\zeta)^{j(\zeta)}$ .

En outre, si  $A(\zeta)^\sim, H(\zeta)^\sim, \dots$  possèdent les mêmes propriétés, il existe, pour presque tout  $\zeta$ , un isomorphisme  $\varphi(\zeta)$  de  $A(\zeta)$  sur  $A(\zeta)^\sim$  tel que, si  $a \in H$  se décompose suivant les  $a(\zeta) \in H(\zeta)$  et les  $a(\zeta)^\sim \in H(\zeta)^\sim$ , on ait presque partout  $a(\zeta)^\sim = \overline{\varphi(\zeta)}a(\zeta)(\overline{\varphi(\zeta)})$  étant le prolongement continu de  $\varphi(\zeta)$  à  $H(\zeta)$ .

La démonstration suivante utilise des raisonnements non publiés de R. Godement sur les sommes continues.

1. — Construction de  $\mu$ . — Soit  $\mu_{a,b}$  la mesure spectrale sur  $Z$  associée à deux éléments  $a, b$  de  $H$  (cf. [9]). Soit  $D \subset A$  un ensemble dénombrable possédant les propriétés suivantes : 1)  $D$  est stable pour  $s, j, j^{-1}$  et la multiplication ; 2) toute combinaison linéaire à coefficients rationnels d'éléments de  $D$  est dans  $D$  ; 3)  $t_i \in D$  pour tout  $i$  ; 4) les  $x + x^{jn}$ , où  $x \in D$ , sont partout denses dans  $A$  pour tout  $n$ . Soit  $A'$  l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) des éléments de  $D$ . Alors  $A'$  est une sous-\*algèbre de  $A$  stable pour  $j$  et  $j^{-1}$ , et  $D$  sera évidem-

ment partout dense dans  $A'$  pour toutes les structures d'espaces préhilbertiens que nous construirons sur  $A'$ .

Soit  $\mu = \sum_{x \in D} \alpha_x \mu_{x,x}$ , les  $\alpha_x > 0$  étant choisis de telle sorte que  $\sum |\alpha_x| \|\mu_{x,x}\| < +\infty$ . La mesure  $\mu$  est une mesure normale, de support  $Z$  (parce que  $\overline{D} = H$ ).

2. — *Construction de  $A(\zeta)$  et  $H(\zeta)$ .* — Pour  $a \in H$ ,  $b \in H$ ,  $\mu_{a,b}$  est une mesure normale, donc  $d\mu_{a,b}(\zeta) = \theta_{a,b}(\zeta) d\mu(\zeta)$ , où  $\theta_{a,b}(\zeta)$  est une fonction à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ , qui peut être supposée continue, ce qui la détermine complètement. En outre, d'après le choix de  $\mu$ ,  $\theta_{a,b}(\zeta)$  est bornée quand  $a \in D$ ,  $b \in D$ , donc quand  $a \in A'$ ,  $b \in A'$ .

Pour  $\zeta$  fixé dans  $Z$ , et  $x, y$  variant dans  $A'$ ,  $\theta_{x,y}(\zeta)$  est une forme sesquilinearéaire hermitienne positive sur  $A'$ ; en effet, les égalités immédiates  $\mu_{\lambda x, y} = \lambda \mu_{x, y}$ ,  $\mu_{x+x', y} = \mu_{x, y} + \mu_{x', y}$ ,  $\mu_{y, x} = \overline{\mu_{x, y}}$ ,  $\mu_{x, x} \geq 0$ , entraînent

$$\theta_{\lambda x, y}(\zeta) = \lambda \theta_{x, y}(\zeta), \quad \theta_{x+x', y}(\zeta) = \theta_{x, y}(\zeta) + \theta_{x', y}(\zeta),$$

$$\theta_{y, x}(\zeta) = \overline{\theta_{x, y}(\zeta)}, \quad \theta_{x, x}(\zeta) \geq 0$$

pour tout  $\zeta$  (parce que les  $\theta$  sont continues). Soit  $I(\zeta)$  le sous-espace des  $x \in A'$  tels que  $\theta_{x, x}(\zeta) = 0$ . On va montrer que  $I(\zeta)$  est un idéal bilatère de  $A'$  stable pour  $s$ ,  $j$  et  $j^{-1}$ .

Pour  $T \in \mathbf{R}$ ,  $a \in H$ ,  $b \in H$ , on a (corollaire de la proposition 1) :

$$\langle TSb, Sa \rangle = \langle a, STSb \rangle = \langle a, T^*b \rangle = \langle Ta, b \rangle$$

donc  $\mu_{Sb, Sa} = \mu_{a, b}$ , et par suite

$$\theta_{Sb, Sa}(\zeta) = \theta_{a, b}(\zeta) \tag{17}$$

pour tout  $\zeta$ . En particulier,  $I(\zeta)$  est stable pour  $S$ .

Soit maintenant  $T'$  un opérateur continu de  $H$  permutable à  $\mathbf{R}$ . Soit  $a \in H$ . Pour tout  $T \in \mathbf{R}^+$ , on a

$$\begin{aligned} \langle TT'a, T'a \rangle &= \langle T' T^{\frac{1}{2}} a, T' T^{\frac{1}{2}} a \rangle \\ &\leq \|T'\|^2 \langle T^{\frac{1}{2}} a, T^{\frac{1}{2}} a \rangle = \|T'\|^2 \langle Ta, a \rangle \end{aligned}$$

donc  $\mu_{T'a, T'a} \leq \|T'\|^2 \mu_{a, a}$ , et par suite

$$\theta_{T'a, T'a}(\zeta) \leq \|T'\|^2 \theta_{a, a}(\zeta) \tag{18}$$

pour tout  $\zeta$ . En particulier, pour  $x \in A'$ ,  $y \in A'$ , on a

$$\theta_{xy, xy}(\zeta) \leq \|U_x\|^2 \theta_{y, y}(\zeta) \tag{19}$$

$$\theta_{xy, xy}(\zeta) \leq \|V_y\|^2 \theta_{x, x}(\zeta) \tag{19'}$$

pour tout  $\zeta$ . Par conséquent  $I(\zeta)$  est un idéal bilatère de  $A'$ .

Enfin, pour  $T \in \mathbf{R}^+$  et  $a \in D_{J^2}$ , on a (proposition 1) :

$$\begin{aligned}\langle Ja, TJ a \rangle^2 &= \langle T^{\frac{1}{2}} a, T^{\frac{1}{2}} J^2 a \rangle^2 \leq \| T^{\frac{1}{2}} a \|^2 \| T^{\frac{1}{2}} J^2 a \|^2 \\ &= \langle a, Ta \rangle \langle J^2 a, TJ^2 a \rangle\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &[\int \theta_{Ja, Ja}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)]^2 \\ &\leq [\int \theta_{a, a}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)] [\int \theta_{J^2 a, J^2 a}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)]. \quad (20)\end{aligned}$$

Supposons alors plus particulièrement  $a \in A'$ , et  $\theta_{a, a}(\zeta) = 0$  pour un certain  $\zeta$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un ensemble compact ouvert  $K$  contenant  $\zeta$  tel que  $\theta_{a, a}(\zeta') \leq \varepsilon$  pour  $\zeta' \in K$ . D'où, en désignant par  $M$  la borne supérieure de  $\theta_{J^2 a, J^2 a}(\zeta)$  :

$$\mu(K)^{-1} \int_K \theta_{Ja, Ja}(\zeta) d\mu(\zeta) \leq (\varepsilon M)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit que  $\theta_{Ja, Ja}(\zeta) = 0$ . Donc  $I(\zeta)$  est stable pour  $J$ . Comme (20) entraîne, pour  $a \in D_{J^{-2}}$  et  $T \in \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned} &[\int \theta_{J^{-1} a, J^{-1} a}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)]^2 \\ &\leq [\int \theta_{J^{-2} a, J^{-2} a}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)] [\int \theta_{a, a}(\zeta) T(\zeta) d\mu(\zeta)]\end{aligned}$$

on voit de même que  $I(\zeta)$  est stable pour  $J^{-1}$ .

Ceci posé, le quotient  $A'/I(\zeta) = A'(\zeta)$  est muni naturellement d'une structure d'algèbre, d'une involution  $s'(\zeta)$ , d'un automorphisme  $j'(\zeta)$ , et d'un produit scalaire qu'on notera encore  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On va montrer que  $A'(\zeta)$  est, pour presque tout  $\zeta$ , une algèbre quasi-unitaire. Pour tout  $x \in A'$ , nous désignerons par  $x(\zeta)$  l'image canonique de  $x$  dans  $A'(\zeta)$ .

Si  $T \in \mathbf{R}^+$  et  $a \in D_J$ , on a  $\langle Ta, Ja \rangle = \langle TJ^{\frac{1}{2}} a, J^{\frac{1}{2}} a \rangle \geq 0$ , donc  $\mu_{a, Ja} \geq 0$ , et par suite  $\theta_{a, Ja}(\zeta) \geq 0$  pour tout  $\zeta$ . En particulier, si  $x \in A'$ , on a  $\langle x(\zeta), x(\zeta)^{j'(\zeta)} \rangle \geq 0$ , ce qui est l'axiome A 1.

L'égalité (17) donne en particulier, pour  $x \in A'$ , l'égalité  $\langle x(\zeta), x(\zeta) \rangle = \langle x(\zeta)^{s'(\zeta)}, x(\zeta)^{s'(\zeta)} \rangle$ , ce qui est l'axiome A 2.

