

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 26 (1952)

**Artikel:** Über die Darstellung der Lie-Algebren bei Charakteristik 0.  
**Autor:** Zassenhaus, Hans  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-21279>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Darstellungen der Lie-Algebren bei Charakteristik 0

Von HANS ZASSENHAUS, Montreal

Der Satz von *Ado* [1] über die Existenz von treuen Darstellungen für beliebige Lie-Algebren über Körpern der Charakteristik 0 erfordert die Konstruktion von Darstellungen, die das Zentrum nicht auf Null abbilden.

Eine umfassendere Fragestellung ist durch die folgende Aufgabe gegeben. Bekannt sei eine Lie-Algebra  $L$  über dem Körper  $k$  der Charakteristik 0 und ein Ideal  $T$  von  $L$ . Welche Darstellungen  $\Gamma$  von  $T$  sind geeignet zur Erzeugung von Darstellungen  $\Delta$  von  $L$  in dem Sinne, daß ein Darstellungsmodul  $M$  von  $\Delta$  einen Darstellungsmodul  $m$  von  $\Gamma$  enthält, der in keinem echten  $L$ -invarianten Teilmodul von  $M$  enthalten ist?

## § 1.

Eine notwendige Bedingung für  $\Gamma$  ist enthalten in

**Satz 1.** *Jede Darstellung  $\Delta$  der Lie-Algebra  $L$  über dem Körper  $k$  der Charakteristik 0 induziert eine Nildarstellung in dem Durchschnitt der Ableitung  $L \circ L$  von  $L$  und dem Radikal  $R(T)$  des Ideales  $T$  von  $L$ .*

Beweis : Zunächst zeigen wir, daß  $R(T)$  ein Ideal von  $L$  ist.  $T + R(L)$  ist Ideal von  $L$ .  $(T + R(L)) - R(L)$  ist Ideal von  $L - R(L)$ . Da  $L - R(L)$  eine halbeinfache Lie-Algebra der Charakteristik 0 ist, so gilt dasselbe für das Ideal  $(T + R(L)) - R(L)$ . Der zweite Isomorphiesatz ergibt, daß  $R(L)$  Ideal von  $R(T) + R(L)$  und  $R(T) \cap R(L)$  Ideal von  $R(T)$  mit isomorphen Differenzringen sind. Da  $R(T)$  ein auflösbares Ideal von  $T$  ist, so folgt, daß  $R(T) + R(L) - R(L)$  ein auflösbares Ideal der halbeinfachen Lie-Algebra  $T + R(L) - R(L)$  ist, mithin ist  $R(T)$  in  $R(L)$  enthalten. Es folgt

$$R(T) = T \cap R(L) ,$$

das heißt  $R(T)$  ist ein Ideal von  $L$ <sup>1)</sup>. Es folgt, daß  $T_1 = L \circ L \cap R(T)$  ein auflösbares Ideal von  $L$  ist.

Den Beweis von Satz 1 führen wir zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $k$  algebraisch abgeschlossen und  $\Delta$  irreduzibel ist.

Ein zu  $\Delta$  gehöriger Darstellungsmodul  $M$  enthält sicherlich einen irreduziblen  $T_1$ -Modul  $m$ , der eine irreduzible Darstellung  $\Gamma_1$  von  $T_1$  vermittelt. Wir wollen zeigen, daß alle irreduziblen Komponenten der von  $\Delta$  auf  $T_1$  induzierten Darstellung  $\Delta^{(T_1)}$  zu  $\Gamma_1$  äquivalent sind. Zu dem Behufe betten wir  $m$  ein in einen größten in  $M$  enthaltenen  $T_1$ -Modul  $M_1$  mit der Eigenschaft, daß die zu  $M_1$  gehörige Darstellung von  $T_1$  lauter zu  $\Gamma_1$  äquivalente irreduzible Komponenten besitzt. Wäre  $M_1$  von  $M$  verschieden, dann würde es wegen der Irreduzibilität des  $L$ -Moduls  $M$  ein Element  $a$  in  $L$  geben, für das  $aM_1$  nicht in  $M_1$  enthalten wäre. Alsdann würde wegen der Regel

$$\begin{aligned} t(au) &= a(tu) + (t \circ a)u \\ &\equiv a(tu)(M_1) \end{aligned}$$

die für alle  $t$  aus  $T_1$ ,  $u$  aus  $M_1$  gültig ist, der Operatorhomomorphismus

$$u \rightarrow au + M_1 - M_1$$

zwischen den  $T_1$ -Moduln  $M_1$  und  $aM_1 + M_1 - M_1$  bestehen. Mithin würde auch  $aM_1 + M_1 - M_1$  eine Darstellung von  $T_1$  mit lauter zu  $\Gamma_1$  äquivalenten irreduziblen Komponenten vermitteln und dasselbe würde der Fall für den  $T_1$ -Modul  $aM_1 + M_1$  selbst sein. Da aber  $aM_1 + M_1$  umfangreicher als  $M_1$  ist, so erhalten wir einen Widerspruch mit der Maximaleigenschaft von  $M_1$ .

Also ist  $M_1 = M$  und mithin induziert  $\Delta$  auf  $T_1$  eine Darstellung mit lauter zu  $\Gamma_1$  äquivalenten irreduziblen Komponenten, etwa mit der Multiplizität  $n$ . Es folgt

$$\text{Sp } \Delta(t) = n \text{ Sp } \Gamma_1(t)$$

für alle  $t$  aus  $T_1$ . Da  $T_1$  zu  $L \circ L$  gehört, so folgt

$$\text{Sp } \Delta(t) = 0 ,$$

woraus wir bei Charakteristik 0 schließen können, daß

$$\text{Sp } \Gamma_1(t) = 0 .$$

Gemäß dem Satze von Lie ist der Grad der irreduziblen Darstellung  $\Gamma_1$

---

<sup>1)</sup> Ein anderer Beweis ist in [8], S. 79, enthalten. Für die Mitteilung des hier gegebenen Beweises sowie andere Vereinfachungen in § 1 bin ich Herrn A. Borel dankbar.

der auflösbaren Lie-Algebra  $T_1$  gleich 1. Mithin ergibt sich aus dem Verschwinden der Spur, daß  $\Gamma_1$  eine Nulldarstellung ist. Folglich induziert  $\Delta$  auf  $T_1$  eine Nildarstellung.

Eine beliebige Darstellung  $\Delta$  von  $L$  hat lauter irreduzible Komponenten, die auf  $T_1$  eine Nildarstellung induzieren. Mithin induziert  $\Delta$  selbst auch eine Nildarstellung.

Wenn der Koeffizientenkörper  $k$  nicht algebraisch abgeschlossen ist, so ergibt sich der Beweis von Satz 1 durch algebraischen Abschluß von  $k$ , entsprechende Erweiterung der Lie-Algebren  $L$ ,  $L \circ L$ ,  $T$ ,  $R(T)$ ,  $T_1$  und Anwendung der vorherigen Schlußweise.