Soit  $T'$  un opérateur continu de  $H$  permutable à  $\mathbf{R}$ ; pour  $a \in H$ ,  $b \in H$ ,  $T \in \mathbf{R}$ , on a  $\langle TT'a, b \rangle = \langle Ta, T'^*b \rangle$ , donc

$$\theta_{T'a, b}(\zeta) = \theta_{a, T'^*b}(\zeta) \quad (21)$$

pour tout  $\zeta$ . En particulier, si  $x \in A'$ ,  $y \in A'$ ,  $z \in A'$ , on a  $\theta_{xy, z}(\zeta) = \theta_{y, xz}(\zeta)$ , c'est-à-dire  $\langle x(\zeta)y(\zeta), z(\zeta) \rangle = \langle y(\zeta), x(\zeta)^{s'(\zeta)}z(\zeta) \rangle$ , ce qui est l'axiome A 3.

L'inégalité (18) entraîne

$$\langle x(\zeta) y(\zeta), x(\zeta) y(\zeta) \rangle \leq \|U_x\|^2 \langle y(\zeta), y(\zeta) \rangle \quad (22)$$

ce qui est l'axiome A 4.

Soit  $x \in D$ . On a :  $\int \theta_{t_n x - x, t_n x - x}(\zeta) d\mu(\zeta) = \|t_n x - x\|^2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , donc, en extrayant au besoin une suite partielle de la suite  $(t_n)$ ,  $\theta_{t_n x - x, t_n x - x}(\zeta) \rightarrow 0$  sauf sur un ensemble négligeable  $N_x$ . Soit  $N = \bigcup_{x \in D} N_x$ , qui est négligeable. Pour  $\zeta \notin N$ , on a  $\theta_{t_n x - x, t_n x - x}(\zeta) \rightarrow 0$  pour tout  $x \in D$  (la nouvelle suite  $(t_n)$  ayant été choisie valable pour tous les  $x$  par application du procédé diagonal). Autrement dit,  $\|t_n(\zeta)x(\zeta) - x(\zeta)\| \rightarrow 0$  quand  $x \in D$ , pour tout  $\zeta \notin N$ . De même, il existe un ensemble négligeable  $N_1$  tel que  $\|x(\zeta)t_n(\zeta) - x(\zeta)\| \rightarrow 0$  quand  $x \in D$ , pour tout  $\zeta \notin N_1$ . Ceci, avec l'inégalité (22), entraîne que B' 5 est vérifié pour  $\zeta \notin N \cup N_1$ .

Soient  $n$  un entier et  $x$  un élément de  $D$ . Il existe une suite  $x_p \in D$  telle que  $\|x_p + x_p^{j^n} - x\| \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . On en déduit comme ci-dessus que, sauf sur un ensemble négligeable  $N'_{n,x}$ , on a  $\|x_p(\zeta) + x_p(\zeta)^{j^{n(\zeta)}} - x(\zeta)\| \rightarrow 0$  quand  $p \rightarrow +\infty$ . Soit  $N'$  la réunion, négligeable, des  $N'_{n,x}$  quand  $x$  parcourt  $D$  et  $n$  l'ensemble des entiers. Pour  $\zeta \notin N'$  l'axiome B"5 est vérifié.

Pour  $\zeta \notin N \cup N_1 \cup N' = N_2$ ,  $A'(\zeta)$  est donc une algèbre quasi-unitaire séparable. Soit  $A(\zeta)$  l'algèbre quasi-unitaire achevée correspondante, qui vérifie aussi B'5 et B"5. Soit  $H(\zeta)$  l'espace complété de  $A'(\zeta)$ , donc aussi de  $A(\zeta)$ , pour  $\zeta \notin N_2$ . Nous désignerons par  $s(\zeta)$  et  $j(\zeta)$  l'antiautomorphisme et l'automorphisme de  $A(\zeta)$  (définis pour  $\zeta \notin N_2$ ).

3. *Définition de la famille fondamentale A.* Nous prendrons pour famille  $A$  la famille des champs de vecteurs  $\zeta \rightarrow x(\zeta)$  pour  $x \in A'$ . Il est immédiat que l'axiome  $(A_1)$  de [9] est vérifié. L'axiome  $(A_2)$  est vérifié à cause de l'égalité  $\langle x(\zeta), x(\zeta) \rangle = \theta_{x,x}(\zeta)$  pour  $x \in A'$ . L'axiome  $(A_4)$  est vérifié en considérant les  $x \in D$ .

4. — *Isomorphisme de  $H$  et  $L_A^2(\mu)$  ; démonstration de a.* Soient  $x \in A'$ ,  $y \in A'$ ,  $T \in \mathbf{R}$ . On a

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \int T(\zeta) d\mu_{x,y}(\zeta) = \int T(\zeta) \theta_{x,y}(\zeta) d\mu(\zeta) \\ &= \int T(\zeta) \langle x(\zeta), y(\zeta) \rangle d\mu(\zeta). \end{aligned} \quad (23)$$

En particulier l'application qui, au vecteur  $x \in A'$ , fait correspondre le champ  $x(\zeta)$  de  $L_A^2(\mu)$ , est isométrique. Elle se prolonge donc en un isomorphisme de  $H$  dans  $L_A^2(\mu)$ . Nous désignerons encore par  $a(\zeta)$  le

champ de vecteurs de carré intégrable associé à  $a \in H$  par cet isomorphisme. Pour  $a \in H$ ,  $b \in H$  et  $T \in \mathbf{R}$ , l'égalité (23) entraîne, par passage à la limite, l'égalité

$$\langle Ta, b \rangle = \int T(\zeta) \langle a(\zeta), b(\zeta) \rangle d\mu(\zeta). \quad (24)$$

Comme d'autre part  $\langle Ta, b \rangle = \int \theta_{T,a,b}(\zeta) d\mu(\zeta) = \int T(\zeta) \theta_{a,b}(\zeta) d\mu(\zeta)$ , on a encore  $\theta_{a,b}(\zeta) = \langle a(\zeta), b(\zeta) \rangle$  presque partout, lorsque  $a$  et  $b$  sont des éléments quelconques de  $H$ . On en déduit aussitôt, pour  $T' \in \mathbf{R}$ ,  $\langle T'a(\zeta), b(\zeta) \rangle = T'(\zeta) \langle a(\zeta), b(\zeta) \rangle$  presque partout. En particulier,  $T'a(\zeta) - T'(\zeta)a(\zeta)$  est orthogonal, sauf sur un ensemble négligeable, aux  $x(\zeta)$  où  $x$  parcourt  $D$ . Donc  $T'a(\zeta) = T'(\zeta)a(\zeta)$  presque partout. Comme toute fonction mesurable bornée sur  $Z$  est égale presque partout à une fonction de la forme  $T'(\zeta)$ , où  $T' \in \mathbf{R}$ , on voit d'abord que les opérateurs de  $\mathbf{R}$  sont les opérateurs à composantes scalaires, ce qui est le (a) de la proposition. En outre, comme tout champ de vecteurs continu peut être approché dans  $L_A^2(\mu)$  par des sommes finies de champs de vecteurs de la forme  $T'(\zeta)x(\zeta)$  où  $T' \in \mathbf{R}$ ,  $x \in A'$ , on voit que l'isomorphisme de  $H$  dans  $L_A^2(\mu)$  applique  $H$  sur  $L_A^2(\mu)$ .

5. — *Irréductibilité des  $A(\zeta)$ .* — Pour  $x \in A'$  et  $y \in A'$ , on a  $U_x y = xy \sim x(\zeta)y(\zeta) = U_{x(\zeta)}y(\zeta)$ , de sorte que  $U_x \sim U_{x(\zeta)}$ . De même,  $V_x \sim V_{x(\zeta)}$ . Or, l'\*-algèbre d'opérateurs engendrée par les  $U_x$  et les  $V_x$  admet  $\mathbf{R}$  pour commutant. Alors, d'après un raisonnement de [10], l'\*-algèbre d'opérateurs engendrée par les  $U_{x(\zeta)}$  et les  $V_{x(\zeta)}$  est irréductible pour presque tout  $\zeta$ . Donc  $A'(\zeta)$ , et par suite  $A(\zeta)$ , sont irréductibles pour presque tout  $\zeta$ .

6. — *Démonstration de b.* — Soient  $a \in H$  un élément borné à gauche, et  $x \in D$ . D'après (18), on a, sauf sur un ensemble négligeable  $N$

$$\| V_{x(\zeta)}a(\zeta) \| = \| V_x a(\zeta) \| = \| U_a x(\zeta) \| \leq \| U_a \| \| x(\zeta) \|$$

quel que soit  $x \in D$ ; donc (lemme 25), si  $\zeta \notin N$ ,  $a(\zeta)$  est borné à gauche, et  $\| U_{a(\zeta)} \| \leq \| U_a \|$ . Réciproquement, soit  $a \sim a(\zeta)$  un élément de  $H$ . Supposons  $a(\zeta)$  borné à gauche pour presque tout  $\zeta$ . et ess. sup.  $\| U_{a(\zeta)} \| = M < +\infty$ . Pour  $x \in A'$ , on a  $V_x a \sim V_{x(\zeta)} a(\zeta)$ , donc

$$\begin{aligned} \| V_x a \|^2 &= \int \| V_{x(\zeta)} a(\zeta) \|^2 d\mu(\zeta) \\ &= \int \| U_{a(\zeta)} x(\zeta) \|^2 d\mu(\zeta) \leq M^2 \int \| x(\zeta) \|^2 d\mu(\zeta) = M^2 \| x \|^2. \end{aligned}$$

Donc  $a$  est borné à gauche (lemme 25). En outre,  $V_x a \sim V_{x(\zeta)} a(\zeta)$  entraîne  $U_a x \sim U_{a(\zeta)} x(\zeta)$ , donc  $U_a \sim U_{a(\zeta)}$ .

7. — *Démonstration de c et d.* — Si  $x \in A'$ , on a  $Sx \sim S(\zeta)x(\zeta)$ , donc  $S \sim S(\zeta)$ . Soit maintenant  $a \sim a(\zeta)$  un élément de  $H$ . Si  $a \in D_{Jn}$  pour un certain entier  $n$ , il existe une suite  $x_p \in A'$  telle que  $x_p \rightarrow a$  et  $x_p^{jn} \rightarrow J^n a$ . Donc, pour  $\zeta$  n'appartenant pas à un certain ensemble négligeable  $N'$ ,  $x_p(\zeta) \rightarrow a(\zeta)$  et  $x_p(\zeta)^{jn} \rightarrow J^n a(\zeta)$ . Donc, pour  $\zeta \notin N'$ ,  $a(\zeta) \in D_{J(\zeta)^n}$  et  $J(\zeta)^n a(\zeta) = J^n a(\zeta)$ .

Réiproquement, supposons  $a(\zeta) \in D_{J(\zeta)^n}$  pour  $\zeta$  n'appartenant pas à un certain ensemble négligeable  $N'$ , et  $J(\zeta)^n a(\zeta) \in L_A^2(\mu)$ ; soit  $x \in A'$ ; on a :

$$\begin{aligned} |\langle a, J^n x \rangle| &= \left| \int \langle a(\zeta), J(\zeta)^n x(\zeta) \rangle d\mu(\zeta) \right| \\ &= \left| \int \langle J(\zeta)^n a(\zeta), x(\zeta) \rangle d\mu(\zeta) \right| \leq \int \|J(\zeta)^n a(\zeta)\| \|x(\zeta)\| d\mu(\zeta) \\ &\leq [\int \|J(\zeta)^n a(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta)]^{\frac{1}{2}} [\int \|x(\zeta)\|^2 d\mu(\zeta)]^{\frac{1}{2}} = M \|x\| \end{aligned}$$

donc  $a \in D_{Jn}$ .

8. — *Démonstration de e et f.* — Si  $x \sim x(\zeta)$  est élément de  $A$ ,  $x$  est borné à gauche, et  $x \in D_{Jn}$  pour tout entier  $n$ . Donc, en dehors d'un certain ensemble négligeable  $N''$ ,  $x(\zeta)$  est borné à gauche et  $x(\zeta) \in D_{J(\zeta)^n}$ . Donc (proposition 7), pour  $\zeta \notin N''$ ,  $x(\zeta) \in A(\zeta)$ . En outre,  $x^{jn} \sim x(\zeta)^{jn} \in L_A^2(\mu)$ , et  $\|U_{x(\zeta)}\| \leq \|U_x\|$ . La réiproque se démontre aussi en appliquant la proposition 7. Enfin,  $f$  résulte aussitôt de  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ .

9. — *Unicité des  $A(\zeta)$ .* — Supposons donnés  $H(\zeta)^\sim, A(\zeta)^\sim, A^\sim, \dots$  possédant les propriétés de  $H(\zeta), A(\zeta), A, \dots$  énoncées dans la proposition 8; (on conserve la même mesure  $\mu$ ). Alors, à tout  $a \in H$  correspondent deux champs de vecteurs de carré intégrable,  $a(\zeta) \in H(\zeta)$  et  $a(\zeta)^\sim \in H(\zeta)^\sim$ . On a, pour tout  $T \in \mathbf{R}$ , et tout  $b \in H$

$$\int T(\zeta) \langle a(\zeta)^\sim, b(\zeta)^\sim \rangle d\mu(\zeta) = \langle Ta, b \rangle = \int T(\zeta) \langle a(\zeta), b(\zeta) \rangle d\mu(\zeta)$$

donc  $\langle a(\zeta), b(\zeta) \rangle = \langle a(\zeta)^\sim, b(\zeta)^\sim \rangle$  presque partout.

En agrandissant au besoin  $D$  (sans changer les propriétés imposées au début de la démonstration), on peut supposer que, pour presque tout  $\zeta$ , les  $x(\zeta)^\sim$ ,  $x \in D$ , sont partout denses dans  $H(\zeta)^\sim$  (grâce à la propriété  $(A_4)$ ). Il existe alors un ensemble négligeable  $N \subset Z$  tel que, pour tout  $\zeta \notin N$ , on ait

$$\begin{array}{ll}
x(\zeta) \in A(\zeta) & x(\zeta) \sim \in A(\zeta) \sim \\
\langle x(\zeta), y(\zeta) \rangle = \langle x(\zeta) \sim, y(\zeta) \sim \rangle & \\
(\lambda x + \mu y)(\zeta) = \lambda x(\zeta) + \mu y(\zeta) & (\lambda x + \mu y)(\zeta) \sim = \lambda x(\zeta) \sim + \mu y(\zeta) \sim \\
(x y)(\zeta) = x(\zeta) y(\zeta) & (x y)(\zeta) \sim = x(\zeta) \sim y(\zeta) \sim \\
x^s(\zeta) = x(\zeta)^{s(\zeta)} & x^s(\zeta) \sim = x(\zeta) \sim^{s(\zeta) \sim} \\
x^j(\zeta) = x(\zeta)^{j(\zeta)} & x^j(\zeta) \sim = x(\zeta) \sim^{j(\zeta) \sim}
\end{array}$$

pour tout  $x \in D$ , tout  $y \in D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  rationnels quelconques ; en outre, on peut choisir  $N$  de telle sorte que :

- 1) quel que soit l'entier  $n$ , les  $x(\zeta) + x(\zeta)^{j(\zeta)n}$  (respectivement  $x(\zeta) \sim + x(\zeta) \sim^{j(\zeta) \sim n}$ ), où  $x$  parcourt  $D$ , sont partout denses dans  $H(\zeta)$  (respectivement  $H(\zeta) \sim$ ), si  $\zeta \notin N$  ;
- 2) quand  $p \rightarrow +\infty$ , les  $U_{t_p(\zeta)}, V_{t_p(\zeta)}, U_{t_p(\zeta) \sim}, V_{t_p(\zeta) \sim}$ , convergent fortement vers 1 en restant de normes bornées, si  $\zeta \notin N$ .

Alors, pour  $\zeta \notin N$ , l'application  $x(\zeta) \rightarrow x(\zeta) \sim$  se prolonge en un isomorphisme  $\bar{\varphi}(\zeta)$  de  $H(\zeta)$  sur  $H(\zeta) \sim$  ; on voit facilement que la restriction  $\varphi(\zeta)$  de  $H(\zeta)$  à  $A(\zeta)$  est un isomorphisme de  $A(\zeta)$  sur  $A(\zeta) \sim$ . En outre, si  $a \sim a(\zeta)$  est élément de  $H$ , on a  $a(\zeta) \sim = \bar{\varphi}(\zeta)a(\zeta)$  pour  $a \in D$  par construction pour  $\zeta \notin N$ , donc  $a(\zeta) \sim = \bar{\varphi}(\zeta)a(\zeta)$  presque partout pour tout  $a \in H$  par passage à la limite.

## X. Exemple d'algèbre quasi-unitaire

Soient  $E$  un espace localement compact,  $G$  un groupe localement compact d'élément neutre  $e$ . Soit  $(x, \alpha) \rightarrow x\alpha$  une application continue de  $E \times G$  dans  $E$  telle que, pour  $\alpha \in G$ , l'application  $x \rightarrow x\alpha$  de  $E$  dans  $E$  soit un homéomorphisme  $u_\alpha$  de  $E$  sur  $E$ , et telle que l'application  $\alpha \rightarrow u_\alpha$  soit un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des homéomorphismes de  $E$ . Autrement dit,  $(x\alpha)\alpha' = x(\alpha\alpha')$ .

Soit  $L_{E \times G} = L$  l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes et à support compact sur  $E \times G$ . Pour  $f \in L$ ,  $g \in L$ , posons<sup>7)</sup> :

$$f * g(x, \alpha) = \int f(x\beta, \alpha\beta)g(x, \beta^{-1})d\beta$$

où  $d\beta$  désigne la mesure de Haar invariante à gauche sur  $G$ . On vérifie aisément que  $f * g \in L$ . L'addition et la multiplication par les scalaires

<sup>7)</sup> Lorsque  $\chi_1 = \chi_2 = \chi = \Delta = 1$ , les définitions qui suivent ont été utilisées indépendamment par R. Godement. De même pour les théorèmes 5 et 6 ci-dessous, quand de plus  $G$  et  $E$  sont à base dénombrable.

complexes se définissant à la manière habituelle,  $L$  devient une *algèbre* : seule l'associativité du produit nécessite un calcul que nous laissons au soin du lecteur.

Si  $E$  se réduit à un point,  $E \times G$  s'identifie à  $G$ , et on retrouve le produit de composition habituel.