*Zusatz: Wenn eine Darstellung  $\Gamma$  eines Ideales  $T$  einer Lie-Algebra  $L$  über einem Körper  $k$  der Charakteristik 0 eine Darstellung von  $L$  erzeugt, dann induziert  $\Gamma$  eine Nildarstellung auf  $T_1 = L \circ L \cap R(T)$ .*

Dieser Zusatz kann ausgedehnt werden auf die nachinvarianten Teilalgebren von  $L$ . Entsprechend der von Wielandt [6] stammenden Begriffsbildung in Gruppen heißt eine Teilalgebra  $T$  der Lie-Algebra  $L$  *nachinvariant* in  $L$ , wenn eine Kette von Teilalgebren

$$L = T^{(1)} \supseteq T^{(2)} \supseteq \dots \supseteq T^{(r)} = T$$

existiert, so daß  $T^{(i)}$  ein Ideal von  $T^{(i-1)}$  ist. Durch wiederholte Anwendung des Zusatzes zu Satz 1 finden wir

**Satz 2.** *Wenn die Darstellung  $\Gamma$  der nachinvarianten Teilalgebra  $T$  der Lie-Algebra  $L$  über einem Körper der Charakteristik 0 eine Darstellung von  $L$  erzeugt, dann induziert  $\Gamma$  auf dem Ideal  $L \circ L \cap R(T)$  von  $T$  eine Nildarstellung.*

## § 2.

Um den Beweis der Umkehrung von Satz 2 vorzubereiten, beginnen wir in diesem Paragraphen mit einer Untersuchung, deren Resultat enthalten ist in dem folgenden

**Lemma.** *Sei*

$$L = T^{(1)} \supset T^{(2)} \supset \dots \supset T^{(r)} = T$$

*eine Kompositionsreihe zwischen  $L$  und  $T$ , so daß  $T^{(i+1)}$  ein Ideal von  $T^{(i)}$  mit einfachem Differenzring ist. Dann existiert eine Teilalgebra  $W^{(i)}$  von  $T^{(i)}$ , so daß*

$$T^{(i)} = W^{(i)} + T^{(i+1)}, \quad W^{(i)} \cap T^{(i+1)} = 0 \quad \text{und} \quad W^{(i)} \circ T^{(i+1)} \subseteq R(T^{(i+1)})$$

*und entweder*

$$L \circ L \cap R(T^{(i)}) = L \circ L \cap R(T^{(i+1)})$$

ist oder

$$L \circ L \cap R(T^{(i)}) = W^{(i)} + L \circ L \cap R(T^{(i+1)}) .$$

*Beweis:* Wenn die Dimension von  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  größer als 1 ist, so ist der einfache Differenzring  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  halbeinfach und dann gibt es nach dem Satze von Levi eine zu  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  isomorphe Teilalgebra  $W^{(i)}$  von  $T^{(i)}$ , so daß

$$T^{(i)} = W^{(i)} + T^{(i+1)}, \quad W^{(i)} \cap T^{(i+1)} = 0 \quad \text{und} \quad W^{(i)} \circ T^{(i+1)} \subseteq R(T^{(i+1)})$$

ist. Da die Differenzringe  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  sowohl als auch  $T^{(i+1)} - R(T^{(i+1)})$  halbeinfach sind, so ist auch der Differenzring von  $T^{(i)}$  nach dem auflösbaren Ideale  $R(T^{(i+1)})$  halbeinfach. Es folgt:

$$R(T^{(i)}) = R(T^{(i+1)})$$

$$L \circ L \cap R(T^{(i)}) = L \circ L \cap R(T^{(i+1)}) .$$

Wenn die Dimension von  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  über  $k$  gleich 1 ist, so ist  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  abelsch. Da aber  $T^{(i)} - T^{(i+1)}$  homomorph zu dem Differenzringe  $T^{(i)} - R(T^{(i+1)})$  ist, so kann  $T^{(i)} - R(T^{(i+1)})$  nicht halbeinfach sein. Mit anderen Worten ist  $R(T^{(i)})$  umfangreicher als  $R(T^{(i+1)})$ .

$$\text{Da} \quad R(T^{(i)}) \cap T^{(i+1)} = R(T^{(i+1)})$$

ist, so ergibt der zweite Isomorphiesatz, daß

$$R(T^{(i)}) + T^{(i+1)} - T^{(i+1)} \cong R(T^{(i)}) - R(T^{(i+1)}) \stackrel{!}{\cong} 0$$

ist. Mithin folgt  $T^{(i+1)} \subset R(T^{(i)}) + T^{(i+1)} \subseteq T^{(i)}$ ,

$$T^{(i)} = R(T^{(i)}) + T^{(i+1)}$$

$$\dim_k (R(T^{(i)}) - R(T^{(i+1)})) = 1 .$$

Es gibt ein Element  $w_i$  in  $R(T^{(i)})$ , das nicht in  $R(T^{(i+1)})$  liegt. Dies Element erzeugt eine 1-dimensionale  $k$ -Teilalgebra  $W^{(i)}$  von  $R(T^{(i)})$ , so daß

$$T^{(i)} = W^{(i)} + T^{(i+1)}, \quad W^{(i)} \cap T^{(i+1)} = 0 \quad \text{und} \quad W^{(i)} \circ T^{(i+1)} \subseteq R(T^{(i+1)})$$

ist. Nach dem zweiten Isomorphiesatze ist

$$\begin{aligned} L \circ L \cap R(T^{(i)}) - L \circ L \cap R(T^{(i+1)}) \\ \cong L \circ L \cap R(T^{(i)}) + R(T^{(i+1)}) - R(T^{(i+1)}) . \end{aligned}$$

Also ist entweder

$$L \circ L \cap R(T^{(i)}) = L \circ L \cap R(T^{(i+1)})$$

oder

$$\dim_k (L \circ L \cap R(T^{(i)}) - L \circ L \cap R(T^{(i+1)})) = 1 .$$

Im letztgenannten Falle können und wollen wir das vorhin erwähnte Element  $w_i$  so wählen, daß es in  $L \circ L \cap R(T^{(i)})$ , aber nicht in  $L \circ L \cap R(T^{(i+1)})$  liegt und es folgt sodann, daß

$$L \circ L \cap R(T^{(i)}) = W^{(i)} + L \circ L \cap R(T^{(i+1)})$$

ist, womit das Lemma vollständig bewiesen ist.

Gemäß Satz 2 induziert jede Darstellung von  $L$  eine Nildarstellung auf  $L \circ L \cap R(T)$ . Da die reguläre Darstellung von  $L \circ L \cap R(T)$  eine Komponente der von der regulären Darstellung von  $L$  auf  $L \circ L \cap R(T)$  induzierten Darstellung ist, so ist die reguläre Darstellung von  $L \circ L \cap R(T)$  eine Nildarstellung. Nach dem Satze von Engel folgt, daß  $L \circ L \cap R(T)$  eine nilpotente Lie-Algebra ist. Desgleichen ist  $L \circ L \cap R(T)$  eine nilpotente Lie-Algebra.

Die Umkehrung von Satz 2, nämlich

**Satz 3.** *Jede Darstellung  $\Gamma$  der nachinvarianten Teilalgebra  $T$  der Lie-Algebra  $L$  der Charakteristik 0, die eine Nildarstellung auf dem Ideal  $L \circ L \cap R(T)$  von  $T$  induziert, erzeugt eine Darstellung von  $L$ , ergibt sich nun durch wiederholte Anwendung von*

**Satz 4.** *Wenn  $T$  ein Ideal der Lie-Algebra  $L$  der Charakteristik 0 mit einer Teilalgebra  $W$  von  $L$  als Vertretersystem ist, so daß*

$$L = W \dot{+} T$$

*ist, dann erzeugt jede Darstellung  $\Gamma$  von  $T$ , die eine Nildarstellung auf einem gewissen Ideal  $T_1$ , das  $W \circ T$  enthält, induziert, eine Darstellung  $\Delta$  von  $L$ . Diese Darstellung  $\Delta$  von  $L$  kann so gewählt werden, daß sie auf der Teilalgebra  $W + T_1$  von  $L$  eine Nildarstellung induziert, falls  $W + T_1$  nilpotent ist.*

### § 3.

Bevor wir den Beweis von Satz 4 antreten, wollen wir zunächst zeigen, wie der Satz von Ado aus dem Satz 3, der sich seinerseits gemäß der in § 2 angestellten Untersuchung aus Satz 4 ergibt, folgt.

Jede Lie-Algebra  $L$  über einem Körper  $k$  hat die reguläre Darstellung

$$a \rightarrow P(a) = \begin{pmatrix} u \\ a \circ u \end{pmatrix}$$

in linearen Transformationen des  $k$ -Moduls  $L$  mit dem Zentrum von  $L$  als Kern. Das Zentrum von  $L$  ist eine abelsche Teilalgebra mit einer Basis  $c_1, c_2, \dots, c_d$  über  $k$ . Es besitzt die treue Darstellung, die durch die Zuordnung

$$c = \sum_{i=1}^d \alpha_i c_i \rightarrow \Gamma(c) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_d \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

erklärt wird. Da es sich hierbei um eine Nildarstellung handelt, so erzeugt  $\Gamma$  gemäß Satz 3 eine Darstellung  $\Delta$  von  $L$ . Da  $\Gamma$  das Zentrum von  $L$  treu darstellt, so gilt dasselbe für  $\Delta$ . Mithin gilt für den Kern  $L_\Delta$  von  $\Delta$ , daß

$$L_\Delta \cap z(L) = 0,$$

und folglich

$$L_{P+\Delta} = L_\Delta \cap L_P = L_\Delta \cap z(L) = 0.$$

Die Summe der regulären Darstellung von  $L$  und der Darstellung  $\Delta$ , die gemäß Satz 3 konstruiert wurde, ist eine treue Darstellung von  $L$ .