On appellera *multiplicateur* une fonction continue  $>0$ ,  $\varrho(x, \alpha)$ , sur  $E \times G$ , telle que  $\varrho(x, \beta\alpha) = \varrho(x\beta, \alpha)\varrho(x, \beta)$ . Ceci entraîne  $\varrho(x, e) = 1$  et  $\varrho(x, \alpha^{-1}) = \varrho(x\alpha^{-1}, \alpha)^{-1}$ .

Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $E$ , de support  $E$  (nous utilisons les définitions de [1]) ; supposons qu'il existe une fonction continue  $>0$ ,  $\varrho(x, \alpha)$ , sur  $E \times G$ , nécessairement unique, telle que  $d\mu(x\alpha) = \varrho(x, \alpha)d\mu(x)$ . On a :

$$d\mu(x\alpha\beta) = \varrho(x, \alpha\beta)d\mu(x) = \varrho(x\alpha, \beta)d\mu(x\alpha) = \varrho(x\alpha, \beta)\varrho(x, \alpha)d\mu(x)$$

donc  $\varrho$  est un multiplicateur.

Pour  $f \in L$ ,  $g \in L$ , posons

$$\langle f, g \rangle = \iint f(x, \alpha) \bar{g}(x, \alpha) \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) ,$$

$\chi(\alpha)$  étant une fonction continue  $>0$  sur  $G$  telle que  $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$ . On définit ainsi un produit scalaire sur  $L$  qui devient un *espace pré-hilbertien*.

Enfin, soient  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  deux multiplicateurs sur  $E \times G$ . Pour  $f \in L$ , posons :

$$f^j(x, \alpha) = \chi_2(x, \alpha^{-1})f(x, \alpha) ,$$

$$f^s(x, \alpha) = \chi_1(x, \alpha^{-1})\bar{f}(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) .$$

Nous désignerons par  $\Delta$  le module de  $G$ , c'est-à-dire la fonction continue  $>0$  sur  $G$  telle que  $d(\alpha\alpha_0) = \Delta(\alpha_0)d\alpha$ .

**Proposition 9.** — *Avec les définitions précédentes,  $L$  est une algèbre quasi-unitaire si et seulement si  $\chi_1^2 = \chi^2\Delta\varrho$ ,  $\chi_2^2 = \Delta\varrho^{-1}$ . En outre, les axiomes  $B'5$  et  $B''5$  sont vérifiés.*

On a :

$$(f * g)^j(x, \alpha) = \chi_2(x, \alpha^{-1}) \int f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta$$

$$\begin{aligned} (f^j * g^j)(x, \alpha) &= \int \chi_2(x\beta, \beta^{-1}\alpha^{-1}) f(x\beta, \alpha\beta) \chi_2(x, \beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta \\ &= \int \chi_2(x, \alpha^{-1}) f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta \end{aligned}$$

donc  $j$  est bien un automorphisme de  $L$ .

Ensuite :

$$\begin{aligned}
 f^{ss}(x, \alpha) &= \chi_1(x, \alpha^{-1}) \chi_1(x \alpha^{-1}, \alpha) f(x, \alpha) = f(x, \alpha) \\
 (f * g)^s(x, \alpha) &= \chi_1(x, \alpha^{-1}) \int \bar{f}(x \alpha^{-1} \beta, \alpha^{-1} \beta) \bar{g}(x \alpha^{-1}, \beta^{-1}) d\beta \\
 (g^s * f^s)(x, \alpha) &= \int \chi_1(x \beta, \beta^{-1} \alpha^{-1}) \bar{g}(x \alpha^{-1}, \beta^{-1} \alpha^{-1}) \chi_1(x, \beta) \bar{f}(x \beta, \beta) d\beta \\
 &= \int \chi_1(x, \alpha^{-1}) \chi_1(x \beta, \beta^{-1}) \chi_1(x, \beta) \bar{f}(x \beta, \beta) \bar{g}(x \alpha^{-1}, \beta^{-1} \alpha^{-1}) d\beta \\
 &= \int \chi_1(x, \alpha^{-1}) \bar{f}(x \alpha^{-1} \beta, \alpha^{-1} \beta) \bar{g}(x \alpha^{-1}, \beta^{-1}) d\beta
 \end{aligned}$$

donc  $s$  est bien un antiautomorphisme involutif de  $L$ .

Les axiomes A1 et B"5 sont immédiats. Montrons que A4 est vérifié. Soient  $f \in L$ ,  $g \in L$ ,  $h \in L$ . Soit  $C(\alpha)$  le maximum de  $|f(x, \alpha)|$  pour  $\alpha$  fixé. On a :

$$\begin{aligned}
 |\langle f * g, h \rangle| &= \iiint f(x \beta, \alpha \beta) g(x, \beta^{-1}) \bar{h}(x, \alpha) \chi(\alpha) d\alpha d\beta d\mu(x) \\
 &\leq \iiint |f(x \beta, \alpha) g(x, \beta^{-1}) h(x, \alpha \beta^{-1})| |\chi(\alpha) \chi(\beta^{-1}) \Delta(\beta)^{-1} d\alpha d\beta d\mu(x) \\
 &\leq \int \chi C(\alpha) d\alpha \iint |g(x, \beta^{-1})| |\Delta \chi(\beta)^{-\frac{1}{2}}| |h(x, \alpha \beta^{-1})| |\Delta \chi(\beta)^{-\frac{1}{2}}| d\beta d\mu(x) \\
 &\leq \int \chi C(\alpha) d\alpha [\iint |g(x, \beta^{-1})|^2 \Delta \chi(\beta)^{-1} d\beta d\mu(x)]^{\frac{1}{2}} [\iint |h(x, \alpha \beta^{-1})|^2 \Delta \chi(\beta)^{-1} d\beta d\mu(x)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \int \chi(\alpha)^{\frac{1}{2}} C(\alpha) d\alpha [\iint |g(x, \beta)|^2 \chi(\beta) d\beta d\mu(x)]^{\frac{1}{2}} [\iint |h(x, \beta)|^2 \chi(\beta) d\beta d\mu(x)]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|g\| \|h\| \int \chi(\alpha)^{\frac{1}{2}} C(\alpha) d\alpha
 \end{aligned}$$

donc

$$\|f * g\| \leq [\int \chi(\alpha)^{\frac{1}{2}} C(\alpha) d\alpha] \|g\| , \quad (25)$$

ce qui prouve A4.

Montrons que B'5 est vérifié. Soit  $\mathcal{V}$  un voisinage symétrique de  $e$  dans  $G$ ,  $\mathcal{K}$  un compact de  $E$ . Soit  $\mathcal{U}_{\mathcal{V}, \mathcal{K}}$  l'ensemble des  $g \in L^+$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $g(x, \alpha) = 0$  pour  $\alpha \notin \mathcal{V}$ .
- 2) Pour  $\alpha$  fixé,  $g(x, \alpha)$  est constante sur  $\mathcal{K}$  et maximum sur  $\mathcal{K}$ .
- 3) Pour  $x \in \mathcal{K}$ ,  $\int g(x, \alpha) d\alpha = \int g(x \alpha, \alpha) d\alpha = 1$ .

Il est facile de voir que les  $\mathcal{U}_{\mathcal{V}, \mathcal{K}}$  forment sur  $L$  la base d'un filtre  $\mathcal{F}$ . On va voir que  $U_g$  et  $V_g$  convergent fortement vers 1 suivant  $\mathcal{F}$  en restant de normes bornées. D'abord, (25) montre que  $\|U_g\|$  reste borné, et un calcul analogue montre que  $\|V_g\|$  reste borné. D'autre part, soit  $f$  un élément fixe de  $L$ . Soit  $K_0$  un voisinage compact du support de  $f$ ; choisissons un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $e$  dans  $G$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} |f(x\beta, \alpha\beta) - f(x, \alpha)| &\leq \varepsilon \\ |f(x, \beta\alpha) - f(x, \alpha)| &\leq \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } \beta \in \mathcal{V}, \quad x \in E, \quad \alpha \in G \\
& \left. \begin{aligned} f(x\beta, \alpha\beta) &= 0 \\ f(x, \beta\alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } \beta \in \mathcal{V}, \quad (x, \alpha) \notin \mathcal{K}. \\
& |\Delta(\beta) - 1| \leq \varepsilon \quad \text{pour } \beta \in \mathcal{V}
\end{aligned}$$

et soit  $\mathcal{K}$  un compact de  $E$  contenant les images de  $K_0$  par les applications  $(x, \alpha) \rightarrow x$  et  $(x, \alpha) \rightarrow x\alpha^{-1}$ . Alors, si  $g \in \mathcal{U}_{\mathcal{V}, \mathcal{K}}$ , on a, pour  $x \in \mathcal{K}$

$$1 - \varepsilon \leq \int g(x, \beta^{-1}) d\beta = \int g(x, \beta) \Delta(\beta)^{-1} d\beta \leq 1 + \varepsilon$$

donc, pour  $(x, \alpha) \in K_0$

$$\begin{aligned}
| (f * g - f)(x, \alpha) | &\leq | \int f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta - \int f(x, \alpha) g(x, \beta^{-1}) d\beta | \\
&\quad + | \int f(x, \alpha) g(x, \beta^{-1}) d\beta - f(x, \alpha) | \\
&\leq \varepsilon \int g(x, \beta^{-1}) d\beta + |f(x, \alpha)| \varepsilon \leq \varepsilon (1 + \varepsilon + |f(x, \alpha)|)
\end{aligned}$$

et par suite :

$$\|f * g - f\| \leq \varepsilon (1 + \varepsilon + \max |f|) \left[ \int_{K_0} \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) \right]^{\frac{1}{2}}$$

De même, pour  $(x, \alpha) \in K_0$  :

$$\begin{aligned}
| (g * f - f)(x, \alpha) | &= | \int g(x\alpha^{-1}\beta, \beta) f(x, \beta^{-1}\alpha) d\beta \\
&\quad - \int g(x\alpha^{-1}\beta, \beta) f(x, \alpha) d\beta | \leq \varepsilon \int g(x\alpha^{-1}\beta, \beta) d\beta = \varepsilon
\end{aligned}$$

donc  $\|g * f - f\| \leq \varepsilon \left[ \int_{K_0} \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) \right]^{\frac{1}{2}}$ , ce qui établit B' 5.

Passons à A 2 et A 3. On a :

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle &= \iint f(x, \alpha) \bar{f}(x, \alpha) \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) \\
\langle f^s, f^s \rangle &= \iint \chi_1(x, \alpha^{-1}) \bar{f}(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) \chi_1(x, \alpha^{-1}) f(x\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) \\
&= \iint \chi_1^2(x\alpha, \alpha^{-1}) f(x, \alpha^{-1}) \bar{f}(x, \alpha^{-1}) \chi(\alpha) \varrho(x, \alpha) d\alpha d\mu(x) \\
&= \iint f(x, \alpha) \bar{f}(x, \alpha) \chi_1^2(x\alpha^{-1}, \alpha) \varrho(x\alpha^{-1}, \alpha)^{-1} \chi(\alpha)^{-1} \Delta(\alpha)^{-1} d\alpha d\mu(x) \\
\langle f * g, h \rangle &= \iiint f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) \bar{h}(x, \alpha) \chi(\alpha) d\beta d\alpha d\mu(x) \\
\langle g, f^{sj} * h \rangle &= \\
&= \iiint g(x, \alpha) \chi_2(x\beta, \beta^{-1}\alpha^{-1}) \chi_1(x\beta, \beta^{-1}\alpha^{-1}) f(x\alpha^{-1}, \beta^{-1}\alpha^{-1}) \bar{h}(x, \beta^{-1}) \chi(\alpha) d\beta d\alpha d\mu(x) \\
&= \iiint g(x, \alpha^{-1}) f(x\alpha, \beta\alpha) \bar{h}(x, \beta) \chi_2(x\beta^{-1}, \beta\alpha) \chi_1(x\beta^{-1}, \beta\alpha) \chi(\alpha)^{-1} \Delta(\alpha)^{-1} \Delta(\beta)^{-1} d\alpha d\beta d\mu(x) \\
&= \iiint f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) \bar{h}(x, \alpha) \chi_1 \chi_2(x\alpha^{-1}, \alpha\beta) \chi(\beta)^{-1} \Delta(\alpha\beta)^{-1} d\alpha d\beta d\mu(x) .
\end{aligned}$$

Pour que A 2 soit vérifié, il faut et il suffit qu'on ait

$$\chi(\alpha) = \chi_1^2(x\alpha^{-1}, \alpha) \varrho(x\alpha^{-1}, \alpha)^{-1} \chi(\alpha)^{-1} \Delta(\alpha)^{-1} ,$$

c'est-à-dire  $\chi_1^2(x\alpha^{-1}, \alpha) = \chi^2 \Delta(\alpha) \varrho(x\alpha^{-1}, \alpha)$ , quels que soient  $\alpha \in G$ ,  $x \in E$ . Autrement dit, il faut et il suffit que

$$\chi_1^2 = \chi^2 \Delta \varrho . \quad (26)$$

Pour que A3 soit vérifié, il faut et il suffit qu'on ait  $\chi(\alpha) = \chi_1 \chi_2(x\alpha^{-1}, \alpha\beta) \chi(\beta)^{-1} \Delta(\alpha\beta)^{-1}$ , c'est-à-dire  $\chi_1 \chi_2(x\alpha^{-1}, \alpha\beta) = \chi \Delta(\alpha\beta)$ , quels que soient  $\alpha \in G$ ,  $\beta \in G$ ,  $x \in E$ . Autrement dit, il faut et il suffit que  $\chi_1 \chi_2 = \chi \Delta$ , c'est-à-dire, compte tenu de (26) :

$$\chi_2^2 = \Delta \varrho^{-1} . \quad (27)$$

Le complété  $H$  de  $L$  s'identifie à l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $E \times G$  pour la mesure  $d\alpha d\mu(x)$ . L'opérateur  $J$  est encore l'opérateur de multiplication par  $\chi_2(x, \alpha^{-1})$ .

Nous supposons désormais vérifiés (26) et (27). Définissant  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  comme au § 1, on a  $\mathbf{R}^g = (\mathbf{R}^d)'$ ,  $\mathbf{R}^d = (\mathbf{R}^g)'$ . Lorsque  $E$  se réduit à un point, on a donc la généralisation aux groupes localement compacts non unimodulaires du théorème de commutation de [8] et [18], généralisation établie dans [16]. La présente démonstration est plus rapide que celle de [16], et peut être abrégée si on n'a en vue que le théorème de commutation.

## XI. Autre définition des anneaux d'opérateurs précédents

Si  $\varphi$  est une fonction complexe sur  $E$ , mesurable et essentiellement bornée relativement à  $\mu$ , on pose, pour  $f \in H$  :

$$L_\varphi f(x, \alpha) = \varphi(x) f(x, \alpha) , \quad L'_\varphi f(x, \alpha) = \bar{\varphi}(x\alpha^{-1}) f(x, \alpha) .$$

Les opérateurs  $L_\varphi$ ,  $L'_\varphi$  sont bornés, et un calcul facile montre que  $SL_\varphi S = L'_\varphi$ . D'autre part, si  $\alpha_0 \in G$ , on pose, pour  $f \in H$  :

$$\begin{aligned} U_{\alpha_0} f(x, \alpha) &= \chi_1(x, \alpha_0) \chi(\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} f(x\alpha_0, \alpha\alpha_0) \\ U'_{\alpha_0} f(x, \alpha) &= \chi(\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} f(x, \alpha_0^{-1}\alpha) . \end{aligned}$$

On voit facilement que  $U'_{\alpha_0}$  est unitaire et que  $SU'_{\alpha_0}S = U_{\alpha_0}$  (donc que  $U_{\alpha_0}$  est unitaire).

Soit  $\mathbf{L}^d$  (respectivement  $\mathbf{L}^g$ ,  $\mathbf{U}^d$ ,  $\mathbf{U}^g$ ) l'ensemble des  $L_\varphi$  (respectivement  $L'_\varphi$ ,  $U_{\alpha_0}$ ,  $U'_{\alpha_0}$ ).

**Proposition 10.** —  $\mathbf{R}^g$  (respectivement  $\mathbf{R}^d$ ) est l'anneau d'opérateurs engendré par  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{U}^g$  (respectivement  $\mathbf{L}^d$  et  $\mathbf{U}^d$ ).

Soient  $f \in L$ ,  $g \in L$ . On a :

$$\begin{aligned} V_f U'_{\alpha_0} g(x, \alpha) &= \int U'_{\alpha_0} g(x\beta, \alpha\beta) f(x, \beta^{-1}) d\beta \\ &= \int g(x\beta, \alpha_0^{-1}\alpha\beta) f(x, \beta^{-1}) \chi(\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} d\beta \\ U'_{\alpha_0} V_f g(x, \alpha) &= \chi(\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} V_f g(x, \alpha_0^{-1}\alpha) \\ &= \chi(\alpha_0)^{-\frac{1}{2}} \int g(x\beta, \alpha_0^{-1}\alpha\beta) f(x, \beta^{-1}) d\beta \end{aligned}$$

donc  $V_f U'_{\alpha_0} = U'_{\alpha_0} V_f$ , donc  $U'_{\alpha_0} \in (\mathbf{R}^d)' = \mathbf{R}^g$ , donc  $\mathbf{U}^g \subset \mathbf{R}^g$ . Il en résulte que  $\mathbf{U}^d \subset \mathbf{R}^d$ .

Si  $\varphi(x)$  est une fonction continue bornée sur  $E$ , on a :

$$\begin{aligned} U_f L_\varphi g(x, \alpha) &= \int f(x\beta, \alpha\beta) L_\varphi g(x, \beta^{-1}) d\beta = \int f(x\beta, \alpha\beta) \varphi(x) g(x, \beta^{-1}) d\beta \\ L_\varphi U_f g(x, \alpha) &= \varphi(x) U_f g(x, \alpha) = \varphi(x) \int f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta \end{aligned}$$

donc  $L_\varphi U_f = U_f L_\varphi$ , donc  $L_\varphi \in (\mathbf{R}^g)' = \mathbf{R}^d$ . Comme tout opérateur  $L_\varphi$  défini par une fonction  $\varphi$  mesurable essentiellement bornée est limite faible d'opérateurs  $L_\psi$  définis par des fonctions  $\psi$  bornées continues, on a  $\mathbf{L}^d \subset \mathbf{R}^d$ . Il en résulte que  $\mathbf{L}^g \subset \mathbf{R}^g$ .