#### § 4.

Wir wollen nun den Beweis von Satz 4 zunächst reduzieren auf ein gewisses Lemma, das den universellen Einbettungsring  $A(L)$  von  $L$  über  $k$  betrifft.  $A(L)$  ist definiert als der assoziative  $k$ -Ring mit den Basiselementen

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \quad (0 \leq \alpha_i; \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

über  $k$ , wobei die Elemente  $a_1, a_2, \dots, a_n$  eine Basis von  $L$  über  $k$  sind. Die Multiplikation in  $A(L)$  ist gemäß des Birkhoffschen Streckungsprozesses [2] erklärt, der sich auf die Regel für die Lie-Multiplikation der Basiselemente von  $L$

$$a_i \circ a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ij}^k a_k \quad (\gamma_{ij}^k \text{ in } k)$$

stützt.  $A(L)$  enthält sowohl den universellen Einbettungsring  $A(W)$  von  $W$  als auch den universellen Einbettungsring  $A(T)$  von  $T$  über  $k$  als  $k$ -Teilringe. Modultheoretisch gesehen ist  $A(L)$  Produktmodul von

$A(W)$  und  $A(T)$  und ebenfalls Produktmodul von  $A(T)$  und  $A(W)$ . Die Verflechtung der  $k$ -Teiltringe  $A(W)$  und  $A(T)$  vom Standpunkt der Ringtheorie aus gesehen ist nicht so einfach und bildet den Gegenstand der noch auszuführenden Untersuchung. Der Durchschnitt von  $A(W)$  und  $A(T)$  wird gebildet von allen Vielfachen

$$\lambda a_1^0 a_2^0 \dots a_n^0 \quad (\lambda \in k)$$

des Einheitselementes  $a_1^0 a_2^0 \dots a_n^0$  von  $A(L)$ , die füglich mit dem Koeffizienten  $\lambda$  identifiziert werden können, da es sich dabei um eine isomorphe Abbildung von  $k$  in das Zentrum von  $A(L)$  handelt. Die Regel betreffend Multiplikation von Elementen des  $k$ -Ringes  $A(L)$  mit Skalaren aus  $k$  geht dabei über in die Regel betreffend die Multiplikation eines beliebigen Elementes aus  $A(L)$  mit dem Zentrumelement  $\lambda a_1^0 a_2^0 \dots a_n^0$ .

Jede Darstellung  $\Delta$  von  $L$  kann auf eine und nur eine Weise zu einer eigentlichen Darstellung  $\Delta^{(A(L))}$  von  $A(L)$  ergänzt werden, indem wir festsetzen

$$\begin{aligned} \Delta^{(A(L))}(\sum \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}) \\ = \sum \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \Delta(a_1)^{\alpha_1} \Delta(a_2)^{\alpha_2} \dots \Delta(a_n)^{\alpha_n} \\ \Delta^{(A(L))}(a_i) = \Delta(a_i), \\ \Delta^{(A(L))}(1) = I. \end{aligned}$$

Wo keine Gefahr der Verwechslung besteht, kann unbedenklich  $\Delta$  an Stelle von  $\Delta^{(A(L))}$  geschrieben werden. In der Tat hat  $\Delta^{(A(L))}$  alle wesentlichen Eigenschaften, betreffend Äquivalenz, Reduzibilität, Zerfällbarkeit, Grad usw. mit  $\Delta$  gemein. Umgekehrt entsteht jede Darstellung von  $L$  aus einer Darstellung von  $A(L)$  als Darstellung induziert auf der Lie-Unteralgebra  $L$ .

Entsprechend kann jede Darstellung  $\Gamma$  von  $T$  auf eine und nur eine Weise zu einer eigentlichen Darstellung  $\Gamma^{(A(T))}$  des assoziativen  $k$ -Ringes  $A(T)$  ergänzt werden, und umgekehrt entsteht jede Darstellung von  $T$  als Darstellung induziert auf der Lie-Unteralgebra  $T$ .

Es ist klar, daß die Dimension von  $\Gamma^{(A(T))}(A(T))$  über  $k$  endlich ist. Da der Differenzring von  $A(T)$  über dem Kern  $A(T)_\Gamma$  der Darstellung  $\Gamma^{(A(T))}$  isomorph zu dem Darstellungsring  $\Gamma^{(A(T))}(A(T))$  ist, so ist  $A(T) - A(T)_\Gamma$  ein hyperkomplexes System über  $k$ . Wenn nun  $A_0$  irgendein zweiseitiges Ideal von  $A(T)$  ist, das im Kern von  $\Gamma^{(A(T))}$  enthalten ist, so daß auch noch die Dimension von  $A(T) - A_0$  über  $k$

endlich ist, dann ist der Differenzring  $A(T) - A_0$  ein hyperkomplexes System über  $k$  mit Einheitselement, auf dem  $\Gamma$  eine eigentliche Darstellung  $\Gamma^*$  gemäß der Zuordnung

$$\Gamma^*(x + A_0 - A_0) = \Gamma^{(A(T))}(x)$$

induziert. Umgekehrt induziert jede eigentliche Darstellung  $\Gamma^*$  des hyperkomplexen Systemes  $A(T) - A_0$  eine eigentliche Darstellung  $\Gamma^{(A(T))}$  und damit auch eine Darstellung  $\Gamma$  von  $T$  gemäß der Zuordnungsvorschrift

$$\Gamma^{(A(T))}(x) = \Gamma^*(x + A_0 - A_0) ,$$

wobei  $A_0$  zum Kerne der so erklärten Darstellung von  $A(T)$  gehört. So kommt es, daß die Darstellungstheorie von Liealgebren auf weite Strecken mit der Darstellungstheorie gewisser hyperkomplexer Systeme identisch ist.

Wir wollen nun annehmen, daß  $\Delta$  eine Darstellung von  $L$  ist, die von  $\Gamma$  erzeugt wird und die Folgerungen untersuchen. Dann enthält der Kern  $B$  von  $\Delta^{(A(L))}$  nur solche Elemente von  $A(T)$ , die auch zum Kerne von  $\Gamma^{(A(T))}$  gehören :

$$A_0 = B \cap A(T) \subseteq A(T)_\Gamma .$$

Ferner ist die Dimension von  $A(L) - B$  endlich und

$$A(T) - A_0 \cong A(T) + B - B .$$

Folglich ist die Darstellung  $\Delta^*$  des hyperkomplexen Systemes  $A(L) - B$ , die durch  $\Delta$  induziert wird, erzeugt von der Darstellung  $\Gamma^*$  des hyperkomplexen Systemes  $A(T) + B - B$ , die durch  $\Gamma$  induziert wird.

Umgekehrt möge angenommen werden, daß  $B$  ein zweiseitiges Ideal von  $A(L)$  ist mit der Eigenschaft, daß die Dimension von  $A(L) - B$  über  $k$  endlich ist und daß

$$B \cap A(T) = A(T)_\Gamma .$$

Dann induziert  $\Gamma$  eine Darstellung  $\Gamma^*$  der Teilalgebra  $A = A(T) + B - B$  des hyperkomplexen Systemes  $S = A(L) - B$  gemäß der Formel :

$$\Gamma^*(x + B - B) = \Gamma^{(A(T))}(x) \quad (x \in A(T)) .$$

Wenn dann die Darstellung  $\Delta^*$  von  $S$ , welche durch die Darstellung  $\Gamma^*$  der Teilalgebra  $A$  induziert wird, zugleich auch von  $\Gamma^*$  erzeugt wird, dann induziert  $\Delta^*$  weiter eine Darstellung  $\Delta$  auf  $L$  gemäß der Regel

$$\Delta(a) = \Delta^*(a + B - B) \quad (a \in L)$$

und diese Darstellung von  $L$  wird erzeugt von  $\Gamma$ .

Die Frage ist nun: Unter welchen Bedingungen ist es sicher, daß die Darstellung  $\Delta^*$  des hyperkomplexen Systemes  $S$  über  $k$ , die von der Darstellung  $\Gamma^*$  der Teilalgebra  $A$  von  $S$  induziert wird, sogar von  $\Gamma^*$  erzeugt wird?

Eine einfache hinreichende Bedingung ist die Existenz eines  $k$ -Teilmoduls  $\hat{A}$  von  $S$  mit der Eigenschaft, daß

$$S = A + \hat{A}, \quad \hat{A}A \subseteq \hat{A}. \quad (7)$$

In der Tat, für einen beliebigen Darstellungsmodul  $m$  von  $\Gamma^*$  erhalten wir einen Darstellungsmodul der von  $\Gamma^*$  induzierten Darstellung  $\Delta^*$  von  $S$ , indem wir den Modul  $M$  mit den Erzeugenden  $\bar{u}$  und  $s\bar{u}$  ( $s \in S$ ,  $u \in m$ ) und den definierenden Relationen

$$\begin{aligned} \bar{u} + \bar{u}' &= \overline{u + u'} \\ s\bar{u} + s'\bar{u}' &= \overline{s u + s' u'} \\ s\bar{u} + s'\bar{u} &= (s + s')\bar{u} \\ s\bar{u} + \bar{u}' &= \bar{u}' + s\bar{u} \\ s'\bar{u} + s\bar{u} &= \overline{s' u + s u} \\ a\bar{u} &= \overline{a u} \\ (s a)\bar{u} &= \overline{s a u} \\ (\lambda s)\bar{u} &= \overline{s \lambda u} \end{aligned}$$

bilden, wobei  $u, u' \in m$ ;  $s, s' \in S$ ;  $a \in A$ ;  $\lambda \in k$ . Die den Elementen aus  $k$  respektiv  $S$  entsprechenden Operatoren sind gemäß den Formeln

$$\begin{aligned} \lambda \bar{u} &= \overline{\lambda u}, & \lambda(s\bar{u}) &= \overline{s \lambda u}, \\ s(\bar{u}) &= \overline{s u}, & s(s'\bar{u}) &= \overline{(s s') u} \end{aligned}$$

erklärt.

Unter der zusätzlichen Annahme (7) können wir das normale Erzeugendensystem ersetzen durch das Teilsystem der Elemente

$$\bar{u} \text{ und } \hat{a}\bar{u} \quad (u \in m, \quad \hat{a} \in \hat{A}),$$

für das wir die definierenden Relationen

$$\begin{aligned}
\overline{u} + \overline{u'} &= \overline{u + u'} \\
\widehat{a} \overline{u} + \overline{u'} &= \overline{u'} + \widehat{a} \overline{u} \\
\widehat{a} \overline{u} + \widehat{a} \overline{u'} &= \widehat{a} \overline{u + u'} \\
\widehat{a}_1 \overline{u} + \widehat{a}_2 \overline{u} &= (\widehat{a}_1 + \widehat{a}_2) \overline{u} \\
\widehat{a}_1 \overline{u} + \widehat{a}_2 \overline{u'} &= \widehat{a}_2 \overline{u'} + \widehat{a}_1 \overline{u} \\
(\widehat{a} a) \overline{u} &= \widehat{a} \overline{a u} \\
(\lambda \widehat{a}) \overline{u} &= \widehat{a} \overline{\lambda u}
\end{aligned}$$

mit  $u, u'$  aus  $m$ ,  $a_1, a_2$  aus  $\widehat{A}$ ,  $a$  aus  $A$ ,  $\lambda$  aus  $k$  finden. Auf Grund des neuen Relationensystems erweist sich die Zuordnung

$$u \rightarrow \overline{u}$$

als ein Operatorisomorphismus zwischen dem Darstellungsmodul  $m$  und einem gewissen in  $M$  enthaltenen  $A$ -Modul  $\overline{m}$ . Da der von  $\overline{m}$  erzeugte  $S$ -Modul mit  $M$  übereinstimmt, so wird die zu  $M$  gehörige Darstellung  $\Delta^*$  von  $S$  von der Darstellung  $\Gamma^*$  von  $A$  erzeugt. Wir bemerken noch, daß  $\Delta^*$  eine eigentliche Darstellung ist, sobald  $\Gamma^*$  eine eigentliche Darstellung ist.

Um diese hinreichende Bedingung für den Beweis von Satz 4 zu benutzen, benötigen wir noch das folgende

**Lemma.** *Unter den Bedingungen von Satz 4 kann im Kerne von  $\Gamma^{(A(T))}$  ein zweiseitiges Ideal  $A_0$  von  $A(T)$  gefunden werden, so daß der Differenzring  $A(T) - A_0$  endliche Dimension über  $k$  hat. Ferner gibt es ein zweiseitiges Ideal  $B$  von  $A(L)$  mit der Eigenschaft, daß*

$$B \cap A(T) = A_0$$

und

$$\dim_k (A(L) - B) < \infty .$$

Schließlich gibt es einen  $k$ -Modul  $\widehat{A}$  in  $A(L)$  mit den Eigenschaften :

$$\begin{aligned}
\widehat{A} + A(T) &= A(L) \\
\widehat{A} \cap (B + A(T)) &= B \\
\widehat{A} A(T) &\subseteq \widehat{A} .
\end{aligned}$$

Gemäß den im Beginn dieses Paragraphen angestellten Überlegungen folgt der erste Teil von Satz 4 sofort aus dem Lemma. Der letzte Teil von Satz 4 folgt aus einer genaueren Analyse der Konstruktion der im Lemma erwähnten Ringe und Moduln und wird später behandelt werden.

§ 5.

Wir wenden uns zur Konstruktion von  $A_0$ . Die Darstellung  $\Gamma$  kann durch passende Basiswahl in die reduzierte Form

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & * & \cdots & * \\ & \Gamma_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \Gamma_\gamma \end{pmatrix}$$

gebracht werden, in der  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\gamma$  voll reduzible Darstellungen von  $T$  bedeuten. Dies kann auf viele Weisen geschehen. Der Maximalwert von  $r$  wird erreicht durch irgendeine Ausreduktion von  $\Gamma$ . In diesem Falle sind die Darstellungen  $\Gamma_i$  gewöhnliche irreduzible Darstellungen. Der Minimumwert von  $r$  tritt ein für die Loewy Kompositionsreihen der zu  $\Gamma$  gehörigen Darstellungsmoduln.

Da gemäß den Annahmen des Satz 4 die Darstellung  $\Gamma$  auf dem Ideale  $T_1$  von  $T$  eine Nildarstellung induziert, so induziert auch jede irreduzible Komponente von  $\Gamma$  eine Nildarstellung von  $T_1$ . Aber wenn eine irreduzible Darstellung von  $T$  in einem Ideale  $T_1$  von  $T$  eine Nildarstellung induziert, so muß die so induzierte Darstellung stets eine Nulldarstellung von  $T_1$  sein. Daher verschwindet jede irreduzible Komponente von  $\Gamma$  auf  $T_1$ . Dasselbe gilt für die vollreduziblen Komponenten  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$ , mithin auch für die Summe  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_r$  dieser Komponenten. Der Kern  $A_1$  von  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \cdots + \Gamma_r$  ist ein zweiseitiges Ideal von  $A(T)$ , das  $T_1$  enthält und dessen zugeordneter Differenzring  $A(T) - A_1$  endliche Dimension über  $k$  hat. Ferner gilt für jedes Element  $x$  aus  $A_1$ , daß

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} \boxed{0 \cdots 0} & * \cdots * & & \\ & \boxed{0 \cdots 0} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \boxed{0 \cdots 0} \end{pmatrix}$$

und daher ist  $\Gamma(A_1') = 0$ , das heißt  $A_1'$  gehört zum Kerne von  $\Gamma^{(A(T))}$ .