Maintenant, on va prouver que tout opérateur  $U_g$ ,  $g \in L$ , est fortement adhérent à l'algèbre engendrée par  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{U}^g$ . Il en résultera que  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{U}^g$  engendrent  $\mathbf{R}^g$ , donc que  $\mathbf{L}^d$  et  $\mathbf{U}^d$  engendrent  $\mathbf{R}^d$ . Si  $f \in L$ , on a :

$$\begin{aligned} U_g f(x, \alpha) &= \int g(x\beta, \alpha\beta) f(x, \beta^{-1}) d\beta = \int g(x\alpha^{-1}\beta, \beta) f(x, \beta^{-1}\alpha) d\beta \\ &= \int L'_{\varphi_\beta} U'_\beta f(x, \alpha) \chi(\beta)^{\frac{1}{2}} d\beta \end{aligned}$$

où  $\varphi_\beta(x) = \bar{g}(x\beta, \beta)$ . La fonction  $\beta \rightarrow L'_{\varphi_\beta} U'_\beta f$ , à valeurs dans  $H$ , est fortement continue et à support compact, et l'égalité précédente entraîne que  $U_g f = \int \chi(\beta)^{\frac{1}{2}} L'_{\varphi_\beta} U'_\beta f d\beta$ . Donc  $U_g f$  est limite forte de vecteurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i L'_{\varphi_{\beta_i}} U'_{\beta_i} f$ , où  $\lambda_i \geq 0$  et où  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  est borné supérieurement. Les opérateurs  $\sum_{i=1}^n \lambda_i L'_{\varphi_{\beta_i}} U'_{\beta_i}$  sont de normes bornées et tendent fortement vers  $U_f$ .

*Définition 6.* —  $G$  est dit libre si, pour tout  $x \in E$  en dehors d'un certain ensemble localement négligeable  $N$ , l'application  $\alpha \rightarrow x\alpha$  de  $G$  dans  $E$  est biunivoque.

Il est immédiat que, si  $G$  est discret dénombrable, cette condition équivaut à la suivante : pour tout  $\alpha \in G$ ,  $\alpha \neq e$ , les points de  $E$  fixes pour  $\alpha$  forment un ensemble localement négligeable. On retrouve donc la définition des groupes libres donnée dans [15].

Désignons par  $\mathbf{L}$  l'ensemble des opérateurs de multiplication dans  $H$  par toutes les fonctions mesurables et essentiellement bornées sur  $E \times G$  relativement à la mesure  $d\mu(x)d\alpha$ . On a :  $\mathbf{L}^g \subset \mathbf{L}$ ,  $\mathbf{L}^d \subset \mathbf{L}$ .

**Lemme 26.** — *Si  $G$  est libre,  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{L}^d$  engendrent l'anneau d'opérateurs  $\mathbf{L}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint borné dans  $H$ , permutant à  $\mathbf{L}^g$  et à  $\mathbf{L}^d$ . On va montrer que  $A$  permute à  $\mathbf{L}$ , ce qui établira le lemme.

Soient  $F \subset E$ ,  $K \subset G$  des compacts non négligeables. Soit  $f \in H$  une fonction nulle presque partout en dehors de  $F \times K$ . Désignant d'une manière générale par  $\chi_s$  la fonction caractéristique d'un ensemble  $S$ , on a  $\chi_F(x)Af(x, \alpha) = A[\chi_F(x)f(x, \alpha)] = Af(x, \alpha)$ , donc  $Af$  est nulle presque partout en dehors de  $F \times G$ . Soit d'autre part  $K'$  un ensemble compact de  $G$  disjoint de  $K$ . Montrons que  $Af$  est nulle presque partout sur  $F \times K'$ .

Si tout point de  $F \cap \mathbf{C}N$  possédait un voisinage  $V$  tel que  $V \cap F$  soit négligeable, tout ensemble compact contenu dans  $F \cap \mathbf{C}N$  serait négligeable, donc  $F \cap \mathbf{C}N$ , et par suite  $F$ , seraient négligeables, contrairement à l'hypothèse. Il existe donc un point  $x \in F \cap \mathbf{C}N$  tel que, pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $V \cap F$  soit non négligeable. Puisque  $x \notin N$ , les ensembles  $xK^{-1}$  et  $xK'^{-1}$  sont des ensembles compacts disjoints de  $E$ , donc il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $VK^{-1}$  et  $VK'^{-1}$  soient disjoints. Soit  $F_0 \subset V \cap F$  un ensemble compact non négligeable ; les ensembles compacts  $F_1 = F_0K^{-1}$ ,  $F_2 = F_0K'^{-1}$  sont disjoints. Remarquons que :

$$\chi_{F_1}(x\alpha^{-1})\chi_{F_0}(x)f(x, \alpha) = \chi_{F_0}(x)f(x, \alpha); \quad (28)$$

en effet, si  $\chi_{F_0}(x)f(x, \alpha) \neq 0$ , on a  $x \in F_0$  et  $\alpha \in K$ , donc  $x\alpha^{-1} \in F_1$ , donc  $\chi_{F_1}(x\alpha^{-1}) = 1$ . L'égalité (28) entraîne presque partout :

$$\chi_{F_0}(x)Af(x, \alpha) = \chi_{F_1}(x\alpha^{-1})\chi_{F_0}(x)Af(x, \alpha)$$

donc

$$\chi_{K'}(\alpha)\chi_{F_0}(x)Af(x, \alpha) = \chi_{F_1}(x\alpha^{-1})\chi_{K'}(\alpha)\chi_{F_0}(x)Af(x, \alpha). \quad (29)$$

Or, si  $\chi_{K'}(\alpha)\chi_{F_0}(x) \neq 0$ , on a  $x \in F_0$ ,  $\alpha \in K'$ , donc  $x\alpha^{-1} \in F_2$ , donc  $\chi_{F_1}(x\alpha^{-1}) = 0$ . Par suite,  $\chi_{F_1}(x\alpha^{-1})\chi_{K'}(\alpha)\chi_{F_0}(x) = 0$ . L'égalité (29) prouve alors que  $Af$  s'annule presque partout sur  $F_0 \times K'$ .

Ceci posé, considérons les familles  $(F_i)_{i \in I}$  d'ensembles compacts contenus dans  $F$ , non négligeables, deux à deux disjoints, tels que  $Af$  soit

nulle presque partout sur les  $F_\iota \times K'$ . Ordonné par inclusion, l'ensemble de ces familles, non vide d'après ce qui précède, est inductif. Considérons une telle famille maximale, que nous notons encore  $(F_\iota)_{\iota \in I}$ . Cette famille est dénombrable puisque  $\mu(F) < +\infty$ . Soit  $F' = \bigcup_{\iota \in I} F_\iota \subset F$ , qui est mesurable. La fonction  $Af$  est nulle presque partout sur  $F' \times K'$ . Pour prouver le résultat annoncé, il suffit de prouver que  $F \cap \mathbb{C}F'$  est négligeable. Or, dans le cas contraire,  $F \cap \mathbb{C}F'$  contiendrait un ensemble compact non négligeable auquel on pourrait appliquer le même raisonnement qu'à  $F$ , de sorte que  $F \cap \mathbb{C}F'$  contiendrait un ensemble compact non négligeable  $F^0$  tel que  $Af$  soit nulle presque partout sur  $F^0 \times K'$ ; et ceci contredit le fait que la famille  $(F_\iota)_{\iota \in I}$  est maximale.

Ainsi,  $Af$  s'annule presque partout sur  $F \times K'$ , donc, vu l'arbitraire de  $K'$ , presque partout sur  $F \times \mathbb{C}K$ . Comme, on l'a vu,  $Af$  est aussi nulle presque partout sur  $\mathbb{C}F \times G$ , on voit que  $Af$  est nulle presque partout en dehors de  $F \times K$ . Si donc  $D$  désigne le projecteur de  $\mathbf{L}$  défini par la fonction  $\chi_{F \times K}$ , on voit que  $f = Df$  entraîne  $Af = DAf$ . Donc  $AD = DAD$ . Prenant les adjoints,  $DA = DAD$ . Donc  $AD = DA$ . Comme les projecteurs  $D$  engendrent évidemment  $\mathbf{L}$ , on voit que  $A$  permute à  $\mathbf{L}$ .