Wie schon erwähnt, ist die Dimension des Differenzringes von  $A(T)$  modulo dem Kerne  $A_1$  einer Darstellung endlichen Grades von  $A(T)$  bezüglich  $k$  gebildet endlich. Wir wollen nun zeigen, daß auch die Dimension von  $A(T) - A_1'$  über  $k$  endlich ist. Dies folgt aus

**Hilfssatz 1.** *Jedes zweiseitige Ideal  $X$  von  $A(T)$  für das*

$$\dim_k(A(T) - X) < \infty$$

*läßt sich von einer endlichen Anzahl von Elementen erzeugen, und*

**Hilfssatz 2.** *Wenn für die zweiseitigen Ideale  $X$  und  $Y$  von  $A(T)$  gilt*

$$\dim_k(A(T) - X) < \infty$$

$$\dim_k(A(T) - Y) < \infty$$

*dann folgt*

$$\dim_k(A(T) - YX) < \infty .$$

Bevor wir zum Beweise von Hilfssatz 1 und 2 übergehen, möge die Konstruktion von  $A_0$  beendet werden. Wir definieren

$$A_0 = A_1' .$$

Aus Hilfssatz 1 und 2 folgt wie angekündigt, daß die Dimension des Differenzringes  $A(T) - A_0$  über  $k$  gebildet endlich ist. Auch wissen wir schon, daß  $A_0$  ein zweiseitiges Ideal von  $A(T)$  ist, das zum Kern  $\Gamma^{(A(T))}$  gehört.

*Beweis von Hilfssatz 1:* Es genügt anzunehmen, daß  $X$  ein Linksideal ist oder auch daß  $X$  ein Rechtsideal ist. Sei etwa  $X$  ein Linksideal von  $A(T)$ . Wir wählen eine Basis  $t_1, t_2, \dots, t_\tau$  von  $T$  über  $k$ . Jedes Element von  $A(T)$  ist eine Linearkombination der Basiselemente

$$t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_\tau^{\alpha_\tau} \quad (0 \leq \alpha_i; \quad i = 1, 2, \dots, \tau)$$

von  $A(T)$ . Der Grad eines Basiselementes ist erklärt als die Summe der auftretenden Exponenten. Der Grad  $d(x)$  eines beliebigen Elementes  $x$  von  $A(T)$  ist erklärt als das Maximum aller Grade der Basiselemente mit nichtverschwindenden Koeffizienten in der Darstellung von  $x$ . Das Leitglied  $s(x)$  von  $x$  ist erklärt als die Summe aller von den Basiselementen vom Grade  $d(x)$  herrührenden Beiträge zu  $x$ . Eine einfache Diskussion der Birkhoffschen Streckungsmethode ergibt, daß stets

$$s(xy) = s(s(x)s(y))$$

ist und ferner

$$s(x + y) = s(x) \quad \text{falls} \quad d(y) < d(x) .$$

Die Zuordnung

$$x = \sum \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\tau} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_\tau^{\alpha_\tau} \rightarrow \bar{x} = \sum \lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\tau} s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_\tau^{\alpha_\tau}$$

stellt einen Modulisomorphismus zwischen dem  $k$ -Modul  $A(T)$  und dem Ring  $k[s_1, s_2, \dots, s_\tau]$  der Polynome in  $\tau$  Unbestimmten  $s_1, s_2, \dots, s_\tau$  mit Koeffizienten aus  $k$  her, wobei auch der Polynomring lediglich als  $k$ -Modul angesehen wird. Jedoch gilt außer den Regeln für Operatorisomorphismen für  $k$ -Moduln auch noch die Regel

$$\overline{s(xy)} = \overline{s(x)} \overline{s(y)} ,$$

wie sich wiederum durch eine einfache Diskussion der Birkhoff'schen Streckungsmethode ergibt. Es folgt hieraus, daß die Polynome  $\overline{s(x)}$  mit  $x$  aus  $X$  ein homogenes Ideal  $X^*$  des Polynomringes  $k[s_1, s_2, \dots, s_\tau]$  bilden. Aus dem Satz von Hilbert [5] über Ideale von Polynomringen folgt die Existenz einer endlichen Anzahl von homogenen Polynomen

$$\overline{s(x_i)} = P_i \quad (x_i \in X; \quad i = 1, 2, \dots, r)$$

in  $X^*$ , so daß jedes beliebige homogene Polynom  $P$  in  $X^*$  dargestellt werden kann in der Form

$$P = Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + \dots + Q_r P_r$$

mit  $r$  homogenen Polynomen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ , für die entweder  $P = [Q_i] + [P_i]$  oder  $Q_i = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  ist.

Somit gibt es  $r$  Elemente  $x_1, x_2, \dots, x_r$  in  $X$  für die

$$\overline{s(x_i)} = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, r .$$

Wir behaupten, daß die Elemente  $x_1, x_2, \dots, x_r$  das Linksideal  $X$  erzeugen in dem Sinne, daß jedes Element  $x$  aus  $X$  in der Form

$$x = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_r x_r$$

mit  $y_1, y_2, \dots, y_r$  aus  $A(T)$  dargestellt werden kann, wobei entweder

$$d(x) \geq d(y_i) + d(x_i)$$

oder  $y_i = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$  ist.

Wenn das nicht zuträfe, dann gäbe es ein Element  $x$  in  $X$  von kleinstem Grade, das keine Darstellung wie eben beschrieben haben würde. Aber da  $\overline{s(x)}$  zu  $X$  gehört, so gibt es eine Darstellung

$$s(x) = Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + \cdots + Q_r P_r$$

mit  $r$  homogenen Polynomen  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$ , die der Bedingung genügen, daß entweder

$$d(x) = [Q_i] + [P_i]$$

oder aber  $Q_i = 0$  ist für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Somit können wir Elemente  $y_i$  in  $A(T)$  finden, für die

$$\overline{s(y_i)} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

ist, wobei wir  $s(0) = 0$  zu erklären haben. Folglich ist

$$s(x) = s(y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_r x_r)$$

und

$$x' = x - y_1 x_1 - y_2 x_2 - \cdots - y_r x_r \in X$$

und entweder  $d(x') < d(x)$  oder  $x' = 0$ .

Auf jeden Fall folgt aus unserer Minimalannahme betreffend  $x$ , daß  $x' = y'_1 x_1 + y'_2 x_2 + \cdots + y'_r x_r$  mit  $y'_1, y'_2, \dots, y'_r \in A(T)$  und entweder  $d(x') \geq d(y'_i) + d(x_i)$  oder  $y'_i = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, r$ . Daher folgt  $x = (y_1 + y'_1) x_1 + (y_2 + y'_2) x_2 + \cdots + (y_r + y'_r) x_r$  als eine Darstellung von  $x$  wie oben beschrieben, entgegen Annahme.

Mithin lassen sich alle Elemente aus  $X$  in der oben beschriebenen Weise aus  $x_1, x_2, \dots, x_r$  erzeugen, q. e. d.