**Théorème 5.** — *Si  $G$  est libre,  $\mathbf{L}^g$  (respectivement  $\mathbf{L}^d$ ) est une sous-algèbre abélienne maximale de  $\mathbf{R}^g$  (respectivement  $\mathbf{R}^d$ ).*

Il suffit de considérer le cas de  $\mathbf{L}^d$ . Soit  $A \in \mathbf{R}^d$ , permutant à  $\mathbf{L}^d$ . Il faut prouver que  $A \in \mathbf{L}^d$ . Or  $A$  permute à  $\mathbf{R}^g$ , donc à  $\mathbf{L}^g$ , donc à  $\mathbf{L}$  (lemme 26). D'après un résultat classique (valable sans hypothèse de dénombrabilité),  $A \in \mathbf{L}$  : il existe une fonction  $\varphi(x, \alpha)$  mesurable et essentiellement bornée sur  $E \times G$ , telle que  $A$  soit l'opérateur de multiplication par  $\varphi$ . Soient  $f_1, f_2, \dots, f_n$  des éléments de  $\mathbf{L}$ . Soient  $K \subset E$  et  $K' \subset G$  des ensembles compacts tels que les supports des  $f_i$  soient contenus dans  $K \times K'$ ; soit  $K_1 = K'K'^{-1}$ . En exprimant que  $A$  permute aux  $U_\beta$ , on trouve que, pour  $\beta \in G$  fixé,  $\varphi(x, \alpha)f_i(x, \beta^{-1}\alpha) = \varphi(x, \beta^{-1}\alpha)f_i(x, \beta^{-1}\alpha)$  presque partout pour  $d\mu(x)d\alpha$ ; donc  $\chi_{K_1}(\beta)\varphi(x, \alpha)f_i(x, \beta^{-1}\alpha) = \chi_{K_1}(\beta)\varphi(x, \beta^{-1}\alpha)f_i(x, \beta^{-1}\alpha)$  presque partout sur  $E \times G \times G$  pour  $d\mu(x)d\alpha d\beta$ . Donc il existe  $\alpha_0 \in K'$  tel que  $\chi_{K_1}(\beta)\varphi(x, \alpha_0)f_i(x, \beta^{-1}\alpha_0) = \chi_{K_1}(\beta)\varphi(x, \beta^{-1}\alpha_0)f_i(x, \beta^{-1}\alpha_0)$  presque partout sur  $E \times G$  pour  $d\mu(x)d\beta$  (si on a choisi  $K'$  non négligeable). Donc  $\chi_{K_1}(\alpha_0\alpha^{-1})\varphi(x, \alpha_0)f_i(x, \alpha) = \chi_{K_1}(\alpha_0\alpha^{-1})\varphi(x, \alpha)f_i(x, \alpha)$  presque partout sur  $E \times G$  pour  $d\mu(x)d\alpha$ . Vu le choix de  $K_1$ , on en déduit  $\varphi(x, \alpha_0)f_i(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha)f_i(x, \alpha)$  presque partout sur  $E \times G$  pour  $d\mu(x)d\alpha$ . Ainsi,  $A$  est limite forte d'opérateurs de  $\mathbf{L}^d$ , donc  $A \in \mathbf{L}^d$ .

**Corollaire.** — *Si  $G$  est libre,  $\mathbf{Q}^g \subset \mathbf{P}^g$ ,  $\mathbf{Q}^d \subset \mathbf{P}^d$ .*

En effet, on a évidemment  $\mathbf{L}^g \subset \mathbf{P}^g$ ,  $\mathbf{L}^d \subset \mathbf{P}^d$ . Il suffit donc d'appliquer le théorème 5 et les remarques qui terminent le paragraphe III.

**Lemme 27.** — *Si  $G$  est libre,  $\mathbf{R}$  se compose des  $L_\varphi$  tels que  $\varphi(x) = \varphi(x\alpha)$  localement presque partout sur  $E$ , pour tout  $\alpha \in G$ .*

Un opérateur  $A$  de  $\mathbf{R}$  est permutable à  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{L}^d$ , donc est dans  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{L}^d$  (théorème 5). Donc il existe deux fonctions mesurables essentiellement bornées  $\varphi$  et  $\psi$  sur  $E$  telles que  $A = L_\varphi = L'_\psi$ . Ceci entraîne aussitôt que  $\varphi(x) = \bar{\psi}(x\alpha^{-1})$  localement presque partout pour  $d\mu(x)d\alpha$ . Donc, si  $\beta \in G$ , on a, localement presque partout pour  $d\mu(x)d\alpha$ :  $\varphi(x\beta) = \bar{\psi}(x\beta \cdot \beta^{-1}\alpha^{-1}) = \bar{\psi}(x\alpha^{-1}) = \varphi(x)$ . Donc  $\varphi(x\beta) = \varphi(x)$  localement presque partout sur  $E$ . La réciproque est immédiate.

Disons que  $G$  est *ergodique*, si tout ensemble mesurable  $F \subset E$ , tel que  $F\alpha = F$ , à un ensemble localement négligeable près, pour tout  $\alpha \in G$ , est localement négligeable ou de complémentaire localement négligeable. Alors, le lemme 27 entraîne aussitôt le théorème suivant :

**Théorème 6.** — *Si  $G$  est libre,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs si et seulement si  $G$  est ergodique.*

Par exemple, si on prend pour  $E$  le groupe  $G$  lui-même,  $G$  opérant sur  $E$  par  $(x, \alpha) \mapsto \alpha^{-1}x$ , et pour  $\mu$  une mesure équivalente à la mesure de Haar,  $G$  est évidemment libre et ergodique.

## XII. Classification de $\mathbf{R}^g$ et $\mathbf{R}^d$

**Définition 7.** —  *$G$  est dit mesurable s'il existe une fonction  $\varphi$  sur  $E$ ,  $\mu$ -mesurable, telle que  $0 < \varphi(x) < +\infty$ , et telle que  $\varphi(x\alpha)\varphi(x)^{-1} = \Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1}$  localement presque partout sur  $E$ , pour tout  $\alpha \in G$ .*

**Remarque 1.** — Il revient au même de dire qu'il existe une fonction  $\varphi$  sur  $E$ ,  $\mu$ -mesurable, telle que  $0 < \varphi(x) < +\infty$ , et telle que  $\varphi(x\alpha)\varphi(x)^{-1} = \Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1}$  localement presque partout sur  $E \times G$  pour  $d\mu(x)d\alpha$ . En effet, s'il en est ainsi, soient  $\alpha_0 \in G$ , et  $K \subset E$  un ensemble compact. Les fonctions  $\alpha \mapsto \int_K \varphi(x\alpha)\varphi(x)^{-1}d\mu(x)$  et  $\alpha \mapsto \int_K \Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1}d\mu(x)$  sont égales localement presque partout sur  $G$ , et continues comme on le voit facilement, donc égales pour tout  $\alpha$ , et en particulier pour  $\alpha_0$ . Vu l'arbitraire de  $K$ , ceci entraîne que  $\varphi(x\alpha_0)\varphi(x)^{-1} = \Delta(\alpha_0)\varphi(x, \alpha_0)^{-1}$  localement presque partout sur  $E$ .

*Remarque 2.* — Considérons les mesures comme des fonctions d'ensembles, définies sur l'ensemble des parties  $\mu$ -intégrables de  $E$ , et utilisons momentanément les notations de [11]. Si  $\mu$  est totalement  $\sigma$ -finie, dire que  $G$  est mesurable revient à dire qu'il existe une mesure positive  $\nu$ , totalement  $\sigma$ -finie, équivalente à  $\mu$ , telle que  $d\nu(x\alpha) = \Delta(\alpha)d\nu(x)$  pour tout  $\alpha \in G$ . (Mais  $\nu$  n'est pas nécessairement une mesure de Radon.) En effet, si  $G$  est mesurable, soit  $\varphi$  une fonction possédant les propriétés de la définition 7, et posons, pour tout ensemble  $\mu$ -intégrable  $A$ ,  $\nu(A) = \int_A \varphi(x)d\mu(x)$ . On définit ainsi une mesure positive  $\nu$  équivalente à  $\mu$ , totalement  $\sigma$ -finie ; et, pour tout  $\alpha \in G$ , on a :

$$\begin{aligned}\nu(A\alpha) &= \int_{A\alpha} \varphi(x)d\mu(x) = \int_A \varphi(x\alpha)d\mu(x\alpha) \\ &= \int_A \varphi(x)\Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1}\varphi(x, \alpha)d\mu(x) \\ &= \Delta(\alpha) \int_A \varphi(x)d\mu(x) = \Delta(\alpha) \nu(A) .\end{aligned}$$

Réiproquement, soit  $\nu$  une mesure positive totalement  $\sigma$ -finie équivalente à  $\mu$ , telle que  $d\nu(x\alpha) = \Delta(\alpha)d\nu(x)$ . D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, il existe une fonction  $\varphi(x)$  sur  $E$ ,  $\mu$ -mesurable, telle que  $0 < \varphi(x) < +\infty$ , et telle que  $\nu(A) = \int_A \varphi(x)d\mu(x)$  pour tout ensemble  $\mu$ -intégrable  $A$ . On a alors :

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha) \int_A \varphi(x)d\mu(x) &= \Delta(\alpha) \nu(A) = \nu(A\alpha) = \int_{A\alpha} \varphi(x)d\mu(x) \\ &= \int_A \varphi(x\alpha)d\mu(x\alpha) = \int_A \varphi(x\alpha)\varphi(x, \alpha)d\mu(x)\end{aligned}$$

donc  $\Delta(\alpha)\varphi(x) = \varphi(x\alpha)\varphi(x, \alpha)$  localement presque partout sur  $E$ .

**Théorème 7.** — *Si  $G$  est libre et non mesurable,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  possèdent des composantes purement infinies. En particulier, si  $G$  est de plus ergodique,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs purement infinis.*

Supposons  $G$  libre, et  $\mathbf{R}^g$ ,  $\mathbf{R}^d$  sans composantes purement infinies. Appliquons le théorème 3, ce qui est possible grâce au corollaire du théorème 5. Soient  $M$  et  $M'$  les opérateurs dont le théorème 3 affirme l'existence. L'opérateur  $M$  appartient au sens large à  $\mathbf{L}^d$  ; grâce au calcul opérationnel, il est facile d'en déduire qu'il existe une fonction finie  $\psi(x)$  mesurable sur  $E$  telle que  $M$  soit l'opérateur de multiplication par  $\psi(x)$ . Alors,  $M' = SMS$  est l'opérateur de multiplication par  $\psi(x\alpha^{-1})$ . Le plus petit prolongement fermé de  $M' M^{-1}$  est l'opérateur de multiplication par  $\psi(x\alpha^{-1})\psi(x)^{-1}$ . Ecrivons qu'il est égal à  $J$  :

$$\psi(x\alpha^{-1})\psi(x)^{-1} = \chi_2(x, \alpha^{-1}) = \Delta(\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}\varphi(x, \alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}$$

localement presque partout sur  $E \times G$ . Posant  $\varphi = \psi^2$ , on voit que  $\varphi(x\alpha)\varphi(x)^{-1} = \Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1}$  localement presque partout sur  $E \times G$ , ce qui prouve que  $G$  est mesurable.

La proposition suivante généralise le lemme 4.4.1 de [15].

**Proposition 11.** — *Soit  $G_0$  le sous-groupe des  $\alpha \in G$  tels que  $d\mu(x\alpha) = \Delta(\alpha)d\mu(x)$ . Si  $G_0$  est ergodique et distinct de  $G$ ,  $G$  est non mesurable.*

En effet, pour  $\alpha \in G_0$ ,  $\varphi(x, \alpha) = \Delta(\alpha)$  localement presque partout sur  $E$ . Supposons alors  $G$  mesurable, et soit  $\varphi$  une fonction possédant les propriétés de la définition 7. Pour  $\alpha \in G_0$ , on a

$$\varphi(x\alpha) = \varphi(x)\Delta(\alpha)\varphi(x, \alpha)^{-1} = \varphi(x)$$

localement presque partout sur  $E$ . Si  $G_0$  est ergodique, on en déduit que  $\varphi(x)$  est localement presque partout égale à une constante. Donc  $\varphi(x, \alpha) = \Delta(\alpha)$  localement presque partout sur  $E$ , pour tout  $\alpha \in G$ . Donc  $d\mu(x\alpha) = \Delta(\alpha)d\mu(x)$  pour tout  $\alpha \in G$ , de sorte que  $G_0 = G$ .

**Proposition 12.** — *Si  $G$  est mesurable,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont sans composantes purement infinies. En particulier, si  $G$  est de plus libre et ergodique,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs de classe I ou II.*

Supposons  $G$  mesurable. Soit  $\varphi$  une fonction possédant les propriétés de la définition 7. Posons  $\psi = \varphi^{\frac{1}{2}}$ . L'opérateur de multiplication par  $\psi(x)$  (respectivement  $\psi(x\alpha^{-1})$ ) est un opérateur auto-adjoint  $\geq 0$  inversible  $M$  (respectivement  $M'$ ) appartenant au sens large à  $\mathbf{L}^d$  (respectivement  $\mathbf{L}^g$ ), et on a  $M' = SMS$ . En outre, le plus petit prolongement fermé de  $M'M^{-1}$  est l'opérateur de multiplication par

$$\psi(x\alpha^{-1})\psi(x)^{-1} = [\Delta(\alpha^{-1})\varphi(x, \alpha^{-1})^{-1}]^{\frac{1}{2}} = \chi_2(x, \alpha^{-1})$$

donc est identique à  $J$ . Alors, d'après le théorème 2,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont sans composantes purement infinies.

Le cas où  $G$  est discret a été traité complètement dans [15] (au moins si  $G$  est dénombrable, avec  $\chi = 1$ ), et s'étudie d'ailleurs facilement à partir de ce qui précède ; on sait que,  $G$  étant supposé mesurable, libre et ergodique, on obtient des facteurs de classe finie ou infinie suivant que  $\varphi(x)$  est intégrable ou non ; les anneaux abéliens maximaux  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{L}^d$  sont «non purement infinis». Nous nous contenterons ici de donner une proposition qui prouve que, dans le cas où  $G$  est non discret, la situation est sensiblement différente.

**Proposition 13.** — *Si  $G$  est mesurable, libre, ergodique, et non discret, les anneaux abéliens maximaux  $\mathbf{L}^g$  et  $\mathbf{L}^d$  sont purement infinis. En particulier,  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont des facteurs de classe  $I_\infty$  ou  $II_\infty$ .*

Soit  $K \subset E$  un ensemble compact non négligeable fixe sur lequel  $\varphi(x)$  soit borné, et soit  $P = L'_{\chi_K}$ , qui est un projecteur. Désignons par  $Tr$  l'unique trace normale  $\neq 0$  (définie à un facteur constant près) sur  $\mathbf{R}^g$ . On va montrer que  $Tr(P) = +\infty$ , ce qui démontrera la proposition.

Soit  $V$  un voisinage compact de  $e$  dans  $G$ , et soit  $m_V$  sa mesure pour  $d\alpha$ ; soit  $f(x, \alpha) = m_V^{-1} \chi_K(x) \chi_V(\alpha)$ . Il est facile de voir que  $f$  est un élément borné à gauche de  $H$ , et que l'inégalité (25) est encore valable pour toute  $g \in L$ ; on a ici  $C(\alpha) = m_V^{-1} \chi_V(\alpha)$ , donc  $\int \chi(\alpha)^{\frac{1}{2}} C(\alpha) d\alpha \leq 2 \int_V m_V^{-1} d\alpha = 2$  si  $V$  est assez petit. Donc  $\|U_f\| \leq 2$ , et par suite  $0 \leq P U_f U_f^* P \leq 2P$ . Nous allons montrer, ce qui achèvera la démonstration, que  $Tr(P U_f U_f^* P)$  peut être rendu arbitrairement grand pour  $V$  assez petit. Remarquons que  $P U_f U_f^* P = U_{Pf} U_{Pf}^*$ , et que  $Pf \in D_M$  parce que  $\varphi(x)$  est bornée sur  $K$ . D'après le théorème 2, on a :

$$\begin{aligned} Tr(U_{Pf} U_{Pf}^*) &= \|MPf\|^2 \\ &= \iint \varphi(x) \chi_K(x \alpha^{-1})^2 m_V^{-2} \chi_K(x)^2 \chi_V(\alpha)^2 \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x) \\ &= m_V^{-2} \int_V \chi(\alpha) d\alpha \int_K \varphi(x) d\mu(x) . \end{aligned}$$

Si  $V$  est assez petit, ceci est supérieur à

$$m_V^{-2} \int_V \frac{1}{2} d\alpha \frac{1}{2} \int_K \varphi(x) d\mu(x) = \frac{1}{4} m_V^{-1} \left[ \int_K \varphi(x) d\mu(x) \right] .$$

Or,  $\int_K \varphi(x) d\mu(x) > 0$  parce que  $K$  est non négligeable. Et, si  $G$  est non discret,  $m_V$  peut être rendu arbitrairement petit.

Dans l'exemple cité à la fin du paragraphe XI, on peut montrer, utilisant le théorème 15 de [13], que  $\mathbf{R}^g$  et  $\mathbf{R}^d$  sont de classe I.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *N. Bourbaki*, Intégration, chap. I—IV, Actual. Sci. Industr., Paris, Hermann, 1952.
- [2] *J. Dixmier*, Algèbres quasi-unitaires, C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), p. 837—839.
- [3] *J. Dixmier*, Sur les opérateurs self-adjoints d'un espace de Hilbert, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), p. 267—269.
- [4] *J. Dixmier*, Sur la réduction des anneaux d'opérateurs, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 68 (1951), p. 185—202.
- [5] *J. Dixmier*, Applications  $\mathfrak{h}$  dans les anneaux d'opérateurs, Compositio Math. 10 (1952), p. 1—55.
- [6] *J. Dixmier*, Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Summa Brasil. Math., vol. 2, fasc. 11 (1951).
- [7] *J. Dixmier*, Remarques sur les applications  $\mathfrak{h}$ , à paraître aux Arch. der Math.
- [8] *R. Godement*, Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, J. Math. Pures Appl. 30 (1951), p. 1—110.
- [9] *R. Godement*, Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. of Math. 53 (1951), p. 68—124.
- [10] *R. Godement*, Deuxième mémoire sur la théorie des caractères, à paraître.
- [11] *P. R. Halmos*, Measure theory, New-York 1950.
- [12] *I. Kaplansky*, A theorem on rings of operators, Pacific. J. Math. 1 (1951), p. 227—232.
- [13] *F. I. Mautner*, Unitary representations of locally compact groups I, Ann. of Math. 51 (1950), p. 1—25.
- [14] *F. J. Murray et J. von Neumann*, On rings of operators, Ann. of Math. 37 (1936), p. 116—229.
- [15] *J. von Neumann*, On rings of operators III, Ann. of Math. 41 (1940), p. 94—161.
- [16] *M. Orihara et T. Tsuda*, The two-sided regular representation of a locally compact group, Mem. Fac. Sci., Kyūsyū Univ., A, vol. VI, n° 1 (1951), p. 21—29.
- [17] *R. Pallu de la Barrière*, Thèse, à paraître.
- [18] *I. E. Segal*, The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group, Ann. of Math. 51 (1950), p. 293—298.
- [19] *O. Takehouchi*, On the maximal Hilbert algebras, Tohoku Math. J., 2<sup>e</sup> Série, vol. 3, 1951.

(Reçu le 25 mai 1952.)