*Beweis von Hilfssatz 2:* Gemäß Hilfssatz 1 gibt es  $r$  Elemente  $x_1, x_2, \dots, x_r$  in  $X$ , so daß jedes Element  $x$  aus  $X$  in der Form

$$x = X_1 x_1 + X_2 x_2 + \cdots + X_r x_r \quad \text{mit } X_1, X_2, \dots, X_r \text{ aus } A(T) \quad (8)$$

darstellbar ist. Weiter folgt aus unserer Voraussetzung bezüglich  $X$  und  $Y$  die Existenz von  $r'$  Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_{r'}$  in  $A(T)$ , so daß jedes Element  $a$  von  $A(T)$  in der Form

$$a = x + \sum_{i=1}^{r'} \lambda_i a_i \quad \text{mit } x \text{ aus } X, \quad \lambda_i \text{ aus } k \quad (9)$$

darstellbar ist. Ferner gibt es  $s'$  Elemente  $b_1, b_2, \dots, b_{s'}$  in  $A(T)$ , so daß sich jedes Element  $b$  aus  $A(T)$  in der Form

$$b = y + \sum_{j=1}^{s'} \mu_j b_j \quad \text{mit } y \text{ aus } Y, \quad \mu_j \text{ aus } k$$

darstellen läßt. Für ein beliebiges Element  $a$  aus  $A(T)$  gehen wir nun aus von der Darstellung (9), setzen für  $x$  die rechte Seite von (8) ein und stellen jedes Element  $X_i$  aus  $A(T)$  in der Form

$$X_i = y^{(i)} + \sum_{j=1}^{s'} \mu_{ij} b_j \quad \text{mit } \mu_{ij} \text{ aus } k, \quad y^{(i)} \text{ aus } Y$$

dar, so daß sich endlich die Darstellung

$$a = \sum_{h=1}^{r'} \lambda_h a_h + \sum_{i=1}^{r'} \sum_{j=1}^{s'} \lambda_i \mu_{ij} b_j x_i + \sum_{i=1}^{r'} \lambda_i y^{(i)} x_i$$

ergibt. Da diese Darstellung für jedes Element aus  $A(T)$  gilt, so folgt

$$A(T) = \sum_{h=1}^{r'} k \cdot a_h + \sum_{i=1}^{r'} \sum_{j=1}^{s'} k \cdot b_j x_i + YX$$

woraus sich ergibt, daß  $\dim_k(A(T) - YX) < \infty$ .

## § 6.

Jetzt gehen wir daran, das zweiseitige Ideal  $B$  von  $A(L)$ , das in dem Lemma auftritt, zu konstruieren. Für jedes zweiseitige Ideal  $C$  von  $A(W)$  bilden wir die Menge  $C'$  aller Elemente  $c$  aus  $C$ , die der zusätzlichen Bedingung

$$T \circ c \subseteq CT_1$$

genügen.  $C'$  ist ein in  $C$  enthaltenes zweiseitiges Ideal von  $A(W)$ . In der Tat; wenn  $c$  und  $c'$  beide zu  $C'$  gehören, dann folgt

$$\begin{aligned} c \in C, \quad c' \in C \\ T \circ c \subseteq CT_1, \quad T \circ c' \subseteq CT_1 \\ \lambda c + \mu c' \in C, \quad T \circ (\lambda c + \mu c') \subseteq T \circ c + T \circ c' \subseteq CT_1 \\ \lambda c + \mu c' \in C' \quad \text{für } \lambda, \mu \text{ aus } k. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus  $T \circ W = W \circ T \subseteq T_1$ , daß

$$\begin{aligned} T \circ (Wc) &\subseteq (T \circ W)c + W(T \circ c) \\ &\subseteq T_1 c + WCT_1 \\ &\subseteq T_1 \circ c + cT_1 + WCT_1 \\ &\subseteq T \circ c + CT_1 + CT_1 \\ &\subseteq CT_1 + CT_1 + CT_1 \\ &\subseteq CT_1. \\ T \circ (cW) &\subseteq (T \circ c)W + c(T \circ W) \\ &\subseteq CT_1 W + CT_1 \\ &\subseteq C(T_1 \circ W) + CWT_1 + CT_1 \\ &\subseteq CT_1 + CT_1 + CT_1 \\ &\subseteq CT_1, \end{aligned}$$

wo wir an mehreren Stellen die Eigenschaft  $c \in C$  benutzt haben. Da  $Wc \subseteq WC \subseteq C$ ,  $cW \subseteq CW \subseteq C$ , so haben wir  $WC' \subseteq C'$ ,  $C'W \subseteq C'$ . Da nun  $A(W)$  von  $W$  erzeugt wird, so ist  $C'$  ein zweiseitiges Ideal von  $A(W)$ .

Zum Beispiel  $A(W)$  selbst wird von 1 erzeugt. Da nun  $T \circ 1 = 0 \in A(W)T_1$ , so folgt

$$\begin{aligned} 1 &\in A(W)' , \\ A(W)' &= A(W) , \\ T \circ A(W) &\subseteq A(W)T_1 , \end{aligned}$$

eine Eigenschaft, die wir gleich benutzen werden.

Ferner wollen wir zeigen, daß

$$\dim_k(A(T) - C') < \infty , \quad \text{sobald} \quad \dim_k(A(T) - C) < \infty .$$

Zu diesem Zwecke ergänzen wir eine Basis  $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$  von  $T_1$  über  $k$  zu einer Basis  $t_1, t_2, \dots, t_\tau$  von  $T$  über  $k$ . Da  $T \circ A(W) \subseteq A(W)T_1$  und der  $k$ -Modul  $A(L)$  Produktmodul der  $k$ -Moduln  $A(W)$  und  $A(T)$  ist, so gibt es Gleichungen

$$t_k \circ x = \sum_{i=1}^{\sigma} \sigma_{ik}(x) t_i , \quad k = 1, 2, \dots, \tau$$

für jedes  $x$  aus  $A(W)$  mit eindeutig bestimmten Elementen  $\sigma_{ik}(x)$  aus  $A(W)$ . Es folgt dann leicht, daß die Zuordnung

$$x \rightarrow \sigma_{ik}(x)$$

jeweils eine lineare Transformation des  $k$ -Moduls  $A(W)$  ist.  $C'$  ist der Durchschnitt von  $C$  mit allen  $k$ -Moduln  $M_{ik}$ , die aus den Elementen aus  $A(W)$  bestehen, die durch  $\sigma_{ik}(x)$  in  $C$  projiziert werden. Aus dem dritten Isomorphiesatz folgt

$$A(W) - M_{ik} \cong \sigma_{ik}(A(W)) - \sigma_{ik} M_{ik} .$$

Da

$$\sigma_{ik} M_{ik} = \sigma_{ik}(A(W)) \cap C ,$$

so folgt aus dem zweiten Isomorphiesatz, daß

$$\sigma_{ik}(A(W)) - \sigma_{ik} M_{ik} \cong (\sigma_{ik}(A(W)) + C) - C .$$

Daher ist

$$A(W) - M_{ik} \cong (\sigma_{ik}(A(W)) + C) - C .$$

Da  $\dim_k(\sigma_{ik}(A(W)) + C) - C) \leq \dim_k(A(W) - C) < \infty$ , so folgt, daß

$$\dim_k(A(W) - M_{ik}) < \infty .$$

Nun ergibt sich

$$\begin{aligned} \dim_k(A(W) - C') &= \dim_k(A(W) - (C \cap \widehat{\bigcup_{i,k} M_{ik}})) \\ &\leq \dim_k(A(W) - C) + \sum_{i,k} \dim_k(A(W) - M_{ik}) < \infty . \end{aligned}$$

Wir benutzen diese Tatsachen zur Konstruktion des im Lemma auftretenden zweiseitigen Ideales  $B$  wie folgt. Es sei  $C_1$  ein beliebiges zweiseitiges Ideal von  $A(W)$ , für das

$$0 < \dim_k(A(W) - C_1) < \infty .$$

Zum Beispiel kann  $C_1$  gleich dem aus  $W$  erzeugten zweiseitigen Ideal  $WA(W)$  von  $A(W)$  gesetzt werden. In jedem Falle definieren wir:

$$C_2 = C'_1, \quad C_3 = C'_2, \dots, C_r = C'_{r-1} \quad (10)$$

$$B = C_r A_1^0 + C_{r-1} A_1^1 + C_{r-2} A_1^2 + \dots + C_1 A_1^{r-1} + C_0 A_1^r, \quad (11)$$

wobei  $C_0 = A(W)$ ,  $A_1^1 = A_1$ ,  $A_1^0 = A(T)$  gesetzt ist.

Wir zeigen, daß  $B$  ein zweiseitiges Ideal von  $A(L)$  ist:

$$\begin{aligned} TC_i A_1^{r-i} &\subseteq (T \circ C_i) A_1^{r-i} + C_i T A_1^{r-i} \\ &\subseteq C_{i-1} T_1 A_1^{r-i} + C_i A_1^{r-i} \\ &\subseteq C_{i-1} A_1 A_1^{r-i} + C_i A_1^{r-i} \\ &\subseteq C_{i-1} A_1^{r-(i-1)} + C_i A_1^{r-i}, \quad i = 2, 3, \dots, r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TC_0 A_1^r &= T A(W) A_1^r \\ &\subseteq (T \circ A(W)) A_1^r + A(W) T A_1^r \\ &\subseteq A(W) T_1 A_1^r + A(W) A_1^r \\ &\subseteq A(W) A_1^r + A(W) A_1^r \\ &\subseteq C_0 A_1^r \end{aligned}$$

$$TB \subseteq B$$

$$WC_i A_1^{r-i} \subseteq C_i A_1^{r-i}$$

$$WB \subseteq B$$

$$C_i A_1^{r-i} T \subseteq C_i A_1^{r-i}$$

$$BT \subseteq T .$$

Ferner bemerken wir, daß

$$1 \circ W = 0 \subseteq A_1$$

$$T \circ W \subseteq T_1 \subseteq A_1$$

also wegen der Idealeigenschaft von  $A_1$

$$A(T) \circ W \subseteq A_1$$

und weiter

$$A_1 \circ W \subseteq A_1$$

$$A_1^v \circ W \subseteq A_1^v$$

ist. Es folgt

$$\begin{aligned} C_i A_1^{r-i} W &\subseteq C_i (A_1^{r-i} \circ W) + C_i W A_1^{r-i} \\ &\subseteq C_i A_1^{r-i} + C_i A_1^{r-i} \\ &\subseteq C_i A_1^{r-i} \\ BW &\subseteq B . \end{aligned}$$

Da  $L = W + T$ , so folgt  $LB \subseteq B$  und  $BL \subseteq B$ . Da  $A(L)$  von  $L$  erzeugt wird, so ergibt sich, daß  $B$  ein zweiseitiges Ideal von  $A(L)$  ist. Weiter zeigen wir, daß die Dimension von  $A(L) - B$  über  $k$  endlich ist. Gemäß Konstruktion (10) ist

$$A(W) > C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_r ,$$

und wie früher gezeigt folgt aus der Endlichkeit von  $\dim_k (A(W) - C_1)$  sukzessive die Endlichkeit der Dimension von  $A(W) - C_i$  über  $k$ . Daher gibt es endlich viele Elemente  $x_1, x_2, \dots, x_\alpha$  in  $A(W)$ , so daß

$$A(W) = \sum_{i=1}^{\alpha} k x_i + C_r .$$

Da auch  $\dim_k (A(T) - A_1^r)$  als endlich bereits erkannt worden ist, so gibt es endlich viele Elemente  $y_1, y_2, \dots, y_\beta$  in  $A(T)$ , so daß

$$A(T) = \sum_{j=1}^{\beta} k y_j + A_1^r$$

gilt. Daher ist

$$\begin{aligned} A(L) &= A(W)A(T) \\ &= (\sum_{i=1}^{\alpha} k x_i + C_r)A(T) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha} x_i A(T) + C_r A(T) \\ &= \sum_{i=1}^{\alpha} x_i (\sum_{j=1}^{\beta} k y_j + A_1^r) + C_r A_1^r \\ &\subseteq \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} k x_i y_j + B \subseteq A(L) . \end{aligned}$$

Mithin ist

$$A(L) = \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} k x_i y_j + B .$$

Daher

$$\dim_k (A(L) - B) \leq \dim_k (A(W) - C_r) \cdot \dim_k (A(T) - A_1^r) .$$

Weiter zeigen wir, daß

$$B \cap A(T) = A_0$$

ist. Da das zweiseitige Ideal  $C_1$  von  $A(W)$  einen von Null verschiedenen Differenzring hat, so ist 1 nicht in ihm enthalten. Also gibt es einen  $k$ -Modul  $\hat{C}$  in  $A(W)$ , der  $C_1$  umfaßt, so daß

$$A(W) = k \dot{+} \hat{C}$$

ist. Wir finden

$$A(W)A(T) = kA(T) \dot{+} \hat{C}A(T)$$

$$\begin{aligned} A_0 = A_1^r = 1 \cdot A_1^r &\subseteq B \cap A(T) \\ &\subseteq (C_1A(T) + A(W)A_1^r) \cap A(T) \\ &\subseteq (\hat{C}A(T) + (k + \hat{C})A_0) \cap A(T) \\ &\subseteq (\hat{C}A(T) + A_0 + \hat{C}A_0) \cap A(T) \\ &\subseteq (A_0 + \hat{C}A(T)) \cap A(T) = A_0 \cap A(T) + \hat{C}A(T) \cap A(T) \\ &= A_0 + 0 = A_0 . \end{aligned}$$

Mithin ist

$$B \cap A(T) = A_0 .$$

Schließlich benutzen wir den vorhin erklärten Modul  $\hat{C}$  für die Definition von  $\hat{A}$  wie folgt:

$$\hat{A} = \hat{C}A(T) .$$

Dann finden wir

$$\begin{aligned} \hat{A} + A(T) &= (k + \hat{C})A(T) = A(W)A(T) = A(L) , \\ \hat{A} \cap A(T) &= 0 , \\ (\hat{A} + B) \cap (A(T) + B) &= \hat{A} \cap (A(T) + B) + B \\ &= \hat{A} \cap (A(T) + C_0A_1^r + (C_rA_1^0 + \dots + C_1A_1^{r-1})) + B \\ &= \hat{A} \cap (A(T) + C_0A_1^r) + C_rA_1^0 + \dots + C_1A_1^{r-1} + B \\ &= (\hat{C}A(T)) \cap (A(T) + (k + \hat{C})A_1^r) + B \\ &= \hat{C}A_1^r + B \\ &= B . \end{aligned}$$

§ 7.

Im letzten Paragraphen beweisen wir die zweite Hälfte von Satz 4 und untersuchen hernach, welche Auskunft unsere Konstruktion über die Aufgabe, alle möglichen Darstellungen einer gegebenen Lie-Algebra der Charakteristik 0 zu finden, gibt.

Mit den obigen Bezeichnungen machen wir nun die zusätzliche Annahme, daß  $W + T_1$  eine nilpotente Teilalgebra von  $L$  ist. Wir haben zu beweisen, daß bei passender Wahl des zweiseitigen Ideales  $C_1$  jede Darstellung  $\Gamma^*$  von  $A(T) - A_0$  die eine Nildarstellung auf  $T_1$  induziert, eine Darstellung  $\Delta^*$  von  $A(L) - B$  induziert, die ihrerseits eine Nildarstellung von  $W + T_1$  induziert.

Wir wählen für  $C_1$  das zweiseitige Ideal von  $A(W)$ , das von  $W$  erzeugt wird.

Allgemein gilt für irgend zwei Teilmoduln  $U, V$  eines Ringes die Relation

$$V \circ U^i \subseteq U^{i-1}(\underline{UV}) + U^{i-2}(\underline{U^2V}) + \dots + UU^{i-1}V + \underline{U^iV} \quad , \quad (12)$$

wobei wir gesetzt haben

$$\begin{aligned} \underline{U^1V} &= \underline{UV} = U \circ V \\ \underline{U^2V} &= U \circ (\underline{UV}) \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{U^{i+1}V} &= U \circ (\underline{U^iV}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Wir beweisen die Relation (12) durch vollständige Induktion über  $i$ . Für  $i = 1$  ist sie klar. Angenommen, sie ist für  $i$  bewiesen, dann folgt

$$\begin{aligned} V \circ U^{i+1} &= V \circ (UU^i) \subseteq (V \circ U)U^i + U(V \circ U^i) \\ &\subseteq (\underline{UV})U^i + U(U^{i-1}(\underline{UV}) + \dots + \underline{U^iV}) \\ &\subseteq U^{i-1}(\underline{U}(\underline{UV})) + U^{i-2}(\underline{U^2}(\underline{UV})) + \dots + \underline{U^i}(\underline{UV}) \\ &\quad + U^i(\underline{UV}) + \dots + U(\underline{U^iV}) \\ &\subseteq U^{i-1}(\underline{U^2V}) + \dots + \underline{U^{i+1}V} \\ &\quad + U^i(\underline{UV}) + \dots + U(\underline{U^iV}) \\ &\subseteq U^i(\underline{UV}) + U^{i-1}(\underline{U^2V}) + \dots + \underline{U^{i+1}V} \quad . \end{aligned}$$

Da  $W + T_1$  nilpotent ist, so gibt es eine Zahl  $q$  mit der Eigenschaft, daß

$$\underline{W^q T_1} = \underline{W^{q+1} T_1} = \underline{W^{q+2} T_1} = \dots = 0$$

ist. Da  $\underline{WT} \subseteq T_1$ , so folgt

$$\underline{W^{q+1} T} = \underline{W^{q+2} T} = \dots = 0 .$$

Also ist für jede Zahl  $i > q$

$$\begin{aligned} T \circ W^i &\subseteq W^{i-1}(\underline{WT}) + W^{i-2}(\underline{W^2T}) + \dots + W^{i-q}(\underline{W^qT}) \\ &\subseteq W^{i-1}T_1 + W^{i-2}T_1 + \dots + W^{i-q}T_1 \\ &\subseteq (W^{i-1} + W^{i-2} + \dots + W^{i-q})T_1 , \end{aligned}$$

$$T \circ W^{q+j} \subseteq C_1 T_1$$

$$W^{q+j} \subseteq C_2 \quad (j \geq 1) .$$

$$\begin{aligned} T \circ W^{2q+1} &\subseteq (W^{2q} + W^{2q-1} + \dots + W^{q+1})T_1 \\ &\subseteq C_2 T_1 . \end{aligned}$$

$$W^{2q+j} \subseteq C_3, \quad (j \geq 1)$$

.....

$$W^{(r-1)q+1} \subseteq C_r$$

$$W^{(r-1)q+1} \subseteq B$$

$$\Delta^* (W^{(r-1)q+1}) = 0 .$$

Für jede irreduzible Komponente  $\Psi$  der von  $\Delta^*$  auf  $W + T_1$  induzierten Darstellung ergibt sich

$$\Psi(W^{(r-1)q+1}) = 0 .$$

Da  $T_1^r \subseteq A_1^r \subseteq B$ , so haben wir  $\Delta^*(T_1^r) = 0$ ,  $\Psi(T_1^r) = 0$ . Da  $T_1$  ein Ideal von  $W + T_1$  ist, das bei der irreduziblen Darstellung  $\Psi$  von  $W + T_1$  eine Nildarstellung erfährt, so erfährt es sogar eine Nulldarstellung

$$\Psi(T_1) = 0 ,$$

$$\Psi((W + T_1)^{(r-1)q+1}) = \Psi(W^{(r-1)q+1}) = 0 .$$

Mithin ist  $\Psi$  eine Nildarstellung. Da  $\Psi$  irreduzibel ist, so ist  $\Psi$  eine Nulldarstellung. Da jede irreduzible Komponente der von  $\Delta^*$  auf  $W + T_1$  induzierten Darstellung eine Nulldarstellung ist, so induziert  $\Delta^*$  auf  $W + T_1$  eine Nildarstellung. Damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Bezüglich der Aufgabe, einen Überblick über alle Darstellungen einer gegebenen Lie-Algebra  $L$  über einem Körper  $k$  der Charakteristik 0 zu gewinnen, erhalten wir auf Grund der vorstehenden Untersuchung die folgende Anweisung :

I. Bestimme das Radikal  $R(L)$  von  $L$ , wir setzen  $T = R(L)$ . Bestimme ferner das nilpotente Ideal  $T_1 = L \circ L \cap R(L)$ , und einen Vertretererring  $W$  von  $L$  modulo  $T$ , so daß

$$L = W \dot{+} R(L) .$$

Dann ist  $T - T_1$  abelsch und  $W \circ T \subseteq T_1$ .

II. Bestimme ein vollständiges System  $\Sigma_T$  nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen von  $T - T_1$ . Für einen algebraisch abgeschlossenen Koeffizientenbereich  $k$  bedeutet dies einfach, alle Linearformen auf dem  $k$ -Modul  $T - T_1$  zu bestimmen. Gemäß Satz 1 ergibt  $\Sigma_T$  ein volles System nicht äquivalenter Darstellungen von  $T$ , die als irreduzible Komponente einer Darstellung von  $T$ , die durch eine Darstellung von  $L$  induziert wird, auftreten können.

III. Bestimme ein vollständiges System  $\Sigma_W$  nicht äquivalenter irreduzibler Darstellungen der halbeinfachen Lie-Algebra  $W$ .  $\Sigma_W$  ist abzählbar und für algebraisch abgeschlossene Koeffizientenkörper  $k$  ist jedes Mitglied von  $\Sigma_W$  durch sein höchstes Gewicht charakterisiert. Alle möglichen höchsten Gewichte bilden ein Vektorgitter. Zwei Gewichte bestimmen dann und nur dann dieselbe irreduzible Darstellung als höchstes Gewicht, wenn sie unter einer gewissen Spiegelungsgruppe äquivalent sind.

IV. Wähle eine endliche Anzahl von Mitgliedern von  $\Sigma_T$ , die Nulldarstellung  $\Gamma_0$  inbegriffen, etwa  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_s$ . Es sei  $A_1$  der Kern der Darstellung  $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \dots + \Gamma_s$  des universellen Einbettungsringes  $A(T)$  von  $T$ .

V. Wähle eine endliche Anzahl von Mitgliedern von  $\Sigma_W$ , etwa  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_g$  und bilde den Kern  $C_1$  der Darstellung  $\Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_g$  des universellen Einbettungsringes  $A(W)$ .

VI. Bilde die zweiseitigen Ideale  $C_2, C_3, \dots, C_r$ , wobei  $C_i$  aus allen Elementen  $c$  aus  $C_{i-1}$  besteht, die der Bedingung

$$T \circ c \subseteq C_{i-1} T_1$$

genügen, wobei  $r$  irgendeine frei zu wählende natürliche Zahl ist. Für jedes Ideal  $C_i$  kann ein endliches Erzeugendensystem und auch eine endliche Basis von  $A(W) - C_i$  konstruiert werden.

## VII. Bilde das zweiseitige Ideal

$$B = C_r + C_{r-1}A_1 + C_{r-2}A_1^2 + \cdots + C_1A_1^{r-1} + A_1^r$$

des universellen Einbettungsrings  $A(L)$  von  $L$  über  $k$ . Der Differenzring  $A(L) - B$  ist ein hyperkomplexes System

$$S = S_{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_g; \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s; r}$$

über  $k$ . Dann wird jede Darstellung von  $L$  in Matrizen endlichen Grades über  $k$  induziert durch eine eigentliche Darstellung eines der unter VII gebildeten hyperkomplexen Systeme über  $k$ . Wenn wir  $\Sigma_W$  sowohl als auch  $\Sigma_T$  ordnen, dann läßt sich jede Darstellung von  $L$  eindeutig einer gewissen eigentlichen Darstellung eines gewissen hyperkomplexen Systemes  $S$  zuweisen.

### SCHRIFTENVERZEICHNIS

- [1] *I. Ado*, Bull. Soc. phys.-math. Kazan III. s. 6 (1934), S. 38—42 und 7 (1936), S. 3—43.
- [2] *G. Birkhoff*, Representability of Lie Algebras and Lie Groups by Matrices, Ann. of Math. 38, No. 2 (April 1937), S. 526—532.
- [3] *E. Cartan*, Les représentations linéaires des groupes de Lie, J. Math. pur. appl. (9) 17 (1938).
- [4] *Levi*, Sulla struttura dei gruppi finiti e continui, Atti. Accad. Sci. Torino 40 (1905), p. 551—565.
- [5] Satz von Hilbert über die endliche Erzeugung von Polynomidealen; V. d. Waerden, Moderne Algebra II, zweite Auflage, S. 18.
- [6] *H. Wielandt*, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppe, Math. Z. 45 (1939), S. 209—244, Habilitationsschrift Tübingen.
- [7] *Harish-Chandra*, Faithful representations of Lie Algebras, Ann. Math. 50 (1949), S. 68—79.
- [8] *H. Zassenhaus*, Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 13 (1939), S. 1—100.

(Eingegangen den 24. März 1952.)